

TDK-dolgozat

Szerző: Mészáros Botond

Fogadó felsőoktatási intézet és tanszék:
ELTE-IK Komputeralgebra Tanszék

*Számítási feladatokhoz
társítható leképezési diagramok
elemzése és alkalmazása*

Szerző: *Mészáros Botond,*
ELTE-TTK Matematika MSc. 2. év
mbotondm@student.elte.hu

Témavezető: *Dr. Burcsi Péter,*
ELTE-IK Komputeralgebra Tanszék, docens

Dolgozat elkészültének ideje: 2024.05.13.

Tartalomjegyzék

Absztrakt	1
A dolgozat tartalmának rövid összefoglalása	2
1. Bevezetés: a számítás és a számítógép	3
1.1. A számítás fogalmáról	4
1.2. A számítógép fogalmáról	6
1.3. Miért kategóriák? Gondolatok a fogalmak alakulásáról.	7
2. Számítógépek és kategóriák: a számítási feladat	9
2.1. Kategóriaelméleti alapfogalmak	10
2.2. Kategóriaelmélet a számítástudományban	15
2.3. A számítási feladat formalizálása	17
2.4. Speciális esetek, példák	23
2.4.1. A kvantummechanika keretrendszere - szemantikus modellek	23
2.4.2. $\mathbb{K}$ -Mod gazdagítása $\mathcal{SET}$ -el: az egyszerű neurális hálók	26
2.4.3. Lokális k -homomorf gépek	27
3. Számítási feladatok leképezési diagramjai	30
3.1. A fő objektumok: kommutatív diagramok	30
3.1.1. Számítási feladatok approximálása adott kategóriában	32
3.2. Megoldások ekvivalenciája és k -egzakt sorok	32
3.2.1. k -egzakt sorok	33
3.3. Számítási feladat új megoldásainak előállítása régiek felhasználásával	36
3.3.1. Eredmények $\mathbb{R}$ -modulusok kategóriájában	36
3.3.2. Eredmények Sima pontozott sokaságok kategóriájában	39
3.4. Számítási feladat egzakt megoldásainak tulajdonságai	42
3.4.1. Optimumkeresés a megoldások között	42
3.4.2. Invariáns és ekvivariáns megoldások	43
3.5. Fejlődő számítási keretek tulajdonságainak vizsgálata	43
Köszönet	44
Irodalomjegyzék	45

Absztrakt

A számítás fogalma együtt fejlődik a környezetünk leírására alkalmazott modellekkel: számos példát láttunk, amikor megfigyeléseink pontosabb leírására új objektumok fogalmait absztraháltuk (számfogalom, algebrai struktúrák fejlődése stb.), mely objektumok aztán lehetővé tették ezek közötti új műveletek, morfizmusok, új számítási módok reprezentálását, így kitágítva az addigi számításfogalmat. Jó okunk van azt feltételezni, hogy ez a folyamat még ma sem ért véget, és az elkövetkező idők felfedezései nem szűnnek meg alakítani mindazt, amit a számításról, és így a megvalósítható számítógépekről gondolunk. Az minden esetre biztos, hogy a fizikailag realizálható objektumok és morfizmusok kategóriáját (így a fizikailag megvalósítható automatizált számításra képes rendszereket) továbbra sem ismerjük.

Amikor valamilyen számítógéppel akarunk megoldani egy feladatot, tulajdonképpen azt vizsgáljuk, hogy a számítógép által reprezentálni képes objektumok és morfizmusok ismeretében elő tudjuk-e állítani azt a bemenetet és kimenetet reprezentálni képes objektumok közötti leképezést, ami megfelelő bemenethez a megfelelő eredményt rendelni. Ennek vizsgálatához természetes matematikai nyelv a kategóriaelmélet: a megoldani kívánt feladatot egy halmazok közötti leképezésként foghatjuk fel, az aktuálisan előállítható számítógép-fajtáknak pedig megfeleltethetünk egy kategóriát rögzített objektumokkal és morfizmusokkal. Munkámban azt a kérdést járom végig, hogy ebben a szemléletben hogyan vizsgálhatóak a számítási feladatok algebrai és topológiai eszközökkel, mire érdemes figyelni a számítási kapacitás fejlesztéséért.

A dolgozat tartalmának rövid összefoglalása

Jelen dolgozat három fejezetből áll, célja a számítási feladat fogalmának alkalmazott számítási kerettől való függőségének vizsgálata és leírása.

Az első fejezetben az olvasó bevezető gondolatokat talál, melyek motiválni hivatottak a későbbi fejezetek definícióit és azokat a matematikai objektumokat, amelyek ezáltal a vizsgálat tárgyai lesznek.

A második fejezetben elkezdjük felépíteni azt a keretrendszert, amely alkalmas számítási feladatok vizsgálatára különböző számítási rendszerek mellett is, így lehetőséget ad különböző számítási rendszerek teljesítőképességének összehasonlítására már elméleti úton. Ehhez előbb bevezetünk néhány kategóriaelméleti alapfogalmat, majd definiáljuk a fizikailag reprezentálható számítási rendszerek szempontjából fontosabb kategóriákat. Bevezetjük a számítási feladat fogalmát, illetve annak reprezentálhatóságát adott kategóriában. Rámutatunk arra, hogy léteznek olyan speciális kategóriák, melyeket kifejezetten érdemes lehet vizsgálni a számítástudományi fejlesztések szemszögéből, hiszen ezek várhatóan egyszerre biztosítanak robosztus keretrendszereket és viszonylag értelmezhető megoldásokat. Példaként megmutatjuk, hogy a kvantummechanikai modellek és az egyszerű neurális hálók speciális esetei ezeknek a számítási szempontból izgalmasnak tűnő kategóriáknak, és hogy ebben a szemléletben számos közös tulajdonsága felfedezhető a két modellcsaládnak, amelyek révén mélyebb megértést kaphatunk mindkettő belső működéséről és lehetséges általánosításairól.

A harmadik fejezetben előbb azt vizsgáljuk, hogy rögzített számítási kereten belül milyen tulajdonságokat állapíthatunk meg adott számítási feladat megoldásáról. Kiderül, hogy a számítási feladathoz hozzárendelhető egy kategóriafüggő kommutatív diagram, amely tartalmaz minden információt a feladat minden lehetséges megoldásáról. Röviden érintjük az approximálhatóság kérdését, majd azt vizsgáljuk, mit mondhatunk akkor, ha tudjuk, hogy adott számítási rendszerben megoldható egy számítási feladat. Kiderül, hogy egy megoldás létezése gyakran végtelen sok megoldás létezését implikálja, és e megoldások ekvivalencia-fogalmának vizsgálata során természetesen felbukkannak az egzakt sorokat általánosító objektumok. Miután néhány rövid megállapítást teszünk a k -egzakt sorokról, annak a kérdésére térünk, hogy miként lehet nemnyilvánvaló módon már meglévő megoldásokból új megoldásokat készíteni adott számítási feladat(részfeladatai)ra. Bemutatunk néhány pozitív tételt a számítási szempontból talán legfontosabb kategóriák esetében. Vizsgáljuk, hogy miként lehet optimális megoldásokat keresni, és érintjük az invariáns és ekvivariáns megoldások kérdését. A fejezet zárásaként összefoglalunk néhány gondolatot arról, miként lehet e keretrendszert használva megítélni, hogy érdemes-e adott számítási rendszert új típusú számítógépekkel kiegészíteni.

Végül, köszönetet mondunk mindazoknak, akik e kutatást lehetővé tették, támogatták és gondolataikkal segítették a téma mélyebb megismerésében a szerzőt.

1. fejezet

Bevezetés: a számítás és a számítógép

Történelmi okokból a számítás fogalmát a számítógépekkel való munkavégzéstől tettük függővé, noha egyfajta számításfogalomnak mindig is léteznie kellett. Ha azt szeretnénk tanulmányozni, hogy a valóságban milyen folyamatok, milyen számítások valósíthatók meg, ahhoz nem elég ismerni, hogy az adott számítást az aktuális számítógépfogalomnak megfelelő számítási rendszeren belül reprezentálni lehet-e. Ugyanakkor, praktikusán nem áll módunkban olyan számításokat automatizáltan elvégezni, melyeket számítógépekkel nem tudunk realizálni. Dolgozatomban e két, látszólag ellentmondásos körülmény *összebékítésére* törekszem. Megmutatom, hogyan lehet a kategóriaelmélet nyelvét felhasználni arra, hogy adott számítási feladatot különböző számítási rendszereken belül modellezhessünk, ezáltal függővé tehessük adott számítási feladat vizsgálatát az aktuálisan elfogadott vagy megvalósítható számítógépek fogalmától. A számítógép fogalmát itt egy olyan kategóriával helyettesítem, amelynek az objektumairól és morfizmusairól feltesszük, hogy azokat a vizsgált számítógép fizikailag realizálni tudja. Miután függővé teszem adott feladat leírását attól a kategóriától, melyben reprezentálni szeretnénk azt, ezt a függőséget felhasználom arra, hogy elméletben jellemezni tudjam adott számítási feladatok megoldását lehetővé tevő számítógép-rendszerek számítási képességét, és vizsgálni tudjam ezen tulajdonságokat a számítógépnek megfeleltetett kategória függvényében. Így matematikailag jól kezelhető keretbe foglalható, mit jelent, ha egy feladatot vagy feladatcsoportot adott számítógépek rendszerében akarunk megoldani. Többek között egzaktul tárgyalhatóvá válik az egyes számítógép-típusok használatai közötti különbségek, lehetőség nyílik adott feladatok approximálhatóságának, egzakt megoldhatóságának, illetve az összes lehetséges nemekvivalens megoldás tulajdonságainak vizsgálatára az alkalmazott számítógép-típusok függvényében. Tárgyalhatóvá válik, hogy mit jelent, amikor egy már létező számítógépes rendszert bővíteni szeretnénk más típusú (pl. klasszikus-kvantumos hibrid) számítógépek használatával: már az elmélet szintjén, a tényleges megvalósításhoz szükséges, gyakran hatalmas anyagi befektetés megtétele nélkül is megállapíthatóvá válik, hogy már meglévő rendszereket érdemes-e új típusú számítógépekkel kiegészíteni, és ha igen, várhatóan miben nyilvánul majd meg és milyen mértékű lesz az így nyert hatékonyságnövekedés. A kérdést meg is lehet fordítani: ha adott egy már létező számítógép-rendszer, amelyen belül nem vagy csak kis hatékonysággal tudjuk megoldani feladatok egy csoportját, akkor milyen, a számítógép-rendszernek megfelelő kategóriából hiányzó

objektumokat és/vagy morfizmusokat realizálni képes új számítógépeket kell terveznünk ahhoz, hogy a kibővített rendszerben már hatékonyan meg tudjuk oldani e feladatokat.

Ahogy a fejezet címe is jelzi, a következő szakaszok arra szolgálnak, hogy az olvasót többé-kevésbé természetesen elvezessék e fogalmak összekapcsolásáig, előkészítve a későbbi matematikai formalizáció mögötti intuíciót. Mondanom sem kell, hogy nem célom (és nem is lehet célom) átfogó képet adni a számítástudomány és a lazább értelemben vett számításfogalom kialakulásáról, eddigi fejlődéséről és azokról az utakról, melyekről okkal gondolhatjuk, hogy a számítástudomány végig fog haladni a továbbiakban. Ha az olvasó tudományos ízléséből fakadóan sürgetettséget érezne e gondolatok precízebb, matematikaibb megfogalmazására, azokat a következő fejezetekben találja meg. Nekem mindazonáltal meggyőződésesem, hogy minden, adott fogalom matematikai modellezésének céljával készült keretrendszerhez szervesen hozzátartozik az a motiváció, mely végül az alapul szolgáló definíciókat adta, így semmiképp sem szerettem volna a matematikai keretrendszer felépítésével kezdeni a dolgozatot. Bízom benne, hogy azon olvasók, akik átrágják magukat a következő szakaszokon, találnak bennük új vagy hasznos gondolatokat, melyek hozzátehetnek a már kialakult szemléletükhöz a témában.

1.1. A számítás fogalmáról

Napjainkra a számítás és a számítógép fogalma szorosan összekapcsolódott: olyannyira, hogy a számítás fogalmának hivatalos angol definíciója¹ szerint a számítás a számítógépek vizsgálatát vagy a velük való munkavégzés folyamatát jelöli. Minden bizonnyal a legtöbben valóban erre gondolunk, amikor a számítás szót használjuk. Ez a definíció azonban, ha eleget töprengünk rajta, egyre kevésbé tűnik helytállónak. Egyrészt az, hogy mit tekintünk számítógépnek - és így milyen tevékenységet jelölhet ezek vizsgálata és a velük való munkavégzés - az idők során folyamatosan alakul. Példának okául az abakuszt joggal tekinthették számítógépnek a sumérok i.e. 2500 környékén, így számukra a számítás fogalma a (nem is olyan nagy) számok összeadását és kivonását, illetve e műveletek hatékony elvégzésének tanulmányozását jelentette volna, ha elfogadják a számítás említett definícióját. Másrészt, joggal gondolhatjuk, hogy egyfajta számításfogalomnak (a mindenkor értelemben vett) számítógépeket megelőzően is léteznie kellett, és a két fogalom ennyire szoros összekapcsolódása kevésbé törvényszerű, sokkal inkább társadalmi és történelmi folyamatok artefaktuma.

De a számítógép fogalmának kialakulása sem mindig a praktikus megvalósítható szerkezetekből indul ki. Végző soron, a számítógép nem más, mint egy fizikailag lehatárolt rendszer, amely képes olyan fizikai állapotok realizálására, melyeket valamilyen matematikai objektumokkal tudunk azonosítani, illetve amelyben olyan fizikai folyamatok zajlanak le (elvárás szerint kontrollálhatóan), melyeket e matematikai objektumok közötti leképezések megvalósításainak tekinthetünk. Így az, hogy mit gondolunk a világunkban megjelenhető matematikai objektumok és ezek közötti leképezések (morfizmusok) természetéről, aktívan alakítja azt, hogy milyen számítógépeket gondolunk megvalósíthatónak, így tehát azt is, hogy milyen számításfogalommal

¹Lásd: Meaning of *computing* according to the Cambridge Dictionary.

rendelkezünk. A pitagoraneusok *hite*² szerint például a világban mindennek racionális számok feleltethetők meg, így számukra i.e. 500 környékén a számítás fogalma minden bizonnyal kimerült volna a racionális számokkal való műveletvégzéssel. Mi több, az ő szempontukból a világról való gondolkodáshoz sem lehetett szükség ennél többre, így, ha nekik kellett volna számítógépet tervezniük, annak lehetséges funkciói a törtekkel való alapvető műveletek realizálásában álltak volna, ami nem sokkal tért volna el a hagyományos abakusztól.

Noha egy érvelésben időszámításunk előtti idők megállapításaira hivatkozni gyakran nem célravezető, hiszen e megállapítások olyan társadalmi és tudományos világképeken nyugszanak, melyek egy részét már elvetettük, a sumérok és a pitagoraneusok példája mégis elgondolkodtató. Rámutat, hogy mint megannyi esetben, ha egy kérdés gyökeréig akarunk ásni, egyre kevésbé hanyagolhatjuk el a kérdés kapcsolatát a világról alkotott képünk maradékától. A számítás fogalma a világból absztrahált fogalmak és azok közötti kapcsolatokat megragadó lehetséges műveletek vizsgálatából nőtte ki magát, ugyanakkor a számítási módszerekkel végzett megállapítások visszahatottak a világképünkre és fogalomrendszerünkre. Emiatt a számítás történetét nem lehet elválasztani az egyéb világképek fejlődéstörténetétől, vagy ha mégis, azt csak ideig-óráig tehetjük meg, az ebből fakadó hiányosságérzet folyamatos fokozódása mellett.

E gondolatok után akarva-akaratlanul is felmerül a kérdés: miben vagyunk mások, mint a sumérok vagy a pitagoraneusok? Másképp fogalmazva, biztosak lehetünk abban, hogy a jelenlegi számítógépfogalmunk (és így számításfogalmunk) releváns lesz akár néhány évtized vagy -század múlva? A válasz minden bizonnyal inkább negatív, mintsem pozitív. Az igazság az, hogy még mindig csak keveset tudunk a minket körülvevő világról és azokról a módszerekről, melyekkel igen fondorlatosan számításra tudjuk fogni annak részeit. Minden jel szerint távol vagyunk még a tudományfejlődés végétől, az újabb felfedezésektől pedig joggal várhatjuk újabb és újabb módszerek felbukkanását, melyekkel bizonyos matematikai objektumokat vagy leképezéseket az eddigieknél hatékonyabb módon realizálhatunk. Így a legvalószínűbb forgatókönyv szerint a kellően távoli jövő számítógépére ugyanúgy nehéz lenne ráismernie a mai szakembernek, mint a suméroknak vagy pitagoraneusoknak a mai számítógépekre. Egy kutató számára e gondolatok borúsan hathatnak: valószínű, hogy a legtöbb számítógép-fejlesztés, amit a következő évtizedekben megteszünk, nagyobb történelmi skálákon nemcsak, hogy relevanciáját veszti, de feledésbe is merül, teret engedve az újnak, amit a számunkra még elérhetetlenül távol álló felfedezésekre építenek majd utódaink.

A helyzetet látszólag rontja, hogy praktikusán képtelenek vagyunk a számítás fogalmát teljesen elválasztani a számítógép fogalmától, ehhez ugyanis az kellene, hogy ismerjük a fizikailag realizálható objektumok és morfizmusok összességét, amitől (talán reménytelenül) messze állunk. Mindazonáltal, nem lehet, és nem is érdemes eldobni azt a tudást, amit a számításról adott számítógépes keretrendszeren belül szerezni tudunk. Az ideális az volna, ha olyan kereteken belül tudnánk a számítógépes rendszereket és az ezekben realizálható számításokat

²A *hit* szó használata itt indokoltnak tűnik, lévén, hogy állításaikat esztétikai megfontolásokra alapozták, és filozófiájuk köré egyfajta vallási csoport szerveződött. E csoport tagjai többek között lemondtak a babfogyasztásról, nem sétálhattak országúton, és nem is érinthettek fehér kakast. Izgalmas részletekért lásd: [1], 1.2.2. *Misztika és matematika: Püthagorasz* című fejezete.

tárgyalni, melyek kellően rugalmasak ahhoz, hogy a számítógépfogalom változtatása mellett is alkalmazhatóak legyenek. Így tulajdonképpen csak arra van lehetőségünk, hogy *gyengítsük* a számítás eleve nehezen körülírható fogalmát, és helyette az *adott keretrendszeren belül megvalósítható számítás* fogalmát vizsgáljuk, amit viszont már jól lehet modellezni matematikai módszerekkel.

1.2. A számítógép fogalmáról

Amikor számítógépekről beszélünk, leginkább az elmúlt nagyjából 70 év számítási termékeire gondolunk, és meglepő módon nem is vétünk nagyot. Néhány elszigetelt géptől eltekintve azt mondhatjuk, hogy tényleges számítógépekkel a 19. század első évtizedeiben találkozott az emberiség, és a fejlesztéseket jórészt az európai tudósok tették meg. Noha kifinomult mechanikus szerkezeteket (pl. rugós órát) már a 15. században használtak Európában, az első, számításokat automatizáló rendszerekre várni kellett az ipari forradalom lezajlásáig, részben az azokhoz szükséges alkatrészek előállításának nehézségei, részben pedig talán a meggyőződés hiánya miatt, hogy ilyen gép készíthető. Ekkoriban a számítógépekkel kapcsolatos leginkább meghatározó kérdés annak az eldöntése volt, hogy *létezik-e* egyáltalán ilyen gép.

Az 1930-as évek optimista szemlélet uralkodott e kérdéssel kapcsolatban. Egyrészt, egyre több analóg számítógépmoddell látott napvilágot, másrészt az elektrodinamika alapegyenleteinek felírása után nem kellett sokat várni a digitális számítógépek koncepciójának kialakulására sem. Lényeges történelmi körülmény a két világháború is, melyek jelentős szerepet játszottak a tudomány és számítástechnika ugrásszerű fejlődéséhez szükséges körülmények kialakításában, így az anyagi ráfordítás és a kutatócsoportok munkájának összefogása hosszú évekig kiemelt cél volt. Az 1940-es évek ehhez az optimizmushoz egyfajta kényszer is kapcsolódott, hiszen működő számítógép építése nem csak tudományos cél, de számos nemzet önálló nemzeti érdeke is lett. Egyre nyilvánvalóbbá vált, hogy *lehet* összetett feladatok vizsgálatára is alkalmas számítógépet készíteni, az érdeklődés így a *létezés* kérdésétől a *kivitelezés* kérdése felé mozdult el.

Napjainkra már-már mindenki számára egyértelmű, hogy lehetséges rendkívül bonyolult számítások elvégzéséhez szükséges struktúrákat reprezentálni képes számítógépeket készíteni, olyannyira, hogy talán túl optimisták is vagyunk, ha saját, modern számítógépeink képességeiről esik szó.

Tény, hogy számítógépeink az élet szinte minden területén alkalmazásra találtak, ami soha nem látott társadalmi fejlődést eredményezett. Ugyanakkor, a pusztán hit abban, hogy ezek a keretrendszerek minden (számunkra relevánsnak tűnő) számítási feladatot képesek ellátni, kellemetlen helyzetbe sodorhat abban a pillanatban, hogy olyan fizikailag realizálható, számításvégzésre alkalmazható rendszereket találunk, melyek nem illenek e keretekbe, és még csak az sem világos, miként illeszthetők bele. Jelenleg, úgy tűnik, pontosan ez a helyzet: megbukni látszik az a klasszikus meggyőződés, miszerint az előző évszázad számítógépfogalma kimerítően leírná a lehetséges számítási rendszereket. Erre csak néhány példát jelentenek a kvantum-számítógépek (lásd például: [2], [3]), a gravitációs számítógépek (lásd például: [4], [5], [6]), a

zajos számítógépek (lásd például: [7]), illetve a biológiai és neuromorf gépek (lásd például: [8]).

Így napjainkra a releváns és izgalmas kérdés inkább a következő: ahelyett, hogy azt kérdeznénk, milyen számítógépeket tudunk kivitelezni, vizsgáljuk annak a kérdését, hogy mi minden létezik, ami számításra fogható. Sajnos a fizikailag realizálható objektumok és morfizmusok kategóriáját nem ismerjük, sőt, az elmúlt évszázadok tudományos fejlődését látva, jó okunk van azt gondolni, hogy tudásbeli hiányosságunk nem csekély. Mindezek ellenére nem várhatunk ölbe tett kézzel, ameddig a természettudósok felfedezik és aprólékosan leírják a világ utolsó darabkait is, hogy csak ezután kezdjük el tárgyalni a lehető legáltalánosabb számítástudományt. Abból kell kiindulnunk, amit általánosan igaznak gondolunk a számítógépekről: olyan, fizikailag jól lehatárolható rendszerek, melyek fizikai állapotai reprezentálni tudnak valamilyen matematikai objektumokat, és amely rendszereken belül természetesen létrejöhetnek olyan állapotok közötti módosulások, melyek e matematikai objektumok közötti leképezéseket valósítanak meg. Minden ilyen rendszerben (mérnöki kihívásoktól eltekintve, elviekben) fizikailag megvalósíthatunk minden olyan feladatot, melynek bemenete és kimenete reprezentálható egy-egy, a rendszer által létrehozni képes objektummal, és a feladat megfeleltethető az ezek közötti lehetséges leképezésláncok kompozíciójának. Ez a szemlélet segít olyan számítógépfogalmat formalizálni, amelynek időtállásában joggal reménykedhetünk, és amelyhez természetesen illik a kategóriaelmélet.

Ha a fejlődő számítástudományt akarjuk modellezni, az előző mondatnál egy kicsivel többet is meg tudunk állapítani: a számítástechnika fejlesztései során nem kell eldobnunk a már meglévő gépeket, ugyanakkor készíthetünk újakat, melyekkel újabb objektumok és/vagy morfizmusok realizálhatóak természetes módon. A számítástechnikai fejlesztések elsődleges célja tehát az, hogy a lehető legtöbb objektumot és ezek közötti leképezést fizikailag reprezentálni tudjuk, el tudjuk végeztetni a természettel. Ezzel az elképzeléssel szinkronban áll az a tény, hogy az utóbbi évtizedek számítástechnikai fejlesztéseiben a fókusz az általános, mindenre alkalmas számítógép előállításáról a speciális funkciókat ellátó számítógépek hibrid rendszereinek előállítása felé látszik eltolódni.

1.3. Miért kategóriák? Gondolatok a fogalmak alakulásáról.

A fogalmak önmagukban azonban csak marginális haszonnal bírnak, ha célunknak azon dolgok közötti kapcsolatok megértését tűztük ki, melyeket e fogalmakkal leírhatóvá tettünk. Amennyiben hiszünk abban, hogy a meglévő, a vizsgált rendszerek részeit csak részlegesen megnevezni képes fogalomrendszerünk ismerete releváns információval szolgáltatathat a vizsgált rendszerről, ami jöllehet, meggyőződés kérdése, de empirikusan indokolható, elsődlegesen a fogalmak rendszereinek megértését kell megvalósítanunk. Ehhez pedig léteznie kell valamilyen *műveleteknek*, melyekkel egyrészt a meglévő fogalmainkból újakat készíthetünk (ha úgy tekintjük, hogy minden ismert fogalommal együtt minden abból formálisan származtatható is ismert, erre nem kell külön kitérni), másrészt, ami fontosabb, e fogalmainkat valamilyen szabály szerint össze tudjuk kapcsolni, egymásba tudjuk alakítani.

Noha nincs kanonikus módja annak, hogy az alapoktól *teljesebb* fogalomrendszereket épít-

sünk fel, és ezt a folyamatot leginkább csak történelmi szemléletben tudjuk tárgyalni, általánosan igaznak tűnik, hogy csak a legritkább esetekben bukkannak fel olyan új fogalomcsoportok, melyeket ne tudnánk valamilyen, már meglévő keretrendszer fogalmaival összefüggésbe hozni. Tipikusan azok a fogalmak, melyekkel valamilyen tudományos felfedezés, már létező rendszerek mélyebb megértése vagy a véletlen folytán gazdagítjuk az aktuálisan meglévő vizsgálódási rendszereinket, szervesen kapcsolódnak a már meglévő fogalmainkhoz, így önmagában nem csak az új fogalmak megértése és integrálása jelent fejlődést egy tudományterület számára, de az is, hogy e fogalmakkal gazdagítva a már meglévő vizsgálódási rendszereinket, új típusú *műveletek* is megjelennek a már meglévőkhöz képest, melyekkel e fogalmak között kapcsolatokat tudunk teremteni. Az új fogalmak a már meglévőkkel kölcsön tudnak hatni, így az új fogalomcsoportokhoz természetesen tartoznak olyan transzformáció-fogalmak, melyek valamilyen *műveletet* reprezentálnak e fogalmak közötti. Az pedig, hogy mikor *ugrik* jelentőset egy tudományterület leíró- és megértőképesége, érzékenyen függ attól, hogy milyen fogalmakat tekintünk leírhatónak, és ezek között milyen átalakításokat tekintünk megengedhetőnek.

Minden bizonnyal ennek a felismerése: hogy a fogalmakkal végezhető *műveletek* lehetnek annyira fontosak, hogy önmagukban új fogalmak bevezetését indokolják, vezetett a természetes szám fogalmának nem kevés általánosításáig.

A számítás fogalma is többé-kevésbé ennek a gondolatnak megfelelően alakult: a szám, és így az aktuálisan számként kezelt objektumokkal végezhető műveletek bővülése révén tudott kialakulni a számításról alkotott egyre általánosabb fogalom, majd megjelenhettek a szám objektumának és a számok közötti műveletek reprezentációjaira képes automatizált gépek.

Az eddig leírtak sokkalta általánosabbak annál, minthogy bármilyen, általánosan hasznos és nemnyilvánvaló következtetés levonására szolgáló formális keretrendszert hozzá tudjak rendelni; e dolgozatnak nem is ez a célja. Ugyanakkor, fontosnak találtam rámutatni arra, hogy a számításról kialakított képet folyamatosan bővülő és fejlődő fogalomrendszert alakítják és alakulnak általa. Ezen változások mindegyike nehezen megjósolható, összességében pedig nem alaptalan azt feltételezni, hogy idővel egyre lényegesebb eltérések lesznek aközött, amit mi számításnak gondolunk, és aközött, amit a későbbiek annak fognak nevezni.

2. fejezet

Számítógépek és kategóriák: a számítási feladat

Az előző fejezet fő célja az volt, hogy rámutasson: a világról alkotott modelleink fejlődésének hála folyamatosan változik azon fogalmak (*objektumok*) köre, melyeket az aktuális tudományos vizsgálódási rendszereinkkel le tudunk írni. A természetben ezen objektumok egy részét realizálni tudjuk, így létre tudunk hozni olyan rendszereket is, amelyek ilyen objektumok közötti leképezéseket (*morfizmusokat*) valósítanak meg. Az ilyen rendszereket aztán fel lehet használni *számítási feladatok* automatizált elvégzésére, így tekinthetjük őket számítógépeknek. Ilyen szemléletben a számítógép matematikailag tekinthető azon objektumok és morfizmusok összegének, melyeket reprezentálni képes. A számítási feladat fogalma ebben a szemléletben a következő: adott egy leképezés két objektum között, és elő szeretnénk azt állítani egy adott számítógépes rendszer keretein belül.

Ebben a fejezetben a célom az lesz, hogy bemutassam, ahogy a kategóriaelmélet segítségével lehetséges olyan, természetes keretrendszerek létrehozása, melyek:

1. kellő rugalmassággal rendelkeznek ahhoz, hogy a folyamatosan változó számítás- és számítógépfogalmat reprezentálni lehessen velük;
2. lehetőséget biztosítanak az aktuálisnak tekintett számítás- és számítógépfogalmaktól való függés reprezentálására és figyelembevételére, amikor számítási feladatok tulajdonságait vizsgáljuk (közelíthetőség, előállíthatóság, utóbbi esetben valamilyen bonyolultsági tulajdonságok, stb.);
3. révén vizsgálni lehet a fenti tulajdonságok várható változását a számítógép-fogalom általánosításával összefüggésben (pl. új számítógépek elkészítése);
4. matematikailag precízek, és a biztosított robusztussághoz képest viszonylag kényelmesen kezelhetőek.

Kategóriaelméletről változó mélységű anyagokat az érdeklődő olvasó a következőkben találhat: [9], [10], [11], illetve az nLab megfelelő oldalán.

2.1. Kategóriaelméleti alapfogalmak

1. Definíció. [Matematikai univerzum]

Univerzum alatt olyan $\mathbb{U}$ halmazt értünk, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1. Ha $A \in B \in \mathbb{U}$, akkor $A \in \mathbb{U}$;
2. Ha $A, B \in \mathbb{U}$, akkor $\{A, B\} \in \mathbb{U}$;
3. Ha $A \in \mathbb{U}$, akkor $\mathcal{P}(A) \in \mathbb{U}$;
4. $\omega \in \mathbb{U}$;
5. Minden $A \in \mathbb{U}$ esetén, minden $f : A \rightarrow \mathbb{U}$ függvényre $\text{im} f \in \mathbb{U}$.

A továbbiakban feltesszük a Grothendieck-féle univerzum-axiómát, mely szerint minden halmaz része egy univerzumnak.

2. Definíció. [$\mathbb{U}$ -kis halmazok és matematikai objektumok]

Legyen $\mathbb{U}$ egy rögzített univerzum. Az A halmazt $\mathbb{U}$ -kis halmaznak nevezzük, ha $A \in \mathbb{U}$ teljesül. Adott X matematikai objektumot $\mathbb{U}$ -kisnek nevezünk, ha halmazként az.

3. Definíció. [$(\mathbb{U}\text{-legitim})$ Kategória]

Legyen $\mathbb{U}$ egy rögzített univerzum. Adott $\mathcal{C}_{\mathbb{U}}$ $\mathbb{U}$ -legitim kategória alatt a következők összességét értjük:

1. Az objektumok $\mathcal{OB}(\mathcal{C}_{\mathbb{U}}) \subseteq \mathbb{U}$ halmaza (ha $\mathcal{OB}(\mathcal{C}_{\mathbb{U}}) \in \mathbb{U}$ teljesül, $\mathbb{U}$ -kis kategóriáról beszélünk);
2. A morfizmusok $\mathbb{U} \ni \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}_{\mathbb{U}}}(A, B)$ $\mathbb{U}$ -kis halmaza minden (A, B) objektumpárhoz;
3. Minden A, B, C objektumhármassal mellett egy $\circ_{A,B,C} : \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}_{\mathbb{U}}}(B, C) \times \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}_{\mathbb{U}}}(A, B) \rightarrow \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}_{\mathbb{U}}}(A, C)$ kompozíció, mely minden $\mathcal{HOM}_{\mathcal{C}_{\mathbb{U}}}(A, B) \ni f, g \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}_{\mathbb{U}}}(B, C)$ leképezéspárhoz a $gf := g \circ_{A,B,C} f$ leképezést rendeli,

amelyek kielégítik a következő axiómákat:

4. Minden A, B objektum mellett, minden $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}_{\mathbb{U}}}(A, B)$ morfizmusnak létezik egy egyértelmű forrásobjektuma, nevezetesen $\text{dom}(f) := A$, és egy egyértelmű célobjektuma, nevezetesen $\text{targ}(f) := B$;
5. Minden A, B objektum mellett léteznek az $\text{id}_A \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}_{\mathbb{U}}}(A, A)$ és $\text{id}_B \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}_{\mathbb{U}}}(B, B)$ identitásmorfizmusok, úgy, hogy minden $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}_{\mathbb{U}}}(A, B)$ leképezésre $f \text{id}_A = \text{id}_B f = f$ teljesül;
6. A kompozíciós művelet asszociatív.

A továbbiakban nem fogjuk kiemelni, hogy konkrétan milyen univerzummal dolgozunk, azt a jelölésekben sem tüntetjük majd külön fel.

Megjegyzés. Noha a legtöbb, gyakorlatban is használt kategória objektumai osztályt alkotnak, használni fogjuk az $A \in \mathcal{OB}(\mathcal{C})$, sőt, az $A \in \mathcal{C}$ jelölést, mely azt jelenti, hogy A egy objektum a $\mathcal{C}$ kategóriában.

Megjegyzés. Mivel bármely $\mathcal{C}$ kategóriában adott g morfizmus egyértelműen meghatározza annak $\text{dom}(g)$ forrás- és $\text{targ}(g)$ célobjektumát, ezért a továbbiakban az egyszerűség kedvéért alkalmazni fogjuk a $g \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}$ jelölést, ami alatt azt értjük majd, hogy $g \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(\text{dom}(g), \text{targ}(g))$.

4. Definíció. [(Teljes) Részkategória]

Legyen $\mathcal{S}, \mathcal{C}$ két kategória. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{S}$ részkategóriája a $\mathcal{C}$ -nek, jelölésben $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$, ha a következők teljesülnek:

1. Ha $A \in \mathcal{S}$, akkor $A \in \mathcal{C}$;
2. Minden $A, B \in \mathcal{S}$ mellett $\mathcal{HOM}_{\mathcal{S}}(A, B) \subseteq \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (ha itt egyenlőség áll, teljes részkategóriáról beszélünk);
3. Minden $A, B, C \in \mathcal{S}$ objektumhármassal mellett bármely $\mathcal{HOM}_{\mathcal{S}}(A, B) \ni f, g \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{S}}(B, C)$ leképezéspárra $gf \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{S}}(A, C)$ és $gf \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, C)$ megegyezik;
4. Minden $A \in \mathcal{S}$ esetén $\text{id}_A \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{S}}(A, A)$ és $\text{id}_A \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, A)$ megegyezik.

5. Definíció. [Kategória és részkategória különbsége]

Legyen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$. Ekkor:

1. $\mathcal{OB}(\mathcal{C} - \mathcal{S}) := \mathcal{OB}(\mathcal{C}) - \mathcal{OB}(\mathcal{S})$ a $\mathcal{C}$ kategória azon objektumait jelöli, melyek nem objektumai az $\mathcal{S}$ kategóriának;
2. $\mathcal{HOM}_{\mathcal{C}-\mathcal{S}}$ a $\mathcal{C}$ kategória azon morfizmusait jelöli, melyek nem morfizmusai az $\mathcal{S}$ kategóriának.

6. Definíció. [Monomorfizmus, epimorfizmus, izomorfizmus]

Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória, $A, B \in \mathcal{C}$ két objektum és $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$ egy morfizmus. Azt mondjuk, hogy az f morfizmus:

- *monomorfizmus*, amennyiben minden $g, h \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(B, A)$ morfizmusra $\mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(B, B) \ni fg = fh \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(B, B)$ esetében $g = h$ teljesül;
- *epimorfizmus*, amennyiben minden $g, h \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(B, A)$ morfizmusra $\mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, A) \ni gf = hf \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, A)$ esetében $g = h$ teljesül;
- *izomorfizmus*, amennyiben van olyan $g \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(B, A)$, hogy $gf = \text{id}_A$ és $fg = \text{id}_B$ teljesül.

Megjegyzés. Minden izomorfizmus egyszerre mono- és epimorfizmus, de ennek az ellenkezője nem igaz.

7. Definíció. [Néhány kategória, amit a dolgozat további részében használni fogok]

Az alábbi kategóriáknak és azok részkategóriáinak ismeretére szükség lesz a dolgozat további tartalmának kényelmes feldolgozása érdekében:

1. **SET**, **SET***: a (pontosított) halmazok és ezek közötti (pontosított) leképezések kategóriája;
2. **SetMaps**: a halmazok közötti leképezések, mint objektumok, és ezek közötti leképezések kategóriája;
3. **$\mathbb{K}$ -mod**, **$\mathbb{K}$ -Mod**, **R -mod**, **R -Mod**: a (végesen) generált $\mathbb{K}$ -vektorterek és R -modulusok kategóriái a megfelelő vektortér- és modulus-homomorfizmusokkal, ahol $\mathbb{K}$ test és R gyűrű;
4. **Top**, **Top***: a (pontosított) topologikus terek és ezek közötti (pontosított) folytonos leképezések kategóriája.
5. **Mnf**, **Mnf***, **SMnf**, **SMnf***: a (pontosított) topológiai sokaságok és (pontosított) sima sokaságok kategóriája, a megfelelő (pontosított) leképezésekkel.
6. **Hlb**, **Hlb***: a (pontosított) Hilbert-terek és ezek közötti skalárszorzártartó leképezések kategóriája.

Megjegyzés. A későbbiekben a halmazok kategóriájára, mint $\mathcal{SET}$ vagy **SET** is hivatkozunk majd. A kétféle jelölés alkalmazása mögött tipográfiai megfontolások állnak.

Ahhoz, hogy azt mondhassuk, egy számítógéphez rendelt kategóriában egy leképezést szeretnénk reprezentálni, először is szükség van egy azonosításra a kérdéses leképezés forrás- és célobjektumai, illetve a számítógéphez rendelt kategória objektumai között. Ha a leképezést tartalmazó kategóriának (tipikusan $\mathcal{SET}$) részkategóriája a számítógéphez rendelt kategória, akkor ez a megfeleltetés természetes. Ugyanakkor, nem szükséges (és gyakran nem is teljesül), hogy egy számítógéphez rendelt kategória tényleges részkategóriája legyen annak a kategóriának, amelyben egy vizsgált leképezést a priori meg tudunk adni. Különböző (rész)kategóriák közötti azonosításra a funktor fogalma ad lehetőséget:

8. Definíció. [Kovariáns funktorok]

Legyen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ két kategória. Az $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ leképezést kovariáns funktornak nevezzük, amennyiben a következők teljesülnek:

1. minden $A \in \mathcal{C}$ objektum $F(A)$ képe $\mathcal{D}$ -beli objektum;
2. minden $A, B \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$ esetében $F(f) \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$;
3. minden $A, B, C \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(B, C)$ esetében $F(gf) = F(g)F(f) \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{D}}(A, C)$;
4. minden $A \in \mathcal{C}$ esetében $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)} \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{D}}(F(A), F(A))$.

9. Definíció. [Kontravariáns funktorok]

Legyen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ két kategória. Az $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ leképezést kontravariáns funktornak nevezzük, amennyiben a következők teljesülnek:

1. minden $A \in \mathcal{C}$ objektum $F(A)$ képe $\mathcal{D}$ -beli objektum;
2. minden $A, B \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$ esetében $F(f) \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$;
3. minden $A, B, C \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(B, C)$ esetében $F(gf) = F(f)F(g) \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{D}}(C, A)$;
4. minden $A \in \mathcal{C}$ esetében $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)} \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{D}}(F(A), F(A))$.

10. Definíció. [Hú funktor]

Legyen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ két kategória. Az $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ kovariás funktort hűnek nevezzük, amennyiben minden $A, B \in \mathcal{C}$ objektumpárra a $\mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$ és $\mathcal{HOM}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ halmazok közötti $f \mapsto F(f)$ leképezés injektív.

Megjegyzés. Az, hogy egy $\mathcal{S}$ kategória egy $\mathcal{C}$ kategória részkategóriája, azzal ekvivalens, hogy az $I : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ beágyazó leképezés hű kovariáns funktor.

11. Definíció. [Konkrét kategória]

A $\mathcal{C}$ kategóriát konkrétan nevezzük, ha létezik $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{SET}$ kovariás hű funktor.

12. Definíció. [Funktorok közötti természetes transzformációk és természetes izomorfizmusok]

Legyen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ két kategória, $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ két kovariáns funktor. Azt mondjuk, hogy az η leképezés egy természetes transzformáció az F és G funktorok között, ha minden $A, B \in \mathcal{C}$ objektumra és $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizmusra definiált egy $\eta_A \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$, illetve $\eta_B \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{D}}(F(B), G(B))$ úgy, hogy $G(f) \circ \eta_A = F(f) \circ \eta_B$ teljesül. Ha minden ilyen $\eta_A \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$ izomorfizmus, akkor η -t természetes izomorfizmusnak nevezzük az F és G funktorok között.

A gyakorlati előrehaladás szempontjából fontos lenne, hogy olyan kategóriákkal tudjunk dolgozni, melyekről rendelkezünk valamilyen absztrakt algebrai ismerettel. Emiatt a további vizsgálódások szempontjából kiemelt szerepet kapnak majd a kijelölt struktúrájú algebrai objektumok és ezek közötti struktúraörző morfizmusok (pl. csoportok, gyűrűk, modulusok) kategóriái. Természetesen, ezek a kategóriák önmagukban nem lennének alkalmasak feladatok széles spektrumának leírására, ahhoz túlságosan is speciálisak. Ha olyan számítógépeket terveznénk, melyek ezen kategóriákat valamelyikét tudnák reprezentálni, nem kapnánk hatékony számítási kereteket. Relevanciájuk sokkal inkább abban áll, hogy kiindulópontként kiválóan alkalmazhatóak: ahogy a későbbi példákban látjuk majd, megtehetjük, hogy *gazdagítjuk* e kategóriákat valamilyen más kategória (tipikusan $\mathcal{SET}$) objektumaival és morfizmusaiival. E morfizmusokkal várhatóan már sokkal általánosabb leképezéseket is reprezentálni lehet, növelve a számítási általánosságot. Mégis, ha csak kevés morfizmust emelünk be a kiindulási kategóriánkba, elméleti szempontból még vizsgálható lesz, milyen tulajdonságokkal rendelkeznek az újdonsült, komponált morfizmusok, melyeket így már reprezentálni tudunk majd.

Ez persze elméletileg szép és hihető, de honnan tudjuk, hogy praktikus is lehet használni? Elvégre, megtörténhet, hogy rengeteg új objektumot és morfizmust kell hozzáadnunk a kategóriánkhoz ahhoz, hogy napjaink releváns számítási feladatainak elvégzésére alkalmas rendszereket

kapjunk. Létezik-e egyáltalán olyan eset, amikor véges sok új objektum és morfizmus beemelése tényleg segít növelni egy ilyen kategória által reprezentált számítási rendszer képességeit?

A válasz az, hogy létezik. Mi több, ismerünk példát arra, amikor nem kell új objektumokat hozzáadni a kategóriánkhoz, és egyetlen (!) új morfizmussal hatalmasat ugrik a számítási kapacitás¹. A példa maga az $\mathbb{R} - \mathbf{mod}$ gazdagítása mondjuk a $\text{ReLU} \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{SET}}$ leképezéssel, amit történeti okokból neurális hálónak² nevezünk. Mielőtt azonban túlságosan is előreszaladnánk, következzenek a szükséges definíciók.

13. Definíció. [Adott aritású művelet egy halmazon]

Legyen X egy halmaz. Ekkor adott $n \in \mathbb{N}$ mellett az $f : X^n \rightarrow X$ leképezést n -aritású műveletnek nevezzük. Ha I tetszőleges halmaz, I -aritású műveletnek adott $f : X^I \rightarrow X$ leképezést értjük. Az X halmaz elemei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők az $\emptyset \rightarrow X$ leképezéseknek, melyeket 0-aritású műveleteknek nevezünk. Egy leképezés aritását $n(f)$ -el jelöljük.

14. Definíció. [Algebrai struktúrák]

Algebrai struktúra alatt azt az (Ω, n_Ω) párt értjük, ahol $\Omega \in \mathcal{OB}(\mathcal{SET})$ és $\forall s \in \Omega : n_\Omega(s) \in \mathcal{OB}(\mathcal{SET})$ teljesül. Az $\Omega \ni s$ elemek műveleteket jelölnek, melyek aritásait $n_\Omega(s)$ adja. Jelölésben gyakran csak Ω -ként hivatkozunk a típusra, és az aritás-függvényből elhagyjuk az indexet.

15. Definíció. [Szegényebb részstruktúra]

Legyen (Ω, n_Ω) és $(\Omega', n_{\Omega'})$ két algebrai struktúra. Azt mondjuk, hogy az $(\Omega', n_{\Omega'})$ szegényebb részstruktúrája az (Ω, n_Ω) struktúrának, ha $\Omega' \subseteq \Omega$ és $n_\Omega|_{\Omega'} = n_{\Omega'}$ teljesül³. Jelölésben $\Omega' \leq \Omega$.

16. Definíció. [Ω -algebra]

Legyen Ω egy algebrai struktúra. Ω -algebrán egy olyan $(A, (s_A)_{s \in \Omega})$ párt értünk, ahol A egy halmaz és $\forall s \in \Omega : s_A : A^{n(s)} \rightarrow A$ rögzített aritású műveletek.

17. Definíció. [Ω -algebra részalgebrája]

Legyen Ω egy algebrai struktúra, $(A, (s_A)_{s \in \Omega})$ egy Ω -algebra. Ennek részalgebráján egy olyan $(B, (s_B)_{s \in \Omega})$ párt értünk, ahol $B \subseteq A$ és az s_B műveletek az s_A műveletek megszorításai $\forall s \in \Omega$.

18. Definíció. [Ω -algebra-homomorfizmusok]

Legyen Ω egy algebrai típus, A és B két Ω -algebra. Egy A és B közötti Ω -algebra-homomorfizmus alatt olyan $f : A \rightarrow B$ leképezést értünk, melyre $\forall s \in \Omega$ műveletre, tetszőleges $A^{n(s)} \ni (a_i)_{i \in n(s)}$ mellett $f(s_A((a_i)_{i \in n(s)})) = s_B((f(a_i))_{i \in n(s)})$ teljesül.

Megjegyzés. Minden Ω -algebra-homomorfizmus egyben Ω' -algebra-homomorfizmus is tetszőleges $\Omega' \leq \Omega$ esetén.

¹A *hatalmasat* jelző itt azt jelenti, hogy tetszőleges, véges halmazok közötti leképezés végtelen sokféleképp egzaktul megoldhatóvá válik a kategóriában.

²A neurális háló fogalma ennél a speciális kategória-gazdagításnál általánosabb, ugyanis más $\mathcal{SET}$ -beli morfizmusok beemelését is megengedi. Viszont, a gyakorlatban csak véges sok (sőt, egészen kevés) új morfizmust emelünk be, ami a dolgozatban tárgyalt módszerek és lehetőségek egy nagyon speciális esetének tekinthető.

³Ebben az esetben az egyenlőség alatt a megfelelő arítások ekvivalenciáját értjük.

19. Definíció. [Az Ω -Alg kategória]

Az Ω -Alg kategória alatt azt a kategóriát értjük, amelynek az objektumai Ω -algebrák, morfizmusai Ω -algebra-homomorfizmusok.

20. Definíció. [Felejtő funktorok]

Legyen $(\Omega', n_{\Omega'}) \leq (\Omega, n_{\Omega})$ két algebrai struktúra. Az $F : \Omega\text{-Alg} \rightarrow \Omega'\text{-Alg}$ felejtő funktor alatt azt a kovariáns funktort értjük, amely minden $(A, (s_A)_{s \in \Omega}) \in \mathcal{OB}(\Omega\text{-Alg})$ algebrához hozzárendeli az $(A, (s_A)_{s \in \Omega'})$ algebrát, a morfizmusokat pedig $\mathcal{SET}$ -be küldi, majd visszahúzza $\Omega'\text{-Alg}$ -ba.

Azt, hogy az időben változó számítógépfogalomnak hogyan feleltethető meg kategóriák kategóriáinak lánc, a 2.1-es ábra szemlélteti.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \emptyset & \hookrightarrow & \text{Számítógépfogalom} & \hookrightarrow & \text{Számítógépfogalom} & \hookrightarrow \dots \hookrightarrow & \text{Számítógépfogalom} & \hookrightarrow \dots \\
 & & \text{a } t_0 \text{ pillanatban} & & \text{a } t_1 \text{ pillanatban} & & \text{a } t_n \text{ pillanatban} & \\
 & & & & \downarrow & & & \\
 0 & \hookrightarrow & \mathbf{C}_{t_0} & \xleftarrow{F_{t_0, t_1}} & \mathbf{C}_{t_1} & \xleftarrow{F_{t_1, t_2}} \dots \xleftarrow{F_{t_{n-1}, t_n}} & \mathbf{C}_{t_n} & \hookrightarrow \dots
 \end{array}$$

2.1. ábra. Az időben fejlődő számítástudomány algebrai megfelelője:
kategóriák kategóriáinak lánc

2.2. Kategóriaelmélet a számítástudományban

A dolgozatomnak önmagában nem az a sajátossága, hogy a kategóriaelmélet nyelvét használva vizsgál számítástudománnyal kapcsolatos kérdéseket. Mint a legtöbb kellően absztrakt matematikai részterületet, úgy a kategóriaelméletet is már számos módon összekötötték a számítástudomány kérdéseivel az elmúlt évtizedek során.

Mivel a kategóriaelméletet sokan a halmazelmélet általánosításának tekintik, így elég gyakori, hogy azt csak már meglévő, jól ismert és értett eljárások, modellek és leírások általánosabb megfogalmazására használják, amikor adott feladatok számítógépes rendszereken történő megvalósításának vizsgálatával együtt bukkan fel (lásd többek között [12] és [13] szemléletét). Általában az elsődleges kiindulási pont vagy egy specifikus, már meglévő keretrendszer felváltása egy annak a leírására szolgáló nyelvvel (pl. klasszikus vagy kvantumos algoritmusok kidolgozása) az elméleti vizsgálódások céljával, vagy pedig egy elméletileg kidolgozott, jó tulajdonságokkal rendelkező *nyelv* fizikai reprezentálási módjának a kérdése (pl. első modern számítógépek megépítése). A *gond* ezzel az, hogy mindkét esetben a kategóriaelmélet olyan szellemiségű használata, mint amit a dolgozatomban ki szeretnék domborítani, indokolatlannak tűnik: az első esetben felesleges olyan általánosítást bevezetni, amely a kiszemelt számítógépes rendszer által

meg nem valósítható operációkat is reprezentálni tud, a második esetben pedig már egy meglévő kategóriából indulunk ki, amelyet nem érdemes bővebb kontextusba helyezni, ha a fizikai megvalósítása lehet cél.

Esetemben a fő fókusz elsődlegesen nem konkrét számítási rendszerek, és nem is konkrét számítási nyelvek leírásán lesz, hanem azon, hogy valamilyen számítási rendszerrel megoldani kívánt feladatokról a lehető legtöbb információt tudjuk szerezni. Az előző bekezdés példáinál maradva, egyrészt ha rögzítünk egy számítógépfajtát, akkor egy feladatról olyasmiket tudunk eldönteni, hogy megoldható-e (esetleg approximálható) az adott számítógép segítségével, és ha létezik megoldása, az rögzített erőforrások mellett előállítható-e vagy sem. Ezek az információk, noha nagy relevanciájúak, csak parciálisan jellemzik magát a feladatot, amit vizsgálni szeretnénk. Végző soron a cél mégis csak az, hogy megoldjunk bizonyos feladatokat, mert meg szeretnénk vagy meg kell oldanunk őket saját magunk, környezetünk vagy a tágabb értelemben vett társadalom boldogulása érdekében. Fix számítógépfajta mellett könnyen kaphatunk a megoldhatóság kérdésére nemleges választ, ami ugyanakkor sokkal inkább a rögzített számítógépfajtáról tett megállapítás, mintsem magáról a feladatról, és nem jelenti azt, hogy a feladat szükségszerűen egyáltalán nem is lehet megoldható. Meglehet (gyakran legalábbis ebben reménykedünk), hogy ugyanaz a feladat más típusú számítógéppel könnyen és gyorsan elvégezhető. Másrészt, ha adott nyelvet rögzítünk, amelyet vizsgálni szeretnénk, ugyanebben a helyzetben vagyunk: attól függően, milyen nyelvet vizsgálunk, más és más megállapításokat tehetünk egy feladat megoldhatóságával, nehézségével stb. kapcsolatban. Egy rögzített feladatról akkor tudhatunk meg a lehető legtöbbet, ha a lehető legtöbb számítási rendszert rögzítve vizsgáljuk a tulajdonságait. Így találhatunk történetileg nehéz feladatokat (amiket pl. abakusszal nem lehetett gyorsan megoldani), ténylegesen nehéz feladatokat (amiknek a megoldását semmilyen jelenlegi számítógép nem képes reprezentálni), sőt, ad absurdum lehetetlen feladatokat is (amelyeket fizikai rendszerekben képtelenség reprezentálni). A feladat maga azonban sokkal több információt hordoz, mint azoknak a tulajdonságoknak az összessége, amelyeket adott keretrendszeren belül elkészített reprezentációjáról meg tudunk állapítani. E kereten belül a számítógéprendszereket reprezentálni képes kategória fogalmához kötni adott feladatot nem pusztán formális játék, nem egy *nyelvváltás*, ami a halmazelméletnél nagyobb szabadságot biztosít. Ez egy természetes, és, ha a vizsgálódás mögötti filozófiát szeretnénk követni, kényszerű módja is annak, hogy figyelembe lehessen venni adott feladat különbségét annak valamilyen valóságbeli realizációjától.

Dolgozatom újdonsága, a későbbi eredményeken és felbukkanó új matematikai objektumokon túl, ebben a szemléletben áll: egy feladathoz rengeteg reprezentáns rendelhető hozzá a lehetséges, számítógéprendszereket reprezentáló kategóriáktól függően, és ezen reprezentánsok tulajdonságai mind felfednek valamilyen információt a vizsgált feladattal kapcsolatban. Természetesen, ez a szemlélet több *mellékterméket* is szolgáltat, például rögtön a következő három lehetőséget:

1. Adott számítási rendszer elemzése: rögzített kategória mellett változtatjuk a feladatokat, és vizsgáljuk azok tulajdonságait. Ez egy praktikus hozzáállás: abból indul ki, hogy van

néhány jól ismert architektúránk, amit használni tudunk, és megpróbáljuk leírni, hogy egy ilyen architektúra hogyan tud kezelni bizonyos feladatokat. Ez a gyakoribb számítógéptudományi hozzáállás könnyen reprezentálható a dolgozatban felvázolt keretek között, amennyiben nem konkrét feladat van előtérben, amelyet egy valamilyen architektúrával akarunk megoldani, hanem egy architektúra, amellyel valamilyen feladatokat szeretnénk megoldani (lehetőleg az összeset, amit meg lehet).

2. Adott feladat elemzése: tulajdonképpen fogalmunk sincs arról, önmagában mennyire nehéz egy feladat. Azt, hogy egy kérdésre könnyű vagy nehéz választ találni, attól függően állapítjuk meg, hogy visszavezethető-e olyan tapasztalásokra és megállapításokra, melyeket már megtettünk, ismerünk. Egyes feladatokat pl. biológiai rendszerek rendkívül hatékonyan meg tudnak oldani, míg klasszikus számítógépek kevésbé. Egy igazán nehéz feladat várhatóan különböző kategóriákból vizsgálva is nehezen megoldható lesz, míg más feladatokról kiderülhet, hogy csak rossz nyelven fogalmaztuk meg őket, és ezért tűntek ideig-óráig megvalósíthatatlannak. Megtehetjük, hogy rögzítünk egy feladatot, változtatjuk a kategóriákat, amelyekben vizsgáljuk azt, és vizsgáljuk, várhatóan mennyire lesz nehéz megoldani ezt a feladatot. Továbbra is tény marad, hogy egy adott feladathoz a *(feladat, kategória)* pár hozzárendelése nem szolgáltat egyértelmű információt a feladról, de sok ilyen párral már többet meg tudunk érteni azon feladat természetéről, amelyeket vizsgálni szeretnénk.
3. A fenti kettő egyszerre: összehasonlítható, hogy adott feladatcsoportokra milyen változást kapunk, ha változtatjuk (legfontosabb: bővítjük) a már meglévő kategóriánkat, és ez a változás jelentős lesz-e (pl. *átugranak* nehezen számítható feladatok a könnyen megoldhatóak közé). Vizsgálhatjuk azt is, hogy ha valamilyen jelentős teljesítményváltozást tapasztalunk, az miben áll, a nagyobb kategória milyen algebrai tulajdonságainak köszönhető? Ha ezt megértjük, algebrailag vizsgálhatóvá válik annak a kérdése, hogy érdemes-e új típusú számítógéparchitektúrákra költeni, illetve, ha ilyet szeretnénk, milyen új tulajdonságokra kell figyelniünk (az olyan trivialitásokon túl, hogy már meglévő számítást tudjanak gyorsabban elvégezni, vagy tudjanak nagyobb objektumokat reprezentálni).

2.3. A számítási feladat formalizálása

Kényelmetlen körülmény, hogy nem ismerjük a fizikailag realizálható objektumok és morfizmusok kategóriáját, így nem tudjuk, pontosan milyen számítási feladatokat tudunk fizikailag megoldani. Mégis, jó lenne, ha képesek lennénk mondani valamit az olyan számítógépes rendszerekről, amelyek adott esetben csak évtizedek vagy századok múlva valósulnak meg, talán jelenlegi rendszereink fejlesztése vagy kiterjesztése révén. Ebben a szakaszban nekilátok annak a keretrendszernek a felépítéséhez, amely alkalmas ennek a vágynak a megvalósítására.

Az első és legfontosabb fogalom, amit bevezetünk, a számítási feladat lesz: ez tulajdonképpen egy ismertnek feltételezett leképezés, amit később elő szeretnénk állítani egy számítási rend-

szert reprezentáló kategóriában. Mivel minden leképezéshez hozzátartozik annak értelmezési tartománya is, fel fogom tüntetni a kategóriát, amely morfizmusának tekintjük ezt a leképezést:

21. Definíció. [Számítási feladat]

Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória, $A, B \in \mathcal{OB}(\mathcal{C})$ és $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Számítási feladat alatt az $(f, \mathcal{C})$ párt értjük.⁴

22. Definíció. [Számítási feladat részfeladata]

Legyen $(f, \mathcal{C})$ egy számítási feladat és legyen $g \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}$ olyan, hogy $\text{dom}(g)$ részobjektuma $\text{dom}(f)$ -nek és $f|_{\text{dom}(g)} = g$. Ekkor a $(g, \mathcal{C})$ számítási feladatot az $(f, \mathcal{C})$ számítási feladat részfeladatának nevezzük.

23. Definíció. [Részben rendezett halmazokhoz rendelt kategóriák]

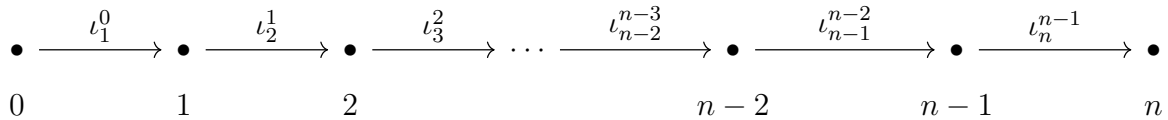
Legyen $(X, \leq)$ egy részben rendezett halmaz. Ekkor az ehhez rendelhető $\mathcal{X}$ poset-kategória a következő:

$$1. \mathcal{OB}(\mathcal{X}) = X;$$

$$2. \forall A, B \in \mathcal{OB}(\mathcal{X}) : \mathcal{HOM}_{\mathcal{X}}(A, B) = \begin{cases} \{\iota_B^A\}, & \text{ha } A \leq B \\ \emptyset, & \text{különben} \end{cases}$$

$$3. \forall A \leq B \leq C \in \mathcal{OB}(\mathcal{X}) : \iota_C^B \circ \iota_B^A := \iota_C^A.$$

Megjegyzés. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes számot megfeleltethetünk az $0 \leq 1 \leq \dots \leq n$ részben rendezett $N(n)$ halmaznak, melyből képezhetjük az $\mathbf{n}$ kategóriát. Ezt a 2.2-es ábra szemlélteti.



2.2. ábra. Az $\mathbf{n}$ kategória szemléltetése

24. Definíció. [Leképezési lánc egy kategóriában]

Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória, $n \in \mathbb{N}$. Az $O : \mathbf{n} \rightarrow \mathcal{C}$ kovariáns fuktort $\mathcal{C}$ -beli leképezési láncnak nevezzük. Jelölésben az $O_i := O(i)$, $i \in \{0, \dots, n\}$ és $f_i := O(\iota_{i+1}^i)$ $i \in \{0, \dots, n-1\}$ -t is alkalmazzuk a későbbiekben. Ez tulajdonképpen morfizmusokkal összekötött objektumok láncát jelöli, melyet a 2.3-as ábra szemléltet.

$$O_0 \xrightarrow{f_0} O_1 \xrightarrow{f_1} O_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-3}} O_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} O_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} O_n$$

2.3. ábra. Egy $\mathbf{n} \rightarrow \mathcal{C}$ leképezési lánc szemléltetése

⁴Precízebben az $(f, A, B, \mathcal{C})$ jelölést kellene használnunk. Mivel azonban (1) minden morfizmus egyértelműen jellemzi annak forrás- és célobjektumát, így nem szükséges azokat feltüntetni, illetve (2) adott két feladatot nem érdemes feltétlenül különbözőnek tekinteni, ha a forrás- és/vagy célobjektuma ugyan nem azonos, de izomorf, tehát nem is praktikus a forrás- és célobjektumhoz már jelölés szintjén is ragaszkodni, helyesebbnek találtam csak a leképezést és a kategóriát feltüntetni.

25. Definíció. [Leképezési diagramok]

Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória és $\mathcal{D}$ egy $\mathbf{U}$ -kis kategória. Ekkor a $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funktort leképezési diagramnak nevezzük.

Megjegyzés. Egy leképezési diagram tulajdonképpen egy multigráf, amelynek minden csúcsa egy adott $\mathcal{C}$ kategória objektuma, élei pedig $\mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}$ -beli morfizmusok.

26. Definíció. [Számítási feladat hű funktor szerinti véges realizációja adott kategóriában]

Legyen $(f, \mathcal{C})$ egy számítási feladat, $\mathcal{D}$ egy tetszőleges kategória és $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ egy kovariáns hű funktor.⁵ Azt mondjuk, hogy az $(f, \mathcal{C})$ feladat a $\mathcal{D}$ kategóriában végesen realizálható vagy megoldható F szerint, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ szám és $O : \mathbf{n} \rightarrow \mathcal{D}$ leképezési lánc $\mathcal{D}$ -ben, melyre $F(O_0) = \text{dom}(f)$ és $F(O_n) = \text{targ}(f)$ teljesül, illetve $F(f_{n-1} \circ \dots \circ f_0) = f$. Azt mondjuk, hogy az O funktor $\mathcal{D}$ -ben realizálja vagy megoldja az $(f, \mathcal{C})$ feladatot F szerint. Az olyan $O_{\text{in}} \in \mathcal{OB}(\mathcal{D})$, illetve $O_{\text{out}} \in \mathcal{OB}(\mathcal{D})$ objektumokat, melyekre $F(O_{\text{in}}) = \text{dom}(f)$, $F(O_{\text{out}}) = \text{targ}(f)$ teljesül, az $(f, \mathcal{C})$ számítási feladathoz tartozó be-, illetve kimeneti objektumoknak nevezzük, melyek összességére használjuk az $\mathcal{O}_{\text{in}}(f), \mathcal{O}_{\text{out}}(f) \subseteq \mathcal{OB}(\mathcal{D})$ jelöléseket is.

Amikor egy feladat megoldásáról beszélünk, azt klasszikusan úgy szoktunk megadni, mint elvárt *(bemenet, kimenet)* párok halmaza, vagyis azt egy neki megfelelő, halmazok közötti f leképezés gráfjaként definiáljuk. Emiatt a tényleges számítási feladat alatt természetes lenne az $(f, \mathcal{SET})$ példát érteni, ezzel dolgozni a továbbiakban. Olyan számítógépet viszont nehéz építeni, amely minden lehetséges halmazt reprezentálni tudna; praktikusán csak speciálisabb kategóriák megvalósítására van módunk (egyelőre legalábbis).

Az absztrakt matematikán belül a kategóriaelmélet egyik legnagyobb haszna az, hogy lehetőséget ad összetett objektumok struktúrájáról való információszerzéshez. Általában a következő eljárást alkalmazzuk: adott egy viszonylag új, teljes egészében még nem megismert matematikai objektum-fogalom, melyről általános megállapításokat szeretnénk tenni, meg akarjuk ismerni a bevezethető ekvivalencia-fogalmait, osztályozni akarjuk a lehetséges reprezentáns-objektumokat, és így tovább. Ekkor ahelyett, hogy az objektumainkat teljes egészében vizsgálnánk, megpróbálhatunk részinformációkat kinyerni róluk, mint amikor fényképet készítünk egy tárgyról. Egy lehetséges megoldás erre az, ha a vizsgálni kívánt objektumok és azok struktúraörző morfizmusainak kategóriájából egyszerűbb (jobbán ismert) kategóriákba képezünk valamilyen funktoriális módon, és az így nyert információval már ebben a számunkra egyszerűbben kezelhető kategóriában dolgozunk⁶. Megvan ugyanakkor az ára egy ilyen eljárásnak: egyrészt, miközben az összetett struktúrájú objektumokat egyszerűbb struktúrájúak vizsgálatára cseréljük, az eredetileg nagyon speciális morfizmusok helyett potenciálisan kisebb struktúrát megőrizni hivatott morfizmusokkal találjuk szembe magunkat⁷. Ez a kettősség egy nagyon fontos

⁵Egy ilyen hű funktor létezése látszólag erős megkötés, ami miatt a definíció ráadásul függeni is fog a megadott azonosítástól. A leggyakrabban azonban $\mathcal{C} := \mathcal{SET}$ mellett fogunk dolgozni, és $\mathcal{D} = \Omega\text{-Alg}$ rögzített algebrai struktúrával rendelkező objektumok és ezek közötti struktúraörző leképezések, mint morfizmusok kategóriáját jelöli majd, F pedig a felejtő funktor.

⁶Ezt a megközelítést fizikusok is hosszú ideje használják, amikor előbb számokat rendelnek a fizikai rendszerekhez, majd lineáris leképezéseket, tenzorokat, operátorokat, mezőket stb.

⁷Teljesül tehát a *nehézségmegmaradás elve*, azaz egyszerűbb objektumokért cserébe sokfélebb, összetettebb

észrevétel! Másrészt, egy ilyen megfeleltetés általában messze nem egyértelmű az eredeti és a hozzárendelt, egyszerűbb objektumok között: emiatt a legtöbb tudományterületen messze nem triviális eldönteni, hogy milyen invariánsait kell keresni egy objektumnak ahhoz, hogy azok már egyértelműen jellemezzék az eredeti objektumot (vagy annak éppen vizsgált tulajdonságait).

Esetünkben a fenti elgondolás megfordítottja lesz a cél: első lépésben az egyszerűbb matematikai struktúrát hordozó objektumokhoz (halmazok) keresünk olyan összetettebb struktúrákkal rendelkező objektumokat (pl. vektorterek), melyek morfizmusairól azok struktúrájából adódóan már többet tudunk. Így egyszerűbb objektumok kategóriájából képezünk (általában nemegyértelműen) összetettebb algebrai objektumok kategóriájába, cserébe utóbbi kategória morfizmusai speciálisabb tulajdonságokkal bírnak. Mi pedig igazából az egyszerűbb kategória bizonyos összetettebb morfizmusait szeretnénk az összetettebb objektumok kategóriájának egyszerűbb/speciálisabb morfizmusaival reprezentálni, amennyire lehetséges. Ez duplán megy: egyrészt, noha matematikailag az egyszerűbb struktúrájú, így általánosabb objektumokat könnyebb reprezentálni, fizikailag gyakran a speciálisabb objektumokat van lehetőség *chipre nyomtatni*, valamilyen rendszerrel stabilan megvalósítani; így ezzel a módszerrel fizikailag nagyobb eséllyel megvalósítható számítógép-modellhez rendelhető kategóriát lehet keresni. Másrészt, azáltal, hogy az objektumaink speciálisabb struktúrával rendelkeznek, a kategória morfizmusairól többet tudunk mondani általánosságban véve, így könnyebben *tervezhető* és *megérthető* módszereket lehet készíteni egy ilyen kategórián belül.

Ugyanakkor, a vizsgálódást egy ilyen, speciálisabb kategóriára leszűkíteni hiba lenne, hiszen végső soron $(f, \mathcal{SET})$ számítási feladatokat akarunk megoldani. Egy halmazok közötti leképezés pedig tipikusan nem fog előállni, mint (tetszőlegesen) sok speciálisabb objektum struktúraörző morfizmusainak kompozíciója, hacsak az eredeti legképezés valamilyen csoda folytán meg nem őrzi az adott struktúrát - akkor viszont a feladatunk triviális lenne. Ezek az $(f, \mathcal{SET})$ számítási feladatok a halmazok kategóriájában mind egyetlen lépésben megoldhatóak; azért, hogy egyes morfizmusokat vagy nem fogunk tudni reprezentálni, vagy pedig tipikusan csak egynél több lépésben fogjuk tudni azt megtenni, a speciálisabb kategória használata lesz a felelős.

Ezért azután, hogy első lépésben kiszemelünk egy speciálisabb kategóriát, melyet már egészen jól ismerünk ahhoz, hogy annak a morfizmusairól általánosan érvényes és hasznos megállapításokat tudjunk tenni (pl. approximációs tételek), második lépésben *elrontjuk* ezt a szép struktúrát: az eredeti, struktúraörző leképezések mellé beemelünk olyan leképezéseket, melyek az algebrai struktúráról megfelelkezve csak az alaphalmazok között létesítenek kapcsolatot⁸. Így két típusú: struktúraörző és tipikusan nem (vagy csak részben) struktúraörző morfizmusaink is szerepelnek majd a *gazdagított* kategóriában⁹. Ez azért hasznos, mert ilyen leképezések

morfizmusokat kapunk. Természetesen, azért éri meg mégis ezzel a módszerrel dolgozni, mert az egyszerűbb objektumok kategóriáját olyankorra már jobban ismerjük, mint az összetett objektumokét, így nem okoz különösebb gondot, ha a jól ismert kategória morfizmusaival kell dolgoznunk, még ha ezek talán összetettebbek is, mint az eredeti kategóriabeli morfizmusaink.

⁸A kategória *gazdagítása* során az új morfizmusok beemelése a lényeges.

⁹Ahhoz, hogy ennek értelme legyen, szükségünk van egy egyértelmű azonosításra a kijelölt $\mathcal{C}$ kategória objektumai és morfizmusai, illetve a $\mathcal{SET}$ objektumai és morfizmusai között, amit egy hű funktorral meg tudunk oldani. Esetünkben azonban, ha $\mathcal{C}$ a valamilyen algebrai struktúrával ellátott objektumok és ezek közötti struktúraörző leképezések kategóriája, a felejtő-funktor biztosítja ezt a természetes megfeleltetést.

kompozíciója már tipikusan nem lesz struktúraörző, tehát potenciálisan sokkal több számítási feladatot realizálni tudunk majd a gazdagított kategóriában az eredeti kategóriához képest. Ugyanakkor, egyéb haszna is van annak, hogy speciálisabb kategóriából indulunk ki: a létrehozható legáltalánosabb leképezéslánc felfogható olyan morfizmusok egymásutáni alkalmazásának, ahol nincs két egymást követő azonos típusú (pl. struktúraörző és nem struktúraörző) morfizmusunk, egy ilyen leképezéslánc tulajdonságait pedig gyakran könnyebb megérteni, mint egy általános nem struktúraörző morfizmust. Következzen a gazdagítás¹⁰ fogalma:

27. Definíció. [Részkategória gazdagítása kategóriában]

Legyen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$. Az $\mathcal{S}$ kategória $\mathcal{C}$ -beli gazdagításán egy $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{C}$ kategóriát értünk, melyre $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$.

28. Definíció. [Kategória morfizmuscsaláddal való gazdagítása hű funktor által]

Legyen $\mathcal{S}, \mathcal{C}$ két kategória, $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ hű funktor, az $F(\mathcal{OB}(\mathcal{S})) \subseteq \mathcal{OB}(\mathcal{C})$ objektumai közötti morfizmusok egy családjá $G := \{g_i \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}-F(\mathcal{S})} : \text{dom}(g_i), \text{targ}(g_i) \in F(\mathcal{OB}(\mathcal{S})), i \in \mathbf{I}\}$, ahol $\mathbf{I}$ indexhalmaz. Az $\mathcal{S}$ kategória G morfizmuscsaláddal való F általi gazdagítása alatt egy olyan $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}' := \mathcal{S}(\mathcal{C}, F, G)$ kategóriát értünk, amelyre:

1. $\mathcal{OB}(\mathcal{S}) = \mathcal{OB}(\mathcal{S}')(\mathcal{C}, F, G)$;
2. $\forall f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{S}'-\mathcal{S}} : \exists g \in G : F(\text{dom}(f)) = \text{dom}(g), F(\text{targ}(f)) = \text{targ}(g), F(f) = g$.

Megjegyzés. Szemléletesen tehát, adott kategóriát úgy bővítünk egy kategória morfizmusaival, hogy azt előbb egy hű funktor révén *beágyazzuk* a nagyobb kategóriába, majd onnan *átvesszük* az egyes morfizmusokat, felhasználva a két kategória objektumai közötti azonosítást. Az előző definíció 2. pontjára azért van szükség, mert ez az azonosítás általában nem egyértelmű, például adott halmaz felett több, különböző csoportstruktúra is megadható lehet.

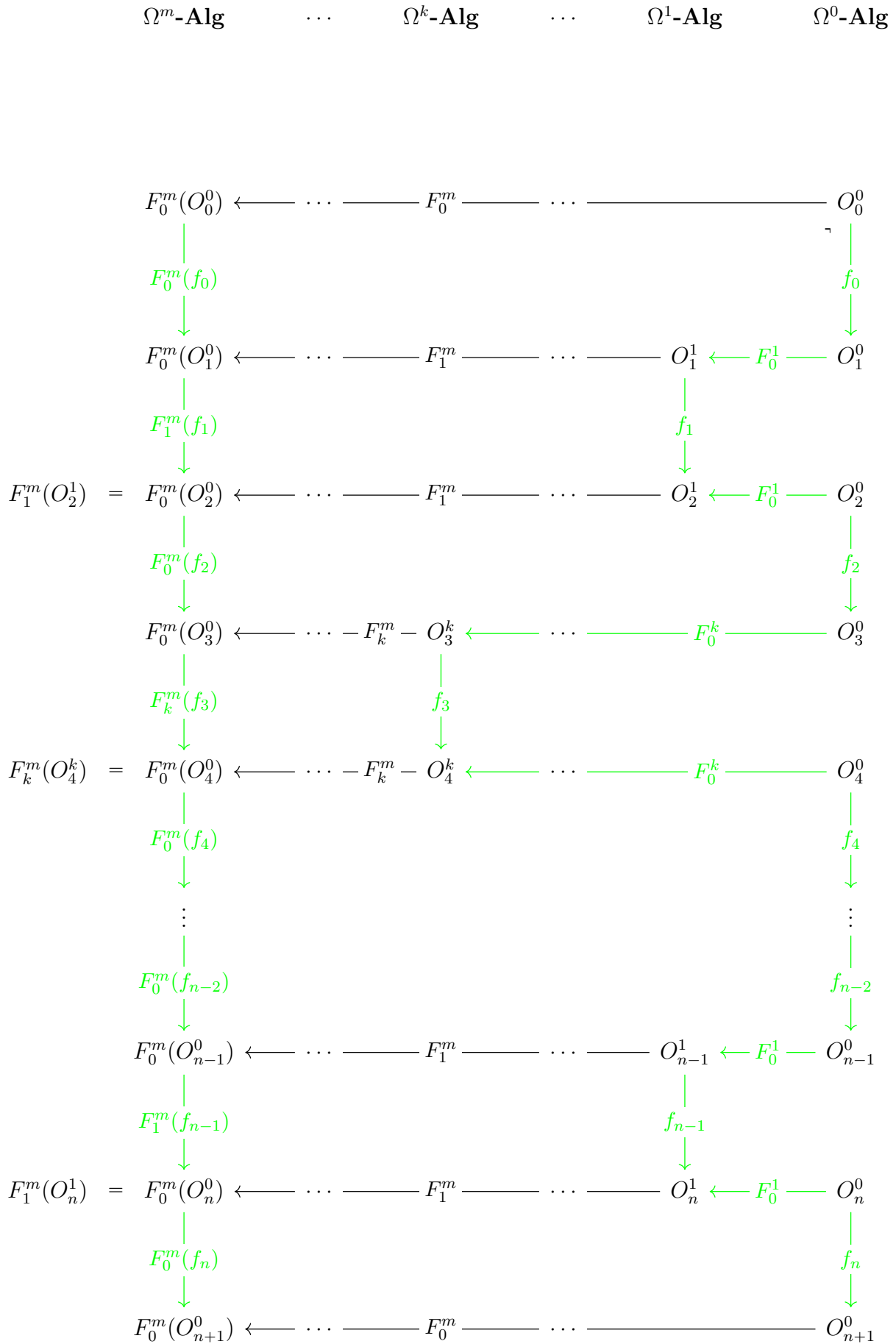
29. Definíció. [Kategória morfizmuscsaláddal való teljes gazdagítása hű funktor által]

Legyen $\mathcal{S}, \mathcal{C}$ két kategória, $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ hű funktor, az $F(\mathcal{OB}(\mathcal{S})) \subseteq \mathcal{OB}(\mathcal{C})$ objektumai közötti morfizmusok egy családjá $G := \{g_i \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}-F(\mathcal{S})} : \text{dom}(g_i), \text{targ}(g_i) \in F(\mathcal{OB}(\mathcal{S})), i \in \mathbf{I}\}$, ahol $\mathbf{I}$ indexhalmaz. Az $\mathcal{S}$ kategória G morfizmuscsaláddal való F általi teljes gazdagítása alatt azt az $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{S}} := \mathcal{S}(\mathcal{C}, F, G)$ kategóriát értjük, melyre minden olyan $O \in \mathcal{OB}(\mathcal{S})$ objektumra, melyre valamely $g \in G$ mellett $F(O) = \text{targ}(g)$, egyben létezik is az az $f \in \mathcal{HOM}_{\tilde{\mathcal{S}}-\mathcal{S}}$ leképezés, melyre $F(\text{dom}(f)) = \text{dom}(g), F(\text{targ}(f)) = \text{targ}(g), F(f) = g$.

A kategóriabővítés függ attól az azonosítástól, melyet az F hű funktoron keresztül megadunk. Ugyanakkor, néha van lehetőség természetes azonosításra, például ha egy $\Omega\text{-Alg}$ kategóriát egy szegényebb $\Omega' \leq \Omega$ algebrai struktúrához tartozó $\Omega'\text{-Alg}$ kategória morfizmusaival bővítünk a felejtő funktor révén. Azt is megtehetjük, hogy egy kategóriát többször is gazdagítunk, ekkor különböző típusú morfizmusokkal dolgozhatunk majd adott objektumok között. Ezek közül a dolgozatomból szempontjából legfontosabb eset, amikor adott struktúrájú algebraik¹¹ $\Omega^m \leq \dots \leq \Omega^2 \leq \Omega^1 \leq \Omega^0$ láncából képzett kategóriákon keresztül bővítjük.

¹⁰A gazdagítás szót általában más kontextusban is használják a kategóriaelméletben; ekkor a morfizmusok halmazát egy adott kategória objektumaival helyettesítjük ahhoz, hogy extra struktúrával rendelkező, általánosabb kategóriafogalmat nyerjünk.

¹¹Itt alkalmazom az $\mathcal{O}\mathcal{J}\text{-Alg} = \mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{T}$ azonosítást.



2.4. ábra. $\Omega^m \leq \dots \leq \Omega^2 \leq \Omega^1 \leq \Omega^0$ -gazdagított $\Omega^0\text{-Alg}$ kategóriában való megoldásreprezentálás szemléltetése.

Ekkor a beemelt morfizmusok mind megőriznek valamilyen egyszerűbb struktúrát, így összesen $m + 1$ különböző morfizmus-típusból alkotott leképezési láncokkal próbálhatunk számítási feladatokat megoldani. Egy ilyen bővített kategóriában végesen realizált $(f, \Omega^m\text{-Alg})$ számítási feladatot szemléltet a 2.4-es ábra. A többlépéses gazdagítás definíciója egyértelmű, ugyanakkor, mivel tekinthető egyetlen $\Omega^m\text{-Alg}$ kategóriához tartozó bővítésnek, ezért külön nem tárgyaljuk.

2.4. Speciális esetek, példák

A módszer, amit számítási feladatok reprezentációjára bevezettünk az előző szakaszban, talán túl speciálisnak tűnhet. Mi több, első ránézésre talán azzal kapcsolatban is kétségeink merülhetnek fel, hogy ilyen speciális keretrendszerekben belül megvalósítható módon lehetne robosztus keretrendszereket reprezentálni és tárgyalni.

A valóságban azonban ezek a konstrukciók nem csak matematikai szempontból tűnnek természetesnek. Ennek alátámasztásául szerepeljen itt két példa olyan keretrendszerekre, melyek robosztussága vitán felül áll, és amelyek természetesen beilleszthetők az eddig tárgyalt keretek közé.

2.4.1. A kvantummechanika keretrendszere - szemantikus modellek

A kvantummechanika keretrendszerét sokféleképp fel lehet építeni, melyek mindegyike más-más szemléletet helyez előtérbe. A most következő felépítés előnye, hogy értelmezhető keretet ad a megjelenő mennyiségeknek, és nem igényel több évnnyi fizikusi előismeretet a megértéshez. Emellett a tárgyalás kellően általános és természetes ahhoz, hogy más keretrendszerekkel is összeköthető legyen, és érthetően rávilágítson, miért *várható*, hogy egy ilyen elveken nyugvó modell robosztus legyen. E felépítéssel máshol még nem találkoztam, azután készítettem el, hogy a klasszikus fizika filozófiai elvekből való levezetésén gondolkodva sikerült absztrahálnom a mindkét (klasszikus és kvantum) keretrendszerben megjelenő, hasonló fogalmi rendszereket.

A kvantummechanika alapproblémája a következő: adott egy zárt rendszer, amiről tudjuk, hogy legfeljebb megszámlálható sok állapotban lehet. Le szeretnénk írni ezt a rendszert.

Vezessük be a mérhető állapotok $A \subseteq \mathbb{N}$ halmazát, és rögzítsünk hozzá egy $\sigma : A \rightarrow S$ bijekciót. Az egyszerűség kedvéért S lehet megkülönböztető szövegek halmaza, például megfelelő lehet a $\sigma(3) = \text{"A hidrogén-atom 3. gerjesztett állapotban van."}$. A lényeges, hogy van egy ilyen rögzített σ leképezésünk. Ezután tekinthetünk úgy az A halmazra, mint szimbólumok halmazára, melyen bevezethetünk egy triviális függetlenségfogalmat egy $(\bullet, \bullet) : A \times A \rightarrow \{0, 1\}$ triviális skalárszorozattal a következőképp:

$$\forall a, b \in A : (a, b) := \begin{cases} 1, & \text{ha } a = b, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezután adott $\mathbb{K}$ test mellett (ez esetünkben $\mathbb{C}$, de $\mathbb{R}$ is lehetne a konstrukcióban, csak akkor a Hamilton-operátorral triviális időfejlődést kapnánk) bevezethetjük az A független szimbólu-

mok formális lineárkombinációit, mégpedig az e szimbólumok, mint független generátorok által szabadon generált $\mathbb{K}$ -modulusként: $\mathcal{H} := \mathbb{K}\langle A \rangle$. Erre a $\mathbb{K}$ -modulusra (szeszкви)lineárisan kiterjeszthetjük a skalárszorzatot, kapva egy $(\bullet, \bullet) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ leképezést, amivel továbbra is lehet függetlenséget definiálni két $\mathcal{H}$ -beli elem között.

Amit eddig leírtam, nem specifikus a kvantummechanikára, pusztán indokolja, hogy tetszőleges zárt fizikai rendszerhez hozzá lehet rendelni ilyen módon egy szemantikával rendelkező modellt, ahol a rendszernek egy $\mathcal{H} = (\mathbb{C}\langle A \rangle, (\bullet, \bullet))$ alakú $\mathbb{C}$ -Hilbert-teret lehet megfeleltetni. Ez motiválja az alábbi definíciót:

30. Definíció. [Zárt, szemantikával rendelkező $\mathbb{K}$ -modell]

A $(\sigma, \mathcal{H})$ párt zárt, szemantikával rendelkező modellnek nevezzük, ha $\sigma \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{SET}}$ teljesül, illetve $\mathcal{H} = (\mathbb{K}\langle \text{dom}(\sigma) \rangle, (\bullet, \bullet)) \in \mathbf{Hilb}$ és $(\bullet, \bullet)|_{\text{dom}(\sigma) \times \text{dom}(\sigma)}$ triviális skalárszorzat.

Innentől kezdve, ha a rendszer zárt, akkor nem lehetnek olyan kölcsönhatások, melyek miatt a kiinduláskor meghatározott lehetséges mérési eredmények A halmazát bővíteni kellene. Így a fizikai rendszerem további leírásához elegendő ismernem az annak megfeleltethető zárt, szemantikával rendelkező modellt, illetve az abban megjelenő Hilbert-tér auto- és endomorfizmusait. Ezeknek feleltetjük meg magukat a fizikailag mérhető mennyiségeket. Emellett, mivel a formális szimbólumok részhalmazai a természetes számok halmazának, bevezethetünk közöttük egy rendezést, amivel e generátorok láncot alkotnak. Ezután a legkisebb generátor, illetve az adott generátorból a legkisebb, nála nagyobb generátorba vivő leképezésekkel egyértelműen jellemezhetővé válik tetszőleges generátor, vagyis a Hilbert-tér elemei is egy az egyben megfeleltethetők a tér speciális endomorfizmusainak. A kvantummechanika esetében létezik egy kitüntetett automorfizmus is, mely tulajdonképpen a $\iota : A \hookrightarrow \mathcal{H}$ *tiszta* állapotok determinisztikus időfejlődéséből nyerhető ki, ezek direkt összegeként hat a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér elemein.

Ebből a szemszögből a kvantummechanika mérésfogalma egy kicsit erőltetett. A rendszer $\mathcal{H} \ni \psi(0)$ kezdeti állapota fejlődik az időben az időfejlesztés $(U_t)_{t \in (0, \infty)}$ operátorfélcsoportjának generátorát megadó H Hamilton-operátornak megfelelően adott T ideig, amikor is a $\psi(t) = U_T(\psi(0))$ állapotba kerül. Ekkor, *megnyitjuk* a rendszert, és lemérjük, milyen állapotban van: ez egyike lesz a $\iota : A \hookrightarrow \mathcal{H}$ állapotoknak, hiszen így definiáltuk az A halmazt. Jelöljük a mérés eredményét $a \in \text{im}(\iota)$ -val. E mérés során két leképezés valósul meg: egy nemlineáris morfizmus (amely nem része a $\mathbf{Hilb}$ kategóriának), amivel a rendszer kurrens állapotából egy valószínűségi eloszlást képzünk, és egy nemdeterminisztikus kiválasztás, amely ennek a valószínűségi eloszlásnak megfelelően kiválasztja az a mérési eredményt¹². Ha ismerjük, milyen állapotból indult a rendszer, és ismerjük a belső dinamikáját, a T időpillanatban a $(\psi(T), a) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ információ áll rendelkezésre a rendszerről, ami már *nincs benne* abban a zárt, szemantikus modellben, amivel a zárt rendszert leírtuk. A mérésről azonban feltesszük, hogy pillanatszerűen történik, és nem hordoz magában lényeges kölcsönhatásokat, vagyis ha később ismét eltávolodunk a rendszertől, az ismét zártnak tekinthető majd, és ugyanazzal a

¹²Ebben a szemléletben a kvantummechanika nemdeterminisztikus volta tulajdonképpen abban áll, hogy egy zárt rendszeren belül nem állapítható meg egy tetszőleges külső beavatkozás hatása a rendszerre. Ameddig nincs ilyen beavatkozás, a rendszer állapotai időben determinisztikusan fejlődnek.

zárt, szemantikus modellel lehet leírni, amivel a mérés előtt is. Így a későbbiekben csak annyi változás történik, hogy a $\psi(T)$ állapotot felváltja az a állapot, és ez fejlődik tovább: *összeomlik a hullámfüggvény*. Ebben az értelmezésben a méréshez szükséges kölcsönhatás minden hatása a rendszer állapotának meghatározottá válásában van. Ezt szemlélteti a 2.5-ös ábra.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{H} & \xrightarrow{U_T} & \mathcal{H} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{H} \oplus A & \xrightarrow{id_{\mathcal{H}} \oplus \iota_A} & \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{H} & \xrightarrow{U_{\bullet}} & \mathcal{H} \\
 \psi & & \psi & & \psi & & \psi & & \psi & & \psi \\
 \psi(0) & \longmapsto & \psi(T) & \longmapsto & (\psi(T), a) & \longmapsto & (\psi(T), a) & \longmapsto & a & \longmapsto & U_{\bullet}(a)
 \end{array}$$

2.5. ábra. A mérés koncepciója a kvantummechanikában.

Tehát, hogy a rendszert azonos Hilbert-teren belül tudjuk modellezni azután is, hogy mérést végeztünk rajta, kényszerűen el kell jutnunk a hullámfüggvény összeomlásának gondolatához. Egy ilyen rendszernek pedig nincs memóriája, a mérés előtti állapotokhoz nem férhetünk hozzá, az abban tárolt információt nem tudjuk felhasználni. Ez a kvantumszámítás egyik legnagyobb nehézsége, de nem szükségszerűen kiküszöbölhetetlen. Pusztán formálisan, minden mérés után újabb Hilbert-teret kellene bevezetnünk, és annak az állapotaival, illetve időfejlődésével felváltani az előző szemantikus rendszert, amit véges sok mérés esetén még meg tudnánk tenni: az n . mérés után $\mathbb{C}\langle A^{n+1} \rangle$ megfelel. Ebben a szemszögben egy operáló, számítást végző kvantumszámítógépnek, amellyel műveleteket végeztetünk és amelyből kiolvassuk a számítások eredményeit, nem egy $H \in \mathbf{Hilb}$ objektum a megfelelő modellezési keret, hanem egy $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{Hilb}$ részkategória, ahol az egyes mérések közötti idő során az időfejlődések adott objektumok automorfizmusai, a fizikai mennyiségek ezen objektumok endomorfizmusai, és a mérések különböző objektumok közötti morfizmusok. Ez motiválja a nyílt, szemantikával rendelkező modellek definícióját:

31. Definíció. [Nyílt, szemantikával rendelkező modell]

Nyílt, szemantikával rendelkező modellnek nevezzük a $(\mathcal{C}, S, H)$ hármast, ha $S : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{SetMaps}$ kontravariáns funktor, $H : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ kovariáns funktor, minden $i \in \mathcal{OB}(\mathbf{n}) = \{0, \dots, n\}$ esetében $(S(i), H(n-i))$ zárt, szemantikával rendelkező modell, és $H(\mathbf{n}) \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathbf{Hilb}$ úgy, hogy $H(\mathcal{OB}(\mathbf{n})) = \mathcal{OB}(\mathcal{C})$ teljesül.

Megjegyzés. A nyílt, szemantikával rendelkező modell tehát egymásba ágyazható Hilbert-terek, mint objektumok közötti morfizmusokat tartalmazó részkategóriája $\mathbf{Hilb}$ -nek, amely objektumok mindegyikéhez tartozik egy $S(n)$ halmazleképezés: ez értelmezi a megfelelő Hilbert-terek generátorait, és ezen értelmezések egymás kibővítései, ahogy bővítjük az adott Hilbert-tereket.

E bekezdés tartalma erősen hipotetikus, de az eddig kidolgozott formalizmus lehetőséget ad a tárgyalására. Ez a szemlélet azért lehet hasznos, mert segíthet olyan kvantummechanikai modelleket kidolgozni, melyekben már memóriával tudjuk ellátni a kvantum, mért rendszereket¹³. Ha sikerül megérteni, konkrétan milyen információ maradhat meg adott kölcsönhatás után egy kvantum állapotból, ha nem ennyire idealizált kölcsönhatásokkal modellezzük a

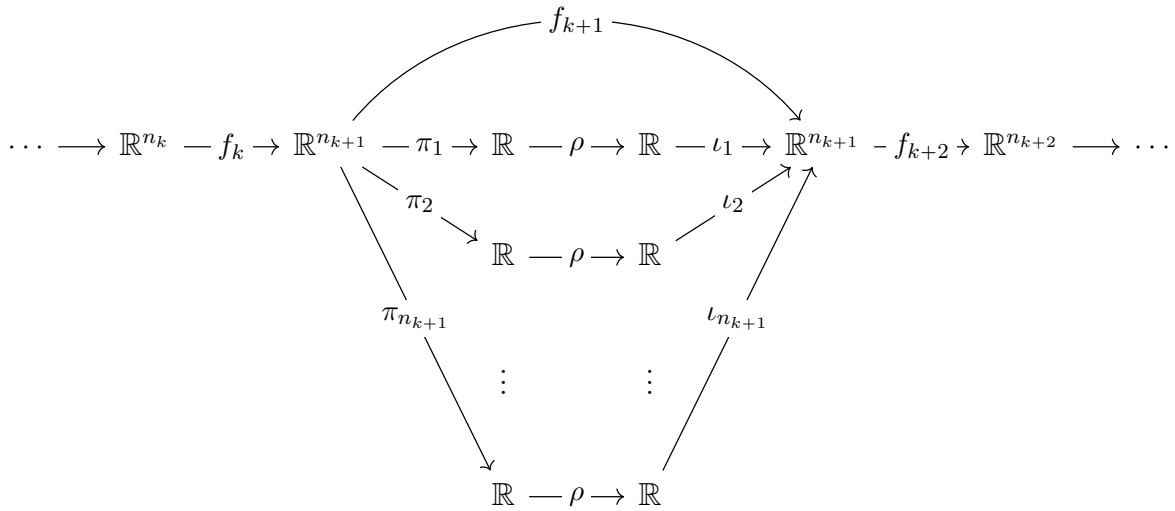
¹³Például, ha két azonos, mondjuk A és B rendszerben azonos időben azonos kezdőállapotban kezdünk el állapotokat fejleszteni, majd az egyik, mondjuk A rendszerben lemérem az állapotot egy adott t időben, majd engedem, hogy tovább fejlődjön a rendszer, a másikon, B rendszerben még marad hozzáférésem a $\psi(t)$ állapot-

mérés folyamatát, talán lehet esély arra, hogy a napjainkban csak rövid ideig fenntartható összefonódás is hasznos lehessen nagyobb léptékű feladatok megoldásában.

2.4.2. $\mathbb{K}$ -Mod gazdagítása $\mathcal{SET}$ -el: az egyszerű neurális hálók

Ismerünk példát, amikor adott kategóriát elegendő egyetlen morfizmussal gazdagítani, hogy lényegesen megugorjon az így nyert kategória számítóképesége. Ilyet legegyszerűbb esetben akkor kapunk, amikor az $\mathbb{R}$ -vektorterek¹⁴ kategóriájának képezzük a teljes gazdagítottját a halmazok kategóriájából átvett $\mathcal{HOM}_{\mathcal{SET}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ni \text{ReLU} := \text{id}_{\mathbb{R}} \cdot \Theta$ morfizmussal, ahol $\Theta(x)$ a Heaviside-függvény. Az egyszerűség kedvéért ezt a leképezést a későbbiekben ρ -val jelöljük majd. Jelöljük a teljes gazdagítás eredményeképp kapott kategóriát $\mathbb{R}\text{-vekt}$ '-vel. Ebben tetszőleges $(f, \mathcal{SET})$ számítási feladat végtelen sokféleképp egzaktul megoldhatóvá válik már csak a legegyszerűbb nemtriviális objektum használatával is, amennyiben $\text{dom}(f)$ véges.

Egy tipikus $\mathbb{R}\text{-vekt}$ '-beli morfizmust a 2.6-os ábra prezentál: itt affin leképezések és az egyes komponensekre való kanonikus projekciókra alkalmazott ρ leképezések eredményeinek kanonikus beágyazásaiból kapott leképezések váltják egymást. A ρ leképezés egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy a halmaz egy részén identitásként viselkedik, tehát megfelelő bemenet mellett egy ilyen leképezés egyszerűen affin transzformációt ír le. Ha a ρ leképezés helyett más *nemlineáris* leképezésekkel (is) gazdagítottuk volna a kiindulási kategóriánkat, másféle neurális hálót kaptunk volna.



2.6. ábra. Tipikus morfizmus $\mathbb{R}\text{-vekt}$ '-ben

Megjegyzés. Amikor egy feladatot véges sok példa révén definiálunk, akkor egy részfeladatának reprezentációját adjuk. Eszerint minden feladat véges részfeladatát végtelen sokféleképp egzaktul meg tudjuk oldani ebben a kategóriában, amiért végső soron a kategóriaváltás a felelős.

hoz annak későbbi $\psi(t')$ állapotai révén. Más lehetőség, hogy véges szabadsági fokú rendszerben, ha megfelelőek (azaz racionálisak) a sajátfrekvencia-arányok, fel tudok használni egy időbeli periodicitást arra, hogy a mérést követően is elő tudjam állítani a mérés pillanatában fennálló állapotát a rendszernek, így például a B rendszerben előre meghatározható idő múlva ismét előáll a $\psi(t)$ állapot, amit az A rendszerben a mérés miatt elvesztettem. Így nem teljesen kizárt, hogy kölcsönhatásba tudjuk hozni egy adott rendszer mérés előtti állapotát mérés utáni állapotával, aminek a leírására ugyanakkor a dolgozatomban bemutatott keretrendszer kellő alapot adna.

¹⁴Az $\mathbb{R}\text{-vekt}$ kategória egy speciális esete az $\Omega\text{-Alg}$ kategóriáknak.

Annak a megértése és absztrahálása, hogy konkrétan milyen algebrai tulajdonságok változnak meg az $\mathbb{R}$ -vekt-ből $\mathbb{R}$ -vekt'-be való áttérés során, és ezeket az algebrai tulajdonságokat tetszőleges más kategóriáknál hogyan lehetne azonosítani, hatalmas jelentőségű lenne annak eldöntésében, hogy jelen számítási rendszereinket milyen irányba érdemes fejleszteni, és e fejlesztésektől milyen tényleges számítási teljesítmény-robbanást várhatunk.

2.4.3. Lokális k -homomorf gépek

Ha összehasonlítjuk az előző két példát, számos hasonlóságot találhatunk közöttük. A kvantummechanika és az egyszerű neurális hálók esetében is egyszerű Ω struktúrájú Ω -Alg kategóriákból indulunk ki, melyek objektumai viszonylag laza struktúrával rendelkeznek, így még egészen sokféle morfizmussal rendelkezik a kategória. Zárt kvantumos rendszer és egyszerű neurális háló is lineáris terekben reprezentálja azt az információt, amelyet aztán ezek közötti morfizmusok révén képez tovább.

A kvantumos analógia folytatásához szükség lenne a mérés fogalmának megfelelőjére egyszerű neurális hálók esetén. Ahogy láttuk, kvantummechanikailag sem lenne helyes eltekinteni attól, hogy a mérést megvalósító leképezés természetében nagyon más, mint a többi, a zárt rendszerhez kapcsolt leképezés, és csak nemtermészetes azonosításokon keresztül tekinthető egy nemdeterminisztikus projekciónak a Hilbert-téren belül, ráadásul azzal az árral, hogy a méréssel járó kölcsönhatást a rendszerrel elhanyagolhatónak tekintjük, amelynek a rendszer állapotának összeomlásán túl semmilyen minőségi következménye nincs, vagyis a későbbi rendszer belső dinamikája azonos marad a mérés előtti rendszer dinamikájával. Természetesen lehetőség van ilyen leképezés megvalósítására egyszerű neurális hálók esetében is: szöveggenerálás esetén például a mérés során fellépő nemlineáris valószínűségi eloszlás-generálás elvégezhető akár egy $\pi_i(\text{softmax}(x_1, \dots, x_n)) := \frac{\exp(x_i)}{\exp(x_1 + \dots + x_n)}$ leképezéssel¹⁵, majd ezzel a valószínűségi eloszlással választhatunk egy új karakterláncot a szótárunkból, amelyet hozzácsatolunk a már meglévő bemenetünkhöz, mint mérési eredményt, végül a kettő állapot összességével folytatjuk a szöveggenerálást azonos elven. Ez struktúrájában szintén nagyon hasonló a nyílt, szemantikával rendelkező modellekhez.

Természetesen, akadnak különbségek is a két modell között. A kvantummechanika esetében elég végig egyetlen hatalmas lineáris térrel dolgozni, és minden transzformációt felfoghatunk e tér auto- vagy endomorfizmusának, melyek mindegyikét fizikai mennyiségnek tekinthetjük. Az egyszerű neurális hálók esetében gyakran nincs lehetőség akkora dimenziós térrel dolgozni, amelyben kényelmesen reprezentálni tudnánk a különböző információk függetlenségét a térhez tartozó klasszikus skalárszorozattal¹⁶, és így nincs lehetőség arra sem, hogy egy lineáris tér egyetlen endomorfizmusával végezzük el a kvantummechanikával analóg számításokat. Ebben segít a kategóriagazdagítás: mivel a ρ leképezés a tér egy részét annak kijelölt nullelemébe képezi, más részén pedig identitásként hat, így eredményképp egy alacsonyabb dimenziós tér konvex

¹⁵Hasonlóan a $\psi \mapsto \frac{|\psi|^2}{\int_{\mathcal{M}} |\psi|^2}$ leképezéshez a kvantummechanikából, ahol $\mathcal{M}$ az a sokaság, amelyen az elmélet értelmezve van.

¹⁶Tudjuk, hogy $\mathbb{R}\text{-vekt} \subseteq \mathbf{Hilb}$, így az analógia a két módszer között még szorosabb.

régiókra való felosztását kapjuk, melyeken belül azonos lineáris gépként viselkedik a kategória egy általános véges morfizmuslánc: egyszerre kódolhatunk el *rengeteg* különböző lineáris leképezést. Lokálisan homomorfizmusokat (amit a vektorterek kategóriájában lineáris, illetve affin leképezéseknek nevezünk) elvégző rendszert kapunk tehát. Végül pedig egy feladat megoldásának nehézsége abban áll, hogy adott morfizmushoz megtaláljuk azt a beágyazást egy ilyen alacsony dimenziós térbe, mely a megfelelő bemenetek csoportjához a megfelelő lineáris gépet rendeli. Így tulajdonképpen be lehetne ágyazni a teljes megoldást az egyes konvex régiókat reprezentáló lineáris terek direkt összegéből képzett Hilbert-térbe, amelyen belül ezután az egyszerű neurális hálók funkcionálisan nem különböznek e Hilbert-tér valamely, e direkt összegeken értelmezett endomorfizmusai direkt összegeinek kompozícióitól. Mivel egy Hilbert-tér tipikus morfizmusa nem bomlik fel alterek direkt összegein vett komponensekre (sőt, ez a feltételezés kölcsönhatások elhanyagolását jelenti a leggyakrabban), így egy egyszerű neurális háló kevésbé robosztus modellt ad, mint egy általános zárt szemantikus rendszer. Természetesen, ez nem jelenti azt, hogy egy egyszerű neurális háló ne lehetne kellően robosztus adott feladat megoldásakor. Végző soron a modelleket tényleges rendszerek leírására szeretnénk alkalmazni, melyeknek van jellemző belső struktúrája: kvantumos rendszer esetében például magasabb gerjesztések, vagy nyelvben a fogalmak előfordulási gyakoriságai olyan szempontok, melyeket figyelembe véve a tényleges rendszer kifogástalan leírásához szükségesnél alacsonyabb dimenziós szemantikus rendszerrel vagy egyszerű neurális hálóval is alkothatunk nagyon jó közelítő modelleket. Az, hogy legalább milyen dimenziós objektumokat kell alkalmaznia egy ilyen modellnek, nem a modell tulajdonsága, hanem a leírni kívánt rendszeré. Így az, hogy adott, egyszerűsített modell látszólag kezelhetően leír egy összetett rendszert, nem pusztán a modellt dicséri, de a kérdéses rendszerről (jelen példák esetén egy energetikailag gerjeszthető rendszerekről vagy a nyelvről) is információkat szolgáltat.

32. Definíció. [Lokális homomorf $\mathcal{D}$ -gép, térfelosztás, munka- és bizonytalansági tér]

Legyen $\mathcal{D}$ tetszőleges, $\mathcal{C}$ pedig egy mérhető topologikus kategória¹⁷, $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ kovariáns hű funktor. Az $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}$ morfizmust lokális homomorf $\mathcal{D}$ -gépnek nevezzük, ha létezik $\text{dom}(f)$ -beli nyíltaknak olyan $\mathcal{U} = \{U_i \in \tau_{\text{dom}(f)} : i \in \mathbf{I}\}$ rendszere, melyre $\forall i \in \mathbf{I} : f|_{U_i} \in \mathcal{HOM}_{F(\mathcal{D})}$, és $\mu(\text{dom}(f) - \bigcup \mathcal{U}) = 0$, ahol μ a $\text{dom}(f)$ téren értelmezett mérték. A legszűkebb ilyen $\mathcal{U} =: \mathcal{U}(f)$ nyílt rendszert az f lokálisan homomorf gép térfelosztásának, $\mathcal{M} := \bigcup \mathcal{U}(f)$ -et f munkaterének, a $\text{dom}(f) - \mathcal{M}(f) := \mathcal{B}(f)$ részobjektumot pedig f bizonytalansági terének mondjuk.

Megjegyzés. Lokális homomorf gép tehát majdnem minden pont környezetében egy homomorfizmusként működik, ezeket a pontokat egymástól pedig nullmértékű halmazok választják el. Emellett egy $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}$ lokális homomorf $\mathcal{D}$ -gép természetes módon definiál egy $\sim_f$ ekvivalencia-relációt annak $\mathcal{M}(f)$ munkaterén, amit az azonos térfelosztáshoz tartozás jelöl.

33. Definíció. [Ekvivalencia-topológia lokális homomorf $\mathcal{D}$ -gép munkaterén]

Legyen $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}$ lokális homomorf $\mathcal{D}$ -gép. Ekkor a $\mathcal{P}(\mathcal{M}(f)) \supseteq \tau_f$, mint $\mathcal{U}(f)$ bázis által

¹⁷Mérhető topologikus kategória alatt olyan kategóriát értünk, mely minden objektuma topologikus- és mértéktér is egyben.

generált topológiát az $\mathcal{M}(f)$ munkatér ekvivalencia-topológiájának nevezzük. Két $x, y \in \mathcal{M}(f)$ pontot f -ekvivalensnek mondunk, jelölésben $x \sim_f y$, ha $\exists U_{x,y} \in \mathcal{U}(f) : x, y \in U$.

Megjegyzés. A fenti τ_f topológia általában ritka, az $(\mathcal{M}(f), \tau_f)$ topologikus tér várhatóan még csak T_1 sem lesz. Az $(\mathcal{M}(f), \tau_f) / \sim_f$ faktortér azonban már általában szép tulajdonságú.

Az egyik fontos speciális eset, ha gazdagított moduluskategóriákon belül dolgozunk, és a homomorfizmusok legfeljebb k -rendű R -multilineáris kifejezések R -lineárkombinációi:

34. Definíció. [Lokális k -homomorf $R\text{-}\mathbf{Mod}'$ -gép]

Legyen $R\text{-}\mathbf{Mod} \subseteq \mathcal{C}$ egy mérhető topologikus kategória. Az $f \in \mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}$ morfizmust lokális k -homomorf $R\text{-}\mathbf{Mod}'$ -gépnek nevezzük, ha lokális homomorf $R\text{-}\mathbf{Mod}'$ -gép és minden nem a $\mathcal{SET}$ -gazdagításból származó morfizmusa legfeljebb k -rendű R -multilineáris kifejezések R -lineárkombinációja.

Megjegyzés. A lokális k -homomorf $R\text{-}\mathbf{Mod}'$ -gép fogalma általánosítja az egyszerű neurális háló fogalmát. Az egyszerű neurális ReLU-hálók nemtriviális példát adnak lokális 1-homomorf $R\text{-}\mathbf{Mod}'$ -gépekre.

A fenti két példa egyrészt arra jó, hogy láthatóvá váljon, miért remélhetünk úgy a kvantummechanika, mint az egyszerű neurális hálók mögött álló modelleszaládtól robusztusságot. A két modell: kvantummechanika és neurális hálók ismerete, mint oly' sokszor a számítás- és természettudományok kölcsönhatása során, mindkét területet fejleszti azáltal, hogy lehetőséget és alkalmat ad ötletek átemelésére egyikből a másikba. Másrészt, ezek a modellek igen speciális példái annak a keretrendszernek, melyet e fejezetben felépítettünk, és amelyekről ezért joggal gondolhatjuk, hogy érdemes őket általánosabb algebrai módszerekkel is vizsgálni, hiszen e szemlélet vezetett el e keretek megfogalmazásához is.

3. fejezet

Számítási feladatok leképezési diagramjai

Amikor egy rögzített kategóriában akarunk realizálni egy számítási feladatot, az elsődleges kérdések, melyek felmerülnek, a következők:

1. Létezik-e véges realizációja, *megoldása* a kiszemelt számítási feladatnak a kategóriánkban?
2. Ha nincs ilyen megoldás, milyen közelítő megoldásokat lehet tervezni?
3. Ha van ilyen megoldás, akkor:
 - (a) A kategória milyen objektumaival lehet őt kódolni?
 - (b) Mennyi (inekvivalens) megoldás létezik? Egyáltalán mit értünk az alatt, hogy két megoldás ekvivalens?
 - (c) Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a megoldások? Melyek a *legjobb* megoldások? Létezik-e *hatékony* megoldás? Tudunk valamit mondani a feladat összes lehetséges megoldásáról?
 - (d) Vannak-e végességi feltételeink? Mikor lesz véges sok inekvivalens megoldásunk¹?
 - (e) Ha ismerjük véges sok megoldását a feladatnak, fel tudjuk-e használni ezt arra, hogy új megoldásokat keressünk?

Ebben a fejezetben ilyen és ehhez hasonló kérdéseket járunk végig.

3.1. A fő objektumok: kommutatív diagramok

Amikor egy $(f, \mathbb{C})$ számítási feladatot realizálni akarunk egy $\mathcal{D}$ kategóriában F kovariáns hű funktor szerint, ha létezik megoldás, az egy leképezési lánc lesz a $\mathcal{D}$ kategóriában, melyre az egyetlen megszorítás a kiinduló- és végobjektumok (részleges) rögzítettsége².

¹Ha a triviális ekvivalenciafogalommal dolgozunk, akkor egy megoldás létezéséből tipikusan végtelen sok további megoldás is következik, így a végességi feltételek kérdésére a válasz függ nemcsak a számítási feladattól és a kategóriától, amelyben reprezentálni szeretnénk azt, de attól is, hogy milyen ekvivalenciafogalmat vezettünk be.

²Mivel egy $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ hű funktor több $O \in \mathcal{OB}(\mathcal{D})$ objektumot is képezhet ugyanabba az $O' \in \mathbb{C}$ objektumba, így egy $(f, \mathbb{C})$ számítási feladat minden $\mathcal{D}$ -beli F szerinti megoldáshoz tartozó lánc egy lehetséges $(f, \mathbb{C})$ -hez tartozó bemeneti, illetve kimeneti objektumot köt össze a gyakran sok lehetőség közül.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy rögzítettünk egy $(f, \mathcal{C})$ -hez tartozó $O_{\text{in}} \in \mathcal{O}_{\text{in}}(f)$ be- és $O_{\text{out}} \in \mathcal{O}_{\text{out}}(f)$ kimeneti objektumot, és vizsgáljuk csak azokat a megoldásokat, melyek O_{in} -ből indulnak és O_{out} -ba futnak be. Ha létezik több ilyen megoldás is, azokat egyetlen diagramon feltüntethetjük, vagyis az összes lehetséges megoldás elkódolható valamilyen $(D_{O_{\text{in}}, O_{\text{out}}} : \mathcal{S}_{O_{\text{in}}, O_{\text{out}}} \rightarrow \mathcal{D})_{O_{\text{in}} \in \mathcal{O}_{\text{in}}(f), O_{\text{out}} \in \mathcal{O}_{\text{out}}(f)}$ leképezési diagramokkal, melyek kommutatívak:

35. Definíció. [Számítási feladat hű funktor szerinti összes megoldása adott kategóriában]
Legyen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ két kategória, $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ kovariáns hű funktor. Az $(f, \mathcal{C})$ számítási feladat F szerinti összes $\mathcal{D}$ -beli megoldásán egy olyan $\tilde{D}_F(f) := (D_{O_{\text{in}}, O_{\text{out}}} : \mathcal{S}_{O_{\text{in}}, O_{\text{out}}} \rightarrow \mathcal{D})_{O_{\text{in}} \in \mathcal{O}_{\text{in}}(f), O_{\text{out}} \in \mathcal{O}_{\text{out}}(f)}$ halmazt értünk, ahol $\mathcal{S}_{O_{\text{in}}, O_{\text{out}}}$ $\mathbb{U}$ -kis kategória, és minden $D_{O_{\text{in}}, O_{\text{out}}}$ megoldási diagram maximális, vagyis annak tetszőleges lánc $\mathcal{D}$ -ben F szerint realizálja az $(f, \mathcal{C})$ számítási feladatot és nincs olyan O_{in} -ből O_{out} -ba menő F szerinti $\mathcal{D}$ -beli realizációja $(f, \mathcal{C})$ -nek, amit $D_{O_{\text{in}}, O_{\text{out}}}$ láncként nem tartalmazna.

Megjegyzés. Tehát egy számítási feladathoz adott kategóriában hozzá tudunk rendelni tipikusan rengeteg diszjunkt gráfot. Ez a hozzárendelés minden információt tartalmaz, amit a kategória szolgáltatni képes, így e gráf tulajdonságainak a vizsgálata a legtöbb, amit tehetünk.

A következő természetes kérdés, hogy mi történik olyan számítási feladatok megoldásaival, amelyeket komponálva új számítási feladathoz lehet jutni:

36. Definíció. [Komponálható számítási feladat]

Legyen $\mathcal{C}$ rögzített kategória. Az $(f, \mathcal{C})$ számítási feladatot a $(g, \mathcal{C})$ számítási feladattal komponálhatónak nevezzük, ha $\text{targ}(f) = \text{dom}(g)$ teljesül, és ezek kompozíciója alatt a $(gf, \mathcal{C})$ számítási feladatot értjük.

37. Definíció. [Komponálható számítási feladatok megoldásainak kompozíciója]

Legyen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ két kategória, $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ kovariáns hű funktor, $(f, \mathcal{C}), (g, \mathcal{C})$ komponálható számítási feladatpár, $O_{\text{in}}^{(f)} \in \mathcal{O}_{\text{in}}(f), O_{\text{out}}^{(f)} \in \mathcal{O}_{\text{out}}(f), O_{\text{in}}^{(g)} = O_{\text{out}}^{(f)} \in \mathcal{O}_{\text{in}}(g), O_{\text{out}}^{(g)} \in \mathcal{O}_{\text{out}}(g)$. Legyen $O^{(f)} : \mathbf{n}^{(f)} \rightarrow \mathcal{D}, O^{(g)} : \mathbf{n}^{(g)} \rightarrow \mathcal{D}$ az egyes számítási feladatok F szerinti $\mathcal{D}$ -beli realizációja, melyek kezdő-, illetve végobjektumai az előző mondatban megadottak. Ekkor e megoldások alatt a két lánc kompozíciójául kapott $O^{(g)} \star O^{(f)} : \mathbf{n}^{(gf)} \rightarrow \mathcal{D}$ láncot értjük³. A megoldások komponálásának művelete kiterjed az összes megoldás komponálására, melyet ugyanúgy $\star$ -al jelölünk.

38. Állítás. [Komponálható számítási feladatok megoldásai]

Legyen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ két kategória, $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ kovariáns hű funktor. Bármely $(f, \mathcal{C}), (g, \mathcal{C})$ komponálható számítási feladat minden $\mathcal{D}$ -beli F szerinti összes megoldására létezik a $(gf, \mathcal{C})$ komponált feladatnak olyan $\mathcal{D}$ -beli F szerinti összes megoldása, hogy $\tilde{D}_F(g) \star \tilde{D}_F(f) \subseteq \tilde{D}_F(gf)$.

Bizonyítás. [A 38-es Állításáé]

Nyilvánvaló, hiszen az f és g tetszőleges realizációinak kompozíciója realizálja a gf leképezést, ugyanakkor a kategóriában létezhet olyan morfizmus, mely realizálja gf -et, de nem hasad fel az egyes komponens-leképezések realizációinak kompozíciójára. ■

³Itt $\mathbf{n}^{(gf)}$ értelemszerűen az $n_f + n_g - 1$ -ből, mint részben rendezett halmazból készített kategóriát jelöli, ahol n_f, n_g az egyes megoldások leképezési láncainak hosszát jelöli.

3.1.1. Számítási feladatok approximálása adott kategóriában

A későbbiekben azt fogjuk vizsgálni, hogy adott kategóriában realizálható számítási feladatokról milyen információkat nyerhetünk az adott kategórián belül a feladat minden megoldását tartalmazó diagramokból. Előbb azonban illene szólni néhány szót azokról az esetekről, amikor egy feladatot nem tudunk egzaktul megoldani, csak approximálni.

Adott számítási feladat approximálásának kérdése alapvető és gyakori problémának tűnik. Ugyanakkor, mint azt az előző fejezetben láthattuk, olyan feladatokat, melyekhez véges szemantikát tudunk rendelni, nagyon sokféleképp tudunk már egészen egyszerű gazdagított kategóriákban is reprezentálni akár zárt, szemantikus rendszerek, akár lokális homomorf gépek révén. Valójában ezt minden véges forrású számítási feladat megoldására el lehet mondani. Emiatt olyan, hogy a modellek elégtelenségei miatt kelljen approximálnunk valamilyen számítási feladatot, praktikus szempontból csak ritkán fordulhatna elő. Az approximáció tapasztalt gyakorisága sokkal inkább arra vezethető vissza, hogy gyakran mi magunk se tudjuk, milyen leképezést szeretnénk realizálni egy kategóriában, csak azt tudjuk róla, hogy véges sok példa esetében milyen viselkedést produkál, és van egy elképzelésünk arról, hogy nagyjából tetszőleges példa esetén milyen eredményt várnánk el tőle.

Ahhoz, hogy approximálni tudjunk egy kategóriában, egy lehetőség metrikát bevezetni a morfizmusok halmazain:

39. Definíció. [Metrikus kategória]

Az $\mathcal{C}$ kategóriát metrikus kategóriának nevezzük, ha minden $A, B \in \mathcal{OB}(\mathcal{C})$ objektumpárra $\mathcal{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$ metrikus tér.

Az, hogy egy kategóriában mikor lehet számítási feladatokat approximálni, nagyban függ a kategória objektumainak extra tulajdonságaitól. Például, a sima objektumokat azért szeretjük gyakran alkalmazni, mert a közöttük levő morfizmusokat gyakran sima morfizmusokkal approximálhatjuk, majd a kapott eredmény az approximált morfizmusról is információt ad. Ahhoz azonban, hogy egy kategórián belüli approximáció lehetőségéről beszéljünk, számos fogalmat kell definiálnunk: mit értünk approximálás alatt, milyen morfizmusokat milyenekkel akarunk approximálni, stb., amelyek az adott kategóriától is egyre több extra struktúrát várnak el. Emellett, nem pusztán approximálni szeretnénk, de azt valamilyen értelemben *jól* is szeretnénk végezni, amihez a priori szükséges lenne az összes morfizmus ismeretére és elemzésére, ami sokkal nehezebb feladat, mint konkrét megoldások összességének tulajdonságait vizsgálni. Nem véletlen, hogy approximációs tételeket gyakran speciális kategóriákban tudunk kimondani. Emiatt e dolgozatban nem térek ki az approximálás kérdésének részletesebb tárgyalására.

3.2. Megoldások ekvivalenciája és k -egzakt sorok

Amikor kiindulunk egy $(f, \mathcal{C})$ számítási feladat adott $\mathcal{D}$ kategórián belüli $O : \mathbf{n} \rightarrow \mathcal{D}$ realizációjából, rögtön felmerül a kérdés, hogy tudunk-e ebből a megoldásból *triviális* módon új realizációkat gyártani. Következzen néhány példa arra, amikor ez teljesül:

1. Valamely $\mathbf{I} \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ -re az $O(i)_{i \in \mathbf{I}}$ objektumokat vele izomorfokra cseréljük le;
2. A megoldásba beillesztünk egy identitásleképezést (ami lehet egy injekció, majd egy projekció kompozíciója);
3. *Elvégeztethetünk* a rendszerrel egy extra feladatot, aminek az eredményét aztán *kidobjuk*, vagyis egy $0 \rightarrow E(1) \rightarrow \dots \rightarrow E(n-1) \rightarrow 0$ láncsal direkt szorozhatjuk a már létező $O(0) \rightarrow O(1) \rightarrow \dots \rightarrow O(n)$ megoldást (feltéve, hogy a kategóriában létezik ezen objektumok direkt összege).

3.2.1. k -egzakt sorok

Ha a dolgozat kereteinek megfelelően tárgyaljuk a számítási feladat reprezentálhatóságának fogalmát, $R\text{-}\mathbf{Mod}$ -ban reprezentálni kívánt adott megoldással ekvivalens megoldások leírásakor a fenti felsorolás 3. pontja értelmében természetes módon jelennek meg a homológikus algebra és algebrai topológia kiemelt jelentőségű objektumainak általánosításai, a k -egzakt sorok⁴. Ezekről fogunk röviden írni ebben az alszakaszban.

40. Definíció. [k -egzakt sorok]

Legyen $\mathcal{C} \subseteq R\text{-}\mathbf{Mod}$. Egy $C : \mathbf{n} \rightarrow \mathcal{C}$ leképezésláncot k -egzaktnak nevezünk, ha minden k hosszú leképezési allánca triviális, vagyis a megfelelő leképezések kompozíciója azonosan nulla.

A $k = 2$ esetet egzakt soroknak nevezzük, ezek tulajdonságait intenzíven tanulmányozták a matematika különböző területein az elmúlt századtól kezdve. Minden 2-egzakt sor beágyazható tetszőleges $2 \leq k$ mellett a k -egzakt sorokba, kellően sok izomorfizmus beillesztésével az egymást követő leképezések közé. Azonban, egy tipikus k -egzakt sor nem így áll elő, viszont hozzárendelhető $k-1$ darab 2-egzakt sor, melyek algebrai tulajdonságai meghatározzák a k -egzakt sort. Ezt szemléltetni a 3.1-es ábra.

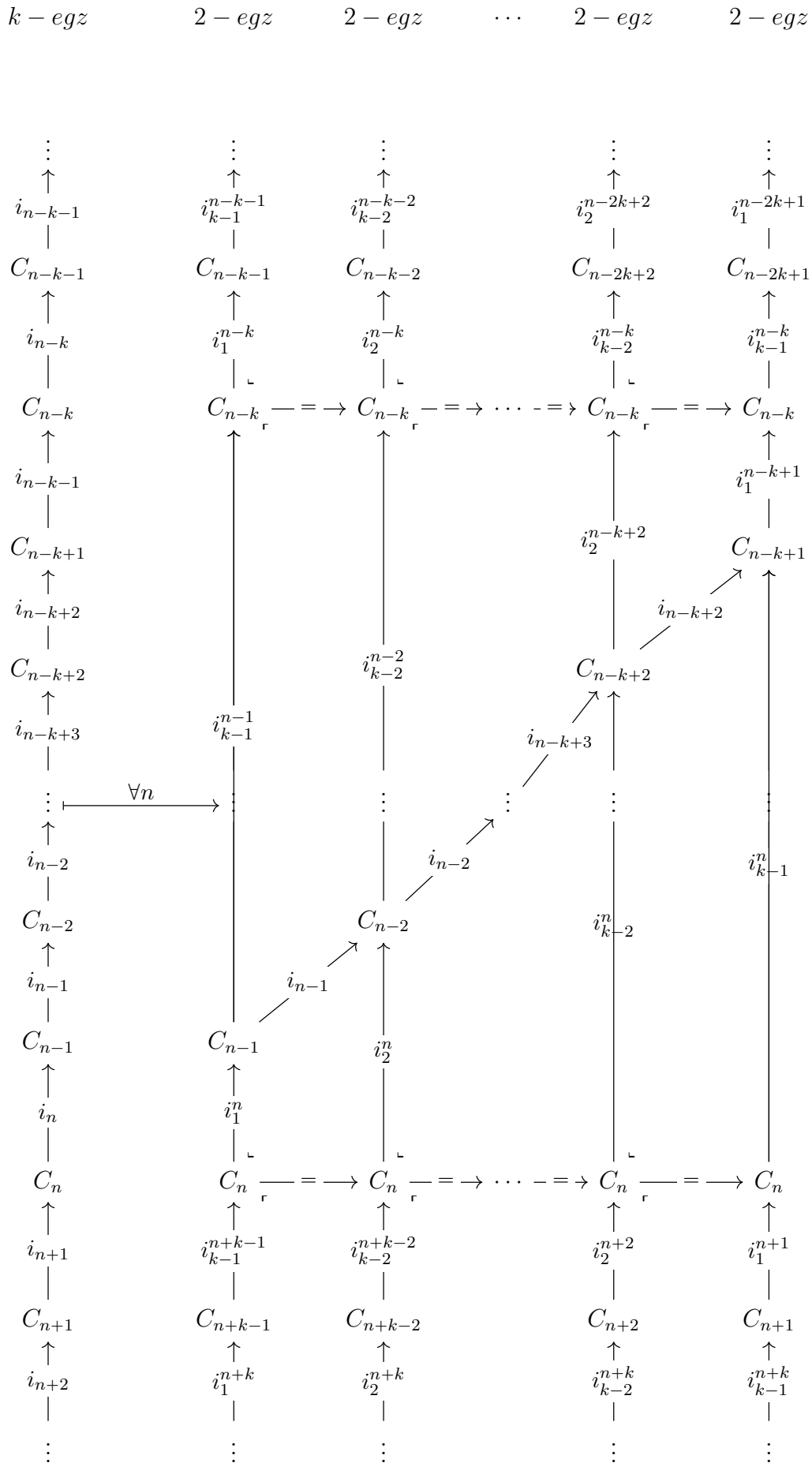
41. Definíció. [k -egzakt sorhoz rendelhető, rögzített objektumot tartalmazó $k \geq l \geq 2$ -egzakt sor]

Legyen $C : \mathbf{m} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq R\text{-}\mathbf{Mod}$ egy $m+1$ hosszú k -egzakt sor, és rögzítsük a C_n , $n \in \{k+1, \dots, m\}$ objektumot. Ekkor a k -egzakt sorhoz rendelhető, C_n objektumot tartalmazó $k \geq l \geq 2$ -egzakt sor alatt azt az l -egzakt $C_{n;t_1, \dots, t_l}$ $\mathcal{C}$ -beli maximális alláncát értjük a C sornak, melyre:

1. $C_n \in C_{n;t_1, \dots, t_l} [\mathcal{OB}(\mathbf{m})]$;
2. $\mathbb{N} \ni t_1, \dots, t_l \geq 1, \sum_{j=1}^l t_j = k$;
3. A leképezések az eredeti sor előbb t_1 , majd t_2 , ..., végül t_l egymást követő kompozíciójából állnak.

Megjegyzés. A $\sum_{j=1}^l t_j = k$ megkötés miatt elég csak az első $l-1$ tagot megadni a jelölésben; ez 2-egzakt sorokra egyetlen $t \in \{1, \dots, k-1\}$ paraméterre redukálódik.

⁴Az elnevezés saját, eddig nem találtam hasonló tulajdonságú objektumokkal kapcsolatos munkákat. Egy izgalmasabb lehetséges elnevezést kollégiumi társam ajánlásával k -Gandalf-sor lehetne, ugyanis szerinte ezek az objektumok *varázslatosak*.

3.1. ábra. k -egzakt sorhoz rendelhető 2-egzakt sorok

42. Állítás. [k -egzakt sorhoz rendelhető $k \geq l \geq 2$ -egzakt sorok száma]

Adott $m + 1$ hosszú $C : \mathbf{m} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq R\text{-}\mathbf{Mod}$ k -egzakt sorhoz rögzített C_n , $n \in \{k + 1, \dots, m\}$ objektumot tartalmazó $k \geq l \geq 2$ -egzakt sorból legfeljebb $\binom{(k-1)+(l-1)}{l-1}$ különböző van. Ha egyik leképezés sem izomorfizmus, akkor pontosan ennyi. Így adott m hosszú k -egzakt sorhoz legfeljebb $(m - k) \cdot \left(\binom{2k-1}{k} - 1\right)$ különböző kisebb egzaktágú sor rendelhető.

Bizonyítás. [A 42-es Állításé]

A $\binom{(k-1)+(l-1)}{l-1}$ mennyiség azt adja meg, hogy a k hosszú leképezésláncot hányféleképp lehet l leképezés kompozíciójára bontani. Ha minden $l \in \{2, \dots, k - 1\}$ értékre összegezzük ezt a számot, majd figyelembe vesszük, hogy $n \in \{k + 1, \dots, m\}$ mindegyikére ismételhető e művelet, kapjuk az $(m - k) \cdot \left(\binom{2k-1}{k} - 1\right)$ mennyiséget, mint felső becslést. ■

Speciális esetben $l = 2$ -egzakt sorokat rendelhetünk a k -egzakt sorhoz, melyek homológiamodulusai algebrai invariánsai e sornak:

43. Definíció. [k -egzakt sorok rögzített objektumhoz tartozó homológia-modulusai]

Legyen $C : \mathbf{m} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq R\text{-}\mathbf{Mod}$ egy $m + 1$ hosszú k -egzakt sor, és rögzítsük a C_n , $n \in \{k + 1, \dots, m\}$ objektumot. Ekkor e k -egzakt sor rögzített C_n objektumához tartozó homológia-modulusok alatt a $C_{n;t}$ lánc homológia-modulusait értjük, jelölésben $H_{\bullet;n;t} := H_{\bullet}(C_{n;t})$.

Megjegyzés. Általános esetben tehát rögzített C_n mellett $k - 1$ darab, egymással valamilyen nemtriviális kapcsolatban álló homológia-modulus-láncot tudunk hozzárendelni egy k -egzakt sorhoz, mint algebrai invariánsok. E homológia-modulusok egymással szoros kapcsolatban állnak. Az első nyilvánvaló ilyen kapcsolatra mutat rá a következő állítás:

44. Állítás. [Nullák nullákba képződnek]

Legyen $C : \mathbf{m} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq R\text{-}\mathbf{Mod}$ egy $m + 1$ hosszú k -egzakt sor, és rögzítsük a C_n , $n \in \{k + 1, \dots, m\}$ objektumot. Ekkor minden $c \in C_n$, $s \in \mathbb{Z}$, $t \in \{1, \dots, k - 1\}$ esetében

$$H_{s;n;t}(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{s;n;\tau}(c) = 0 \quad \forall \tau \geq t.$$

Bizonyítás. [A 44-es Állításé]

A láncok minden leképezése R -modulus-homomorfizmus, a homológia pedig funktoriális. ■

Megjegyzés. Az előző állítás megfordítása nyilvánvalóan nem igaz; azt látjuk tehát, hogy az objektumainkhoz rendelt homológia-modulusok láncában több lépésben is *elveszhet* információ. Az előző állítás következtében értelme van definiálni a következőt:

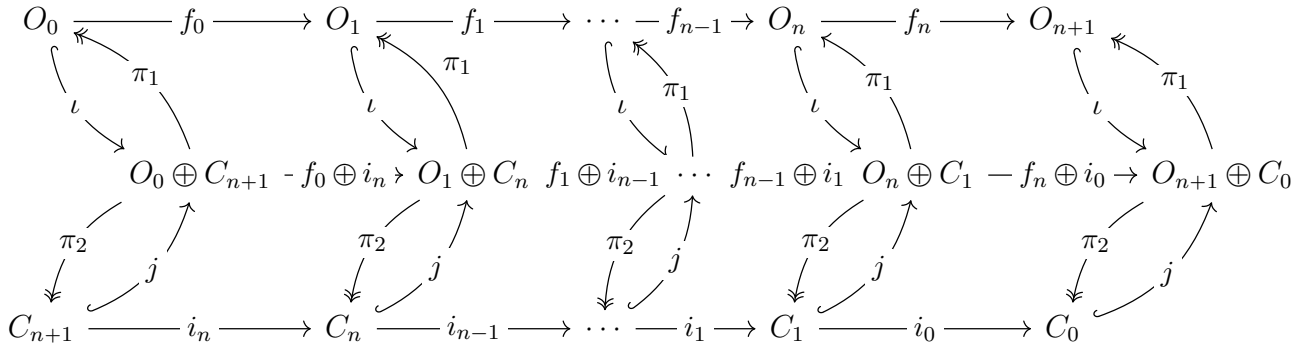
45. Definíció. [k -egzakt sor elemének rögzített objektumhoz tartozó eltűnési értéke]

Legyen $C : \mathbf{m} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq R\text{-}\mathbf{Mod}$ egy $m + 1$ hosszú k -egzakt sor, és rögzítsük a C_n , $n \in \{k + 1, \dots, m\}$ objektumot. Ekkor $\forall s \in \mathbb{Z}$ mellett a

$$v_s : C_n \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \quad v_s(c) := \begin{cases} \min\{t : H_{s;n;t}(c) = 0, \quad t \in \{1, \dots, k - 1\}\}, & \text{ha létezik} \\ \infty, & \text{különben} \end{cases}$$

leképezéseket s -edik eltűnési értékeknek nevezzük.

Adott megoldásból k -egzakt sorral való direktösszegzéssel új megoldást tudunk konstruálni, ezt szemlélteti a 3.2-es diagram.



3.2. ábra. k -egzakt sorokkal való direkt összegzéssel kapott új megoldás régi megoldásból

3.3. Számítási feladat új megoldásainak előállításával régi felhasználásával

Az előző fejezetben láttuk, hogy adott, véges forrásobjektumú számítási feladat reprezentálására rengeteg lehetőségünk van, akár szemantikus rendszerek, akár lokális k -homomorf gépek révén. Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy mit tehetünk, ha már meguntuk e végtelen sok megoldás előállítását, és szeretnénk már meglévő megoldásokból kiindulva új megoldásokat *gyártani* a számítási keretünket leíró kategóriában. Ez annak felel meg, hogy a már meglévő megoldások diagramjának gráfjába úgy szeretnénk közbülső éleket behúzni, hogy az továbbra is kommutatív maradjon. A kérdésről is sokat lehet mondani az alkalmazások szempontjából releváns kategóriák esetében. Ezt illusztrálandó az alábbiakban összegzem néhány eredményem az $\mathbb{R}$ -vekt és $\mathbf{Mnf}^*$ kategóriákra, melyeket előző éves TDK-mban foglaltam össze, így bizonyításokat nem mellékelek az állításokhoz és tételekhez.

3.3.1. Eredmények $\mathbb{R}$ -modulusok kategóriájában

46. Definíció. $[\mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektortér $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű $\mathbb{R}^n \ni p$ -beli Jet-tere]

Legyen $p \in \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a p pontban $k \in \mathbb{N}$ rendben folytonosan differenciálható függvények vektortere. Vezessük be az $\sim_p^r \subseteq \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $r \in \{0, \dots, k\}$ ekvivalenciarelációt, melyre $f \sim_p^r g \iff f^{(i)}(p) = g^{(i)}(p) \forall i \in \{0, \dots, r\}$. A $\mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) / \sim_p^r$ faktorteret a $\mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektortér $\mathbb{R}^n \ni p$ -beli $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű Jet-terének nevezzük. Ha $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$, akkor az egyszerűbb $\mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n)$ jelölést használjuk, illetve, ha $r = k$, akkor a jelölésből elhagyjuk a második k -t: $\mathcal{J}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

47. Definíció. $[f \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ leképezés $\mathbb{R}^n \ni p$ -beli $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű Jet-jel]

A $J_p^{k,r} : \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $J_p^{k,r} f := J_p^{k,r}(f) = [f]_{\sim_p^r}$ leképezést az $f \in \mathcal{C}_p^k$ függvény p -beli r -ed rendű Jet-jének nevezzük. Ha $r = k$, akkor a jelölésből elhagyjuk a második k -t: J_p^k .

48. Állítás. [Jet-hozzárendelés és Taylor-sor kapcsolata]

Euklideszi terek közötti leképezések esetében egy $f \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ függvényhez rendelt $J_p^{k,r} f$ r -Jet az f függvény $p \in \mathbb{R}^n$ pontbeli r -ed rendű közelítő Taylor-polinomjának feleltethető meg.

49. Definíció. [Pontozott Euklideszi terek és ezek közötti leképezések]

Az $(\mathbb{R}^n, p)$ párt, ahol $p \in \mathbb{R}^n$, pontozott Euklideszi térnek nevezzük. Ha $(\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)$ két pontozott Euklideszi tér, az ezek közötti $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q)$ leképezésektől elvárjuk, hogy $f(p) = q$ teljesüljön.

50. Definíció. [Pontozott Euklideszi terek közötti leképezések Jet-terei]

A $\mathcal{J}_{p,q}^{k,r}((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) = \mathcal{C}_p^k((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) / \sim_p^r$ teret a két pontozott Euklideszi tér közötti k -ad rendben folytonosan differenciálható leképezések $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű Jet-terének nevezzük. Egy $\mathcal{C}_p^k((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) \ni f$ leképezéshez tartozó $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű Jet hozzárendelés jelölése $J_{p,q}^{k,r} : \mathcal{C}_p^k((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) \rightarrow \mathcal{J}_{p,q}^{k,r}((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q))$, $J_{p,q}^{k,r} f = J_{p,q}^{k,r}(f) := [f]_{\sim_p^r}$.

51. Állítás. [A Jet-hozzárendelés jól definiált művelet]

A $J_p^{k,r} : \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $J_{p,q}^{k,r} : \mathcal{C}_p^k((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) \rightarrow \mathcal{J}_{p,q}^{k,r}((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q))$ leképezések jól definiáltak.

52. Definíció. [Jet-ek kompozíciója]

Legyen $(\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)$ és $(\mathbb{R}^o, s)$ három pontozott Euklideszi tér, $k, l, r, v \in \mathbb{N}$, $r \leq k, v \leq l$ és $u = \min\{k, l\}$. A $\star_{p,s}^{u,z} : \mathcal{J}_{q,s}^{u,z}((\mathbb{R}^m, q), (\mathbb{R}^o, s)) \times \mathcal{J}_{p,q}^{u,z}((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) \rightarrow \mathcal{J}_{p,s}^{u,z}((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^o, s))$, $\star_{p,s}^{u,z}(J_{q,s}^{u,z} g, J_{p,q}^{u,z} f) := J_{p,s}^{u,z}(f \circ g)$ művelet jól definiált minden $z \in \{0, \dots, u\}$ értékre, ezt a műveletet pedig a megfelelő Jet-ek *kompozíciójának* nevezzük.

53. Tétel. [Euklideszi terek közötti leképezések Jet-ekvivalenciájának kapcsolata a leképezések egyenlőségével]

Legyen $(\mathbb{R}^n, p)$ és $(\mathbb{R}^m, q)$ két Euklideszi tér és $f, g \in \mathcal{C}^\omega((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q))$ két sima és analitikus leképezés. $J_p^\infty f = J_p^\infty g$ teljesülése ekvivalens azzal, hogy $f = g$ a $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ tartományon.

54. Tétel. [Euklideszi terek közötti $\mathcal{C}^k$ diagramok kiegészítése kommutatív diagrammá]

Legyen $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ négy Euklideszi tér, $\phi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\Gamma \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^t)$ és $\psi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o)$ három, az origót rögzítő leképezés. Ekkor minden $\gamma \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$, $\sum_{i=0}^k \gamma^{(i)} \sim_0^k \gamma$ leképezésre teljesül, hogy $J_0^k(\gamma \circ \phi) = J_0^k(\psi \circ \Gamma)$, ahol

$$\gamma_0^{(i)} = \left[\sum_{s=0}^j \psi_0^{(s)} \left(\sum_{\Xi \in P_0(s,i)} \Gamma_0^{(\otimes \Xi)} \right) - \sum_{s=0}^{l-1} \gamma_0^{(s)} \left(\sum_{\sigma \in P(s,i)} \phi_0^{(\otimes \sigma)} \right) \right] [\varphi_0^{\otimes i}], \quad i \in \{0, \dots, j\},$$

az elemi megoldás multilineáris sorfejtése, $\phi_0^{(r)}, \Gamma_0^{(r)}, \psi_0^{(r)}$ a megadott leképezések $r = 0, 1, \dots, k$ -ad rendű megfelelő Euklideszi terek origóiban vett multilineáris sorfejtési tagjai, φ_0 a $\phi_0^{(1)}$ lineáris leképezés jobb oldali pszeudinverze, $P_0(s, i)$ az összes olyan $(l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{N}_0^i$ halmaza, amelyre $l_1 + \dots + l_s = i$ teljesül, és $P(s, i)$ az összes olyan $(l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{N}^i$ halmaza, melyre $l_1 + \dots + l_s = i$.

Megjegyzés. A továbbiakban $\gamma_{0,j} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$, $j \leq k$ alatt az 54-as tételben megkonstruált $\sum_{i=0}^k \gamma^{(i)}$ leképezést értjük majd.

55. Állítás. [Az $k \geq r$ -ed rendű közelítő megoldás nem függ k -tól]

Legyen $k, l, r \in \mathbb{N}$, $r \leq k, r \leq l$, és $\gamma_k \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$, $\gamma_l \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$ olyan, hogy $J_0^{k,r} \gamma_{0,k} \star J_0^{k,r} \phi = J_0^{k,r} \psi \star J_0^{k,r} \Gamma$, illetve $J_0^{l,r} \gamma_{0,l} \star J_0^{l,r} \phi = J_0^{l,r} \psi \star J_0^{l,r} \Gamma$. Ekkor $\gamma_{0,l} \sim_0^r \gamma_{0,k}$, azaz $J_0^{r,r} \gamma_{0,l} = J_0^{r,r} \gamma_{0,k}$.

56. Tétel. [γ leképezés konverenciája]

Legyenek $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ és ϕ, Γ, ψ az 54-as Tételben megfogalmazottak szerint. A $\gamma_0^{(i)}$ leképezések minden $\mathbb{N} \ni j$ -edik $\gamma_{0,j}$ részösszege folytonos és korlátos leképezés, mely teljesíti a $J_0^{k,j}(\gamma_{0,j} \circ \phi) = J_0^{k,j}(\phi \circ \Gamma)$ összefüggést. A $\gamma_{0,j}$ sorozat a $B_R(0) = \{y \in \mathbb{R}^m | d_{\mathbb{R}^m}(y, 0) < R\}$ halmazon pontonként konvergens, azon túl pedig divergens, ahol

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[i]{C_i}}, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} \in (0, \infty) \\ 0, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = \infty \\ \infty, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = 0 \end{cases}$$

57. Tétel. [Véges sok tagból álló közelítés hibájának becslése]

Legyenek $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ és ϕ, Γ, ψ az 54-as Tételben megfogalmazott tulajdonságú, $k+1$ rendben folytonosan differenciálható leképezések és legyen $\gamma_{0,j}$ a megkonstruált $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$ folytonos leképezés j -edik részösszege. Legyen $Q = \cap_{q \in \text{Dom}(\gamma_{0,k})} \phi^{-1}(q)$. Minden $\forall q \in Q$ pontra

$$\|(\gamma_{0,j} \circ \phi)(q) - (\psi \circ \Gamma)(q)\| \leq \frac{\|\phi(q) - \phi(p)\|^{(j+1)}}{(j+1)!} \cdot \sup_{u \in Q} \|(\psi \circ \Gamma)^{(j+1)}(u) - (\psi \circ \Gamma)^{(j+1)}(p)\|$$

teljesül. Speciálisan, magára a k -edik részösszegre:

$$\|(\gamma_{0,k} \circ \phi)(q) - (\phi \circ \Gamma)(q)\| \leq \frac{\|\phi(q) - \phi(p)\|^{(k+1)}}{(k+1)!} \cdot \sup_{u \in Q} \|(\psi \circ \Gamma)^{(k+1)}(u) - (\psi \circ \Gamma)^{(k+1)}(p)\|$$

58. Tétel. [Egzakt megoldás sima és analitikus leképezések esetében]

Legyenek $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ adottak és ϕ, Γ, ψ az 54-as Tételben megfogalmazott tulajdonságú, sima és analitikus leképezések. Legyen $U_m \subseteq B_R(0)$, $U_n = \phi^{-1}(U_m) \subseteq \mathbb{R}^n$, $U_t = \Gamma[U_n] \subseteq \mathbb{R}^t$ és $U_o = \psi[U_t] \subseteq \mathbb{R}^o$. Ekkor a $\gamma|_{U_m}, \phi|_{U_n}, \Gamma|_{U_t}$ és $\psi|_{U_o}$ leképezésekre $\gamma|_{U_m} \circ \phi|_{U_n} = \psi|_{U_o} \circ \Gamma|_{U_t}$ teljesül, a 3.3-es diagram tehát kommutatív.

$$\begin{array}{ccc} (U_n, 0) \subseteq (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_t, 0) \subseteq (\mathbb{R}^t, 0) \\ \downarrow \phi|_{U_n} & & \downarrow \psi|_{U_t} \\ (U_m, 0) \subseteq (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{\gamma|_{U_m}} & (U_o, 0) \subseteq (\mathbb{R}^o, 0) \end{array}$$

3.3. ábra. Euklideszi részsokaságok közötti leképezésdiagram kiegészítése kommutatív diagrammá sima és analitikus leképezésekkel

59. Tétel. [Kommutatív diagramok sorozatának egzakt kiegészítése]

Legyenek $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^o$ adottak, $\phi = \psi, \Gamma$ sima és analitikus leképezések és $U_n \subseteq U_t \subseteq \mathbb{R}^n$, $U_m \subseteq U_o \subseteq \mathbb{R}^m$ az 58-es Tételben megfogalmazott tulajdonságúak. Ekkor a $\gamma|_{U_m}, \phi|_{U_n}, \Gamma|_{U_t}$ és $\psi|_{U_o}$ leképezésekre $\gamma|_{U_m}^k \circ \phi|_{U_n} = \psi|_{U_o} \circ \Gamma|_{U_t}^k$ teljesül, tehát a 3.4-ös diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccccccc}
(U_n, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} \dots & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} (U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) \\
\downarrow \phi|_{U_n} & & \downarrow \phi|_{U_t} & & \downarrow \phi|_{U_t} & & \downarrow \phi|_{U_t} \\
(U_m, 0) & \dashrightarrow^{\gamma|_{U_m}} & (U_m, 0) \subseteq (U_o, 0) & \dashrightarrow^{\gamma|_{U_m}} & (U_m, 0) \subseteq (U_o, 0) & \dashrightarrow^{\gamma|_{U_m}} \dots & \dashrightarrow^{\gamma|_{U_m}} (U_m, 0) \subseteq (U_o, 0)
\end{array}$$

3.4. ábra. Euklideszi részsokaságok közötti leképezésdiagramok sorozatának kiegészítése kommutatív diagrammá sima és analitikus leképezésekkel

60. Tétel. [Probléma megoldása közbülső térrel]

Legyen $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ adott, $\phi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^t)$, $\psi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o)$ három leképezés. Ha létezik két olyan $\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s$ és négy $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$, $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^t, \mathbb{R}^s)$, $\alpha \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^m)$, $\beta \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^o)$ leképezés, amire $\phi = \alpha \circ \Phi$ és $\psi = \beta \circ \Psi$, akkor az 58-es Tétel alkalmazható, és létezik olyan $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s)$ leképezés, melyre a 3.5-os diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccc}
(U_n, 0) \subseteq (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_t, 0) \subseteq (\mathbb{R}^t, 0) \\
\downarrow \Phi|_{U_n} & & \downarrow \Psi|_{U_t} \\
(U_r, 0) \subseteq (\mathbb{R}^r, 0) & \dashrightarrow^{\gamma|_{U_m}} & (U_s, 0) \subseteq (\mathbb{R}^s, 0) \\
\downarrow \alpha|_{U_r} & & \downarrow \beta|_{U_s} \\
(U_m, 0) \subseteq (\mathbb{R}^m, 0) & & (U_o, 0) \subseteq (\mathbb{R}^o, 0)
\end{array}$$

3.5. ábra. Euklideszi részsokaságok közötti leképezésdiagram kiegészítése kommutatív diagrammá közbülső Euklideszi terek beillesztésével

61. Tétel. [Kommutatív diagramok sorozatának egzakt kiegészítése közbülső terekkel]

Legyenek $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o, \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s$ adottak, $\phi, \Phi, \alpha, \Gamma, \psi, \Psi, \beta$ leképezések pedig a 60-es Tétel szerintiek. Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^t$, $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^o$ és $\psi = \phi$. Ekkor alkalmazható az 59-as Tétel, amivel a 3.6-es diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccccccc}
(U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} \dots & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) \\
\downarrow \Phi|_{U_n} & & \downarrow \Phi|_{U_t} & & \downarrow \Phi|_{U_t} & & \downarrow \Phi|_{U_t} \\
(U_r, 0) \subseteq (U_s, 0) & \xrightarrow{\gamma|_{U_n}} & (U_r, 0) \subseteq (U_s, 0) & \xrightarrow{\gamma|_{U_n}} \dots & \xrightarrow{\gamma|_{U_n}} & (U_r, 0) \subseteq (U_s, 0) \\
\downarrow \alpha|_{U_n} & & \downarrow \alpha|_{U_t} & & \downarrow \alpha|_{U_t} & & \downarrow \alpha|_{U_t} \\
(U_m, 0) \subseteq (U_o, 0) & & (U_m, 0) \subseteq (U_o, 0) & & \dots & & (U_m, 0) \subseteq (U_o, 0)
\end{array}$$

3.6. ábra. Euklideszi részsokaságok közötti leképezésdiagramok sorozatának kiegészítése kommutatív diagrammá közbülső Euklideszi terek beillesztésével

3.3.2. Eredmények Sima pontozott sokaságok kategóriájában

62. Tétel. [Leképezési diagram kiegészítése]

Legyen $(\mathcal{N}, p)$, $(\mathcal{M}, q)$, $(\mathcal{T}, w)$ és $(\mathcal{O}, z)$ adott pontozott sima sokaságok és $G : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{T}, w)$,

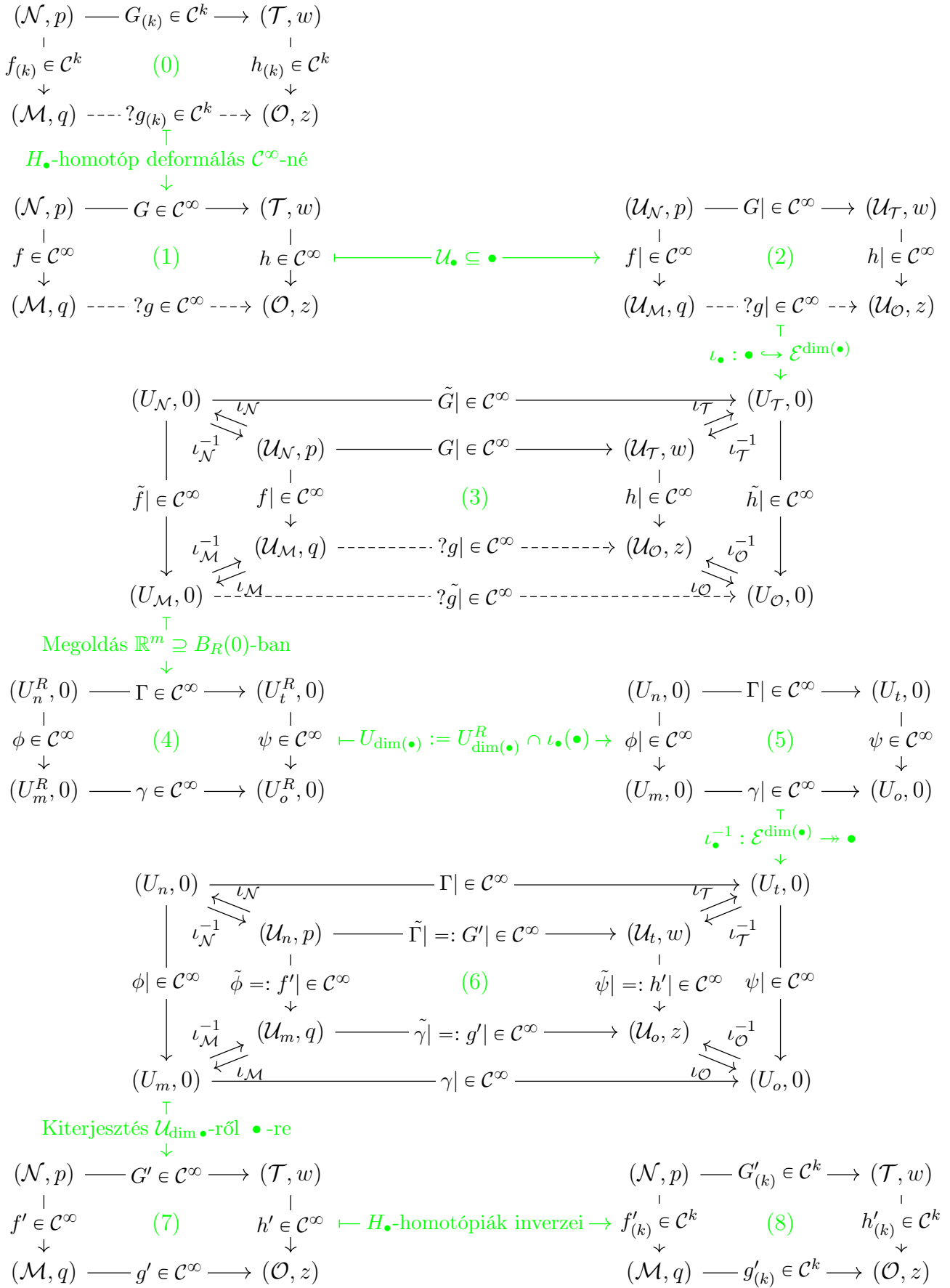
$f : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{M}, q)$ és $h : (\mathcal{T}, w) \rightarrow (\mathcal{O}, z)$ három $\mathcal{C}^k$ leképezés. Tegyük fel továbbá, hogy létezik egy $g : (\mathcal{M}, q) \rightarrow (\mathcal{O}, z)$ leképezés, mellyel $g \circ f = h \circ G$ teljesül. A 3.7-os eljárásról igazak:

- (i) A $(0) \mapsto (1)$ áttérés során $G_{(k)}, f_{(k)}, h_{(k)}, g_{(k)}$ és G, f, h, g leképezések közötti kapcsolat kölcsönösen egyértelmű;
- (ii) A $(2) \mapsto (3)$ áttérés során, ahol $\iota_{\mathcal{N}}, \iota_{\mathcal{M}}, \iota_{\mathcal{T}}$ és $\iota_{\mathcal{O}}$ az egyes pontozott sokaságok kijelölt pontjaira centrált szabályos beágyazások megfelelő dimenziós Euklideszi terekbe, kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés $G|, f|, h|, g|$ és $\tilde{G}|, \tilde{f}|, \tilde{h}|, \tilde{g}|$ között;
- (iii) Az $(3) \mapsto (4)$ áttérés során az előző fejezetben tárgyalt megoldást konstruáljuk meg a γ leképezés maximális R konvergenciasugarán belüli U_m^R halmazon. Az $U_m = \iota_{\mathcal{M}}[\mathcal{U}_{\mathcal{M}}] \cap U_m^R$ halmazon $\gamma|_{U_m}$ létezik;
- (iv) Az U_m halmazon $\gamma|_{U_m}$ egyértelműen meghatározza a $\tilde{g}|$ leképezést az $\mathcal{U}_m = \iota_{\mathcal{M}}^{-1}[U_m]$ halmazon: $\tilde{g}|_{\mathcal{U}_m} = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \gamma|_{U_m} \circ \iota_{\mathcal{M}}$;
- (v) Az U_n, U_m és U_t halmazokra megszorítva a Γ, ϕ, ψ leképezéseket, azok megegyeznek az $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m, \mathcal{U}_t$ -re megszorított $G|, f|, h|$ és $g|$ leképezések $\tilde{G}|_{\mathcal{U}_n}, \tilde{f}|_{\mathcal{U}_n}, \tilde{h}|_{\mathcal{U}_t}$ megfelelőivel;
- (vi) Az $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m, \mathcal{U}_t$ halmazokon $G|_{\mathcal{U}_n} = \iota_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Gamma|_{U_n} \circ \iota_{\mathcal{N}}, f|_{\mathcal{U}_n} = \iota_{\mathcal{M}}^{-1} \circ \phi|_{U_n} \circ \iota_{\mathcal{N}}$ és $h|_{\mathcal{U}_n} = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \psi|_{U_t} \circ \iota_{\mathcal{T}}$;
- (vii) $G'|_{\mathcal{U}_n} = G|_{\mathcal{U}_n}, f'|_{\mathcal{U}_n} = f|_{\mathcal{U}_n}$ és $h'|_{\mathcal{U}_t} = h|_{\mathcal{U}_t}$;
- (viii) Az $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m, \mathcal{U}_t$ és $\mathcal{U}_o$ megfelelő homotópiák általi képeire megszorítva $G'_{(k)}| = G|_{(k)}, f'_{(k)}| = f|_{(k)}$ és $h'_{(k)}| = h|_{(k)}$.

63. Tétel. [Sima sokaságok szabályos beágyazott részsokaságai közötti sima leképezésdiagramjai kiegészítésének létezése és egyértelműsége]

Legyenek $(\mathcal{N}, p), (\mathcal{M}, q), (\mathcal{T}, w)$ és $(\mathcal{O}, z)$ pontozott sima sokaságok, $G : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{T}, w)$, $f : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{M}, q)$ és $h : (\mathcal{T}, w) \rightarrow (\mathcal{O}, z)$ három $\mathcal{C}^\infty$ leképezés, $(\mathcal{U}_{\mathcal{N}}, p), (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, q), (\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, w)$ és $(\mathcal{U}_{\mathcal{O}}, z)$ szabályosan beágyazott pontozott részsokaságok. A 3.7-os eljárásra igazak:

- (i) Ha létezik $g \in \mathcal{C}^\infty$, amelyre $g \circ f = h \circ G$ minden $p \in \mathcal{N}$ pontra, akkor egyértelmű;
- (ii) Ha létezik $g| \in \mathcal{C}^\infty$, amelyre $g| \circ f| = h| \circ G|$ minden $p \in \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ pontra, akkor egyértelmű;
- (iii) Ha g létezik, akkor egyértelmű, és $g| \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, q), (\mathcal{U}_{\mathcal{O}}, z))$ létezik;
- (iv) Ha $g| \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, q)(\mathcal{U}_{\mathcal{O}}, z))$ létezik, akkor egyértelmű;
- (v) Minden $U_{\mathcal{N}} \subseteq U_n^R, U_{\mathcal{M}} \subseteq U_m^R, U_{\mathcal{T}} \subseteq U_t^R$ és $U_{\mathcal{O}} \subseteq U_o^R$ mellett $g| = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \gamma|_{U_m} \circ \iota_{\mathcal{M}}$ megoldja a (2)-es diagramot, tehát egyértelmű;
- (vi) Minden $U_{\mathcal{N}} \subseteq U_n^R, U_{\mathcal{M}} \subseteq U_m^R, U_{\mathcal{T}} \subseteq U_t^R$ és $U_{\mathcal{O}} \subseteq U_o^R$ mellett az (1)-es diagramnak van megoldása, mégpedig a $G| = \iota_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Gamma|_{U_n} \circ \iota_{\mathcal{N}}, f| = \iota_{\mathcal{M}}^{-1} \circ \phi|_{U_n} \circ \iota_{\mathcal{N}}, h| = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \psi|_{U_t} \circ \iota_{\mathcal{T}}$ és $g| = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \gamma|_{U_m} \circ \iota_{\mathcal{M}}$ kiterjesztéséből adódó leképezésekkel.



3.7. ábra. Euklideszi terekbe ágyazható differenciálható sokaságok közötti leképezési diagram kiegészítése kommutatív diagrammá

3.4. Számítási feladat egzakt megoldásainak tulajdonságai

Az előző szakaszokban azt a kérdést jártuk körül, hogy adott megoldás ismeretében hogyan tudunk további, ekvivalens megoldásokat készíteni egy számítási feladathoz. Ez azért hasznos ismeret, mert a valóságban, ha számítógépes rendszereket tervezünk, adott esetben egyszerűbb lehet ekvivalens megoldások közül az egyikben vagy másikban megjelenő objektumokat és morfizmusokat megvalósítani, így viszonylag nagy szabadságot kaphatunk adott megoldás fizikai realizálásában.

A következőkben arról írunk majd, hogy adott megoldáscsaládoknak milyen releváns tulajdonságait lehet tanulmányozni a dolgozat által felvázolt keretrendszerben.

3.4.1. Optimumkeresés a megoldások között

Az előző szakaszok fő tanulsága, hogy olyan kategóriában, ahol elő tudjuk állítani egy számítási feladat egyetlen megoldását, egyben ugyanezen feladat elképesztően sok további megoldását is *jó eséllyel* előállíthatjuk⁵. Emiatt három dolog történhet, ha egy $(f, \mathcal{C})$ számítási feladat adott $\mathcal{D}$ kategórián belüli $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ hű funktor szerinti összes megoldását vizsgáljuk (feltesszük, hogy létezik legalább egy darab megoldása a számítási feladatnak $\mathcal{D}$ -ben):

1. A legvalószínűbb forgatókönyv: $\tilde{D}_F(f)$ mégcsak nem is lokálisan véges gráffá dúzzasztható a $\mathcal{D}$ kategóriában található megannyi izomorf objektum, morfizmusok, k -egzakt sorok stb. miatt (legalábbis a bemenetet és kimenetet reprezentáló csúcsokban);
2. Még reálisnak tűnő forgatókönyv: $\tilde{D}_F(f)$ lokálisan véges gráf, miután bevezettünk valamilyen megfelelő ekvivalencia-fogalmat a lehetséges megoldások objektumai és morfizmusai között és vagy faktoráltunk az ekvivalencia szerint, vagy az ekvivalens megoldások közül adott élsúlyozás mellett egy optimálisat választottunk ki reprezentánsként;
3. Egészen szerencsés helyzet: $\tilde{D}_F(f)$ véges gráf. Ez az eset lenne a legkönnyebben kezelhető, de valószínűleg csak speciális, igen szegény kategóriákban és/vagy nagyon speciális számítási feladatra kaphatjuk ezt.

Megjegyeznénk, hogy az 1.-es pont tipikus példa arra, aminek akkor is örülni kell, ha teljesül, és akkor is, ha nem. Utóbbi esetben matematikailag könnyebben vizsgálható feladattal szembesülünk, míg előbbi esetben egy számítási feladatot felfoghatatlanul sokféleképp tudunk megoldani a számunkra adott számítási kereten belül. Ugyanakkor, mivel a fentiek miatt arra nem lehet mindig esély, hogy minden lehetséges megoldást egyszerre kezeljük, a továbbiakban röviden megvizsgáljuk, mit tudunk mondani egy számítási feladat véges megoldáscsaládján belüli optimumkeresésről:

⁵A *jó eséllyel* kifejezés itt azt jelöli, hogy vannak izomorf objektumaink és/vagy injekcióink és projekcióink és/vagy k -egzakt soraink és direkt összegeink stb., melyek a gyakorlati alkalmazások szempontjából releváns kategóriák esetében teljesülnek.

64. Definíció. [Számítási feladat véges megoldáscsaládjához rendelhető grafikus matroid]

Legyen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ két kategória, $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ kovariáns hű funktor, és jelölje $\delta(f) = \{\delta_{O_{\text{in}}, O_{\text{out}}} : S_{O_{\text{in}}, O_{\text{out}}} \rightarrow \mathcal{D}\}$ az $(f, \mathcal{C})$ számítási feladat F szerinti összes $\mathcal{D}$ -beli megoldásainak egy véges részhalmazát. E véges megoldáscsaládhoz rendelhető grafikus matroidon azt az $M(\delta) = (S(\delta), \mathcal{F}(\delta))$ matroidot értjük, melynek $S(\delta)$ alaphalmaza a $\delta(f)$ -beli diagramok, mint gráfok éleiből áll, $\mathcal{F}(\delta)$ függetlenségi halmaza pedig e gráf feszítőerdejeit tartalmazza. Így e matroid bázisai független megoldásokat reprezentálnak, minden rögzített $(O_{\text{in}}, O_{\text{out}})$ párra egyet.

Minden véges megoldáscsalád mellett rögzíthetjük a leképezési diagram gráfjának egy él-súlyozását, melyet felfoghatunk úgy, hogy azok az egyes élekhez rendelnek valamilyen szám-szerűsített komplexitást (futásidő, memóriaigény stb.). Ehhez feltesszük, hogy minden út teljes komplexitása az egyes élek komplexitásainak összege és minden ilyen komplexitásérték véges. Ez az él-súlyozás átöröközhető a grafikus matroidunk független halmazaira is, így a véges megoldáscsaládban kereshetünk optimálisat, melynek létezése a megoldások teljes komplexitás szerinti rendezettségéből következik, optimális megoldást pedig az $M(\delta)$ grafikus matroidbeli mohó-algoritmussal találhatunk. Ráadásul, egy optimális megoldás a minimális élsúlyú feszítőerdőkre a $\delta(f)$ -hez rendelt grafikus matroidban egyszerre ad meg optimális megoldásokat a különböző $(O_{\text{in}}, O_{\text{out}})$ párokra.

3.4.2. Invariáns és ekvivariáns megoldások

Amikor invariáns és ekvivariáns megoldásokat keresünk, az a kép él bennünk, hogy a bemenetet megváltoztathatjuk valamilyen transzformáció révén úgy, hogy a kimenet nem változik, vagy pedig azonosan változik, mint a bemenet. Ezt szépen le lehet írni jelen keretrendszerben, ha felismerjük, hogy egy ilyen változtatás felfogható úgy, mint egy funktor hatása a megoldást megadó leképezési láncon:

65. Definíció. [Számítási feladat megoldásának invarianciája adott funktorra]

Legyen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ két kategória, $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ kovariáns hű funktor. Azt mondjuk, hogy az $(f, \mathcal{C})$ számítási feladatot realizáló $O : \mathbf{n} \rightarrow \mathcal{D}$ megoldás izomorfia erejéig $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ -invariáns, ha $TO : \mathbf{n} \rightarrow \mathcal{D}$ is realizálja az $(f, \mathcal{C})$ számítási feladatot, és $TO(n)$ izomorf $O(n)$ -nel.

3.5. Fejlődő számítási keretek tulajdonságainak vizsgálata

Az előző szakaszokban azt vizsgáltuk, mit mondhatunk adott $(f, \mathcal{C})$ számítási feladat realizálhatóságáról egy számítógépes rendszert reprezentáló $\mathcal{D}$ kategóriában. Láttuk, hogy amennyiben egy feladat realizálható, akkor (extrém speciális kategóriáktól eltekintve) egyben rengeteg megoldása létezik a feladatnak. Az, hogy ezek közül melyek tesznek eleget valamilyen speciális feltételnek, például melyek invariánsak vagy optimálisak, az az $(f, \mathcal{C})$ számítási feladat és a $\mathcal{D}$ kategória, így az aktuálisan alkalmazott számítógépes rendszer közös tulajdonsága.

Napjaink egyik jelentős kérdése, hogy milyen módokon lehet érdemes fejlesztenünk a már meglévő számítógépes rendszereinket. Gyakran leginkább tapasztalati úton tudunk nekilátni e

probléma megválaszolásának: megépítünk alternatív számítási rendszereket és gondolkodunk azon, hogy ezeket milyen feladatok hatékonyabb megoldására lehetne felhasználni. Ez gyakran költséges, és általában az új típusú gépek tulajdonságaira fókuszál, nem pedig arra, hogy ezeket a gépeket a már meglévőkkel együtt fogjuk használni, ha e gépek előállítása megéri a befektetést.

A fejlődő számítási keretek vizsgálatára is lehetőség adódik jelen dolgozatban bemutatott keret alkalmazásával, e gondolatokkal zárjuk a dolgozatot.

Ha úgy gondolunk a számítástudományi fejlesztésekre, mint a régi számítási keretek kiegészítésére új típusú számítógépekkel, akkor új számítógépeket előállítása matematikailag egy kategóriabővítésnek feleltethető meg, így a fejlődő számítástudományt le tudjuk írni egymásba ágyazható kategóriák láncával. Ez lehetőséget ad arra, hogy adott számítási feladathoz a dolgozatban vázolt minden objektumot hozzárendelhessük a fejlődő számítási rendszerünknek megfelelő kategóriálánc minden kategóriája esetében, így olyan gráfok, matroidok stb. láncait kaphassuk, melyek összességében sokkal több információt tartalmaznak adott számítási feladatokról, mint amit kinyerhetünk e számítási feladatok adott, fix számítási rendszerben (talán egzaktul) realizált megoldásaiból. Így annak a vizsgálata, hogy érdemes-e befektetni új típusú számítógépekbe, ekvivalens azzal, hogy az ezen számítógépek megjelenésének megfelelő kategóriabővítés eredményeképp változik-e adott számítási feladatok reprezentálhatósága (azaz hirtelen megoldhatóvá válik-e olyan feladat, amit eddig nem tudtunk megoldani), esetleg jobb tulajdonságú reprezentációk megjelennek-e (azaz hirtelen hatékonyabban tudjuk megoldani azt, amit már eddig is meg tudtunk). Ha e két kérdésre negatív a válasz, nem érdemes befektetni az új számítógépek kifejlesztésébe. Ha viszont úgy gondolunk a számítási keretek fejlesztésére, hogy már meglévő számítógéptípusokat helyettesíthetünk is olcsóbb vagy valamilyen szempontból előnyösebb gépekkel, felmerülhet az a kérdés is, hogy az eredeti gépek nélkül, de az új gépekkel működő számítási rendszerhez rendelt kategória hogyan teljesít számítási feladatok meglévő és új realizációja, illetve a realizációk hatékonysága tekintetében. Lehetőség nyílik tehát arra, hogy már elméletben is megjósolhassuk, érdemes-e adott esetben gigászi beruházásokat új számítógépek fejlesztésére szánni, és ha igen, várhatóan milyen eredménnyel.

Köszönet

Szeretnék köszönetet mondani a Márton Áron Szakkollégium, az Eötvös József Collegium és a Bolyai Kollégium közösségének szellemi és/vagy anyagi támogatásáért, melynek hála e kutatás megvalósulhatott. Külön hálával tartozom Apagyai Dávidnak a karakterszempontú segítségéért, Kövér Blankának a nyelvészettel és annak modellezési formáival kapcsolatos gondolataiért, Szalay Gergőnek a neurális hálók elméletével kapcsolatos türelmes magyarázataiért, illetve az Eötvös József Collegium Választmányának, amiért lehetőséget teremtettek arra, hogy munkámban a Közgyűlés alatt is zavartalanul elmerülhessek. Emellett kiemelten köszönöm családom folyamatos támogatását. A kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-23-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Irodalomjegyzék

- [1] Károly Simonyi. *A fizika kultúrtörténete a kezdetektől a huszadik század végéig*. Akadémiai Kiadó, 2020.
- [2] Richard P Feynman. Simulating physics with computers. *International journal of theoretical physics*, 21(6/7):467–488, 1982.
- [3] Richard P. Feynman. Quantum mechanical computers. *Foundations of Physics*, 16(6):507–531, 1986.
- [4] István Németi and Gyula Dávid. Relativistic computers and the turing barrier. *Applied Mathematics and Computation*, 178(1):118–142, 2006. Special Issue on Hypercomputation.
- [5] István Németi and Hajnal Andréka. Can general relativistic computers break the turing barrier? In Arnold Beckmann, Ulrich Berger, Benedikt Löwe, and John V. Tucker, editors, *Logical Approaches to Computational Barriers*, pages 398–412, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Berlin Heidelberg.
- [6] Hajnal Andréka, Judit X. Madarász, István Németi, Péter Németi, and Gergely Székely. *Relativistic Computation*, page 195–216. Cambridge University Press, 2018.
- [7] Uriel Feige, Prabhakar Raghavan, David Peleg, and Eli Upfal. Computing with noisy information. *SIAM Journal on Computing*, 23(5):1001–1018, 1994.
- [8] Catherine Schuman, Shruti Kulkarni, Maryam Parsa, J. Mitchell, Prasanna Date, and Bill Kay. Opportunities for neuromorphic computing algorithms and applications. *Nature Computational Science*, 2:10–19, 01 2022.
- [9] J.J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Universitext. Springer New York, 2008.
- [10] Tom Leinster. Basic category theory, 2016.
- [11] Jean-Pierre Marquis. *From a Geometrical Point of View*. Springer Dordrecht, 2009.
- [12] Benjamin C. Pierce. *Basic Category Theory for Computer Scientists*. MIT Press, 1991.
- [13] Michael Barr and Charles Wells. *Category theory for computing science*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1990.