



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

INFORMATIKAI KAR

NUMERIKUS ANALÍZIS

TANSZÉK

A Bernoulli algoritmus általánosítása TDK Dolgozat

Témavezető:

Dózsa Tamás Gábor

Doktorandusz,

Programtervező Informatikus MSc

Szerző:

Ungvári Gergő

Programtervező Informatikus MSc

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Matematikai háttér	6
2.1. Dinamikai rendszerek	6
2.2. Rendszerek frekvenciatérbeli vizsgálata	8
2.3. Racionális függvényosztályok	9
2.4. Malmquist-Takenaka rendszerek	11
2.5. Bernoulli-módszer	12
2.6. Schipp-Soumelidis módszer	12
2.7. MT-Schipp-Soumelidis	14
2.8. Numerikus szempontok	15
3. A Bernoulli módszer általánosítása	17
3.1. Együttható-sorozatok képzése alternatív módon	17
3.2. Általános függvényrendszerek	18
3.3. Több pólus meghatározása	20
3.4. Pólusidentifikáció Blaschke-szorzatokkal	21
4. Numerikus kísérletek	23
4.1. Szimulációs eredmények	23
4.2. DC motor	25
5. Összefoglalás	31
Irodalomjegyzék	33

1. fejezet

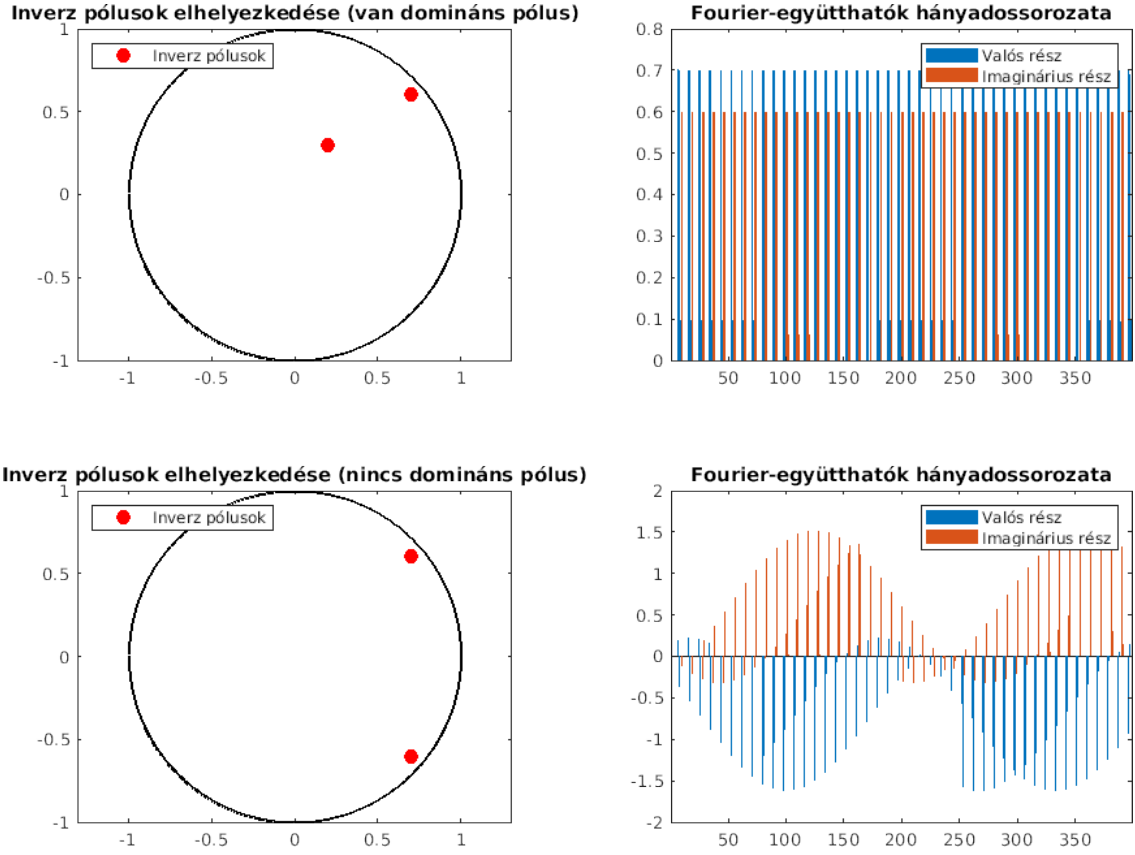
Bevezetés

Ebben a dolgozatban olyan algoritmusokkal foglalkozunk, melyek képesek racionális függvények pólusainak (illetve ekvivalens módon polinomok zérusainak) meghatározására. Ez a feladat a numerikus analízis egy klasszikus problémája, melyre számos korábbi megoldás áll rendelkezésre [1, 2, 3, 4]. Egy klasszikus pólusmeghatározó algoritmus Daniel Bernoulli nevéhez fűződik. Az úgynevezett Bernoulli-módszer egy polinom domináns, azaz legnagyobb abszolút értékű gyökének meghatározására alkalmas. Eredeti formájában az $r(z) := \frac{1}{z^n P(\frac{1}{z})}$, n -fokú racionális függvény Fourier-együtthatóiból kiindulva, az együtthatókból képzett sorozat határértékeként találja meg P polinom domináns gyökét. Gyakorlati (pl. mérnöki) alkalmazások során a vizsgált racionális függvény foksámát gyakran ismeretlennek tételezzük fel. Fontos hangsúlyozni, hogy a Bernoulli algoritmus ilyen esetekben is képes előállítani a domináns pólust, feltételezve, hogy rendelkezésre állnak a szükséges Fourier-együtthatók. Ezen kívül megjegyzendő, hogy a Bernoulli algoritmus abban az esetben is használható, ha a tényleges Fourier együtthatók helyett csak diszkrét Fourier együtthatók ismeretét tételezzük fel. A klasszikus Bernoulli algoritmus jelentős hátránya azonban, hogy nem alkalmazható olyan esetekben ahol P nem rendelkezik egyértelmű domináns zérussal. Ez különösen nagy problémát jelent mérnöki problémák esetében, ahol gyakran szükséges olyan dinamikai rendszereket leírni, ún. átviteli, racionális függvények meghatározása, melyek pólusai komplex konjugált párokkal írhatóak le.

A probléma kiküszöbölésére a [5] dolgozatban Schipp és Soumelidis vezette be a Bernoulli algoritmus egy módosítását. Nevezetesen, a [5]-ben bevezetett, azóta a [6, 7, 8]-ban "Schi-So" módszerként hivatkozott módosított Bernoulli algoritmus

alapját az adja, hogy trigonometrikus rendszer helyett, a vizsgált racionális függvény ún. Laguerre-Fourier sorfejtéséből indul ki. Ez (ld. 2. fejezet) felfogható úgy is, hogy az eredeti racionális függvény összes pólusát egy hiperbolikus egybevágósági transzformációnak vetjük alá, így garantálva a transzformált függvényben egy domináns pólus meglétét. Az [5]-ben közölt eredmények alapján [9]-ben bevezették a von Miseses algoritmus megfelelőjét, ami hasonló elv mentén képes megtalálni mátrixok domináns sajátértékeit. A [10] publikációban olyan algoritmusokat vezettek be, melyek az Schi-So módszer iteratív alkalmazásával képesek meghatározni egy racionális függvény összes pólusát. Ezt követően [7]-ben bevezetésre került az ún. általánosított Schi-So módszer, ami Laguerre rendszer helyett általánosabb racionális ortogonális sorbafejtésből indul ki. Jelen dolgozatban a Schi-So algoritmusok további általánosítását javasoljuk. Eredményeink alapját a 35th Mediterranean Control Conference nemzetközi konferenciára benyújtott és elfogadott publikációnk [8] szolgáltatja. A javasolt módszer a korábbi, racionális ortogonális függvényrendszerek helyett általánosabb, úgynevezett szorzatrendszerekre általánosítja a klasszikus Bernoulli és a korábbi Schi-So eljárásokat.

Számos mérnöki probléma leírható lineáris, időinvariáns, egy dimenziós bemenetű és egy dimenziós kimenetű (LTI-SISO) dinamikai rendszerekkel. Bizonyos stabilitási tulajdonságok és diszkrét időbeli mintavételezés feltételezése mellett egy LTI-SISO rendszer frekvenciatérbeli reprezentációja, más néven átmenetfüggvénye eleme a $H_\infty(\mathbb{D})$ térnek, ahol $\mathbb{D}$ a komplex diszket jelöli. A Hardy-terek tulajdonságaiból fakadóan a rendszer átmenetfüggvénye így a $H_2(\mathbb{D})$ Hardy és Hilbert térnek is eleme. Ennek megfelelően, számos feladat esetén (pl. az átviteli függvény meghatározása, ún. identifikációja) érdemes a problémát Hilbert terekben általánosan használható ortogonális sorfejtések segítségével kezelni. Az LTI-SISO rendszerek átmenetfüggvényeinek pólusai a gyakorlatban gyakran komplex konjugált párok, így sok esetben nincs egyértelmű domináns pólus. Ilyen esetben az eredeti Bernoulli-módszer nem alkalmazható rendszeridentifikációra. A Schi-So módszer egy további fontos előnye a rendszeridentifikáció területén az, hogy a használatához nem kell ismerni az átmenetfüggvény pólusainak számát.



1.1. ábra. A Bernoulli-módszerrel megadott hányados-sorozat egy olyan kétpólusú átmenetfüggvény, esetén aminek van domináns pólusa, és olyan esetén, aminek nincs. Amint látható, a hányados-sorozat (konjugáltja) az első esetben a domináns inverz pólushoz tart, míg a második esetben egyáltalán nem konvergens.

Jelen dolgozat a [8, 7] cikkekben leírt módszert bővíti ki, több módosítást bevezetve. Egyrészt, az eredeti Schi-So módszerhez képest, egy numerikus szempontból stabilabb eljárást ad a pólusok meghatározására. Másrészt a [7] cikk bővítésével bemutatja, hogy a Bernoulli módszert általánosíthatjuk nem feltétlenül ortogonális, komplex analitikus függvények egy tágabb osztályára. A javasolt általánosítás felhasználásával egy Blaschke-szorzatokon alapuló Bernoulli algoritmust javasol, ami a korábbi megközelítésekénél szerencsésebb numerikus tulajdonságokkal rendelkezik. A javasolt módszerek hatékonyságát numerikus szimulációkkal és egy konkrét fizikai rendszerhez köthető identifikációs példán keresztül szemléltetjük.

A dolgozat a továbbiakban az alábbi felépítést követi. A 2. fejezet áttekintést nyújt az eredmények bemutatásához szükséges matematikai fogalmakról. A 2. fejezetben továbbá részletezzük a Bernoulli, illetve korábbi Schi-So algoritmusok működését.

dését. A 3. fejezetben bemutatjuk a dolgozat fő önálló eredményeit, majd a 4. fejezetben numerikus kísérletek segítségével igazoljuk a javasolt eljárások hatékonyságát. A szimulált numerikus eredményeken kívül a 4. fejezetben bemutatjuk a javasolt általánosított Schi-So módszer alkalmazását egy valódi méréseken alapuló probléma esetén. Az összefoglalást és a kitekintést az 5. fejezet tartalmazza.

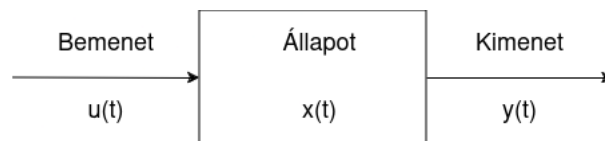
2. fejezet

Matematikai háttér

2.1. Dinamikai rendszerek

Számos fizikai jelenség és mérnöki probléma írható le dinamikai rendszerek segítségével. Dinamikai rendszerekkel időben változó jelenségeket modellezhetünk. Formálisan egy dinamikai rendszert három függvény határoz meg. Legyen $M \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}$ és $k, l, m \in \mathbb{N}$. Ekkor az alábbi függvények egy dinamikai rendszert írnak le:

$$\begin{aligned} u &: M \rightarrow \mathbb{R}^k \\ x &: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l \\ y &: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{2.1}$$



2.1. ábra. Egy dinamikai rendszer sematikus ábrázolása.

A 2.1 ábrán látható $u(t)$ leképezést bemenetnek, míg az $x(t)$ és $y(t)$ függvényeket a t -időpillanathoz tartozó állapotnak és kimenetnek nevezzük [11, 12]. Az u bemenetet az y kimenethez rendelő operátort $M = \mathbb{R}$ esetben folytonos, $M = \mathbb{N}$ esetben diszkrét dinamikai rendszernek nevezzük. Dinamikai rendszereket folytonos időben egy differenciálegyenlettel:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

diszkrét időben pedig egy differenciaegyenlettel:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

írhatjuk le. Mindkét esetben $f : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \times M \rightarrow \mathbb{R}^l$ és $g : \mathbb{R}^l \times M \rightarrow \mathbb{R}^m$ (2.2). A dolgozat a továbbiakban diszkrét idejű dinamikai rendszerekkel foglalkozik. Ha f és g lineáris függvények, azaz:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

akkor a rendszert lineáris rendszernek nevezzük. Az $A(t) = A$, $B(t) = B$, $C(t) = C$ esetben, azaz ha az A, B és C konstans függvények, a

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

rendszert lineáris, időinvariáns rendszernek, vagy LTI (linear, time-invariant) rendszernek nevezzük [11, 12]. A dolgozat speciálisan olyan LTI rendszerekkel foglalkozik, melyek teljesítik az alábbi feltételeket. Egyrészt $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ és $y : M \rightarrow \mathbb{R}$, azaz a rendszer bemenete és kimenete egydimenziós (single input, single output, ún. SISO). Ezen kívül feltételezzük, hogy amennyiben u korlátos, legyen y is korlátos. Ez utóbbit bounded input, bounded output, ún. BIBO stabilitásnak szokták nevezni. A dolgozat ezen túl olyan dinamikai rendszerekkel foglalkozik, amikre érvényes a SISO és BIBO tulajdonság.

Végül a vizsgált rendszerekkel kapcsolatban megköveteljük a kauzalitást. Bármely $t_0 \in \mathbb{Z}$ és $u_1, u_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^k$ bemenetek, illetve $y_1, y_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ esetén, ahol $u_1(t) = u_2(t)$ ($t < t_0$) teljesül, fennáll az $y_1(t) = y_2(t)$ ($t < t_0$) összefüggés. Ennek megfelelően kauzális rendszerekben a kimenetek nem függhetnek a jövőbeli bemenetektől.

2.2. Rendszerek frekvenciatérbeli vizsgálata

Rendszerelméletben kitüntetett figyelem irányul a dinamikai rendszerek frekvenciatérbeli vizsgálatára. Legyen ℓ a komplex sorozatok, ún. jelek halmaza, továbbá legyen $\mathbf{x} := (x_0, x_1, \dots) \in \ell$ és $k < 0$ esetén $x_k := 0$. Ha az időinvariáns (2.4) egyenletre alkalmazzuk a

$$X(z) = \sum_{t=0}^{\infty} x_t z^t \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (2.6)$$

úgynevezett Z-transzformációt, és a kapott egyenleteket átrendezzük [11], akkor az

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} z x_0 + C(zI - A)^{-1} B U(z)$$

egyenletet kapjuk, ahol a

$$H(z) := C(zI - A)^{-1} B$$

függvény a rendszer ún. átmenetfüggvénye. Amennyiben a rendszer kezdeti állapota nulla, azaz $x(0) = 0$, a frekvenciatérbeli leírás egyszerűsödik:

$$Y(z) = H(z)U(z). \quad (2.7)$$

Frekvenciatérbeli vizsgálathoz érdemes egy másik megközelítéssel felírni az LTI-SISO rendszereket. Egy LTI-SISO rendszer felírható [2], mint egy $r : \ell \rightarrow \ell$ leképezés:

$$r(\mathbf{u}) = \mathbf{r} * \mathbf{u}, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{u} \in \ell) \quad (2.8)$$

ahol a $*$ művelet a diszkrét konvolúció:

$$(\mathbf{u} * \mathbf{v})_k = \sum_{j=0}^{\infty} u_j v_{k-j}. \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ell) \quad (2.9)$$

A $H(z) := R(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ ($H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$) függvény ekvivalens a (2.7)-beli átmenetfüggvénnyel. A BIBO tulajdonság ebben az esetben azzal ekvivalens, hogy

$$r : \ell_{\infty} \rightarrow \ell_{\infty}. \quad \ell_{\infty} = \{\mathbf{x} \in \ell, \sup \mathbf{x} < \infty\}$$

Másképp fogalmazva, r a korlátos sorozatok halmazát a korlátos sorozatok halmazára képezi le.

Ha a rendszer BIBO-stabil, akkor a H átmenetfüggvény eleme a $H^{\infty}(\mathbb{D})$ Hardy-térnek:

$$H^s(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{A}, \sup_{0 < r < 1} M^s(f, r)\}, \quad (1 \leq s \leq \infty) \quad (2.10)$$

ahol $\mathcal{A}$ a komplex analitikus, vagy holomorf függvények halmaza és

$$M^s(f, r) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^s dt \right)^{\frac{1}{s}} \quad (1 \leq s < \infty)$$

$$M^s(f, r) := \max_{t \in [-\pi, \pi)} |f(re^{it})| \quad (s = \infty).$$

Fontos megjegyezni, hogy a Hardy-terek tartalmazási tulajdonságaiból következik, hogy $H^\infty(\mathbb{D}) \subset \dots \subset H^2(\mathbb{D})$, [13] így $H \in H^2(\mathbb{D})$. Mivel a $H^2(\mathbb{D})$ tér Hilbert-tér, ezért a dolgozatban vizsgált identifikációs probléma megoldása során támaszkodhatunk a Hilbert terekre vonatkozó ortogonális sorfejtésekkel kapcsolatos eredményekre.

Amennyiben az $\mathbf{r}$ sorozatra teljesül, hogy csak véges nem nulla eleme van, akkor H egy racionális függvény. Ezen felül, mivel ebben az esetben H analitikus $\overline{\mathbb{D}} := \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ -n [2], H összes pólusa a komplex egységkörön belül található.

2.3. Racionális függvényosztályok

A továbbiakban fontos szerepet játszanak az

$$r_\alpha(z) = \frac{1}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, \alpha \in \mathbb{D}) \quad (2.11)$$

elemi racionális függvények. Legyen $A := (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{D}^m$ véges rögzített halmaz. Az A -beli pontok és (2.11) segítségével definiáljuk az alábbi m -dimenziós $H^2(\mathbb{D})$ -beli altereket:

$$\mathcal{R} := \text{span}\{r_\alpha : \alpha \in A\} = \left\{ \sum_{k=1}^m A_k \cdot r_{\alpha_k} : \alpha_k \in A, A_k \in \mathbb{C}, (k = 1, \dots, m) \right\}. \quad (2.12)$$

Nilvánvaló, hogy $z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$ az r_α elemi racionális függvény pólusa, emiatt az $\alpha \in \mathbb{D}$ számot r_α inverz pólusának nevezzük. Ha $H \in \mathcal{R}$, akkor H inverz pólusainak ismeretében meghatározhatók a pólusai is.

A racionális függvények mellett a továbbiakban fontos szerepet játszanak az

$$B_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, a \in \mathbb{C}) \quad (2.13)$$

úgynevezett Blaschke-függvények. Könnyedén belátható, hogy $B_a(a) = 0$. A Blaschke-függvények bijekciók a zárt diszken. Az inverz leképezés a $B_a^{-1} = B_{-a}$ képlettel adjató meg, ugyanis:

$$B_a(B_{-a}(z)) = \frac{\frac{a+z}{1+\bar{a}z} - a}{1 - \bar{a}\frac{a+z}{1+\bar{a}z}} = \frac{z - a + a - |a|^2z}{1 + \bar{a}z - \bar{a}z + |a|^2} = z, \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, a \in \mathbb{C}). \quad (2.14)$$

Egy másik, a Blaschke-függvényekre vonatkozó, fontos tulajdonság az

$$1 - |B_a(z)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}, \quad (z \in \mathbb{D}, a \in \mathbb{C}) \quad (2.15)$$

azonosság. Ebből következik, hogy $a \in \mathbb{D}$ esetén $B_a(z) \in \mathbb{D}$ ha $z \in \mathbb{D}$ és $B_a(z) \in \mathbb{T}$ ha $z \in \mathbb{T}$. A (2.14) és (2.15) azonosságok következménye, hogy a $B_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ és $B_a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ függvények bijekciók, azaz a Blaschke függvények az egységgörte és a tóruszt önmagukba képezik le. A Blaschke-függvények fontos szerepet játszanak különféle módszerekben, amik dinamikai rendszerek átmenetfüggvényeit határozzák meg. [2] Emellett még érdemes kiemelni, hogy a Bolyai-Lobacsevszkij geometria Poincaré-féle körmodellje is szoros kapcsolatban áll a Blaschke-függvényekkel. Nevezetesen a geometriai egybevágósági transzformációi leírhatóak Blaschke-függvények segítségével. [13]. Legyen

$$B_{\mathbf{a}}(z) = \epsilon \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad (\mathbf{a} = (\epsilon, a) \in \mathbb{T} \times \mathbb{D}) \quad (2.16)$$

a bővített Blaschke-függvényosztály. Ekkor $B_{\mathbf{a}} \circ B_{\mathbf{b}} = B_{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}$, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\epsilon, a) \quad ((\epsilon, a) \in \mathbb{B} := \mathbb{T} \times \mathbb{D}) \\ \mathbf{b} &= (\gamma, b) \quad ((\gamma, b) \in \mathbb{B}) \\ \mathbf{a} \circ \mathbf{b} &:= \left(\epsilon\gamma \frac{1 + a\bar{b}\bar{\gamma}}{1 + \bar{a}b\gamma}, \bar{\gamma} \frac{a + b\gamma}{1 + \bar{a}b\gamma} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

A $\mathcal{B} := \{B_{\mathbf{a}} : M \rightarrow M, M \in \{\mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{T}\}, \mathbf{a} \in \mathbb{T} \times \mathbb{D}\}$ halmaz zárt a függvénykompozíció műveletére. Emellett, mivel $B_{(1,0)}(z) = z$, azaz $B_{(1,0)} \in \mathcal{B}$ semleges elem, valamint $B_{(\epsilon,a)}^{-1} = B_{(\bar{\epsilon}, -\epsilon a)}$, így a bővített Blaschke-függvények csoportot alkotnak a függvénykompozíció műveletével.

Blaschke-függvények ezen kívül szoros kapcsolatban állnak az ugynevezett pszeudo-hiperbolikus metrikával:

$$\rho_0(z_1, z_2) = |B_{z_1}(z_2)|. \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}) \quad (2.18)$$

Legyen $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{D}^n, n \in \mathbb{N}$. Ekkor a

$$B^{\mathbf{a}}(z) = \prod_{j=0}^n B_{a_j}(z) \quad (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}), \quad (2.19)$$

szorzatot (véges) Blaschke-szorzatnak nevezzük [2, 13, 14]. Egyértelműen, $B^{\mathbf{a}}$ zérushelyei az $a \in \mathbf{a}$ számok. Blaschke-szorzatok fontos szerepet játszanak $H^s(\mathbb{D})$ -beli

függvények faktorizációjában [14]. Amennyiben $F \in H^s(\mathbb{D})$, $(1 \leq s < \infty)$ és az $\mathbf{a}$ halmaz F zérushelyeinek halmaza, akkor F egyértelműen felírható $F = B_{\mathbf{a}}G$ alakban, ahol $G \in H^s(\mathbb{D})$ és $\|F\|_{H^s} = \|G\|_{H^s}$.

2.4. Malmquist-Takenaka rendszerek

Legyen $\mathbf{a} = (a_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{C}$ sorozat. Ekkor a

$$\phi_n^{\mathbf{a}}(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_n|^2}}{1 - \bar{a}_n z} \prod_{j=0}^n B_{a_j}(z) \quad (2.20)$$

függvényekből álló $\Phi^{\mathbf{a}} = \{\phi_n^{\mathbf{a}}, n \in \mathbb{N}\}$ függvényrendszert az $\mathbf{a}$ által generált Malmquist-Takenaka függvényrendszernek, vagy röviden MT-függvényrendszernek nevezzük [13, 15, 16]. Bármilyen $\mathbf{a} = (a_n \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N})$ esetén $\Phi^{\mathbf{a}}$ ortonormális $H^2(\mathbb{D})$ -n a

$$\langle H, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{it}) \overline{G(e^{it})} dt, \quad H, G \in H^2(\mathbb{D}) \quad (2.21)$$

skaláris szorzatra nézve [13]. Emellett $\Phi^{\mathbf{a}}$ teljes $H_2(\mathbb{D})$ -n akkor és csak akkor, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |a_n|) = \infty. \quad (2.22)$$

Ez utóbbit Szász-feltételnek nevezzük [17].

A Malmquist-Takenaka függvényrendszerek jelentőségét jól mutatja, hogy további fontos ortogonális rendszerek általánosításaként foghatóak fel. Amennyiben $a_j = a$, $(a \in \mathbb{D}, a_j \in \mathbf{a})$, azaz $\mathbf{a}$ minden eleme azonos, akkor az $L_{a,n} := \phi_n^{\mathbf{a}}$, úgynevezett Laguerre-függvényrendszert kapjuk, ha $a = 0$, akkor pedig a trigonometrikus rendszert. Ha $\mathbf{a} = (a_n \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N})$ -re létezik olyan $p \in \mathbb{N}$, hogy $a_n = a_{n+p}$, akkor a $\Phi^{\mathbf{a}}$ rendszert p -periodikus MT-rendszernek nevezzük. A periodikus MT-függvényrendszerek speciális, $p = 1$ esete a Laguerre-függvényrendszer.

Az $\Phi^{\mathbf{a}}$ MT-függvények szerinti

$$\hat{f}_{\mathbf{a}}(n) := \langle f, \phi_n^{\mathbf{a}} \rangle \quad (f \in H^2(\mathbb{D}), n \in \mathbb{N}) \quad (2.23)$$

számokat f MT-Fourier együtthatóinak, vagy az $\mathbf{a} = (a, a, a, \dots)$ esetben Laguerre-Fourier együtthatóinak nevezzük. Mivel $B_0(z) = z$, így $L_{0,n}(z) = z^n$ és $\langle f, L_{0,n} \rangle = \langle f, z^n \rangle = \hat{f}(n)$ azaz a Laguerre-Fourier együtthatók speciális $a = 0$ esete visszaadja f Fourier-együtthatóit.

2.5. Bernoulli-módszer

Legyen $H \in H^2(\mathbb{D})$ átmenetfüggvény, és legyen $\mathbf{A}$ a H inverz pólusainak halmaza. Tegyük fel, hogy H minden pólusának multiplicitása 1, legnagyobb abszolút értékű, ún. domináns inverz pólusa $\alpha_1 \in \mathbb{D}$, azaz teljesül, hogy

$$|\alpha_1| > |\alpha_j|. \quad (j = 2, \dots, m-1, \alpha_1, \alpha_j \in A)$$

A továbbiakban az α_1 pólust H domináns inverz pólusának nevezzük. Legyen c_k a H k -adik Fourier-együtthatója. Ekkor

$$q_k := \frac{c_k}{c_{k-1}} = \overline{\alpha_1} + O(w^k). \quad \left(w = \max_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_1\}} \frac{|\alpha|}{|\alpha_1|}, k \in \mathbb{N} \right) \quad (2.24)$$

Másképp fogalmazva, H Fourier-együtthatóiból képzett $\mathbf{q}_n := (q_1, q_2, \dots)$ hányados-sorozat H legnagyobb abszolút értékű, azaz domináns inverz pólusának komplex konjugáltjához tart, $O(w^k)$ sebességgel, ahol w a H legnagyobb és második legnagyobb abszolút értékű pólusainak hányadosa.

Bernoulli egy adott P polinom zérushelyeit kereste ezzel a módszerrel, a c_n együtthatókat rekurzióval állította elő P együtthatóiból. A két probléma ekvivalens, $H(z) := \frac{1}{z^m P(\frac{1}{z})}$ analitikus függvény pólusai megegyeznek P zérushelyeivel.

Bernoulli óta számos módosítása született a módszernek. Legfontosabbak ezek közül König munkássága [18, 19], aki kiterjesztette a póluskeresési eljárást meromorfikus függvényekre, valamint az Aitken által bevezetett módszer [20]. Aitken Hankel-mátrixokat állított elő a c_k együtthatókból, melyek felhasználásával H összes pólusát kereste, azzal a feltételezéssel, hogy H pólusainak abszolút értékei különbözőek.

2.6. Schipp-Soumelidis módszer

Előfordulhat, hogy $q = \max_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_1\}} \frac{|\alpha|}{|\alpha_1|}$ értéke 1, vagy 1-hez közeli, azaz van egy pólus, aminek az abszolút értéke megközelíti a domináns inverz pólus abszolút értékét. Ebben az esetben a $\mathbf{q}_n$ sorozat csak lassan, vagy egyáltalán nem konvergál, így a Bernoulli-módszer nem alkalmazható. Amennyiben az LTI-SISO rendszer bemenet-és kimenetfüggvénye is valós, a rendszer átmenetfüggvényének pólusai valósak, vagy komplex konjugált párok. Gyakorlatban ez sokszor azzal jár, hogy nincs domináns

pólus. Például ha egy rendszernek két pólusa van, melyek komplex konjugáltjai egymásnak, akkor az abszolút értékük megegyezik. Ilyen esetekben a Bernoulli-módszer nem használható.

1. Tétel (Soumelidi-Schipp módszer). *Legyen $H \in \mathcal{R}$ függvény és $A \subset \mathbb{D}$ a H pólusainak halmaza, (2.24)-hez hasonlóan. Ekkor a $c_k := \langle H, L_{k,a} \rangle$ a H függvény $a \in \mathbb{D}$ paraméterrel generált Laguerre-Fourier együtthatóira teljesül a következő:*

$$q_k := \frac{c_k}{c_{k-1}} = B_a(\alpha_1) + O(w^k), \quad \left(w = \max_{\alpha \in A} \frac{|B_a(\alpha)|}{|B_a(\alpha_1)|}, k \in \mathbb{N} \right) \quad (2.25)$$

ahol α_1 a H függvény B_a -domináns pólusa [5]. A H függvény α_1 pólusát, amelyre teljesül, hogy

$$|f(\alpha_1)| > |f(\alpha)| \quad (f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, \alpha \in A \setminus \{\alpha_1\})$$

a H f -domináns pólusának nevezzük.

Nem nehéz belátni, hogy a Schi-So algoritmus abban az esetben is működik, ha a Laguerre-Fourier együtthatók helyett a $\langle L_{a,k}, H \rangle$ skaláris szorzatokat választjuk c_k -nak. Fontos megjegyezni, hogy a Cauchy-integrálformula alapján egy $r_\alpha(z) = \frac{1}{1-\bar{\alpha}z}$ függvény és a $L_{a,k}$ Laguerre-függvény skaláris szorzata megadható

$$\langle L_{a,k}, r_\alpha \rangle = L_{a,k}(\alpha) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}\alpha} B_a^k(\alpha)$$

formában. Így a $H(z) = \sum_{j=0}^m r_{\alpha_j}(z)$ függvény Laguerre-függvényekkel vett skaláris szorzatai

$$c_n = \langle H, L_{a,k} \rangle = \sum_{j=0}^m \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}\alpha_j} B_a^k(\alpha_j)$$

alakúak. Ez azt jelenti, hogy c_k felfogható mértani sorozatok összegeként, így elég nagy $k \in \mathbb{N}$ esetén a c_k összes tagja elhanyagolható a legnagyobb kvóciensű tagot kivéve. Ebből következik a (2.25) egyenlőség, valamint az is, hogy a konvergencia sebességét az a két pólus határozza meg, melyek B_a -transzformáltja a legnagyobb abszolút értékű.

Ezen felül, vegyük a $H'(z) := \sum_{j=0}^m \frac{1}{1-B_a(\alpha_j)z}$ transzformált átmenetfüggvényt. Ekkor, hiszen $L_{0,k}(z) = z^k$, fennáll hogy

$$\frac{\langle L_{a,k}, H \rangle}{\langle L_{a,k-1}, H \rangle} = \frac{\langle L_{a,k}, H \rangle}{\langle L_{0,k-1}, H' \rangle} = \frac{\langle L_{a,k}, H \rangle}{\langle \epsilon_{k-1}, H' \rangle} \rightarrow B_a(\alpha_1) \quad (k \rightarrow \infty)$$

és

$$\frac{\langle \epsilon_k, H' \rangle}{\langle \epsilon_{k-1}, H' \rangle} \rightarrow B_a(\alpha_1), \quad (k \rightarrow \infty)$$

azaz az a paraméterrel alkalmazott Schi-So módszer ekvivalens a H pólusainak B_a -transzformáltjából előállított átmenetfüggvényre alkalmazott Bernoulli módszerrel.

2.7. MT-Schipp-Soumelidis

A [5]-ben bemutatott Schip-Soumelidis módszer módosított változata Laguerre-Fourier együtthatók helyett periodikus MT-Fourier együtthatókat használ fel.

2. Tétel (MT-Schipp-Soumelidis módszer). *Legyen $H \in \mathcal{R}$ függvény és $\mathbf{A}$ a $H \in \mathcal{R}$ pólusainak halmaza, illetve legyen $\mathbf{a}$ egy p -periodikus sorozat, ahol $a_n = a_{n+p}$ és aminek egy periódusa $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{D}^p$. Legyen $\Phi^{\mathbf{a}}$ az $\mathbf{a}$ sorozat által generált periodikus MT-függvényrendszer ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor a $v_k := n + pk$, ($n < p$) jelöléssel*

$$q_k = \frac{\langle \phi_{v_k}^{\mathbf{a}}, H \rangle}{\langle \phi_{v_k-1}^{\mathbf{a}}, H \rangle} = \frac{\phi_n^{\mathbf{a}}(\alpha_1)}{\phi_{n-1}^{\mathbf{a}}(\alpha_1)} + O(w^k). \quad w := \max_{\alpha \in \mathbf{A} \setminus \{\alpha_1\}} \frac{|B_{\mathbf{a}}(\alpha)|}{|B_{\mathbf{a}}(\alpha_1)|} \quad (2.26)$$

[7]

Ahol α_1 a H függvény $B_{\mathbf{a}}$ -domináns pólusa, azaz

$$B_{\mathbf{a}}(\alpha_1) > B_{\mathbf{a}}(\alpha). \quad (\alpha \in \mathbf{A} \setminus \alpha_1)$$

Az α_1 pólus ebben az esetben is könnyedén visszafejthető. Legyen $\kappa := \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}}{\sqrt{1-|a_{n-1}|^2}}$. Ekkor a (2.26) hányados kifejezhető

$$\frac{\phi_n^{\mathbf{a}}(z)}{\phi_{n-1}^{\mathbf{a}}(z)} = \kappa \frac{z - a_{n-1}}{1 - \overline{a_n} z} \quad (2.27)$$

alakban, aminek az inverze a

$$Q(z) = \frac{\frac{z}{\kappa} + a_{n-1}}{1 + \overline{a_{n-1}} \frac{z}{\kappa}} \quad (2.28)$$

függvény, így az $\alpha_1 = Q(\lim_{k \rightarrow \infty} q_k)$ formában kapható vissza.

Az általánosított Schi-So módszer lehetőséget ad arra, hogy ún. póluselimináció használatával H összes pólusát meghatározzuk. Amennyiben már megtaláltuk a $B_{\mathbf{a}}$ -domináns α_1 pólust, vegyük a $\mathbf{a}_1 := \mathbf{a} \cup \{\alpha_1\} \in \mathbb{D}^{p+1}$ vektort és az ebből előállított

$\mathbf{a}_1$, $p + 1$ -periodikus sorozatot. Amennyiben az általánosított Schi-So módszert újra alkalmazzuk H -ra a $\Phi^{\mathbf{a}_1}$ MT-függvényrendszerrel, a megtalált pólus nem α_1 lesz, hiszen $B_{\alpha_1}(\alpha_1) = B_{\mathbf{a}_1}(\alpha_1) = 0$, így α_1 nem lehet H $B_{\mathbf{a}_1}$ -domináns pólusa.

A póluseliminációs eljárást egymás után többször alkalmazva minden alkalommal egy új pólust találunk meg. Mivel a pólusok száma nem feltétlenül ismert, felmerül a kérdés, hogy mikor állítsuk le az algoritmust. Legyenek $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ az eddig identifikált pólusok és legyen $\phi_k^{\alpha_k}$ az $\boldsymbol{\alpha}_k := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ paraméterekkel generált Malmquist-Takenaka függvény. Ekkor a $c_k := \langle H, \phi_k^{\alpha_k} \rangle$ jelöléssel legyen H k -edik MT-részletösszege

$$S_k^{\boldsymbol{\alpha}} := \sum_{j=1}^k c_j \phi_j^{\alpha_j}. \quad (2.29)$$

A projekció hibáját ún. PRD-vel (percent root mean squared difference) [7] jellemezhetjük:

$$PRD(\boldsymbol{\alpha}) := \sqrt{\frac{\|H - S_j^{\boldsymbol{\alpha}}\|_{H^2}^2}{\|S_j^{\boldsymbol{\alpha}}\|_{H^2}^2}} \cdot 100 \quad (2.30)$$

Ismeretlen pólusszám esetén egyszerűen megadhatunk egy küszöbértéket, és a póluseliminációs eljárást addig ismétljük, míg $PRD(\boldsymbol{\alpha})$ a megadott küszöbérték fölött van.

2.8. Numerikus szempontok

Mivel numerikus módon nem tudjuk kiszámítani a q_n sorozat határértékét, így egy megfelelően nagy $k \in \mathbb{N}^+$ indexű q_k elemmel kell közelítenünk. Bonyolítja a problémát, hogy mivel a c_n sorozat gyorsan közelít 0-hoz, így a $\mathbf{q}_n$ hányadossorozatban numerikus hibák léphetnek fel. Emiatt érdemes a q_k elemet a sorozat egy olyan helyéről választani, ahol a sorozat tagjai közel esnek egymáshoz. [7] A hányadossorozat határértékének approximációjához egy csúszó ablakot használunk, hogy meghatározzuk azt az intervallumot, ahol a sorozat a legkevésbé oszcillál. Adott $\mathbf{q}_n$ sorozatra ls $J = [\gamma, \gamma + L]$ index intervallumra legyen:

$$\omega(J, \mathbf{q}_n) := \max_{i,j \in J} |q_i - q_j|. \quad (2.31)$$

A határértéket egy olyan q_k taggal approximáljuk, hogy

$$\omega([k, k + L], \mathbf{q}_n) = \min_{1 \leq \gamma \leq d} \omega([\gamma, \gamma + L], \mathbf{q}_n), \quad (k, d, L \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq d).$$

azaz q_k a q_n sorozat legkevésbé oszcilláló, L hosszú intervallumának első eleme.

Egy másik fontos probléma az, hogy milyen paramétereket válasszunk, hogy pontos becstést kapjunk a pólusokra. A kapott, (2.31)-ben felhasznált q_n sorozat függ a választott a -paramétertől, így ha egy $a \in \mathbb{D}$ paraméter szerint szeretnénk minimalizálni, akkor egy nemlineáris optimizációs problémát kapunk. A [7] publikáció két megközelítést is nyújt a probléma megoldására. Az ún. Monte-Carlo algoritmus során szimplán alkalmazzuk az eljárást több, véletlen módon választott $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{D}^k$ paraméterekkel és válasszuk ki azt, amelyik a legjobb eredményt adja. A másik megközelítés az úgynevezett hiperbolikus Nelder-Mead algoritmus [21] alkalmazása. A Nelder-Mead módszer [22] egy numerikus optimizációs algoritmus, mely iteratív módon végez geometriai transzformációkat egy szimplexen, aminek a csúcsai az optimizáció jelenlegi állapotát reprezentálják. A hiperbolikus Nelder-Mead változat hiperbolikus geometriai transzformációkat alkalmaz, ezzel biztosítva, hogy a szimplex csúcsai az egységszken belül maradjanak.

3. fejezet

A Bernoulli módszer általánosítása

Ebben a fejezetben ismertetjük a pólus identifikációs eljárásokhoz köthető új eredményeket.

3.1. Együttható-sorozatok képzése alternatív módon

A Soumelidis-Schipp módszer egy $H \in \mathcal{R}$ komplex racionális függvény $c_n := \langle L_{a,n}, H \rangle = \sum_{j=0}^m A_j \cdot L_{a,n}(\alpha_j)$ (fordított) Laguerre-Fourier együttható-sorozatából képzett $q_n := \frac{c_n}{c_{n-1}}$ hányados-sorozat határértékét vizsgálja.

A c_n sorozat mértani sorozatok összege, emiatt 0-hoz tart. Így nagy n -esetén q_n két nagyon kis szám hányadosa, ami a gyakorlatban numerikus hibák miatt a $\mathbf{q}_n$ sorozat instabilitásához vezethet. Ezen problémák kiküszöbölése érdekében bevezetünk egy új módszert $\mathbf{q}_n$ határértékének kiszámítására.

3. Lemma. Legyen $H \in \mathcal{R}$, $c_n := \langle L_{a,n}, H \rangle$ és $q_n := \frac{c_n}{c_{n-1}}$. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{q}_n$ sorozat konvergens és $s = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$. Ekkor a $\sqrt[n]{c_n}$ sorozat is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = s$.

Bizonyítás. Legyenek $s_1 > s_2 > \dots > s_m \in \mathbb{D}$ a c_n összeg tagjainak kvóciensei, azaz

$$c_n := \sum_{j=1}^m A_j \cdot s_j^n. \quad (A_j \in \mathbb{C}, s_j \in \mathbb{D}) \quad (3.1)$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^m \left(\frac{s_j}{s_1}\right)^n = 0$ (hiszen $s_1 > s_2 > \dots$) és $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_1} = 1$, így:

$$\sqrt[n]{c_n} = \sqrt[n]{\sum_{j=1}^m A_j s_j^n} = s_1 \sqrt[n]{A_1 + \sum_{j=2}^m A_j \left(\frac{s_j}{s_1}\right)^n} \rightarrow s_1. \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.2)$$

□

A kapott eredmény a d'Alembert hányados- és Cauchy gyökkritériumok közötti kapcsolatból is következik. Gyöksorozat használata hányados-sorozat helyett több előnnyel is jár, például a gyökkritérium sokszor olyan esetekben is alkalmazható, mikor a hányadoskritérium nem. Ezen felül az n -edik gyök kiszámítása ekvivalens az n -fokú polinom gyökkeresési problémájával, amire számos, numerikus szempontból stabil és hatékony módszer létezik. [23, 24].

Az gyökvonást használó sorozatképzésnek egy hátránya van. A sorozat tagjai komplex számok, így adott $q_n \in \mathbf{C}$ esetén n olyan $z \in \mathbb{C}$ szám van, amire $z^n = q_n$. Emiatt n -edik gyökvonás során n különböző megoldást kapunk, amik közül csak az egyik a keresett érték. A gyakorlatban ez azonban többnyire nem jelent problémát, ugyanis sok esetben a rendszer néhány tulajdonságának korábbi ismeretéből meg tudjuk határozni a pólusok helyét, ami alapján ki tudjuk választani az n -edik gyök n ágai közül a megfelelő értéket. Például, a 4. fejezetben tárgyalt DC-motorról ismerjük, hogy a pólusai pozitív valós számok.

3.2. Általános függvényrendszerek

A dolgozat fő hozzájárulása az MT-Schi-So módszerben használt függvényrendszereknek egy általánosítása. Az módosítás lehetővé teszi, hogy az MT-Schi-So módszer során periodikus MT-függvényrendszerek helyett bármilyen $H^2(\mathbb{D})$ -beli, nem feltétlenül ortogonális, analitikus függvényrendszereket használjunk.

Legyen $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tetszőleges holomorfikus függvény. Ekkor a Cauchy-féle integrálformula [25] miatt: $\langle \psi, r_\alpha \rangle = \psi(\alpha)$. Legyenek

$$\mathcal{F}_p := (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p) \in \mathcal{A}(\mathbb{D})^p, \quad (\psi_j \in H^2(\mathbb{D})) \quad (3.3)$$

függvények, ahol $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ az a diszken analitikus függvények halmaza, azaz $\psi_j : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, ahol $(j \in (1, 2, \dots, p))$. Legyen $\mathcal{F}$ függványsorozat az $\mathcal{F}_p$ függvények p -periodikus kiterjesztése, azaz

$$\mathcal{F} := (\psi_1, \psi_2, \dots), \quad (\psi_j \in \mathcal{F}_p, j \in (1, 2, \dots, p)) \quad (3.4)$$

és $\psi_{n+kp} = \psi_n$, ahol $(n, k, p \in \mathbb{N}^+, n < p)$. Vegyük a $\phi_n(z) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ függvényrendszert, ahol

$$\phi_n(z) := N(z) \prod_{j=1}^n \psi_j(z). \quad (\psi_j \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{A}(\mathbb{D})) \quad (3.5)$$

Mivel ϕ_n egy periodikus függvénysorozat produktuma, így egy $v_k := n + kp$ számra teljesül, hogy

$$\phi_{v_k}(z) = \phi_n(z) \Psi^k(z) = N(z) \Psi^k(z) \prod_{j=1}^n \psi_j(z). \quad (\Psi := \prod_{j=1}^p \psi_j) \quad (3.6)$$

Mivel a ψ_j , $(j \in \mathbb{N}^+)$, $N \in H^2(\mathbb{D})$, így ϕ_n is $H^2(\mathbb{D})$ -beli.

Az így kapott függvényrendszer az eddig tárgyalt MT-, és Laguerre-függvényrendszerek általánosítása. Amennyiben $N(z) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}z}$ és $\mathcal{F}_p = (B_a)$, $(a \in \mathbb{D})$ esetet vesszük, akkor visszakapjuk a Laguerre-függvényrendszert. Ha $N(z) = 1$ és $\mathcal{F}_p = (id)$ akkor a trigonometrikus függvényrendszert. Hasonló módon kaphatjuk meg a periodikus MT-függvényrendszereket is.

4. Tétel (Általánosított Schipp-Soumelidis módszer). *Legyen $H = \sum_{j=1}^m A_j r_{\alpha_j} \in \mathcal{R}$, ahol $m \in \mathbb{N}^+$, $A_j \in \mathbb{C}$, illetve legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{D}^m$ H inverz pólusainak halmaza. Legyen $v_k := n + kp$, $(n, k, p \in \mathbb{N}^+, n < p)$. Legyen $\phi_{v_k} := N \prod_{j=1}^n \psi_j$ az előzőekben definiált függvényrendszer egy N analitikus függvényével. Tegyük fel, hogy $\alpha_1 \in \mathbf{A}$ a H függvény Ψ -domináns pólusa, azaz $|\Psi(\alpha_1)| > |\Psi(\alpha)|$ minden $\alpha \in \mathbf{A} \setminus \alpha_1$ esetén.*

Ekkor a $c_{v_k} := \langle \phi_{v_k}, H \rangle$ sorozatból képzett $q_k := \frac{c_{v_k}}{c_{v_k-1}}$ hányados-sorozatra teljesül, hogy:

$$q_k = \frac{\phi_{n+1}(\alpha_1)}{\phi_n(\alpha_1)} + O(w^k), \quad w := \max_{\alpha \in \mathbf{A} \setminus \alpha_1} \frac{|\Psi(\alpha)|}{|\Psi(\alpha_1)|} \quad (3.7)$$

Bizonyítás. A Cauchy-integrálformula miatt, és ϕ_{v_k} definíciója alapján:

$$\begin{aligned} c_{v_k} &= \langle \phi_{v_k}, H \rangle = \sum_{j=0}^m \overline{A_j} \phi_{v_k}(\alpha_j) = \sum_{j=0}^m \overline{A_j} \phi_n(\alpha_j) \Phi^k(\alpha_j) = \\ &= \overline{A_1} \phi_n(\alpha_0) \Phi^k(\alpha_1) + \sum_{j=2}^m \overline{A_j} \phi_n(\alpha_j) \Phi^k(\alpha_j) = \\ &= \Phi^k(\alpha_1) \left[\overline{A_1} \phi_n(\alpha_1) + \sum_{j=2}^m \overline{A_j} \phi_n(\alpha_j) \left(\frac{\Phi(\alpha_j)}{\Phi(\alpha_1)} \right)^k \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

amiből, hiszen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^m \overline{A_j} \phi_n(\alpha_j) \left(\frac{\Phi(\alpha_j)}{\Phi(\alpha_1)} \right)^k = 0$, az állítás egyszerűen következik. □

A (3.7). tétel általánosítja a második fejezetben áttekintett póluskereső eljárásokat, az előbb bemutatott függvényrendszer-választások esetén a (2.25) és (2.26) egyenleteket kapjuk vissza. A kiterjesztett módszer lényegi eltérése az előző eljárásokhoz képest az, hogy nem feltételezi a felhasznált függvényrendszer ortogonalitását. Ahhoz, hogy egy adott ϕ_n függvényrendszert alkalmazni tudjuk a módszerhez, csupán három tulajdonság szükséges:

- A ϕ_n függvények $H^2(\mathbb{D})$ -beliek legyenek. Ez azért kell hogy alkalmazhassuk Cauchy-formulát.
- $\phi_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, annak érdekében, hogy a hányados-sorozat konvergens legyen (hiszen ekkor $w < 1$).
- ϕ_n -t egy periodikus függvényssorozat generálja (habár magának ϕ_n -nek nem kell periodikusnak lennie).

Az eddig tárgyalt eljárások során fontos kérdés volt q_n konvergenciasebessége. Mivel a javasolt általánosítás lazább feltételekkel él a q_n sorozat előállításával kapcsolatban, ezért lehetőségünk nyílik a korábbi eredményeknél [6, 7] jobb numerikus tulajdonságokkal bíró sorozatok konstruálására.

3.3. Több pólus meghatározása

A kiterjesztett eljárás is használható több pólus meghatározására. Legyen α_1 a $H \in \mathcal{R}$ függvény Ψ -domináns pólusa. Legyen továbbá $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $f \in H^2(\mathbb{D})$ függvény, melyre igaz, hogy $f(\alpha_1) = 0$ és $f(z) \neq 0$, ha $z \neq 0$. Ekkor, ha az $\mathcal{F}_p$ függvényhalmazhoz hozzávesszük az f függvényt, azaz vesszük az $\mathcal{F}_{p+1} := \mathcal{F}_p \cup \{f\}$ halmazt, majd ennek segítségével előállíthatjuk a (3.5)-ben definiált ϕ_n függvényssorozatot, akkor ennek használatával ismételten alkalmazhatjuk a (3.7)-es tételt. Mivel ebben az esetben $\Psi(\alpha_1) = 0$, így a q_n sorozat biztosan nem α_1 -hez fog tartani, azaz egy másik pólust fogunk megtalálni. Az eljárást iteratív módon alkalmazva meg tudjuk találni a H függvény összes pólusát.

3.4. Pólusidentifikáció Blaschke-szorzatokkal

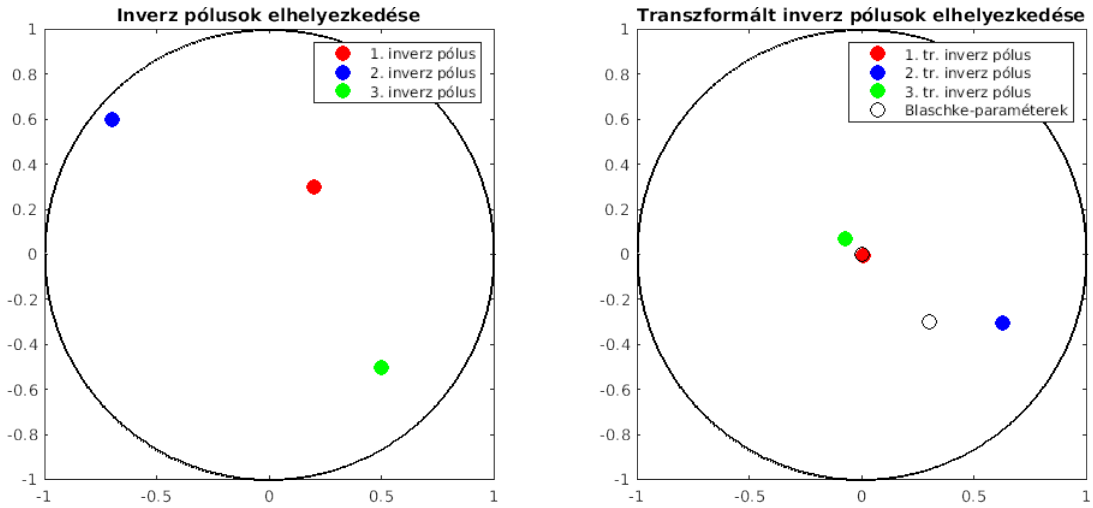
Mivel nagy n index esetén a $\mathbf{q}_n$ sorozatban numerikus hibák léphetnek fel, fontos, hogy q_n minél gyorsabban konvergáljon. A konvergenciasebesség $O(w^n)$, ahol $w = \max_{\alpha \in A \setminus \alpha_1} \frac{|\Psi(\alpha_1)|}{|\Psi(\alpha)|}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{q}_n$ akkor konvergál gyorsan, ha van egy pólus, aminek a Ψ -transzformáltjának abszolút értéke sokkal nagyobb, mint a többi pólusé.

Legyen $N(z) = 1$, és $\psi_j := B_{a_j}$ ahol $a_1 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ és $a_j = 0$, ($j \neq 0$). Ekkor $\Psi(z) := B_{\mathbf{a}}(z) = z^{p-1} B_a(z)$ ahol $\mathbf{a} = (a, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{D}^p$. Ezekkel a tekintsük a (3.6) egyenletben meghatározott függvényrendszert:

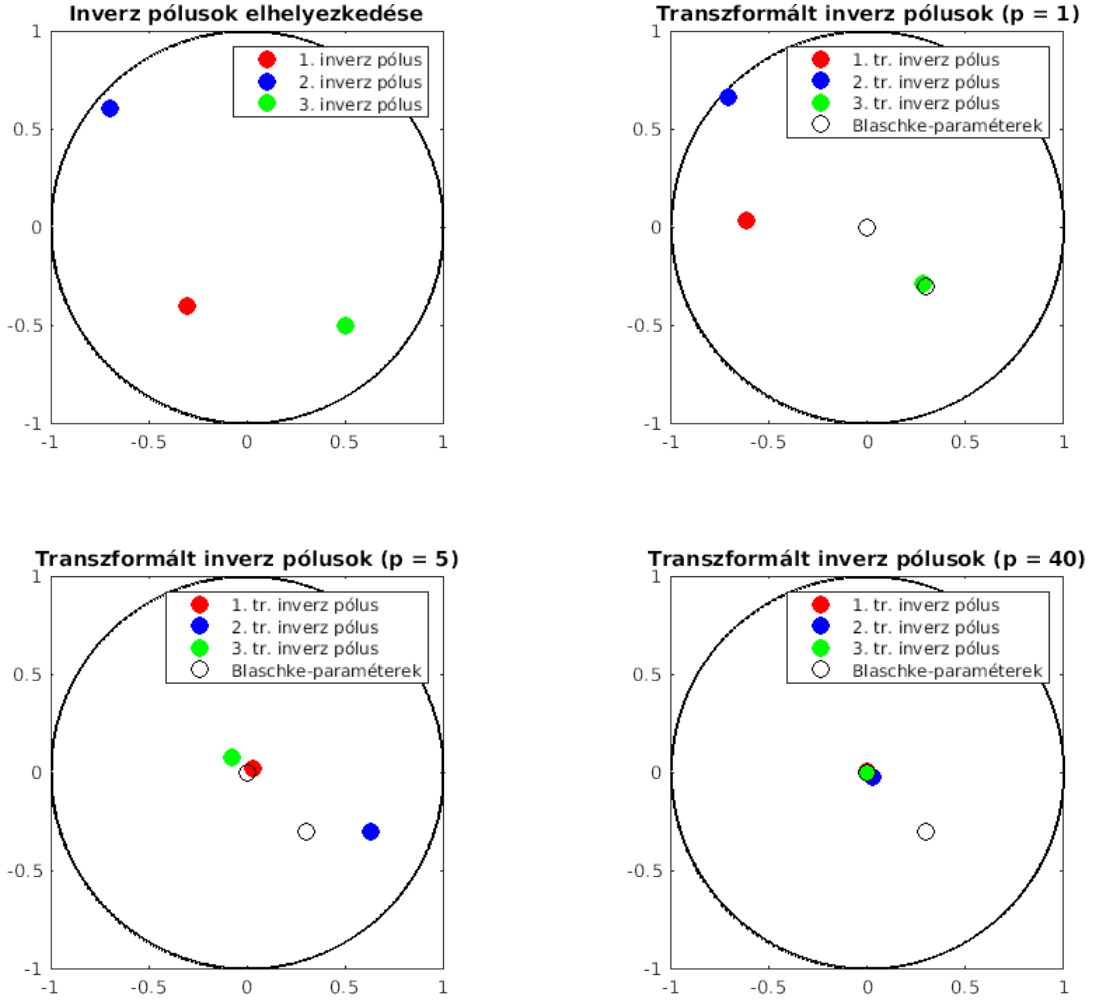
$$\phi_{v_k}(z) = z^{n-1} B_{a_1}(z) \Psi^k(z). \quad (\Psi(z) = z^{p-1} B_{a_1}(z)) \quad (3.9)$$

Az így definiált függvényrendszer analitikus, továbbá a ϕ_n függvények a diszket önmagára képzik. Így a (3.7) tételt alkalmazhatjuk a ϕ_n rendszerrel.

Mivel $|\Psi(z)| < 1$ ha $z \in \mathbb{D}$ és $|\Psi(0)| = 0$, ha $p > 1$, a Schwarz-Pick lemma alapján [26] $|\Psi(z)| < z$, ha $z \in \mathbb{D}$. Ez azt jelenti, hogy az előbb definiált transzformáció valamilyen $H \in \mathcal{R}$ függvény pólusait 0-felé húzza. Ez a hatás minden pólusra érvényesül, azonban a nagysága nem azonos minden pólus esetén.



3.1. ábra. Egy hárompólusú rendszer inverz pólusai és az inverz pólusok egy, a (3.9) szerint definiált Blaschke-szorzattal való transzformáltjai. Mint látható, a transzformáció során mindhárom pólus közelebb került 0-hoz, de az egyik sokkal kevésbé, mint a másik kettő.



3.2. ábra. Az inverz pólusok $z^{p-1}B_a(z)$ Blaschke szorzattal való transzformáltjai különböző p értékek esetén. Ahogy p -t növeljük, az inverz pólus transzformáltjainak aránya először növekszik. Mivel transzformáció a domináns inverz pólust is 0 felé húzza, elég nagy p esetén ez az arány csökken.

Egy további előnye a módszernek, hogy mivel $\phi_n(z) = z^{n-1}B_{a_1}(z)$ és $\phi_{n-1}(z) = z^{n-2}B_{a_1}(z)$, a $\mathbf{q}_n$ sorozat q határértéke $q = \frac{\phi_n(\alpha_1)}{\phi_{n-1}(\alpha_1)} = \frac{\alpha_1^{n-1}B_{a_1}(\alpha_1)}{\alpha_1^{n-2}B_{a_1}(\alpha_1)} = \alpha_1$, azaz a hányados-sorozat határértékeként egyből a Ψ -domináns inverz pólust kapjuk.

A póluseliminációs eljárás ezzel a függvényrendszerrel is alkalmazható. Ha $\mathcal{F}_p = (a, 0, 0, \dots, 0)$, akkor legyen $\mathcal{F}_{p+1} = (\alpha_1, a, 0, \dots, 0)$, ahol $\alpha_1 \in \mathbb{D}$ a megtalált pólus és

$$\phi_n(z) := z^{n-1}B_a(z)B_{\alpha_1}(z), \quad (n < p)$$

$$\Psi(z) := z^{p-1}B_aB_{\alpha_1}.$$

A kapott függvényrendszer megfelel (3.7) feltételeinek, valamint a Ψ függvény ugyanúgy 0-felé húzza a pólusokat és α_1 nem lesz Ψ -domináns pólus.

4. fejezet

Numerikus kísérletek

Az új módszer hatékonyságát numerikus kísérletek segítségével mutatjuk be. Célunk igazolni, hogy a módszer robosztus a pólusok elhelyezkedésével szemben, illetve ezen felül bármilyen (kauzális, SISO-LTI és BIBO stabil) rendszeren hatékonyan alkalmazható.

Szimulált példák mellett egy valós életből vett pólusidentifikációs problémán is megvizsgáljuk az eljárást. A kísérlet során egy DC-motor identifikációját végezzük el.

4.1. Szimulációs eredmények

A szimulált tesztek során véletlen módon generált átmenetfüggvényeket identificalunk. Az átmenetfüggvények $A_1, A_2 \dots \in \mathbb{C}$ együtthatóit és $\alpha_1, \alpha_2 \dots \in \mathbb{D}$ pólusait véletlenszerűen választjuk. A pólusok, valós életbeli példákat alapul véve komplex konjugált párok. A választott paraméterekkel generáljuk a $H := \sum_{j=1}^m A_j r_{\alpha_j} \in \mathcal{R}$ átmenetfüggvényt. A H függvény egy pólusát meghatározzuk a (2.26) és (3.7) módszerekkel, majd mindkét módszert felhasználva alkalmazzuk a póluseliminációs eljárást az átmenetfüggvény összes pólusának meghatározására.

Az α^* identifikált inverz pólus hibáját a legközelebbi inverz pólustól való távolságával mérjük:

$$Err = \min_{\alpha \in \mathbf{A}} |\alpha^* - \alpha|. \quad (4.1)$$

Emellett még számon tartjuk a legközelebbi pólus sorszámát, és megvizsgáljuk, hogy hány olyan pólus van, amit a módszerek egyszer sem találtak meg. A (3.9)-

beli függvényrendszert használó módszer esetében különböző p periodikus Blaschke-szorzatokból generált függvénysorozatokat is vizsgálunk. Az $\mathcal{F}_p = (B_a, id, \dots, id) \in \mathcal{A}(\mathbb{D})^p$ függvényekből generált függvényrendszert alkalmazzuk $p = 2, 3, \dots, 5$ esetekben is és azt az eredményt vesszük a módszer eredményének, aminek a legkisebb a (2.30) egyenlettel definiált PRD-hibája. A különböző módszerek függvényrendszereit leíró diszksbeli paraméterek meghatározására a hiperbolikus Nelder-Mead módszert használtuk fel [21]. A kísérleteket 100 különböző átmenetfüggvényre végeztük el, 2, 4, 6, 8 és 10 pólusra, mindkét módszer esetén. Az alábbi 4.1 táblázat tartalmazza a (4.1) egyenlettel kapott hibák átlagát és szórását, illetve a megtalált pólusok számának átlagát.

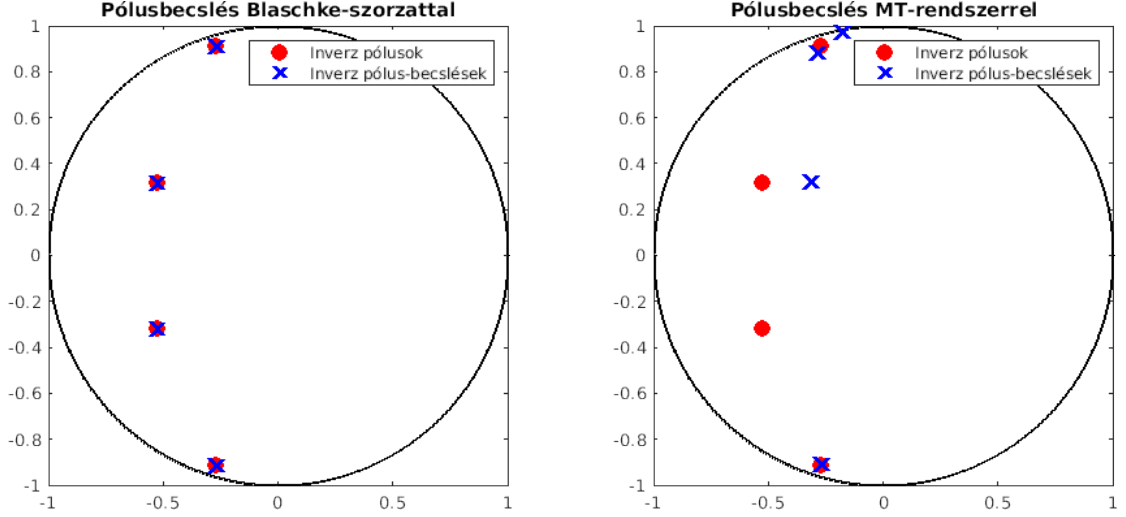
4.1. táblázat. Az átlag és átlagos szórás, valamint a megtalált pólusok számának (PS) átlaga 100 kísérletet tekintve, 2, 4, 6, 8 és 10 pólussal.

Pólusszám	Metódus	Átlagos hiba	Szórás	Átlag PS
2	MT-Schi-So	0.1391	0.2078	2.0
	Blaschke-szorzat	0.0226	0.0790	1.97
4	MT-Schi-So	0.3151	0.2135	3.27
	Blaschke-szorzat	0.0620	0.1307	3.96
6	MT-Schi-So	0.3026	0.2023	5.44
	Blaschke-szorzat	0.1117	0.1552	5.79
8	MT-Schi-So	0.2668	0.1927	6.82
	Blaschke-szorzat	0.1324	0.1568	7.33
10	MT-Schi-So	0.2357	0.1770	7.89
	Blaschke-szorzat	0.1430	0.1552	8.49

A hányados-sorozat határértékének approximációjához a sorozat, (2.8)-ben definiált, legkevesbé oszcilláló intervallumból választunk egy közelítő értéket. Annak érdekében, hogy demonstráljuk az új módszer konvergenciasebességét, sorozatoknak csak az első 50 elemét vizsgáltuk.

Amint látható a Blaschke-szorzatot használó megközelítés jelentősen jobb eredményre vezet, mint a MT-rendszereket használó, mind a megtalált pólusok számának, mind a pólusbecslések pontosságának tekintetében. Az is látható, hogy a

Blaschke-szoratra építő módszer akkor is jobban teljesít, amennyiben magasabb rendű átmenetfüggvények pólusait kell meghatározni. Az eredmény alátámasztja a hipotézist, hogy a (3.9) egyenlettel definiált Blaschke-szoratokkal való transzformáció során az inverz pólusok távolabb kerülnek egymástól, így a transzformált pólusokkal generált hányados-sorozat gyorsabban konvergál.



4.1. ábra. Egy négpólusú rendszer identifikációja Blaschke-szorattal és MT-rendszert használva. Ebben az esetben a Blaschke-szorattal használó módszer tökéletesen megtalálta a pólusokat, az MT-rendszert használó viszont csak kettőt talált meg viszonylag pontosan, egyet pedig egyáltalán nem talált meg.

4.2. DC motor

A valós életbeli rendszer melyet vizsgálunk egy egyenáramos, állandó mágneses, kommutátoros motor, úgynevezett DC-motor. A motor egy állandó mágnesből, ún. állórészből és egy többpólusú tekercsből, ún. forgórészből áll. A vizsgált motor esetén a forgórész 3 pólusból áll. Az állórészbéli indukált feszültség B indukciójú mágneses tere és a forgórészben i áramerősséget generál. A forgórész egy l hosszúságú és d szélességű menetére így $|F| = il|B|$ Lorentz-erő és $T = |F|d \sin(\theta)$ forgatónyomaték hat, ahol θ a tekercs síkjának a képződő erővel bezárt szöge. A $\theta = 0$ esetben a forgórészben folyó áram iránya, így a mágneses tere is ellentétesre fordul, újra nyomaték keletkezik és a forgórész tovább forog [27].

A DC-motor forgórészét, mint dinamikai rendszert a feszültségi hurokra vonatkozó Kirchhoff-törvény és a forgásra vonatkozó Newton-törvény írja le. Az állapot-egyenletet a Kirchhoff-törvény, a kimenet egyenletét pedig a Newton-törvény írja le:

$$\begin{aligned} L_r \frac{\partial i_r(t)}{\partial t} + R_r i_r(t) &= v_r(t) - k_m \omega(t), \\ J_r \frac{\partial \omega(t)}{\partial t} + \mu_m \omega(t) &= k_m i_r(t), \quad (L_r, R_r, J_r, k_m, \mu_m > 0, t \in \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Jelen esetben a bemenet v_r a forgórész kapocsfeszültsége, az állapot i_r a forgórész áramerőssége, a kimenet pedig ω a forgórész szögsebessége. L_r jelöli a forgórész induktivitását, R_r a forgórész villamos ellenállását, J_r a forgórész tehetetlenségi nyomatékát, a μ_m és k_m állandók pedig a viszkózus súrlódási tényező, illetve a nyomatéktényező.

Az egyenletekre alkalmazva a Laplace-transzformációt és a kapott egyenletrendszert átrendezve megkapjuk az átmenetfüggvényt:

$$H(z) := \frac{\Omega(z)}{V_r(z)} = \frac{k_m}{R_r \mu_m + k_m^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{J_r R_r + L_r \mu_m}{R_r \mu_m + k_m^2} z + \frac{J_r L_r}{R_r \mu_m + k_m^2} z^2} \quad (z \in \mathbb{R}^+). \quad (4.3)$$

Melyből kifejezhetjük a pólusokat:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(J_r R_r + L_r \mu_m) \pm \sqrt{(J_r R_r + L_r \mu_m)^2 - 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r}}{2 J_r L_r}. \quad (4.4)$$

A motor kialakítása miatt tudjuk, hogy a rendszernek két pólusa van és azt is tudjuk, hogy a pólusok hol helyezkednek el. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ és $\alpha_1, \alpha_2 \leq 1$, ami alapján fel tudjuk írni az alábbi két összefüggést:

$$\begin{aligned} (J_r R_r + L_r \mu_m)^2 &\geq 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r \\ (J_r R_r + L_r \mu_m) \pm \sqrt{(J_r R_r + L_r \mu_m)^2 - 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r} &\geq 2 J_r L_r. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A modell dinamikai leírását eddig a folytonos esetben vizsgáltuk, de mivel a mintavételezés diszkrét időben történik, az eredmények ellenőrzéséhez a pólusokat át kell transzformálni a diszkrét esetnek megfelelően.

A $\alpha_{1,2}^*$ diszkrét pólusokat a $\alpha_{1,2}^* = C_y(\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}\alpha_{1,2}}})$ transzformációval kaphatjuk meg, ahol $C_y : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{D}$ az úgynevezett Cayley-féle leképezés, ami a $\mathbb{C}_+ = \{a + bi, a, b \in \mathbb{R}, b > 0\}$ halmaz, azaz a komplex tér "fölső" térfeléről az egységdiszkba képző bijekció:

$$C_y(z) = \frac{i - z}{i + z}. \quad (z \in \mathbb{C}_+) \quad (4.6)$$

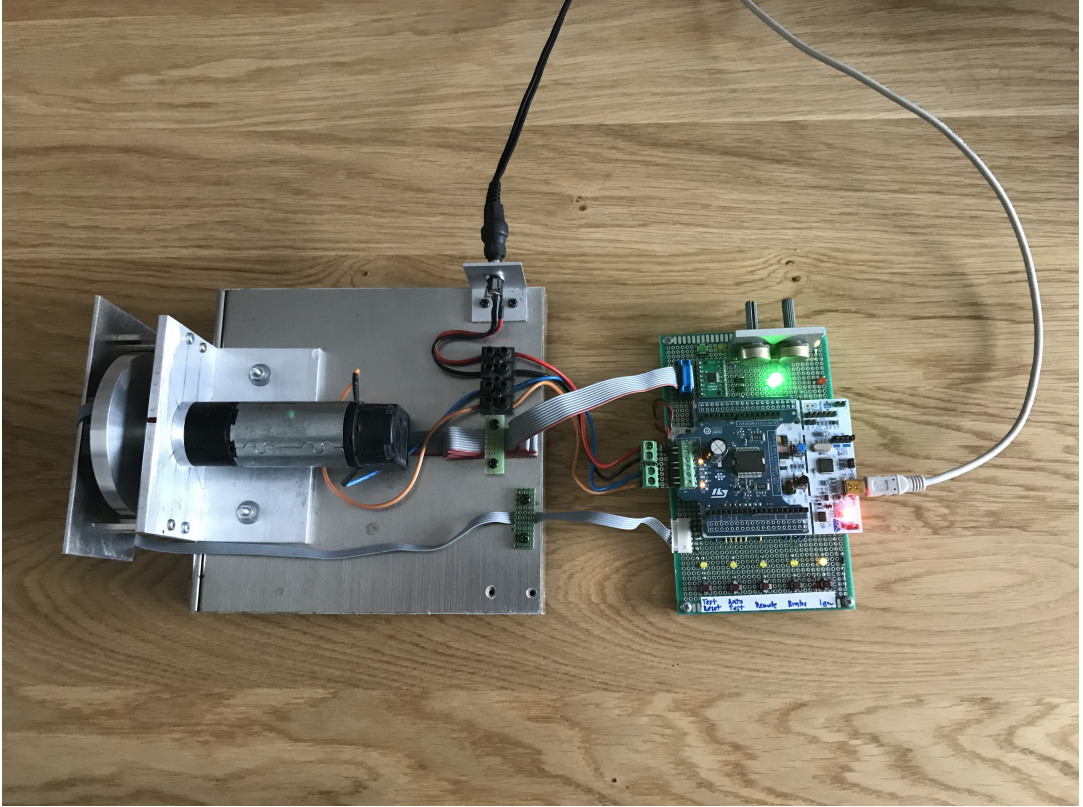
Így a diszkrétizált pólusok amiket keresünk, a következő alakban adhatók meg:

$$\alpha_{1,2}^* = \frac{i - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}} p_{1,2}}}{i + \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}} p_{1,2}}}. \quad (4.7)$$

Ha $\alpha_{1,2}$ -t behelyettesítjük és a (4.7) egyenletet átalakítjuk, akkor az alábbi kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &= \frac{(J_r R_r + L_m \mu_m) - \sqrt{(J_r R_r + L_m \mu_m)^2 - 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r} - 2J_r L_r}{(J_r R_r + L_m \mu_m) - \sqrt{(J_r R_r + L_m \mu_m)^2 - 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r} + 2J_r L_r} \\ \alpha_1^* &= \frac{(J_r R_r + L_m \mu_m) + \sqrt{(J_r R_r + L_m \mu_m)^2 - 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r} - 2J_r L_r}{(J_r R_r + L_m \mu_m) + \sqrt{(J_r R_r + L_m \mu_m)^2 - 4(R_r \mu_m + k_m^2) J_r L_r} + 2J_r L_r}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

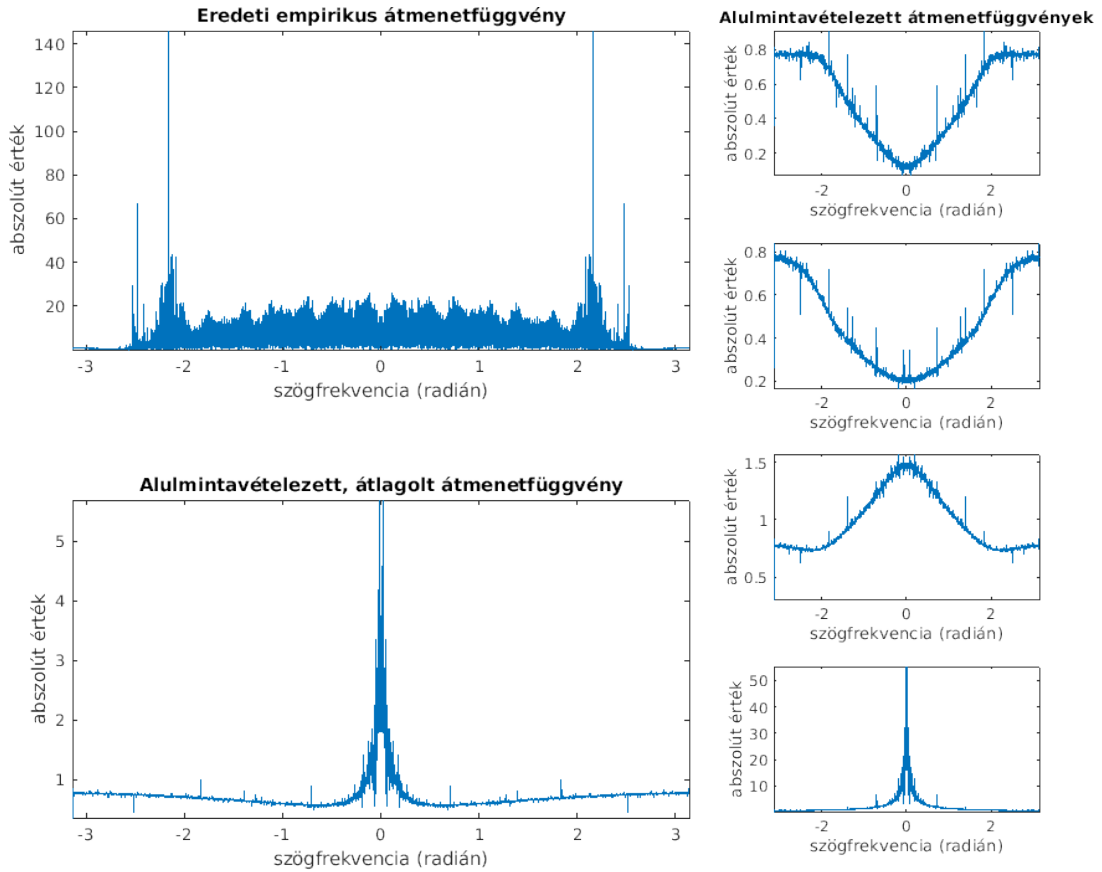
A (4.5) összefüggések alapján látható, hogy $\alpha_1^*, \alpha_2^* \in \mathbb{R}$ és $0 < \alpha_1^*, \alpha_2^* < 1$.



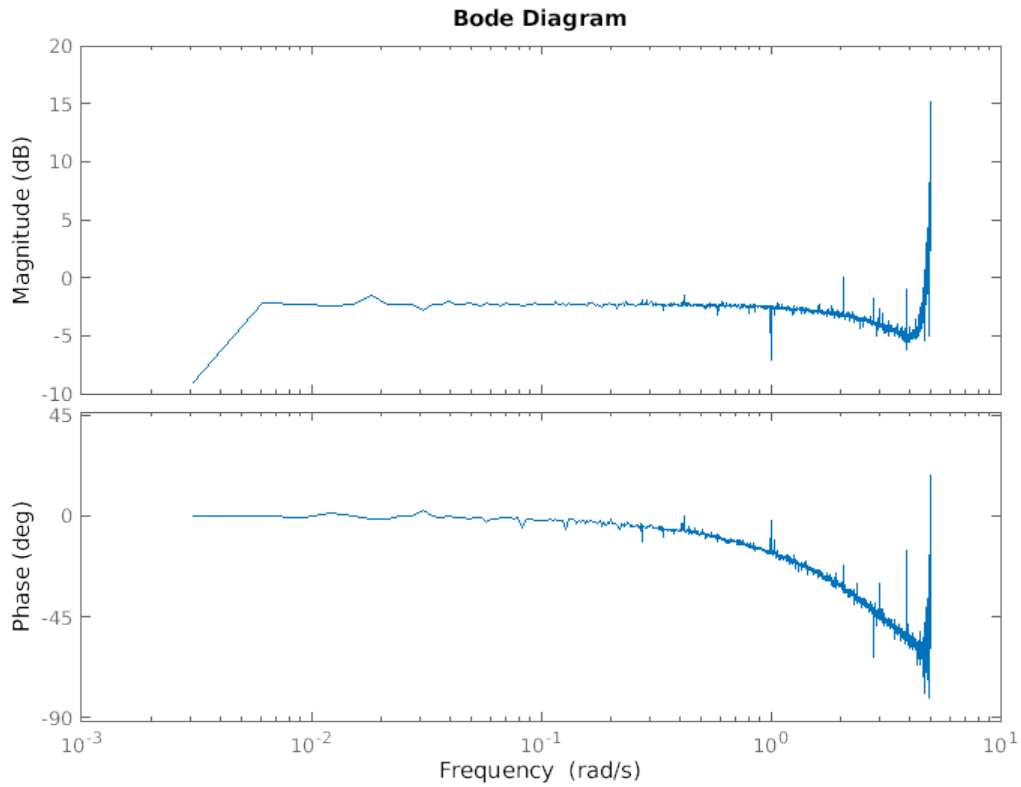
4.2. ábra. Egy, a mérés során készült kép a vizsgált DC-motorról.

Az identifikációhoz használt mérés során a bemeneti jel egy pszeudóvéletlen bináris függvény volt, a szögsebességet pedig 10 milliszekundumos mintavételezési frekvenciával mérték. Az empirikus transzfer függvényt a (2.7) képlet alapján, a bemenet és kimenetfüggvények Fourier-transzformáljának hányadosaként kapjuk. Mivel a mintavételezési idő $\delta = 0.01$, az empirikus átmenetfüggvény értékét a Shannon

tétel alapján $\lambda \leq \frac{1}{2\delta} = 50$ Hz-ig ismerjük. A jelek nagyméretű, magas frekvenciás zajt tartalmaznak, emiatt alkalmazunk rajtuk egy 10-szeres alulminta vételezést. Így 10 pár bemeneti és kimeneti jelet kapunk, amiből 10 különböző átmenetfüggvényt képzünk. A kapott átmenetfüggvényeket pedig átlagoljuk és az így kapott empirikus átmenetfüggvényt identifkáljuk. Az új mintavételezési frekvencia $\delta = 0.1$, így az 5 Hz fölötti frekvenciát, és ezzel együtt a magasfrekvenciás zajt, kiszűrtük az alulminta vételezéssel.



4.3. ábra. Az empirikus átmenetfüggvény, néhány választott alulminta vételezett adatokat használó átmenetfüggvény, és az alulminta vételezett átmenetfüggvények átlaga. Mint látható, a magasfrekvenciás zaj nagy részét az alulminta vételezés kiszűrte, de az így kapott átmenetfüggvényben maradt valamennyi zaj.



4.4. ábra. Az alulmintavételezett adatokból átlagolással vett empirikus átmenetfüggvény Bode-diagrammja.

Az eljárást a szimulációs kísérletekhez hasonló módon, hiperbolikus Nelder-Mead optimalizációval, különböző $p = 1, 2, \dots, 10$ -periodikus Blaschke-szorzatokat vizsgálva, végeztük el. Az eredmények a 4.2 táblázatban találhatók.

4.2. táblázat. Néhány pólusbecslés eredménye.

	α_1^*	α_2^*
1. mérés	$0.95 - 0.00i$	$0.19 + 0.03i$
2. mérés	$0.95 - 0.00i$	$0.32 - 0.07i$
3. mérés	$0.95 - 0.00i$	$0.22 + 0.03i$
4. mérés	$0.95 - 0.00i$	$0.24 + 0.03i$
átlag	0.95	0.24

A két becsült pólus 0.95 és 0.24 környékén van, azaz abba az intervallumba esnek, amit vártunk. Egy fontos jövőbeli feladat a becsült eredmények pontos ellenőrzése, ami például megtörténhet az identifikált rendszer alapján készített kontroll jel konstruálásával. A fent bemutatott kísérlet megmutatja, hogy a 3. fejezetben bevezetett

módszer egy ismert rendszer esetén az elvárásoknak megfelelő eredményt ad. Mivel a kísérlet során meghatározott rendszer egy valós életbeli motor, demonstráltuk, hogy a módszer robosztus a gyakorlatban vizsgált rendszerek jellemző problémáival szemben, mint például a zaj, vagy kismértékű nonlinearitás. A kapott eredmény biztos alapot ad jövőbeli, bonyolultabb, gyakorlati, mérnöki problémákat leíró rendszerek (például autonóm járművek irányítórendszereinek) meghatározására.

5. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban több módosítást és általánosítást bevezettünk a Bernoulli és Schi-So póluskereső eljárásokra. A klasszikus Schi-So módszerhez megadtunk egy alternatív felírási módot, ami hányados- helyett gyöksorozattal közelíti az átmenetfüggvény domináns pólusát, és így általánosabban használható.

Ezen felül bevezettünk a Schi-So módszernek egy kiterjesztett változatát, amely képes póluskeresésre anélkül, hogy ortogonális függvényrendszerekre támaszkodna, lehetőséget adva egy tágabb függvényosztály-halmaz használatára. A kiterjesztést alapul véve megvizsgáltunk egy konkrét, Blaschke-szorzatokon alapuló eljárást, ami lehetővé teszi, hogy az eddigi módszereknél, empirikus tapasztalataink alapján, gyorsabban közelítsük az inverz pólusokat.

A bevezetett módszer hatékonyságát numerikus kísérletekkel igazoltuk. Szimulált példákon keresztül bemutattuk, hogy Blaschke-szorzatok használatával jobb eredményeket lehet elérni, mint az eddigi legjobb MT-függvényrendszereken alapuló eljárással. Ezen felül, hogy a módszer képes rendszeridentifikációra a rendszer fokszámanak ismerete nélkül. Emellett az eljárás hatékonyságát egy valós életbeli példán is megvizsgáltuk. Egy DC-motorból álló rendszert is sikeresen identifikáltunk, konzisztens és hihető eredményekre jutva [8].

Az itt bevezetett módszerek a továbbiakban még számos területen vizsgálatot igényelnek. A kísérleteink eredményeit tekintve fontos feladat gyakorlati alkalmazások, komplexebb rendszerek további vizsgálata. Ahogy a DC-motor identifikációja során is megoldandó probléma volt az átmenetfüggvény zajának csökkentése, releváns feladat az átmenetfüggvény stabilatt reprezentációjának előállítása, ami zajos

környezetben is felhasználható [28]. Emellett fontos vizsgálati terület a módszer használhatósága időtérbeli adatokra jobban működő, valós idejű rendszeridentifikációra. Mivel, ahogy a vizsgált DC-motor esetén is, elméletileg lineáris rendszerek gyakorlatban tartalmazhatnak bizonyos mértékű nonlinearitást, fontos rendszerelméleti kérdés lineáris rendszeridentifikációs módszerek általánosítása nemlineáris rendszerekre [29].

Irodalomjegyzék

- [1] Alexandros Soumelidis és tsai. “Identification of flexible wing aircraft models using hyperbolic metrics”. *2015 23rd Med. Conf. on Control and Automation (MED)*. 2015, 827–832. old.
- [2] P. S. C. Heuberger, P. M. J. Van den Hof és B. Wahlberg. *Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions*. London, U.K.: Springer-Verlag London, 2005.
- [3] Dan Xiong, Li Chai és Jingxin Zhang. “Sparse System Identification in Pairs of Pulse and Takenaka–Malmquist Bases”. *SIAM Journal on Control and Optimization* 58.2 (2020), 965–985. old.
- [4] Alexandros Soumelidis. “Using nonstandard basis functions in description of signals and systems”. Dissz. 2002.
- [5] Ferenc Schipp és Alexandros Soumelidis. “On the Fourier coefficients with respect to the discrete Laguerre system”. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp* 34 (2011), 223–233. old.
- [6] Tamás Dózsa és tsai. “Pole identification using discrete Laguerre expansion and variable projection”. *IFAC-PapersOnLine* 56.2 (2023), 3994–3999. old.
- [7] Tamás Dózsa, Alexandros Soumelidis és Ferenc Schipp. “On Bernoulli’s method”. *SIAM Journal on Numerical Analysis (accepted)* (2024).
- [8] Gergő Ungvári, Alexandros Soumelidis és Tamás Dózsa. “A non-parametric identification scheme of SISO-LTI systems using Blaschke-products”. (2024). (in proceedings) 32nd Mediterranean Conference on Control and Automation.
- [9] Ferenc Schipp és Alexandros Soumelidis. “Eigenvalues of matrices and discrete Laguerre-Fourier coefficients”. *Mathematica Pannonica* 147 (2012), 155. old.

- [10] Alexandros Soumelidis, József Bokor és Ferenc Schipp. “An iterative identification of pole-structure in dynamic systems based on hyperbolic metrics and Malmquist-Takenaka representation”. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE. 2013, 5180–5185. old.
- [11] A Terry Bahill Ferenc Szidarovszky. *Linear Systems Theory*. CRC press, 1988.
- [12] Karl Johan Åström és Richard M Murray. *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. Princeton university press, 2021.
- [13] Schipp Ferenc. *Racionális Ortogonális Rendszerek*. ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék, 2016.
- [14] Stephan Ramon Garcia, Javad Mashreghi és William T Ross. *Finite Blaschke Products and Their Connections*. Springer, 2018.
- [15] F. Malmquist. “Sur la détermination d’une classe fonctions analytiques par leurs dans un ensemble donné de points”. *Compte Rendus Six. Cong. Math. Scand., Kopenhagen, Denmark* (1925), 253–259. old.
- [16] S. Takenaka. “On the orthogonal functions and a new formula of interpolations”. *Japanese Journal of Mathematics* 2 (1925), 129–145. old.
- [17] Paul Van den Hof és tsai. “Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions”. *IFAC Proceedings Volumes* 33.15 (2000), 445–455. old.
- [18] Julius König. “Über eine Eigenschaft der Potenzreihen”. *Mathematische Annalen* 23.3 (1884), 447–449. old.
- [19] Alston Scott Householder. *The numerical treatment of a single nonlinear equation*. McGraw-Hill, 1970.
- [20] A. C. Aitken. “XXV.—On Bernoulli’s Numerical Solution of Algebraic Equations”. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 46 (1927), 289–305.
- [21] Levente Lócsi. “A hyperbolic variant of the Nelder–Mead simplex method in low dimensions”. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica* 5.2 (2013), 169–183. old.
- [22] J. A. Nelder és R. Mead. “A Simplex Method for Function Minimization”. *The Computer Journal* 7.4 (1965), 308–313. old.

- [23] Tamás Dózsa. “Inverses of rational functions”. *Acta Cybernetica* 26.1 (2023), 53–69. old.
- [24] Oliver Aberth. “Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously”. *Mathematics of computation* 27.122 (1973), 339–344. old.
- [25] A L Cauchy. *Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Impr royale, 1823.
- [26] Javad Mashreghi. *Blaschke products and their applications*. Springer, 2013.
- [27] S.S. Saab és R.A. Kaed-Bey. “Parameter identification of a DC motor: an experimental approach”. 2 (2001), 981–984 vol.2.
- [28] Anders Stenman és tsai. “On adaptive smoothing of empirical transfer function estimates”. *Control Engineering Practice* 8.11 (2000), 1309–1315. old.
- [29] Steven L Brunton és tsai. “Koopman invariant subspaces and finite linear representations of nonlinear dynamical systems for control”. *PloS one* 11.2 (2016), e0150171.