

OTDK-dolgozat

2025

PARTIUMI KERESZTÉNY EGYETEM
GAZDASÁG ÉS TÁRSADALOMTUDOMÁNYI KAR

**TŐZSDEINDEXEK VOLATILITÁSÁNAK MODELLEZÉSE ÉS
ELŐREJELZÉSE: AUTOREGRESSZÍV MODELLEK ALKALMAZÁSA**

**MODELLING AND FORECASTING STOCK MARKET INDEX
VOLATILITY: USING AUTOREGRESSIVE MODELS**

Fazakas Petra

Konzulensek: Dr. Debrenti Edith egyetemi docens
Tripo Johanna egyetemi tanársegéd

Kézirat lezárásának dátuma: 2024. 06. 08.

Tartalomjegyzék

Táblázatok jegyzéke	6
Ábrák jegyzéke	6
Bevezető	7
1. Szakirodalmi áttekintés	8
1.1. Volatilitás és kockázat	8
1.2. A BET index	10
1.3. Pénzügyi idősorok jellemzői	12
2. Az ACRH modellek születése.....	15
2.1. Általánosított autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitású modell (GARCH).....	16
3. Aszimmetrikus GARCH modellek	17
3.1. Exponenciális GARCH (EGARCH)	17
3.2. A Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH (GJR-GARCH).....	18
3.3. Asymmetric power ARCH (APARCH).....	18
4. Módszertan	19
4.1. Leíró statisztika	19
5. Eredmények	21
5.1. Dickey-Fuller (DF) teszt.....	21
5.2. ARCH LM teszt	22
5.3. GARCH modellek eredményei	23
Következtetések	25
Irodalomjegyzék.....	28

Táblázatok jegyzéke

1. Táblázat: A BET index felépítése	10
2. Táblázat-Leíró statisztika	20
3. Táblázat- A BET index napi árfolyamának leíró statisztikája.....	20
4. Táblázat- A Dickey-Fuller teszt eredményei.....	22
5. Táblázat- ARCH-LM teszt eredményei	22
6. Táblázat- A GARCH modellek eredményei	23

Ábrák jegyzéke

1. Ábra- A BET index volatilitásának klasztereződése	12
2. Ábra- A BET index sűrűségfüggvénye	13
3. Ábra-A BET index hozamainak sűrűségfüggvénye	14
4. Ábra-A BET index volatilitása 2018. 01. 04. és 2024. 01. 09. között.....	24

Bevezető

A volatilitást a kockázat mérőszámként is szokták emlegetni. Minél magasabb egy értékpapír volatilitása, az annál kockázatosabb, hiszen annál nagyobb az esélye, hogy a vártnál alacsonyabb legyen a hozam. A volatilitás mérésére a szórást vagy varianciát használhatjuk, amely egy értékpapír esetében a hozam átlag körüli ingadozását jelenti. Minél nagyobb tehát a szórás értéke, annál nagyobb az esélye, az átlagtól eltérő szélsőséges értékeknek.

A volatilitás előrejelzése egy nagyon fontos feladat, hiszen a legtöbb befektető a nyereség maximalizálására törekszik a kockázat mérséklése mellett. A pénzügyek olyan területein fontos és hasznos a volatilitás vizsgálata, mint az opció árazásban, a portfóliókezelésben vagy a kockázatkezelésben, valamint az hatással van a pénzügyi szabályozásra, a monetáris politikára és a makrogazdaságra is.

Dolgozatomban a Bukaresti Értéktőzsde BET indexének a volatilitását vizsgálom meg, különböző autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitású (ARCH) modellek segítségével. Az általam vizsgált időszaknak 2018 január 4. és 2024 január 26. közötti időszakot választottam, mivel ekkor zajlott a Covid-19 világjárvány okozta válság, valamint az energiaválság. Az általam felhasznált adatokat az Investing.com oldaláról töltöttem le.

Kutatásom célja az volt, hogy a BET index volatilitását megvizsgáljam a következő szempontokból: mennyi ideig marad fent egy sokk okozta volatilitás, aszimmetrikus-e a volatilitás, vagyis különbözőképp reagál a negatív, illetve pozitív sokkokra (hírekre)? A kutatási kérdéseim közé tartozott még, hogy az általam kiválasztott időszakban melyek voltak azok az események, amelyek a legnagyobb hatással voltak az index volatilitására.

Dolgozatom első fejezetekben a volatilitás fogalmát járom körül röviden, majd a BET indexet, annak összetételét mutatom be röviden. A pénzügyi idősorok jellemzőinek ismertetésére is sor kerül, hiszen ezek fontosak az általam használt modellek szempontjából. Ezután az ARCH és GARCH modellek felépítését is részletesen bemutatom, hiszen ez elengedhetetlen a modellek megértése érdekében. Végezetül a GARCH modellek eredményeinek bemutatása és értelmezése következik, majd pedig az ezekből levonható következtetések megfogalmazása következik.

1. Szakirodalmi áttekintés

1.1. Volatilitás és kockázat

A volatilitás a pénzügyi piacok egyik legfontosabb jellemzője. A volatilitás az a mérőszám, amely az árak ingadozásának mértékét határozza meg. A magas volatilitás általában arra utal, hogy a pénzügyi eszköz ára gyorsan és jelentősen változik, míg alacsonyabb volatilitás esetében az árak stabilak. Ez bizonytalanság nagyban befolyásolja a vállalkozók és az egyének befektetési magatartását is.

A gazdasági globalizáció, és különösen a jelenkori nemzetközi pénzügyi válságok hatására a tőzsde hatalmas ingadozásokon ment keresztül, mely növeli a részvénytőzsdék bizonytalanságát és ezzel együtt károsan hat annak normális működésére. A részvényindexek volatilitásának vizsgálata éppen ezért egy fontos feladattá vált, hiszen a tőzsdék egy fontos helyet foglalnak el a világgazdaságban. (R. Bhowmik & Wang, 2020)

A volatilitást gyakran a kockázattal hozzák összefüggésbe, a kockázat mérőszámaként is szokták emlegetni. A kockázat egy mérhető és szimmetrikus fogalom, hiszen az nem csak a nagyobb veszteség, hanem a nagyobb nyereség lehetőségét is magában foglalja. A nagy volatilitás tehát nagyobb kockázatot jelent, de ezzel együtt nagyobb nyereséget (és veszteséget) is. (Losoncz, 2006)

A kockázat mérése, előrejelzése és annak szabályozása a pénzügyi gazdaságtan középpontjában áll, úgy elméleti, mint gyakorlati szinten. A legtöbb befektető arra törekszik, hogy a nyereséget maximalizálják a kockázat minimalizálása vagy mérséklése mellett. (Bollerslev et al., 2018)

Egy adott értékpapír vagy piaci index tekintetében a volatilitás mérőszámaként a szórást vagy varianciát használhatjuk. A szórás az az érték, amely megmutatja, hogy a hozamok milyen mértékben térnek el az átlagtól. Ez azt is jelenti, hogy magában foglalja a hozam szélsőséges értékeinek valószínűségét. Ha nagy a szórás, akkor nagyobb az esélye a nagy negatív vagy pozitív hozamnak (R. Bhowmik & Wang, 2020). Általában minél magasabb a volatilitás, annál kockázatosabb az adott értékpapír. A részvénytőzsdék emelkedésével a volatilitás csökken, míg annak esésével nő (D. Bhowmik, 2013).

A volatilitás előrejelzése nagyon fontos a pénzügyek különböző területein, például az opciós árazásban, a portfóliókezelésben vagy a kockázatkezelésben. Emellett pénzügyi piacok volatilitása hatással van a pénzügyi szabályozásra, a monetáris politikára és a makrogazdaságra is (Shaik & Sejal, 2020). Éppen ezért nagyon sok kutatás középpontjában a pénzügyi piacok

volatilitása áll. Számos olyan kutatás született az évek során, melyek a volatilitást vizsgálták és amelyek számos modellt javasoltak a volatilitás előrejelzésére. A hagyományos ökonometriai modellek gyakran feltételezik, hogy a variancia konstans, azaz különböző időpontokban állandó. (R. Bhowmik & Wang, 2020). Ilyen volt például Black and Sholes modellje, mely az opciók implicit volatilitásának becslésére használtak, vagy a Box és Jenkins által javasolt ARIMA modell. Az állandó szórás hipotézise viszont, ahogyan az empirikus kutatások is elmélyültek, tévesnek bizonyult.

A volatilitás időbeli változékonyságát Robert F. Engle kezdte el tanulmányozni, az infláció, az árak és a bérék kapcsán, megalkotva az autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitású, azaz ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) modellt. Az ARCH modell első továbbfejlesztése Tim Bollerslev nevéhez fűződik, aki létrehozta az általánosított heteroszkedaszticitású, röviden GARCH (generalised autoregressive conditional heteroskedasticity) modellt. Az évek során a GARCH modellnek több továbbfejlesztett változata is megjelent, mint például az exponenciális GARCH, azaz EGARCH, a Glosten-Jagannathan-Runkle által bemutatott GJR-GARCH, a threshold GARCH, vagyis TGARCH és az asymmetric power ARCH, röviden az APARCH modellek.

Cheteni és Matsongoni (2023) a dél-afrikai és holland részvénypiacokat vizsgálta és hasonlította össze az ARCH és GARCH modellek segítségével. Az eredményeik igazolják, hogy a modell jól megragadja a volatilitás klasztereződését, de a tőkeáttételi hatások és a hozamok aszimmetriájának azonosításával kapcsolatban korlátokba ütközik. Epaphra, (2017) a tanzániai árfolyamok volatilitását kutatta, eredményei pedig azt mutatták, hogy a GARCH (1,1) modell megfelelően megragadja a volatilitást, miközben az EGARCH modell a tőkeáttételi hatások jelenlétét igazolja az árfolyam esetében. Joldes, (2019) a Román Értéktőzsde BET indexét kutatta, amelynek hozamairól beigazolódott, hogy leptokurikusak, nem normális eloszlást követnek. A tanulmány során több a GARCH modell több változatát is megvizsgálta és arra a következtetésre jutott, hogy a TARCH (1,2,1) és az APARCH (1,2,1) a legmegfelelőbbek az index volatilitásának leírására. (Camelia Joldeş, 2020) a COVID-19 világjárvány hatásait vizsgálta a román tőkepiacra autoregresszív osztott késleltetésű, azaz ARDL (autoregressive distributive lag) modellek segítségével, melynek eredménye azt mutatja, hogy a piac erősen reagált a világjárvány kitörésére.

1.2. A BET index

A tőzsdeindexek fontos mutatói az adott ország tőkepiacának, de a gazdaság állapotának és befektetési hangulatának a mérőszáma is lehet. Ez annak köszönhető, hogy ezek az indexek reprezentálják az adott országban működő cégek és az általuk képviselt iparágak állapotát is (Sallai & Kiss, 2022). Dolgozatomban Románia vezető indexét, a Bucharest Exchange Trading (BET) indexet és ennek volatilitását vizsgálom meg.

A BET az első index, melyet a Bukaresti Értéktőzsde 1997 szeptember 19-én hozott létre, annak érdekében, hogy a szabályozott piac teljesítményének és átláthatóságának mércéje legyen. A Bukaresti Értéktőzsde szabályozott piacán jegyzett leglikvidebb romániai vállalatok részvényeit tartalmazza a pénzügyi befektetési társaságok, az értékpapírokkal foglalkozó kollektív befektetési vállalkozások részvényeit kivéve. Az indexkosárban szereplő vállalatok száma változó, minimum 10, maximum 20.

Az egyes részvények súlyát a BET indexkosárban az egyes vállalatok piaci kapitalizációja határozza meg, amelyet a free float-tényezővel és a proxy-tényezővel korrigálnak. A free-float tényező egy vállalat kibocsátott és forgalomban levő részvényeinek száma. A tényező figyelembevételéért fontos, hogy ne váljon lehetővé, hogy a nagy kapitalizációjú, de alacsony free-floattal rendelkező vállalatok túl nagy hatást gyakoroljanak, illetve, hogy a kibocsátott részvényekben valós befektetési lehetőséget tükrözzön. A reprezentációs tényező alkalmazásának célja, hogy korlátozza egy vállalat súlyát a BET indexkosárban, amely nem haladhatja meg a 20%-ot (Manualul Indicelui BET ®, 2020).

Jelenleg a BET index a következő vállalatokat tartalmazza:

1. Táblázat: A BET index felépítése

Szimbólum	Vállalat	Részvények	Súly (%)
TLV	BANCA TRANSILVANIA S.A.	798.658.233	20,93
SNP	OMV PETROM S.A.	62.311.667.058	17,38
H2O	S.P.E.E.H. HIDROELECTRICA S.A.	449.802.567	16,91
SNG	S.N.G.N. ROMGAZ S.A.	385.422.400	9,17
BRD	BRD - GROUPE SOCIETE GENERALE S.A.	696.901.518	8,03
SNN	S.N. NUCLEARELECTRICA S.A.	301.643.894	4,39

DIGI	Digi Communications N.V.	100.000.000	2,96
TGN	S.N.T.G.N. TRANSGAZ S.A.	188.381.504	2,74
FP	FONDUL PROPRIETATEA	5.668.806.128	2,68
EL	SOCIETATEA ENERGETICA ELECTRICA S.A.	346.443.597	2,42
ONE	ONE UNITED PROPERTIES	3.797.654.315	2,32
M	MedLife S.A.	531.481.968	2,26
TTS	TTS (TRANSPORT TRADE SERVICES)	60.000.000	1,85
TEL	C.N.T.E.E. TRANSELECTRICA	73.303.142	1,39
TRP	TERAPLAST SA	2.179.000.358	1,19
AQ	AQUILA PART PROD COM	1.200.002.400	0,81
BVB	BURSA DE VALORI BUCURESTI SA	8.049.246	0,80
WINE	PURCARI WINERIES PUBLIC COMPANY LIMITED	40.117.500	0,69
SFG	Sphera Franchise Group	38.799.340	0,64
COTE	CONPET SA	8.657.528	0,45

Forrás: www.bvb.ro, saját szerkesztés

Az indexkosárban szereplő vállalatok súlya változhat az indexkosárban, különböző tényezők miatt, így bizonyos időközönként túllépheti a 20%-os korlátot. Ezért a BVB (Bukaresti Értéktőzsde) Indexek Bizottsága negyedévente ülésezik, hogy felülvizsgálja a BET index összetételét kiigazításokat végezzen. A kiigazítások a következő tényezők bekövetkezte miatt válhat szükségessé:

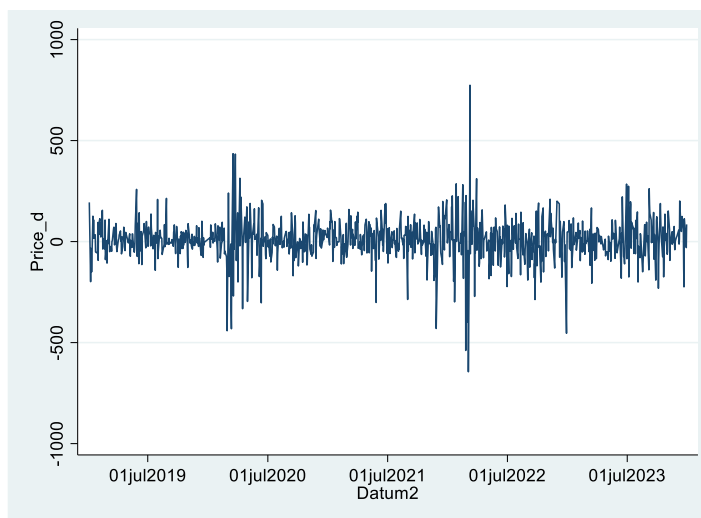
- i. vállalati események (tőkeemelések stb.);
- ii. a BET- kosár összetételében bekövetkező változások egy vállalat felvétele vagy kizárása miatt;
- iii. az indexben szereplő részvények árának változása miatt (Manualul Indicelui BET ®, 2020).

1.3. Pénzügyi idősorok jellemzői

A pénzügyi idősorok modellezése összetett probléma. Az évek során sok tanulmány igazolta azt a tényt, hogy pénzügyi idősorokban különböző statisztikai szabályszerűségek találhatók többé-kevésbé meg, azok jellegétől és gyakoriságától függően. Ezeket a szabályszerűségeket fontosak a volatilitási modellek esetében, hiszen egy jó modellnek tükröznie kell ezeket. A következőkben bemutatásra kerülnek ezen tulajdonságok közül a legfontosabbak:

1. Volatilitás klasztereződése: A pénzügyi idősorok ezen tulajdonsága a változékonyság időbeli csoportulását jelenti, azaz a nagy mozgásokat általában nagy változások követnek, míg a kis változásokat gyakran követik kis változások. Ennek a jelenségnek a következménye az, hogy mai volatilitás hatással van annak jövőbeli várható értékeire. (Engle & Patton, 2001)

1. Ábra- A BET index volatilitásának klasztereződése



Forrás: Stata, saját szerkesztés

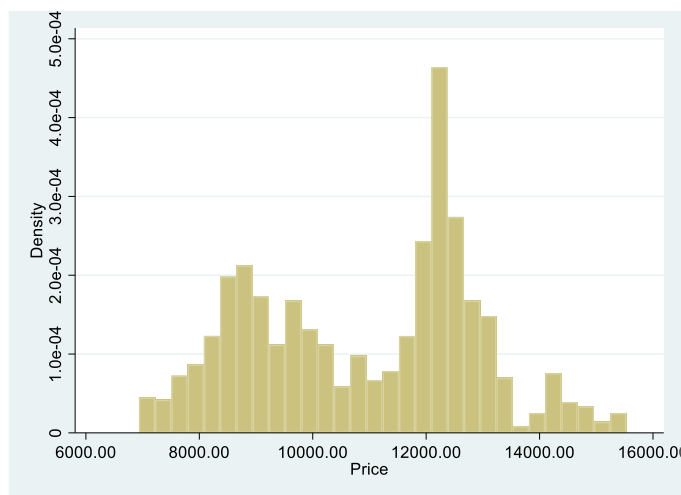
A fenti ábrán a BET index árfolyamhozama látható és itt is megfigyelhető az idősorok ezen tulajdonsága. Ahogyan látható a csendesebb időszakokat szintén csendesebb időszakok követnek, míg a nagy volatilitású periódusok után szintén nagyobb volatilitás figyelhető meg.

2. Tőkeáttételi hatások: A részvényhozamok esetében valószínűtlen az, hogy a pozitív és negatív sokkok ugyanolyan hatással legyenek a volatilitásra. Ezt a jelenséget a

tőkeáttételi hatásnak vagy éppen a kockázati prémiumnak tulajdonítható. A tőkeáttétel elmélete szerint a részvények árfolyamának csökkenésével nő az adósság/saját tőke arány, mely növeli a hozamok volatilitását. A kockázati prémium hatása pedig abban nyilvánul meg, hogy a növekvő volatilitásról szóló hírek csökkentik a részvények iránti keresletet, mégpedig a kockázatkerülés miatt, mely a részvény értékének csökkenéséhez és megnövekedett volatilitáshoz vezet.(Engle & Patton, 2001)

3. Vastagszélű eloszlások (fat-tails): a napi hozamok esetében megfigyelhető, hogy eloszlásuk nem hasonlít a Gauss-eloszlásra. A sűrűségük vastag szélekkel rendelkezik és a nullánál éles csúcsuk van, ezeket leptokurikusnak nevezzük. Ennek mértékegysége a csúcsossági (lapultsági) mutató, mely hozamsorok esetében legtöbbször 3-nál nagyobb(Christian Francq & Jean-Michel Zakoian, 2010). A leptokurikus eloszlások esetében sokkal nagyobb a valószínűsége annak, hogy szélsőséges események bekövetkezzenek.

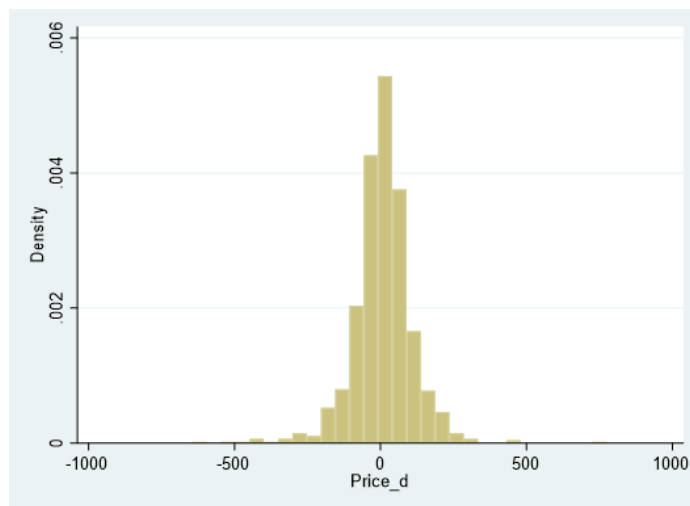
2. Ábra- A BET index sűrűségfüggvénye



Forrás: Stata, saját szerkesztés

A 2. ábrán látható az index árainak eloszlása, és megfigyelhetjük, hogy az adatsor nem normális eloszlású. Kiszámolásra került az adatsor első differenciálja, amelynek újra ábrázoltam az eloszlását, amely a 2. ábrán látható. Itt már látszik, hogy ennek eloszlása megközelíti a normál eloszlást.

3. Ábra-A BET index hozamainak sűrűségfüggvénye



Forrás: Stata, saját szerkesztés

4. A hatékony piacok elméletével összhangban a hozamok rövid távú autokorrelációja elhanyagolható, de az is előfordulhat, hogy az autokorrelációs függvény olyan lassan tart a nullához, hogy az autokorrelációk összege nem konvergál (hosszú távú memória)(Zoltán Palágyi, 2003).
5. A hozamok abszolút értékei és négyzetei nagy késleltetések mellett is szignifikánsan autokorreláltak (Zoltán Palágyi, 2003).

Az irodalomban számos olyan modell jelent meg, amely a fentiekben felsorolt tulajdonságokat írja le. Ezeket általában két csoportba oszthatjuk. Az első ilyen csoportba azok a modellek tartoznak, melyek a hozamokat független, azonos eloszlásúnak tekintik és az eloszlást valamilyen ismert eloszlással közelítik (például a Pareto-modell). A modellek többsége viszont, mely ebbe a csoportba tartozik, a pénzügyi idősorok vastagszélű eloszlását tudják leírni, a többit nem. Ezért fontosak a második csoportba tartozó modellek, melyeket dinamikus modelleknek nevezünk. A fentebb felsorolt többi tulajdonság leírásához szükséges a hozamok folyamatának dinamikáját is figyelembe venni, melyre ezek a modellek képesek. Ebbe a csoportba tartoznak az ARCH és GARCH modellek, melyek (néhány módosítással) képesek leírni az összes tulajdonságot(Palágyi, 2003).

2. Az ACRH modellek születése

A következőkben szeretném részletesebben bemutatni azokat a modelleket, azok felépítését és működését, melyeket és is felhasználtam számításaim során. Ezek közé tartozik az ARCH, GARCH, valamint néhány aszimmetrikus modell is, mint az EGARCH, GJR-GARCH, APARCH, TARARCH.

Az ökonometriai modellekben a bizonytalanságot az ε_t hibatag σ^2 varianciájával ragadjuk meg. Mint láthattuk az előző fejezetekben, hogy ez a változékonyság a legtöbb pénzügyi idősorban időben csoportosul, vagyis „csendes” és „változékony” időszakok váltogatják egymást. Ez azt jelenti, hogy a variancia nem állandó, időben változik (Nagy & Balogh, 2013).

Az ilyen jellegű folyamatok vizsgálatára javasolta Engel az ARCH, vagyis az autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitású modellt. A modell nevében az autoregresszív szó utal arra, hogy az eltérésváltozó varianciája függ az előző időpontokban az eltérésváltozók négyzetétől. A feltételes jelző arra utal, hogy a variancia értéke az előző időszaki varianciák függvénye, melynek értékét egy segédmodellből kapjuk. Ebből a tulajdonságból következik, hogy a modell nevében megjelenik a heteroszkedaszticitás kifejezés, amely azt jelenti, hogy a varianciák nem állandóak.

A modell a múltbéli értékeket nem azonos szereppel veszi figyelembe, hanem súlyozással, a közelmúlt eseményeinek nagyobb súlyt tulajdonítva. Ezt a súlyozást pedig az adatokra bízva: a modell bizonyos paraméterei határozzák meg a súlyokat, ezeket a paramétereket pedig a konkrét adatsor alapján becsülni lehet (Darvas Zsolt, 2004).

Az ARCH modellek a változó varianciáját modellezik, és a következőképp írhatóak le:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \dots + \phi y_{t-m} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \sigma_t$$

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + q \varepsilon_{t-q}^2$$

Ahol $\eta_t \sim FAE(0.1)$ fehér zaj (Polgárné, 2011)

A vizsgált változó y_t várható értékét az első egyenletben adjuk meg. Mint látható ennek értéke saját múltbéli értékeinek függvénye, vagyis ez az autoregresszív tag. Amennyiben egy AR (1) folyamatról van szó akkor az egyenlet a következőre egyszerűsödik:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Az egyenletben szereplő ε_t eltérésváltozó egyenletből kapjuk, ahol a véletlenről már egyértelműen látszik, hogy független, ám már nem azonos eloszlású, a feltételes varianciájuk az időben változik (Polgárné, 2011).

Az utolsó egyenletben a σ^2 a feltételes variancia, az egyenletből pedig a korábbi hibatag hatását tudhatjuk meg. A nagy hibákat az előző időszakban nagy hibák követik, míg a kicsiket kicsi hibák. Az eltérés előjele viszont nem számít, a négyzetes taggal ez eltűnik (Polgárné, 2011).

2.1. Általánosított autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitású modell (GARCH)

Engle ARCH modelljét az évek során számos új irányba fejlesztették tovább. Ezek közül az egyik legátfogóbb Bollerslev 1986-ban bemutatott általánosított autoregresszív heteroszkedaszticitású azaz GARCH modellje (Darvas, 2004). Az ARCH modell szerint a variancia az elmúlt időszak innovációjától függ, a GARCH modell viszont hozzáteszi, hogy a variancia függ az utóbbi feltételes varianciáktól is. A modell alapján a variancia egyenlete két részre bontható: egy ARCH-tagra, mely egy reziduumra mozgóátlagolást illesztő tag és egy GARCH tagra, mely pedig egy korábbi varianciértékre autoregresszív tag (Kóbor, 2000).

A GARCH (p,q) modell felállításakor a hozamokat két részre bonthatjuk és a következőképp írhatjuk fel:

$$r_t = \mu + \eta_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Az első egyenletben μ a hozamok várható értékét jelöli, η pedig az „innovációt”, amely a várható értéktől való eltérés. (Kóbor, 2000).

A modell az innovációk varianciáját kezeli. A modellben a σ_t^2 tárgynapi feltételes variancia becsülhető az utolsó q innováció és utolsó p feltételes variancia függvényeként. A modell segítségével arra kívánunk becslést adni, hogy várhatóan mekkora lesz az átlagtól való eltérés, figyelembe véve az utolsó hozam alakulását, valamint valamilyen szinten a régebbi megfigyeléseket. Az α együtthatók az ARCH tagokra, a β együtthatók pedig a GARCH tagokra vonatkoznak. Ha ennek a két tagnak az összege kisebb, mint egy, vagyis $\alpha + \beta < 1$, a feltételes variancia átlaghoz való visszatérést mutat, ami azt jelenti, hogy hosszú távon mindig visszatérnek egy adott szinthez. Minél közelebb van ez az összeg 1-hez, annál hosszabb távon,

permanensen fejt ki egy sokk a hatását. Ha pedig $\alpha + \beta = 1$, a volatilitás perszisztens. (Kóbor, 2000)

3. Aszimmetrikus GARCH modellek

A pénzügyi idősorok korábban leírt jellemzői között bemutattam az úgynevezett tőkeáttételi hatást, mely nem más, mint a múltbeli hozamok és a jövőbeli volatilitás korrelációja. Ez azt jelenti, hogy mikor a részvényárak csökkennek, a volatilitás hajlamos növekedni, negatív korrelációt hozva létre a volatilitás és hozam között. A tőkeáttételi hatás azt eredményezi tehát, hogy a σ_t^2 feltételes variancia aszimmetrikusan reagáljon a hozam pozitív és negatív értékeire. Ezt a jelenséget a GARCH modell nem tudja megragadni, hiszen a pozitív és negatív sokkora ugyanúgy aszimmetrikus hatást kötelez (Epaphra, 2017).

3.1. Exponenciális GARCH (EGARCH)

A modellt 1991-ben mutatta be Daniel B. Nelson, a volatilitásra ható pozitív és negatív hírek aszimmetrikus hatásainak kezelésére. Két fontos szempontból is eltér a GARCH (1.1) modelltől: a modell szerint a jó és rossz hírek eltérő hatást gyakorolnak, valamint a nagy sokkok nagyobb hatást is gyakorolnak a volatilitásra (M.M.S. Mathoera, 2016).

Nelson modelljét a következő egyenlettel írhatjuk fel:

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \beta \log(\sigma_{t-1}^2) + \gamma \frac{u_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \alpha \left[\frac{|u_{t-1}|}{\sigma_{t-1}^2} - \sqrt{2/\pi} \right]$$

ahol σ_t^2 a feltételes variancia, mivel ennek becslése múltbeli információk alapján történik. A α , γ és β a becsülendő paraméterek. A stacionaritás fenntartása érdekében a β -nak pozitívnak és 1-nél kisebbnek kell lennie, a többi paraméterre vonatkozóan viszont nincsenek korlátozások. A modell a varianciák logaritmusát használja, ezáltal garantálja a paraméterek pozitivitását. A α paraméter a nagyságrendi hatást, vagyis a szimmetrikus hatást méri, míg a β a feltételes volatilitás perszisztenciáját méri, vagyis azt, hogy egy válság okozta volatilitás milyen hosszú idő után „hal ki”. Az aszimmetriát az γ értékével mérjük. Akkor mondhatjuk, hogy ez a hatás jelen van, ha ez az érték negatív és szignifikáns. Ha $\gamma < 0$, akkor negatív sokkok nagyobb volatilitást generálnak, mint a pozitív sokkok, ha pedig $\gamma > 0$, akkor ez fordítva igaz, vagyis a pozitív sokkokat követ nagyobb volatilitás (Epaphra, 2017).

3.2.A Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH (GJR-GARCH)

A GJR-GARCH modellt a nevében is szereplő három személy, Glosten, Jagannathan és Runkle mutatta be, 1993-ban. A modell a GARCH egy egyszerűbb továbbfejlesztése, amely szintén az aszimmetrikus hatások megragadása érdekében fejlesztették ki, amelyek kifejezésére egy új tagot építettek be. A GJR-GARCH modellt tehát a következőképp írhatjuk fel:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma u_{t-1}^2 I_{t-1}$$

A feltételes variancia pozitivitását $\gamma > 0$, $\gamma > 0$, $\beta \geq 0$ és $1 + \gamma + \alpha \geq 0$, a stacionaritást pedig a $\alpha + \beta + 0.5\gamma < 1$ feltételek biztosítják. Az aszimmetrikus hatást a modellben szereplő I indikátorfüggvény segítségével fejezhetjük ki, a következőképp:

$$I_{t-1} = \begin{cases} 0 & \text{ha } R_{t-1} \geq 0, \\ 1 & \text{ha } R_{t-1} < 0 \end{cases}$$

Ezt az összefüggést úgy értelmezhetjük, hogy ha $\gamma=0$, akkor a modell egy standard GARCH modellre redukálódik, mely a jó és rossz híreket ugyanúgy kezeli, ezek ugyanolyan hatással ($\gamma_1 u_{t-1}^2$) lesznek a feltételes varianciára. Ha viszont $\gamma \neq 0$, a jó hírek ($u_{t-1} > 0$) és a rossz hírek ($u_{t-1} < 0$) eltérő hatással lesznek. Ez azt jelenti, hogy a rossz hírek $\alpha + \gamma$, míg a jó hírek csak α hatást gyakorolnak a feltételes varianciára, vagyis elmondható, hogy ha $\gamma > 0$, a rossz hírek nagyobb volatilitást okoznak, mint a jók. (Nugroho et al., 2019)

3.3. Asymetric power ARCH (APARCH)

Egy másik modell, mellyel a pozitív és negatív sokkok eltérő hatásait mérni tudjuk az az APARCH modell, melyet Ding, Granger és Engle fogalmazott meg. Az APARCH modellt a következőképpen határozhatjuk meg:

$$(\sigma_t^{1/2})^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j (\sigma_{t-j}^{1/2})^\delta$$

Ahol ε_t független és azonos eloszlású, egységnyi szórással, $\alpha_0 > 0$, δ , α_i és $\beta_j \geq 0$, és $-1 < \gamma_i < 1$ ($i=1, \dots, q$)

Az aszimmetrikus hatást ebben a modellben is a γ együttható írja le. Ha $\gamma > 0$, akkor a negatív sokkon okoznak nagyobb volatilitást, és ugyanez igaz fordítva is. A fő különbség az APARCH és más típusú GARCH modellek között, hogy a hatványkitevőt, mint egy szabadon becsülendő paramétert építik be, mely egy a volatilitás mögött álló valódi eloszlás figyelembevételére tett kísérlet. Más modellek esetében ennek a kifejezésnek az értéke 1-re vagy 2-re korlátozódik. Ennek oka valószínűleg a normális eloszlású hibák feltételezése, viszont a pénzügyekben ez ritkán egy jó feltételezés, mert ahogyan már láthattuk, az adatok leírásánál ferdeséggel és csúcsossággal kell számolnunk. Az APARCH modell ilyen téren lehet hasznos, mivel használatakor ezek a korlátozások megszűnnek (Longmore & Robinson, 2004).

3.4. Treshold ARCH (TARCH)

A TARCH modellt Zakoian fogalmazta meg 1994-ben, melyet a következőképp írhatunk fel:

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j} + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})$$

Láthatjuk, hogy a modell nagyon hasonló az előbb már bemutatott GJR-GARCH modellhez, azzal a különbséggel, hogy a TARCH a variancia helyett a standard szórást modellezi (Turgut, 2003)

4. Módszertan

A dolgozatomban a BET index napi árfolyam adatait használtam fel, 2018 január 4.-től, 2024 január 26.-ig, amely összesen 1513 adatot jelent. Az adatokat a Finance.com oldaláról töltöttem le, majd egy Excel táblázatban rendeztem őket. Az Excel Adatelemző bővítménye segítségével számoltam ki a hozamok leíró statisztikáját, melynek eredménye az 2. táblázatban látható. Az adatokat ezután a Stata programba importáltam, és ennek segítségével végeztem el a további számításaimat.

4.1. Leíró statisztika

Első lépésként az adatsor logaritmikus hozamát számoltam ki, a következő képlet segítségével:

$$R_{i,t} = \ln \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right)$$

ahol, ahol a $R_{i,t}$ a hozam a t időszakban, $P_{i,t}$ a ár a t időszakban és $P_{i,t-1}$ az ár a $t-1$ időszakban

2. Táblázat-Leíró statisztika

Átlag	0,000424
Standard hiba	0,000279
Medián	0,000915
Szórás	0,010858
Variancia	0,000118
Csúcsosság	21,0063
Ferdeség	-1,71632
Tartomány	0,187089
Minimum	-0,11892
Maximum	0,068169
Összeg	0,642267
Darabszám	1513
Konfidenciaszint (95,0%)	0,000548

Forrás: Saját szerkesztés a Finance.com adatai alapján

A 2. Táblázatban a BET index logaritmikus hozamainak leíró statisztikáját láthatjuk. Az hozamok átlaga 0,00424, míg a medián egyenlő 0,000915-tel. A legkisebb érték -0,11892, míg a legnagyobb 0,068169. A hozamok szórása, vagyis az átlagtól való eltérés 0,010858.

A ferdeségi mutató a szimmetria mérőszáma. Ha ez az érték egyenlő nullával, akkor az eloszlás szimmetrikusnak mondható, míg negatív előjel esetén bal oldali, pozitív előjel esetén pedig jobb oldali asszimetriáról beszélhetünk. A mi esetünkben ennek a mutatónak az értéke -1,71632, amely erős bal oldali asszimetriára utal.

A csúcsossági mutató, vagy más néven a kurtózis egy normális eloszlás esetén 3 vagy 3 körüli értéket vesz fel. Az ennél nagyobb értékű csúcsossági mutatóval rendelkező eloszlásokat leptokurtikus, vagy vastagszélű eloszlásoknak nevezzük. Az előző fejezetekben már említettem, hogy ez a fajta eloszlás általában jellemző a pénzügyi idősorokra. A táblázatban látható, hogy ez jellemző a BET index hozamsorára is, hiszen a csúcsossági mutatója 21,0063 amely jóval nagyobb mint 3.

3. Táblázat- A BET index napi árfolyamának leíró statisztikája

Átlag	10556,32224
Standard hiba	53,95637747
Medián	10215,01
Módusz	8731,99
Szórás	2099,450898
Variancia	4407694,073
Csúcsosság	-1,039028457
Ferdeség	0,292933539
Tartomány	8868,97
Minimum	6934,35
Maximum	15803,32
Összeg	15982271,87
Darabszám	1514
Konfidenciaszint (95,0%)	105,8372227

Forrás: Saját szerkesztés a Finance.com adatai alapján

Az előbbieken láthattuk az index hozamainak leíró statisztikáját, a 3. Táblázatban pedig a napi árfolyamok leíró statisztikája figyelhetjük meg. Az árfolyam átlaga 10556,32224 volt, 2099,450898 szórással, amely az átlagos árfolyamtól való eltérést mutatja. A csúcsossági mutató értéke negatív, értéke tehát kisebb, mint három, amely azt mutatja, hogy az adatsor eloszlása a normális eloszláshoz képest laposabb. A ferdeségi mutató 0,292933539, amely egy enyhe pozitív, jobb oldali ferdeséget mutat.

5. Eredmények

5.1. Dickey-Fuller (DF) teszt

Első lépésként a stacionaritás tesztelésére került sor. Számos teszt van, amellyel az idősorok ezen tulajdonságát lehet tesztelni. A kutatásom során én a Dickey-Fuller (DF) tesztet alkalmaztam, melyet a nevében is szereplő két személy fejlesztette ki 1979-ben. Ez egy olyan statisztikai eszköz amely az idősorok egységgyök jelenlétét vizsgálja. Az egységgyökfolyamatok a nemstacioner folyamatok közé tartoznak, és tartalmilag azt jelentik, hogy az idősorba folyamatosan beépülnek a kisebb-nagyobb sokkok hatásai, melyek időben

növelik annak varianciáját (Mák, 2011) A teszt nullhipotézise az, hogy hogy az AR modellben van egységgyök, vagyis az adatsor nem stacionárius, az alternatív hipotézise pedig a stacionaritás jelenléte (Jalil & Rao, 2019).

A 3. táblázatban láthatóak a teszt eredményei, melyet a logaritmikus hozamra végeztem el. A nullhipotézist elvethetjük 1%, 5% és 10%-os szignifikancia szinten is, tehát elmondható, hogy az adatsor első differenciálja stacionárius.

4. Táblázat- A Dickey-Fuller teszt eredményei

	Teszt statisztika	Kritikus értékek		
		1%	5%	10%
z(t)	-37,228	-3,43	-2,86	-2,57
p érték	0,000			

Forrás: Stata, saját szerkesztés

5.2. ARCH LM teszt

Az idősorban az ARCH hatások jelenlétét az ARCH-LM teszt segítségével ellenőriztem. A teszt a pénzügyi idősorban jelen levő autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitás jelenlétének kimutatására szolgál. A nullhipotézis az, hogy az idősorban nincsenek jelen ezek az ARCH hatások. Az alábbi táblázatban összefoglaltam az ARCH-LM teszt eredményeit az általam vizsgált idősorra.

5. Táblázat- ARCH-LM teszt eredményei

lags (p)	Chi2	df	Prob>chi2
1	31,846	1	0,000

Forrás: Stata, saját számítások

Látható a 4. táblázatban, hogy a teszt p értéke 0,000, amely kisebb mint 0,05, vagyis elvethetjük a nullhipotézist, és kimondhatjuk, hogy az idősorban jelen vannak az ARCH hatások.

Miután elvégeztem a Dickey-Fuller, valamint ARCH-LM tesztet, beigazolódott az idősor stacionaritása, valamint az ARCH hatások jelenléte, ami azt jelenti, hogy az idősor modellezhető a különböző GARCH modellek segítségével. A következő fejezetben bemutatásra kerülnek ezen modellek eredménye

5.3. GARCH modellek eredményei

6. Táblázat- A GARCH modellek eredményei

	GHARCH(1,1)	EGARCH(1,1)	GJR-GARCH(1,1)	TARCH(1,1)	APARCH(1,1)
ω	0,0784102	0,0024321	0,067255	0,0711908	0,098008
α	0,2608399	0,2627851	0,3236714	0,2701965	0,205142
β	0,7012573	0,9321178	0,7638158	0,8024537	0,7578906
γ		-0,0105075	-0,2772471	-0,2006044	-0,5377223

Forrás: Stata, saját számítások

Az 5. táblázatban láthatóak a különböző modellek eredményei, összefoglalva. Az általam kiválasztott modellek együtthatói mind szignifikánsak és 0-tól különböznek.

Az első oszlopban a GARCH (1,1) modell becsléseit figyelhetjük meg. Az együtthatók eleget tesznek a nemnegativitási feltételnek, mindegyik 0-tól nagyobb. Az α és β együtthatók összege 0,9620972, amely kisebb mint egy, tehát kimondhatjuk, hogy az idősor stacionárius. Az, hogy ez az összeg nagyon közel van 1-hez azt jelzi számunkra, hogy a volatilitás lassan tér vissza az átlag szinthez, vagyis egy adott sokk értéke perszisztens, tehát annak hatása lassan „hal ki”, azaz sokáig fennmarad.

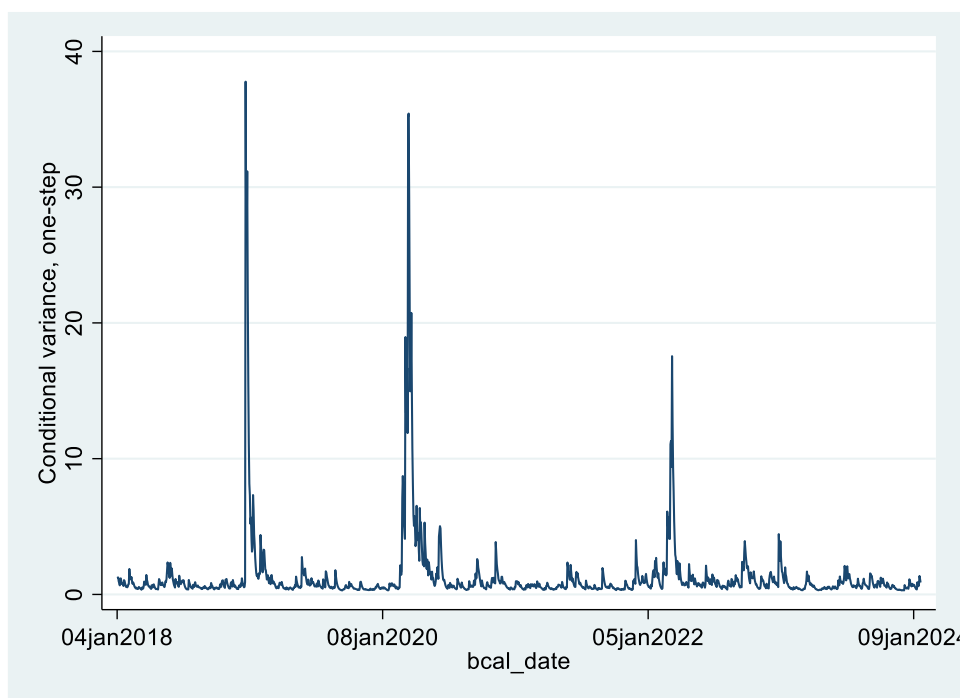
Az EGARCH (1,1) modell eredményeit tekintően elmondható, hogy itt is teljesül a stacionaritás feltétele, hiszen β paraméter értéke 0,9321178, amely pozitív és szignifikáns. Értéke viszonylag nagy, közel van egyhez, ami a sokkok perszisztenciáját mutatja. Az asszimmetrikus hatást leíró γ paraméter szintén szignifikáns, amely a tőkeáttételi hatás jelenlétét igazolja. Mint látható a táblázatban ennek a paraméternek az értéke negatív, ami azt jelenti, hogy a negatív sokkok nagyobb volatilitást generálnak, mint a pozitívak.

Ha a GJR-GARCH modell eredményeit megfigyeljük, itt is észrevehető, hogy a γ negatív és szignifikáns, értéke -0,2772471, amely szintén igazolja azt a tényt, hogy a BET index esetében a negatív sokkok nagyobb volatilitást okoznak, mint a pozitívak. A stacionaritás feltétele itt $\alpha + \beta + 0.5\gamma < 1$, amely a mi esetünkben $0,3236714 + 0,7638158 + 0,5 * (-0,2772471) = 0,94886365$, amelyre igaz, hogy kisebb mint 1, vagyis az idősorunk stacionárius.

A TARCH (1,1) és az APARCH (1,1) modell alapján is hasonló eredményeket kaptam, mindkét modell esetében a γ paraméter szignifikáns és negatív értéket vesz fel, amely a TGARCH modell esetében -0,2006044, az APARCH esetében pedig -0,5377223.

A feltételes varianciát a GARCH(1,1) modell eredményei alapján ábrázoltam, amely a 4. Ábrán látható.

4. Ábra-A BET index volatilitása 2018. 01. 04. és 2024. 01. 09. között



Forrás: Stata, saját szerkesztés

A 4. ábrán látható, hogy első időszak, amelyben az volatilitás kimagaslóan magas volt 2018-as év vége. Ebben az időszakban, pontosabban december 19. és december 31. között a BET index 12,3%-ot esett. Ezt elsősorban az a tény idézte elő, hogy a kormány elfogadta a 114/2018. számú rendeletet, mely a banki, energetikai és távközlési szektor adóztatására jelentős hatást gyakorló intézkedésre vonatkozott (Bursa de Valori București, 2019b). Ezek az intézkedések magukban foglalták a 2019 január 1.-től érvénybe lépő, a bankok összes pénzügyi eszközére kivetett adót, az úgynevezett „kapzsisági adót” (Economica.net, 2018). Emellett a

gázárakra vonatkozó plafon bevezetését is magában foglalta, melyet három évre terveztek. Ezek a hírek mind nagy hatással voltak a tőzsdére, ez abban is látható volt, hogy az idex árfolyamában milyen nagy esés következett be. A Bukaresti Értéktőzsde által nyilvánosságra hozott sajtóközleményben is azt nyilatkozta hogy, hogy a kormány által bejelentett tervezet negatív hatással volt a helyi tőkepiacra, mely egy olyan helyzetbe került amely veszélyeztetheti a jövőbeli fejlődési kilátásokat (Bursa de Valori București, 2019a).

2020 elején figyelhetünk meg újra megnövekedett volatilitást a BET index esetében. A COVID-19 világjárvány okozta pánik a Bukaresti értéktőzsdét sem kerülte el. A pandémia február elején kezdte el kifejteni hatását a tőzsdére, február 21. és 27. között a Bukaresti Értéktőzsde 14 milliárd lej (2,9 milliárd euró) veszteséggel nézett szembe. A BET index 2019-ben növekvő tendenciát mutatott, viszont 2019. december 30. és 2020. március 30. Közötti időszakban mintegy 25%-kal esett a tavalyi 35,1%-os emelkedésről. A COVID-19 világjárvány tehát közvetlen hatással volt a részvénytőkepiac alakulására, a befektetők világjárvánnyal kapcsolatos félelmei miatt, viszont érdemes megjegyezni, hogy 2020 márciusában kereskedési volumen, mind a kereskedési érték esetében növekedést figyelhetünk meg.

A következő időszak, amikor ismét megnövekedett volatilitást figyelhetünk meg az a 2022-es év. Az év elején a nemzetközi részvénytőkepiacokat sújtó volatilitás a félév során is éreztette hatását, A nemzetközi befektetői aggodalom februárban fokozódott, és az Oroszország és Ukrajna közötti fegyveres konfliktus kirobbanásával új csúcspontokat ért el (Bursa de Valori București, 2022).A BET, az irányadó tőzsdeindex 7,7%-kal csökkent 2022 első nyolc hónapjában, amit az ukrajnai háború, a világ gazdasággal kapcsolatos bizonytalanság, az emelkedő kamatlábak és az energiaipari válság jellemzett. A helyi részvénytőkepiac azonban felülmúlta a nyugat-európai fejlett piacok többségét, és a kontinens átlaga felett teljesített(Eduard, 2022).

Következtetések

Összefoglalásként elmondhatjuk, hogy a volatilitás fontos mutatója a pénzügyi piacoknak és ennek mérése és előrejelzése egy fontos, de nem egyszerű feladat, a pénzügyi idősorokban megtalálható statisztikai szabályszerűségek miatt. Ezek leírására alkalmas modellek közé tartoznak a GARCH modellek, amelyeket én is alkalmaztam.

Elmondhatjuk, hogy a Romániai Értéktőzsde BET indexének hozamsoraiban is megtalálhatóak azok az általános jellemzők, melyek szinte minden pénzügyi idősorban megtalálhatóak, így a volatilitás csoportosulása is, tehát a GARCH modellek megfelelően leírják azt.

Az eredményeim alapján választ kaptam a kutatási kérdéseimre, A BET index volatilitásáról elmondható, hogy az index volatilitása nagyon lassan tér vissza az átlaghoz, vagyis egy adott sokk hatása az index hozamára több ideig fennmarad. Ezt a tényt a GARCH (1,1) modell által meghatározott α és β paraméterek összege mutatja, amely 0,9620972-vel egyenlő, tehát közel áll az 1-hez. A volatilitás perszisztenciáját az általam felhasznált többi modell is igazolja, hiszen mindegyik esetében nagy a β együttható, amely az elmúlt időszak volatilitásának hatását, ezzel együtt pedig a volatilitás fennmaradását méri.

Az aszimmetrikus modellek, az EGARCH, GJR-GARCH, APARCH és TGARCH eredményei alapján elmondhatjuk azt is, hogy mindegyik esetében szignifikáns γ paramétert kaptunk, amely igazolja a tőkeáttételi, vagy aszimmetrikus hatások jelenlétét. Ez azt jelenti, hogy a BET index nem reagál ugyan olyan mértékben a pozitív és negatív sokkokra. Az együttható negatív előjellel rendelkezik, amely, amely azt jelzi számunkra, hogy a negatív sokkok (hírek) okoznak nagyobb volatilitást, mint a pozitívak. Az EGARCH esetén a γ értéke -0,0105075, a GJR-GARCH esetén -0,2772471, a TARCH γ együtthatójának értéke -0,2006044 míg az APARCH esetében ez az érték -0,5377223.

Mindegyik modell esetében megfigyelhetjük, hogy a β együtthatók nagyobbak mint az α együtthatók. Ez az index volatilitásáról azt jelzi számunkra, hogy az nagyobb mértékben lehet magyarázni az elmúlt időszak késleltetett varianciáival, mint az elmúlt időszak négyzetes hibatagjaival. Fontos megemlíteni, hogy minden modell esetében, mindkét együttható szignifikáns, tehát mindkét tényező befolyásolja és magyarázza a volatilitás alakulását, az előző időszak volatilitása nagyobb hatással van rá.

A kapott eredmények alapján ábrázolásra került a feltételes variancia, amely látható a 4. és 5. ábrán. Megfigyelhetjük, hogy a volatilitás nem volt semleges a különböző gazdasági és politikai eseményekkel szemben. Az ábrákon megfigyelhető nagyon magas kiugrások a volatilitásban különböző politikai döntések, és gazdasági válságok eredményeként jöttek létre. Ilyen volt a 2018-ban bejelentett kormányrendelet, mely a banki, energetikai és távközlési szektor adóztatására jelentős hatást gyakorló intézkedésre vonatkozott és amely hatalmas veszteségeket okozott az index esetében. Az COVID-19 volt az a következő sokk, amely nagy

csökkenést, illetve megnövekedett volatilitást okozott, illetve az Oroszország-Ukrajna közötti fegyveres konfliktus szintén megnövelte a bizonytalanságot. Ezek a tények is igazolják azt a felvetést, miszerint a volatilitás nem reagál azonosan a pozitív és negatív hírekre, hiszen látható, hogy a negatív hírek sokkal nagyobb volatilitás okoznak.

Irodalomjegyzék

- Bhowmik, D. (2013). Stock market volatility: an evaluation. *International Journal of Scientific and Research Publications*, 3(10). www.ijsrp.org
- Bhowmik, R., & Wang, S. (2020). Stock market volatility and return analysis: A systematic literature review. *Entropy*, 22(5). <https://doi.org/10.3390/E22050522>
- Bollerslev, T., Hood, B., Huss, J., & Pedersen, L. H. (2018). Risk Everywhere: Modeling and managing volatility. *Review of Financial Studies*, 31(7), 2730–2773. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhy041>
- Bursa de Valori București. (2019a). *Comunicat de presă 19 decembrie 2018*.
- Bursa de Valori București. (2019b). *Raport preliminar la 31 decembrie 2018*.
- Bursa de Valori București. (2022). *Raport lunar iunie 2022*.
- Camelia Joldeș, C. (2020). Impact of COVID-19 on the Romanian Capital Market: an assessment of BET index and shares BRD, SNP, TLV, FP & SNP. *Revista de Studii Financiare*, 5(9).
- Cheteni, P., Matsongoni, H., & Umejiesi, I. (2023). Forecasting JSE and AEX Volatility with GARCH Models. *African Journal of Business and Economic Research (AJBER)*, 18(4). <https://doi.org/10.31920/1750-4562/2023/v18n4a22>
- Christian Francq, & Jean-Michel Zakoian. (2010). *GARCH Models*. John Wiley & Sons Ltd.
- Darvas, Z. (2004). ROBERT F. ENGLE ÉS CLIVE W. J. GRANGER, A 2003. ÉVI KÖZGAZDASÁGI NOBEL-DÍJASOK. *Statisztikai Szemle*, 82(3).
- Economica.net. (2018, December 19). *Ce este taxa pe „lăcomie”, propusă de Guvern de la 1 ianuarie. Impactul măsurii poate ajunge la 3 miliarde le.* https://www.economica.net/taxa-lacomie-taxa-banci-2019-robor_162704.html
- Eduard, I. (2022, September 10). *Bursele la opt luni din 2022: la București indicele BET are minus 8%, Paris minus 14%, iar nemții au scăzut cu 20%. Peste ocean, Wall Street are minus 17%.* Ziarul Financiar. <https://www.zf.ro/burse-fonduri-mutuale/bursele-la-opt-luni-din-2022-la-bucuresti-indicele-bet-are-minus-8-21135522>
- Engle, R. F., & Patton, A. J. (2001). *What good is a volatility model?*

- Epaphra, M. (2017). Modeling Exchange Rate Volatility: Application of the GARCH and EGARCH Models. In *Journal of Mathematical Finance* (Vol. 07, Issue 01, pp. 121–143). Scientific Research Publishing, Inc., <https://doi.org/10.4236/jmf.2017.71007>
- Jalil, A., & Rao, N. H. (2019). Time Series Analysis (Stationarity, Cointegration, and Causality). In *Environmental Kuznets Curve (EKC)* (pp. 85–99). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-816797-7.00008-4>
- Joldes, C. C. (2019). Modeling the volatility of the bucharest stock exchange using the garch models. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 53(1), 281–298. <https://doi.org/10.24818/18423264/53.1.19.18>
- Kóbor, Á. (2000). A feltétel nélküli normalitás egyszerű alternatívái a kockázatos érték számításában. *Közgazdasági Szemle, XLVII*, 878–898.
- Longmore, R., & Robinson, W. (2004). *Modelling and Forecasting Exchange Rate Dynamics: An Application of Asymmetric Volatility Models*.
- Losoncz, M. (2006). *Nemzetközi pénzügyek*.
- Mák, F. (2011). Egységgyöktesztek alkalmazása strukturális törések mellett a hazai benzinár példáján. *Statisztikai Szemle*, 89(5).
- Manualul Indicelui BET ®. (2020). www.bvb.ro.
- M.M.S. Mathoera. (2016). *Does any model beat the GARCH (1.1)?* [Master Specialisation Financial Economics]. Erasmus University Rotterdam.
- Nagy, L., & Balogh, P. (2013). *Ökonometria /Elméleti jegyzet*.
- Nugroho, D. B., Kurniawati, D., Panjaitan, L. P., Kholil, Z., Susanto, B., & Sasongko, L. R. (2019). Empirical performance of GARCH, GARCH-M, GJR-GARCH and log-GARCH models for returns volatility. *Journal of Physics: Conference Series*, 1307(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1307/1/012003>
- Palágyi, Z. (2003). Pénzügyi idősorok elemzése a Lévy-hatvány GARCH-modellel. *Statisztikai Szemle*, 81(7).
- Polgárné, H. kMónika. (2011). *Idősorelemzés a tőzsdén*.
- Sallai, D., & Kiss, G. D. (2022). Európai tőzsdeindexek kockázattovábbító tulajdonságának vizsgálata. *Statisztikai Szemle*, 100(6), 529–550. <https://doi.org/10.20311/stat2022.6.hu0529>

- Shaik, M., & Sejpal, A. (2020). Comparison of GARCH and ANN model for forecasting volatility: evidence based on Indian Stock Market. *The Journal of Prediction Markets*, 14, 14–16.
- Turgut, K. (2003). *Predictive Ability of Asymmetric Volatility Models at Medium-Term Horizon*.