

Félvezető spin kvantumbitek bikromatikus vezérlése

Tudományos Diákköri Dolgozat

Készítette:

György Zoltán

Fizikus MSc I., ELTE TTK

Témavezető:

Dr. Széchenyi Gábor

ELTE Fizikai Intézet, Anyagfizikai Tanszék



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

2023.11.07.

Kivonat

A félvezetőkben létrehozott spin kvantumbitek ígéretes jelöltek egy jövőbeli kvantumszámítógép alapjának a hosszú koherenciaidő, pontos műveletek és kis méretük miatt [1]. A kvantumbitek standard vezérlése AC elektromos térrel történik (EDSR) [2–4] úgy, hogy minden egyes kvantumbithez egy elektróda van kötve, így a szükséges elektródák száma lineárisan függ a kvantumbitek számától. Ez a lineáris függés nem teszi lehetővé a rendszer skálázhatóságát, ennek a megoldására javasolták a négyzetrácsos architektúra használatát, ahol egy elektróda több kvantumbitét érint egyszerre [5]. Elméleti úton 2022-ben megmutattuk, hogy bikromatikus elektromos tér segítségével szelektíven vezérelhetők a kvantumbitek egy négyzetrácsos architektúrában, illetve párhuzamosan lehet rajtuk egy-qubites műveleteket végrehajtani [6].

A delfti Veldhorst Lab sikeresen demonstrálta spin kvantumbitek bikromatikus vezérlését egy négyqubites germánium kvantumprocesszorban, bikromatikus Rabi-oszcillációk mellett megfigyelték rezonancia anticrossingok kialakulását különböző rezonanciavonalak metszeténél [7]. Velük együttműködve egy elméleti modellt állítottunk fel, amely a kettős kvantumdot elhangoltságának modulációján alapszik, és megmagyarázza a megfigyelt anticrossingokat. Az elméletünket az adatokra illesztve megerősítjük, hogy az elhangoltság fluktuációja felelős a főbb effektusokért és meghatározunk több, az elméletben szereplő paramétert. Az eredményekből írt cikk [7] elfogadásra került a Physical Review Letter folyóiratban. Végül bemutatjuk az elmélet kiterjesztését g -tenzor moduláció figyelembevételével, amely megmagyarázhat olyan kísérleti eredményeket, amelyre önmagában az elhangoltság modulációja nem képes.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Spin-alapú kvantumszámítás	1
1.2. Négyzettrácsos architektúra, bikromatikus vezérlés	2
2. Kísérleti elrendezés	4
3. Elméleti modell	6
4. Spektrum	7
5. Floquet elmélet, Schrieffer-Wolff transzformáció	9
6. Monokromatikus és bikromatikus oszcillációk	10
7. Anticrossingok megjelenése	12
8. Anticrossingok leírása	16
8.1. $Q2^{P2,P4}$ és $Q1^{P4}$ közötti anticrossing (AC1)	17
8.2. $(Q1 + Q2_-)^{2P2,P4}$ és $Q2^{P2,P4}$ közötti anticrossing (AC4)	18
8.3. $Q1^{-2P2,P4}$ és $Q2^{-P2,P4}$ közötti anticrossing (AC5)	19
8.4. $Q2^{-P2,P4}$ és $(Q1 + Q2_-)^{P4}$ közötti anticrossing (AC3)	20
8.5. $Q1^{-P2,P4}$ és $Q2^{P4}$ közötti anticrossing (AC2)	22
9. A modell kiterjesztése g-tenzor modulációval	25
9.1. Monokromatikus oszcillációk	27
9.2. Bikromatikus oszcillációk	29
10.Összegzés	31
11.Köszönetnyilvánítás	32
12.Függelék	32
A. Monokromatikus Rabi-frekvenciák	32
B. Bikromatikus Rabi-frekvenciák vezető tagjai	34

1. Bevezetés

Jelenleg a kvantummechanika második forradalmát éljük, amikor az elméleti kutatások mellett a különböző technológiai alkalmazások kerülnek a figyelem középpontjába, vagyis a kvantumtechnológia. A kvantumtechnológia fontos részét képezik a kvantumszámítógépek, melyek ötlete Richard Feynmantól származik [8]. Az volt az alapgondolata, hogy ahhoz, hogy hatékonyan szimuláljunk kvantumos tulajdonságokkal bíró rendszereket, célszerűbb kvantumos rendszereket használni a klasszikus számítógépek helyett. Ez a kvantumszámítógépek egyik legérdekesebb és legígéretesebb alkalmazási területe, amelyekre már ma is léteznek működő példák [9, 10]. A kvantumszámítógépekkel azonban nem csak kvantumos problémákat lehet potenciálisan hatékonyabban megoldani, hanem különböző klasszikus feladatokat is. Ezekre a legfontosabb példák között van a Shor-algoritmus [11], amely prímfaktorizációra képes polinomiális idő alatt, illetve a Grover keresési algoritmus [12], amely pedig rendezetlen adatbázisban képes elemeket megtalálni gyökös skálázással.

A kvantumszámítógépek alapvető elemei a kvantumbitek, amelyek a klasszikus 0 vagy 1 állapotú bitek kvantumos megfelelői. Ezek a kétállapotú rendszerek fizikailag többféleképpen megvalósíthatóak, így különböző kvantumszámítógép architektúrák léteznek. A jelenleg legfejlettebb kvantumszámítógépek szupravezető kvantumbitekre épülnek, egy ilyen 53 kvantumbites processzorral demonstrálta a Google a kvantumfölényt 2019-ben [13]. A szupravezető rendszerek mellett léteznek csapdázott ionos [14], fotonikus [15], vakancia [16] és más kvantumbitek is. Ebben a dolgozatban félvezető heterostruktúrákban csapdázott elektron/lyuk spin kvantumbitekkel foglalkozunk.

1.1. Spin-alapú kvantumszámítás

Az egyik legtermészetesebb jelölt egy kétállapotú fizikai rendszerre egy feles spinű részecske, például egy elektron, két spinállapota. 1998-ban javasolták, hogy elektronokat félvezető nanostruktúrákban, ún. kvantumdombokban kapuelektrodák által keltett elektromos térrel csapdázva képesek lehetünk univerzális kvantumszámításra [1]. Az így létrehozott kvantumbitek (ezenkívül qubitek) előnye a kis méretükben rejlik, egy ilyen qubit megközelítőleg 100 nm [17], ami lineáris kiterjedésben három nagyságrenddel kisebb, mint a szupravezető társaik [18]. A rendszer skálázhatósága szempontjából tehát előnyös lehet spin qubiteket használni a méretük miatt, hiszen a hasznos, igazán komplikált problémák megoldásához várhatóan több millió kvantumbitre lesz szükség.

A spinállapotok degenerációjának feloldásához külső homogén mágneses teret használnak, a qubit állapotának manipulálása pedig legegyszerűbben AC mágneses térrel oldható meg [17]. Az AC mágneses tér használata kísérleti szempontból nem ideális, hiszen egy kis drótot kell a kvantumdot mellé építeni, amelyen váltakozó áramot átvezetve keltenek oszcilláló mágneses teret. A mágneses teret nehéz fókuszálni, ezért ha több qubit is van a közelben, akkor olyanra is hathat, amelyre nem szeretnénk, illetve a drótban folyó áram melegedési problémákhoz is vezethet. Ezen problémák miatt manapság a bevett módszer az AC elektromos térrel történő vezérlés (EDSR - Electric dipole spin resonance) [2–4]. Ekkor nem kell drótot odaépíteni a kvantumdot mellé, hiszen használható az az elektróda a vezérlésre, amely létrehozza a kvantumdot csapdázó potenciálját.

Az elektromos tér önmagában nem elegendő arra, hogy a qubiteket vezéreljük, szükséges valamilyen extra effektus, amely összekapcsolja a spint és az elektromos teret. Ez lehet hiperfinom kölcsönhatás [19], inhomogén mágneses tér [20] vagy spin-pálya kölcsönhatás [21]. A kísérletileg legkedvezőbb az utóbbi kettő, a spin-pálya kölcsönhatás esetében nem kell extra elemet odaépíteni a kvantumdot mellé, azonban az inhomogén mágneses

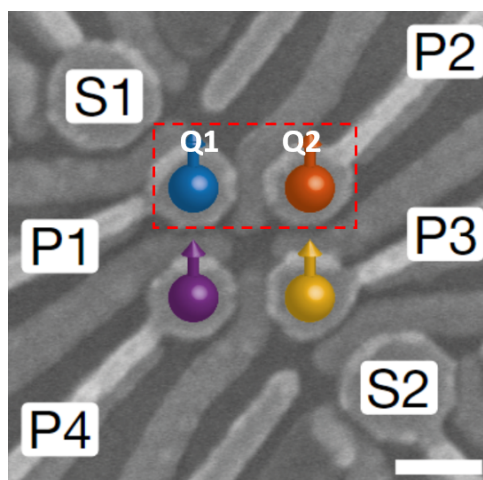
tér létrehozásához mikromágnes szükséges. A leggyakrabban alkalmazott félvezetők, a szilícium esetében a spin-pálya kölcsönhatás nem elég erős, ezért mikromágnesek használata szükséges, viszont germánium esetében a spin-pálya kölcsönhatás lényegesen erősebb.

A spin qubitek erős lemaradásban vannak a szupravezető qubitekkel szemben, hiszen a legnagyobb spin kvantumprocesszorok jelenleg 4-12 qubitet tartalmaznak [22, 23]. Ennek ellenére gyors fejlődést mutattak az elmúlt években, 2020-ban demonstráltak először germánium lyuk spin qubitet [24] és kétqubitese műveleteket [25], 2021-ben négyqubitese germánium kvantumprocesszor (1. ábra) vezérlését mutatták be [22], illetve 2022-ben egy 16 kvantumdottból álló germánium rendszer behangolását végezték el [26].

1.2. Négyzetrácsos architektúra, bikromatikus vezérlés

Láttuk, hogy a félvezető spin kvantumbitek előnye a többi megvalósítással szemben a kis méretükben rejlik, ezáltal lesz skálázható a rendszer, azonban van ezzel egy probléma. Az 1. ábrán látható egy négyqubitese germánium kvantumprocesszor. P1-P4-el vannak jelölve a vezérlő elektródák, ezek hozzák létre az elektromos potenciált, amellyel csapdázni lehet a lyukakat, illetve ezekre kapcsolnak AC elektromos jeleket, hogy vezéreljék a qubiteket. A négy vezérlő elektródán kívül találhatóak elektródák a qubitek között, ezek segítségével lehet szabályozni a qubitek közötti kölcsönhatást. Látható, hogy ebben a kétdimenziós elrendezésben nem marad már hely több elektródának, így nem lehet több qubitet integrálni a chipre, a skálázhatóság elvész.

A probléma abból az egyszerű vezérlési módszerből ered, hogy minden egyes qubithez odaépítenek egy elektródát. A szükséges elektródák száma lineárisan függ a kvantumbitek számától, így több millió kvantumbit esetén több millió elektróda lenne szükséges, ami kísérleti szempontból kivitelezhetetlen [27]. Ennek a megoldására javasolták 2018-ban a négyzetrácsos architektúrát [5]. Az alapötlet az, hogy a qubiteket kétdimenzióban, sakktáblaszerűen helyezik el, és egy elektróda összeköt egy sort, oszlopot vagy átlót. Így a szükséges elektródák száma nem lineárisan, hanem csak gyökösen skálázik. A négyzetrácsos architektúra 2018-ban még csak egy elméleti javaslat volt, azonban 2022-ben demonstrálták az első ilyen rendszert, amely 16 germánium kvantumdottból állt [26], de még nem egy működőképes kvantumprocesszor.



1. ábra. **Négyqubitese germánium kvantumprocesszor [22].** A bikromatikus vezérlés demonstrációja [7] során a Q1 és Q2 kvantumbitek voltak vezérelve bikromatikusán a P2 és P4 elektródákkal.

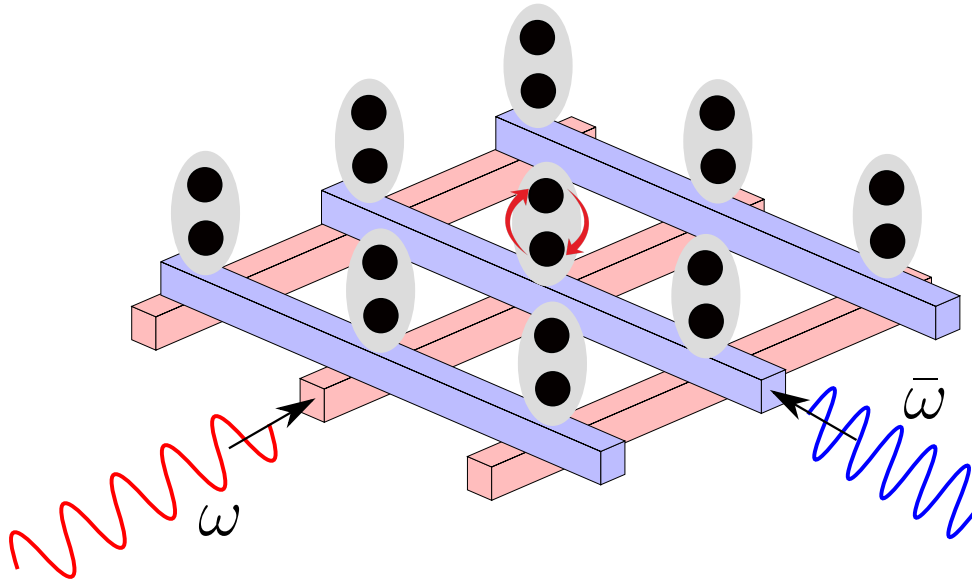
A probléma a négyzetrácsos architektúrával az, hogy nem triviális, hogy milyen módon lehet vezérelni a qubiteket. Megmutatták, hogy a standard monokromatikus vezérlés

mellett a négyzetrácsos architektúra megkötéseket jelent, extra műveleteket kell beiktatni az algoritmusokba, hogy a négyzetrácsos architektúrából eredő problémákat kiküszöböljük [28]. Egy ilyen probléma például az, hogy ha egy qubitet szeretnénk vezérelni, amelyhez egy olyan elektróda van kötve, amely több más qubitet is érint, akkor azokra a qubitekre is hatunk, amelyekre nem szeretnénk. Ezt úgy tudjuk megoldani, hogy a vezérelni nem kívánt qubiteket áttoljuk egy másik sorba, majd a vezérlés után visszatoljuk az eredeti helyre. A qubitek szomszédos kvantumdotba való áttolása (shuttling) germánium lyukak esetén demonstrálva lett [29], ennek ellenére jelentős hátrányt jelent az, hogy ezeket az extra műveleteket be kell iktatni.

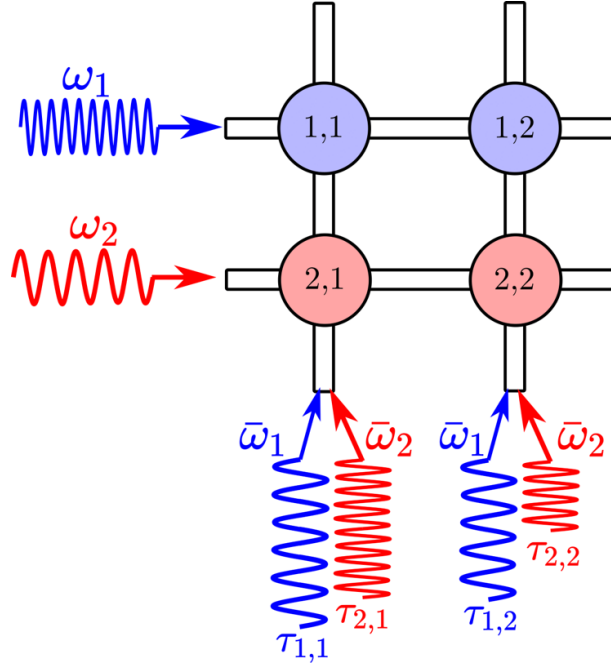
Témavezetőmmel, Széchenyi Gáborral és Pályi Andrással közösen 2022-ben javasoltuk spin kvantumbitek bikromatikus vezérlését egy négyzetrácsos architektúrában. Ez a javaslat az előző TDK dolgozatomban került először bemutatásra, az eredmények később egy cikkben lettek közzéadva [6]. A bikromatikus vezérlés azt jelenti, hogy egy AC elektromos tér helyett kettőt használunk vezérlésre. Azt találtuk, hogy ω és $\bar{\omega}$ gerjesztő frekvenciák esetén a vezérlés feltétele (rezonanciafeltétel):

$$\omega + \bar{\omega} \approx \omega_{\text{split}}, \quad (1)$$

ahol ω_{split} a qubit rezonancia frekvenciája (a két állapot közötti energiakülönbség). A bikromatikus vezérlés segítségével lehetőségünk van qubiteket szelektíven vezérelni egy négyzetrácsos architektúrában. Ha az elektródák sorokat és oszlopokat kötnek össze, illetve ha egy oszlopra és egy sorra AC elektromos teret kapcsolunk, akkor a sor és az oszlop kereszteződésénél levő qubit bikromatikusán vezérelve lesz, míg az összes többi qubit a sorban és oszlopban csak egy elektromos teret érzékel, amely nem lesz rezonáns. Ennek a szemléltetése látható a 2. ábrán.



2. ábra. **Spin kvantumbitek szelektív vezérlése négyzetrácsos architektúrában [6].** Bikromatikus vezérléssel, megfelelően megválasztott ω és $\bar{\omega}$ gerjesztő frekvenciákat használva csak az a qubit lesz vezérelve, amely mindkét elektromos teret érzékeli. Az ábrán látható példában a középső qubit van vezérelve.



3. ábra. Egyqubites műveletek párhuzamosítása bikromatikus vezérléssel, négyzet-rácsos architektúrában [6]. Általános $N \times N$ -es architektúra esetén $2N$ különböző gerjesztő frekvenciát kell megválasztani úgy, hogy minden kvantumbit egy frekvenciapár által legyen csak vezérelve, a (2) feltétel szerint.

A szelektív vezérlés mellett lehetőségünk van párhuzamosan végrehajtani egyqubites műveleteket az összes qubiten a vezérlő frekvenciák multiplexelésével, ez látható a 3. ábrán. Általános $N \times N$ -es rács esetén $2N$ különböző vezérlő frekvenciát kell választanunk, a függőleges elektródákra N frekvenciát multiplexelünk. Ha megfelelően választjuk meg a frekvenciákat, akkor minden egyes qubit csak egy frekvenciapár által lesz vezérelve bikromatikusán, az összes többi bikromatikus és monokromatikus gerjesztés nem lesz rezonáns. A pontos feltétel a frekvenciákra:

$$\omega_i + \bar{\omega}_i = \omega_{\text{split}}, \quad \omega_i + \bar{\omega}_j \neq \omega_{\text{split}}, \quad (2)$$

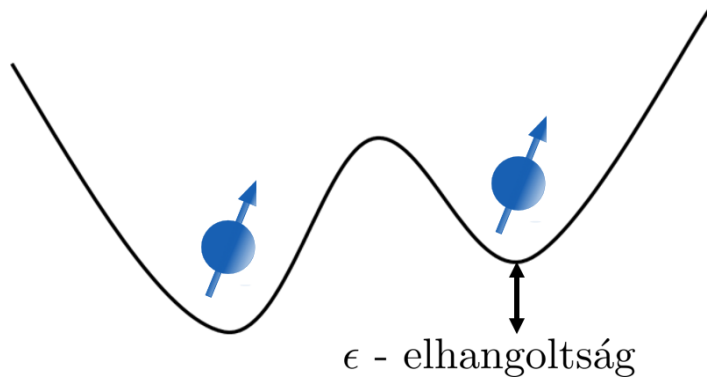
ahol i és j indexek 1-től N -ig futnak.

A bikromatikus vezérlés egy általunk tett elméleti javaslat volt, azonban nem sokkal később megtörtént az első kísérleti demonstráció az előbb említett négyqubites germánium kvantumprocesszor segítségével, a delfti Veldhorst csoport által. A delfti kísérleti kollégákkal együttműködve megalkottunk egy elméleti modellt, mellyel a kísérleti eredményeket nagy pontossággal reprodukálni tudtuk. A közös munka eredménye egy cikk lett [7], az ott leírt elméleti munkát mutatjuk be ebben a dolgozatban, a 3.-8. fejezetekben. Az egyszerű modell jól leírja a főbb kísérleti megfigyeléseket, azonban vannak hiányosságai. A 9. fejezetben bemutatok egy, a g -tenzor modulációval kiterjesztett elméleti modellt, ami megmagyarázhatja azokat a megfigyeléseket, amelyekre az egyszerűbb modell nem volt képes. Ez a kiterjesztés nem volt része az említett cikknek, először ebben a dolgozatban kerül bemutatásra.

2. Kísérleti elrendezés

A kísérletek során a Veldhorst csoport az 1. ábrán látható négyqubites germánium kvantumprocesszort használta. A bikromatikus vezérléshez a négy qubit közül az ábrán jelölt

Q1 és Q2 qubiteket használtak, a másik kettő qubit a kísérletek során végig alapállapotban volt. A vezérlés a P2 és P4 elektródák segítségével történt, melyek elhelyezkedése aszimmetrikus. A spinállapotok degenerációjának feloldását egy síkbeli, $B = 0,675$ T nagyságú mágneses tér biztosította. A Q1 és Q2 qubiteket tartalmazó kettős kvantumdot sematikus rajza látható a 4. ábrán. Egy fontos paraméter az ϵ elhangoltság, ami a potenciálgödrök közötti különbség.



4. ábra. **Kettős kvantumdot sematikus rajza.** Az ϵ elhangoltság a két potenciálgödör közötti különbséget jelenti.

A kvantumdotok képesek egész számú lyuk csapdázására, ehhez megfelelő DC feszültségeket kell kapcsolni az elektródákra. A kísérletek során minden egyes kvantumdot egy lyukat tartalmazott. Ennek a megvalósítása nem triviális feladat, hiszen az elektródák a szomszédos kvantumdotokat is befolyásolják. Emiatt célszerű a valódi kapufeszültségek helyett virtuális kapufeszültségekre áttérni. A Veldhorst csoport által bevezetett vP1 és vP2 virtuális kapufeszültségek a következőképp kaphatóak meg a valódi V_{P2} illetve V_{P4} kapufeszültségekből:

$$\begin{pmatrix} \text{vP1} \\ \text{vP2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{14} \\ \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{P2} \\ V_{P4} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

ahol $\mathbf{M}_{12} = 0.446$, $\mathbf{M}_{14} = 0.353$, $\mathbf{M}_{22} = 1.231$ és $\mathbf{M}_{24} = 0.234$ a virtuális kapufeszültségek mátrixának elemei.

A virtuális kapufeszültségek előnye az, hogy segítségükkel egyszerűbben kifejezhető a kettős kvantumdot ϵ elhangoltsága:

$$\epsilon = \alpha(\text{vP1} - \text{vP2}), \quad (4)$$

ahol α az ún. lever arm, amely értéke $\alpha = 0.0917$ eV/V.

Bevezethetjük az $\epsilon_{12} = \text{vP1} - \text{vP2}$ mennyiséget, amely egyértelműen jellemzi az elhangoltságot, mivel az összes mérésre igaz, hogy $\text{vP1} = -\text{vP2}$. Ezentúl ϵ_{12} -re virtuális elhangoltsággként hivatkozunk, ami a valódi elhangoltságtól csak α szorzófaktorban tér el.

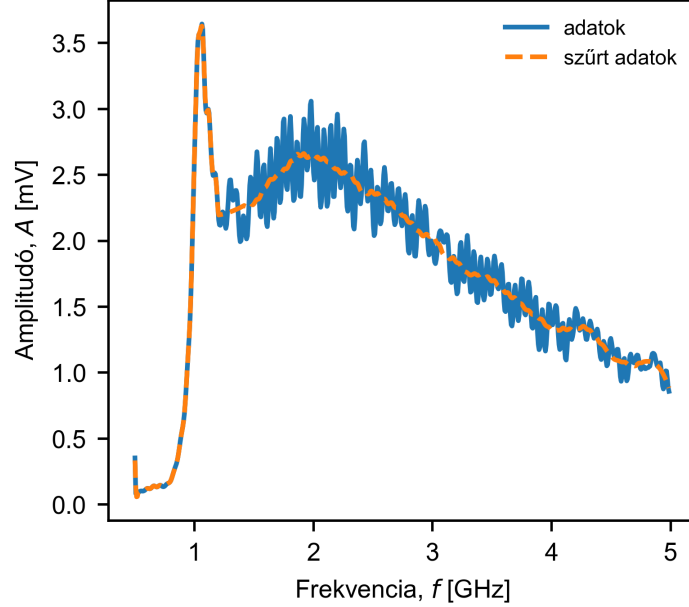
Ha vezérelni szeretnénk a qubiteket, akkor a DC feszültség mellett AC feszültségeket is kapcsolunk a P2 és P4 elektródákra. Ebben az esetben a vP1 és vP2 virtuális kapufeszültségeknek $\delta \text{vP1}(t)$ illetve $\delta \text{vP2}(t)$ modulációi lesznek. Ha a valódi kapufeszültségek δV_{P2} , δV_{P4} amplitúdóval, illetve ω_2 és ω_4 frekvenciával rendelkeznek, akkor az okozott elhangoltság modulációja $\delta \epsilon(t)$ a következőképpen írható:

$$\delta \epsilon(t) = \alpha(\mathbf{M}_{12} - \mathbf{M}_{22})\delta V_{P2} \cos \omega_2 t + \alpha(\mathbf{M}_{14} - \mathbf{M}_{24})\delta V_{P4} \cos \omega_4 t = \epsilon_{P2} \cos \omega_2 t + \epsilon_{P4} \cos \omega_4 t, \quad (5)$$

így az ϵ_{P2} és ϵ_{P4} energia dimenziójú mennyiségek írják le az elhangoltság modulációját a P2 illetve P4 elektróda által. Fontos megjegyezni, hogy az elektródák aszimmetrikus

elhelyezkedése azt eredményezi, hogy ϵ_{P2} lényegesen nagyobb, mint ϵ_{P4} , ennek még fontos szerepe lesz a későbbiekben.

A vezérlést végző elektromos jelek frekvenciafüggő csillapítást szenvednek. A Veldhorst csoport kimérte ezt a frekvenciafüggő csillapítást, az eredmény az 5. ábrán látható. A frekvencia függvényében mért amplitúdó jó közelítéssel a P2 és P4 elektródára egyaránt érvényes. A mért adatok zajosak, emiatt egy Savitzky-Golay szűrőt alkalmaztunk, ennek az eredménye látható szaggatott narancssárga vonallal.



5. ábra. **A vezérlést végző elektromos jelek frekvenciafüggő amplitúdója.** A P2 és P4 elektróda esetén jó közelítéssel ugyanakkora, ugyanolyan csillapítást elszenvedő amplitúdójú jel volt kapcsolva. A zajos mérési adatok (kék vonal) Savitzky-Golay szűrővel lettek tisztítva (narancssárga szaggatott vonal).

A P2 és P4 elektródákra kapcsolt azonos amplitúdó miatt az ϵ_{P2} és ϵ_{P4} modulációk közötti jelentős különbség a virtuális kapufeszültségek mátrixából adódik.

3. Elméleti modell

Az elméleti modell segítségével a mérési eredményeket szeretnénk reprodukálni, illetve a mérési adatokból szeretnénk meghatározni az elméletben szereplő paramétereket. Emiatt egy egyszerű modellt kell használnunk, amely viszonylag kevés paramétert tartalmaz. A kvantumdot energianívói közül csak a legalacsonyabbat vesszük figyelembe, ezen a négy különböző (1,1) töltésállapotot (vagyis amikor mindkét kvantumdotban egy-egy lyuk található), illetve a két szinglet (0,2) és (2,0) állapotokat tekintjük (amikor egy kvantumdotban két lyuk található, ellentétes spinnel). A Hamilton-operátor mátrixként reprezentálva:

$$H = \begin{pmatrix} -\hbar\delta\omega_z & 0 & 0 & 0 & i\hbar\Omega_z - t_0 & i\hbar\Omega_z - t_0 \\ 0 & \hbar\delta\omega_z & 0 & 0 & i\hbar\Omega_z + t_0 & i\hbar\Omega_z + t_0 \\ 0 & 0 & \hbar\omega_z & 0 & -i\hbar\Omega_x - \hbar\Omega_y & -i\hbar\Omega_x - \hbar\Omega_y \\ 0 & 0 & 0 & -\hbar\omega_z & i\hbar\Omega_x - \hbar\Omega_y & i\hbar\Omega_x - \hbar\Omega_y \\ -i\hbar\Omega_z - t_0 & -i\hbar\Omega_z + t_0 & i\hbar\Omega_x - \hbar\Omega_y & -i\hbar\Omega_x - \hbar\Omega_y & U - \epsilon(t) & 0 \\ -i\hbar\Omega_z - t_0 & -i\hbar\Omega_z + t_0 & i\hbar\Omega_x - \hbar\Omega_y & -i\hbar\Omega_x - \hbar\Omega_y & 0 & U + \epsilon(t) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

ahol a bázisállapotok sorrendben $|\uparrow, \downarrow\rangle, |\downarrow, \uparrow\rangle, |\uparrow, \uparrow\rangle, |\downarrow, \downarrow\rangle, |0, 2\rangle$ és $|2, 0\rangle$. A kvantumdotokban lévő lyukak külső mágneses térben effektív g -faktorok segítségével írhatóak le, amelyek eltérnek a vákuumbeli $g = 2$ értéktől, illetve általában egy kettős kvantumdot két dotjának g -faktorai is eltérőek. Emiatt szükséges két különböző Zeeman-felhasadást bevezetni:

$$\hbar\omega_z = \frac{g_1 + g_2}{2}\mu_B B, \quad \hbar\delta\omega_z = \frac{1}{2}(g_2 - g_1)\mu_B B, \quad (7)$$

ahol $\hbar\omega_z$ a szimmetrikus, $\hbar\delta\omega_z$ az antiszimmetrikus Zeeman-felhasadás, $\hbar$ a redukált Planck-állandó, g_1 és g_2 az effektív g -faktorok, μ_B a Bohr-magneton és B a külső mágneses tér. A főátlóban megjelenik még az $\epsilon(t)$ elhangoltság, amely tartalmazza a sztatikus elhangoltságot, amelyet DC feszültségekkel állítanak be, illetve a modulációt is. Az U paraméter írja le a Coulomb-taszítás miatti energiakülönbséget az $(1,1)$ és $(0,2)$ illetve $(2,0)$ állapotok között.

A vezérléshez elengedhetetlen spin-pálya kölcsönhatásból erednek az Ω_x , Ω_y és Ω_z offdiagonális paraméterek, a t_0 pedig az ún. tunnel coupling. Ezek összekapcsolják az $(1,1)$ állapotokat a $(0,2)$ és $(2,0)$ állapotokkal, vagyis alagutazást tesznek lehetővé. Ez az alagutazás lehet spinfordító vagy spintartó, az előbbi írják le az Ω_x, Ω_y , az utóbbit a t_0 és Ω_z paraméterek. Ezeket célszerű az abszolút értékekkel és fázisokkal felírni:

$$t_0 + i\hbar\Omega_z = te^{i\Phi_t}, \quad \hbar\Omega_y + i\hbar\Omega_x = \Omega e^{i\Phi_\Omega}, \quad (8)$$

ahol $t, \Omega > 0$ és $\Phi_t, \Phi_\Omega \in [0, 2\pi)$.

A g_1 és g_2 effektív g -faktorok a bezárópotenciáltól függenek, feltesszük, hogy ez a függés lineáris a vP1 és vP2 virtuális kapufeszültségekben:

$$g_1 = g_{1,0} + A_1 \text{vP1} + B_1 \text{vP2}, \quad g_2 = g_{2,0} + A_2 \text{vP1} + B_2 \text{vP2}. \quad (9)$$

A modellben tehát a $\hbar\omega_z$, $\hbar\delta\omega_z$ Zeeman-energiák és az ϵ elhangoltság lesznek modulálva, azonban a Zeeman-energiák modulációjából eredő járulék elhanyagolható az elhangoltság modulációjához képest. Előbbi azért kell a modellben figyelembe venni, hogy a spektrumot leírassuk. Ezért nincs kihangsúlyozva a Zeeman-energiák időfüggése a (6) egyenletben az elhangoltsággal szemben.

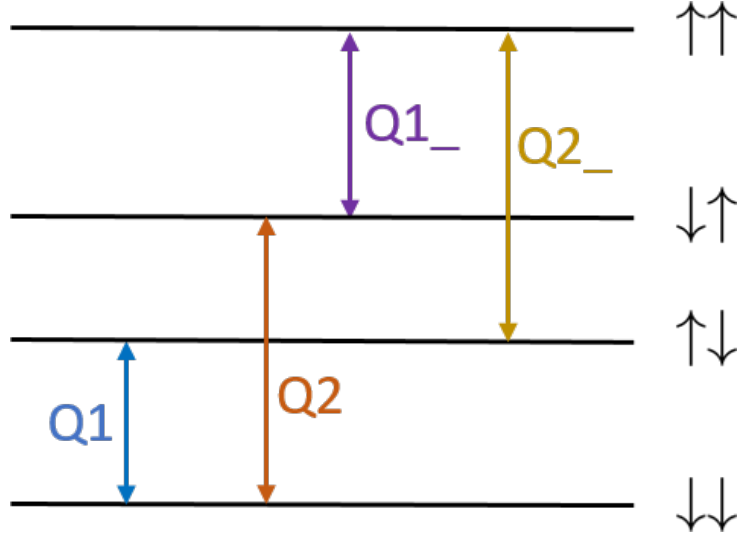
4. Spektrum

Kvantumszámítás szempontjából a rendszer $(1,1)$ töltés konfigurációhoz tartozó négy energiaszintje a fontos, ezek sematikus rajza látható a 6. ábrán. Színes nyilakkal van négy átmenet megjelölve, a Q1 és Q2 a két qubithez tartozó átmenet. A Q1₋ és Q2₋ megegyezik az előző kettővel, annyi különbséggel, hogy a nem vezérelt qubit az ellenkező állapotban van, például a Q1 és Q1₋ esetében is a bal oldali spin lesz fordítva úgy, hogy a jobb oldali spin változatlan, de ez a változatlan jobb oldali spin eltérő. Abban az esetben, ha nincs kölcsönhatás a lyukak között, ezekhez az átmenetekhez tartozó energiakülönbségek megegyeznek, kölcsönhatás esetén viszont különböznek. Ezt használják ki a kétqubitese műveletek megvalósításához.

Másodrendű Schrieffer-Wolff transzformáció segítségével [30, 31] kiszámolhatóak a Q1 és Q2 átmenetekhez tartozó f_{Q1} és f_{Q2} frekvenciák, az eredmény:

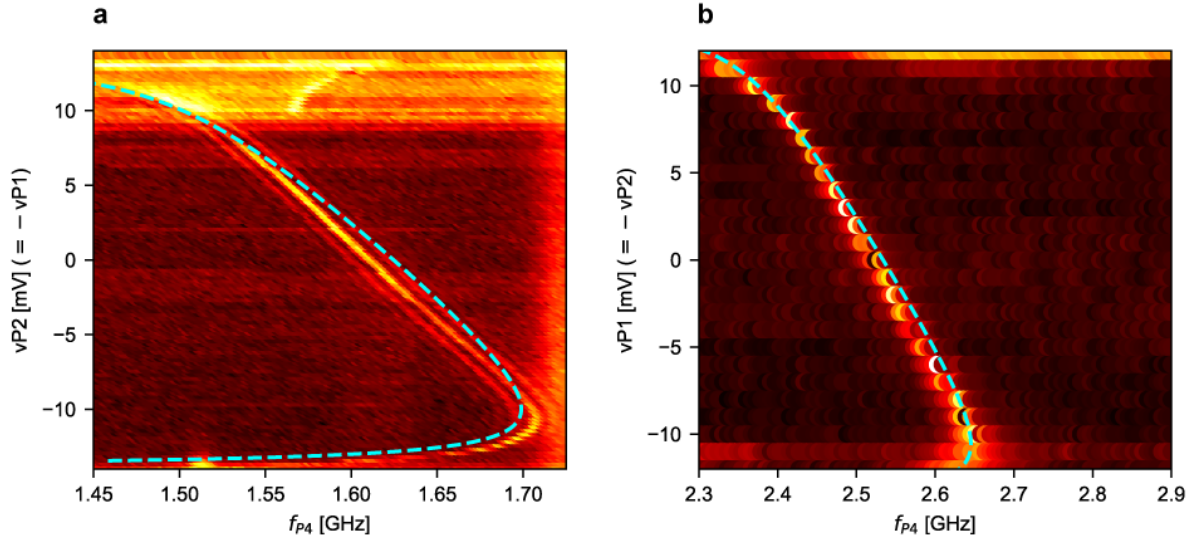
$$hf_{Q1} \approx \mu_B B [g_{1,0} + (B_1 - A_1) \text{vP2}] + 2 \frac{\Omega^2 - t^2}{U} \frac{1}{1 - \frac{4\alpha^2}{U^2} \text{vP2}^2}, \quad (10)$$

$$hf_{Q2} \approx \mu_B B [g_{2,0} + (A_2 - B_2) \text{vP1}] + 2 \frac{\Omega^2 - t^2}{U} \frac{1}{1 - \frac{4\alpha^2}{U^2} \text{vP1}^2}. \quad (11)$$



6. ábra. Az alkalmazások szempontjából fontos négy, az (1,1) töltés konfigurációhoz tartozó energiaszint. A Q1 és Q2 átmenetek a két qubithez tartoznak, a Q1_ és Q2_ meg- egyezik az előző kettővel, annyi különbséggel, hogy a másik qubit ellentétes állapotban van.

A kísérletek során a sztatikus elhangoltság mindig úgy volt beállítva, hogy $vP1 = -vP2$ fennálljon, éppen ezért az (10) és (11) egyenletekben csak egy változó jelenik meg a $vP1$ és $vP2$ közül. Ezeket a frekvenciákat kimérték a virtuális kapufeszültségek függvé- nyében, mi pedig az elméleti összefüggéseket illesztettük a mérési adatokra, ez látható a 7. ábrán.



7. ábra. A mért spektrumok és az illesztett elméleti összefüggések. **a.** Az f_{Q1} frekvencia a $vP2$ virtuális kapufeszültség függvényében, illetve az arra illesztett (10) egyenlet. **b.** Az f_{Q2} frekvencia a $vP1$ kapufeszültség függvényében, illetve az illesztett (11) kifejezés.

Az illesztésből kapott paraméterek:

$$g_{1,0} = 0.174, \quad A_1 - B_1 = 1.043 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mV}}, \quad (12)$$

$$\frac{\Omega^2 - t^2}{U} = -0.0474 \mu\text{eV}, \quad \frac{\alpha}{U} = 0.0358 \frac{1}{\text{mV}}, \quad (13)$$

$$g_{2,0} = 0.271, \quad A_2 - B_2 = 1.440 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mV}}. \quad (14)$$

Az α lever arm ismeretében az illesztés eredményéből meghatározható az U Coulomb energia:

$$U = 2.56 \text{ meV}. \quad (15)$$

Láthatjuk, hogy az illesztésből kapott g_1 és g_2 g -faktorok jelentősen eltérnek egymástól, illetve a vákuumban érvényes $g = 2$ -től is.

5. Floquet elmélet, Schrieffer-Wolff transzformáció

A rendszer bikromatikus vezérlésének leírásához a standard Floquet-elmélet [31] több gerjesztési teret figyelembe vevő általánosítását használjuk [32]. Az időfüggő Hamilton-operátort (6) a következőképp írhatjuk:

$$H(t) = H_0 + V_2 \cos(\omega_2 t) + V_4 \cos(\omega_4 t), \quad (16)$$

A Floquet-elmélet szerint egy periodikus időfüggésű Hamilton-operátor megoldása helyett tekinthetjük az időfüggetlen, de cserében végtelen dimenziós Floquet-mátrixot. A Floquet-mátrix bázisállapotait α , n_2 és n_4 -el indexelhetjük, ahol az α utal az eredeti Hamilton-operátor állapotaira, vagyis $\alpha \in \{|\uparrow, \downarrow\rangle, |\downarrow, \uparrow\rangle, |\uparrow, \uparrow\rangle, |\downarrow, \downarrow\rangle, |0, 2\rangle, |2, 0\rangle\}$, az n_2 és n_4 egész számok az ω_2 és ω_4 frekvenciákhoz tartozó Fourier-indexek. Utóbbiakra gondolhatunk úgy, mint ω_2 és ω_4 frekvenciákhoz tartozó fotonszámok, hiszen Shirley megmutatta [33], hogy a Floquet-elmélet a kvantumelektrodinamika nagy fotonszám melletti határeseté. A (16) egyenletben leírt Hamilton-operátorhoz tartozó Floquet-mátrix a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{F, \alpha n_2 n_4, \beta k_2 k_4} &\equiv \langle \alpha n_2 n_4 | \mathcal{H}_F | \beta k_2 k_4 \rangle = \hbar(n_2 \omega_2 + n_4 \omega_4) \delta_{\alpha\beta} \delta_{n_2 k_2} \delta_{n_4 k_4} + H_{0, \alpha\beta} \delta_{n_2 k_2} \delta_{n_4 k_4} + \\ &+ \frac{V_{2, \alpha\beta}}{2} (\delta_{n_2 - k_2, 1} + \delta_{n_2 - k_2, -1}) \delta_{n_4 k_4} + \frac{V_{4, \alpha\beta}}{2} (\delta_{n_4 - k_4, 1} + \delta_{n_4 - k_4, -1}) \delta_{n_2 k_2}, \end{aligned} \quad (17)$$

Floquet-szinteknek nevezzük a diagonális $\langle \alpha n_2 n_4 | \mathcal{H}_F | \alpha n_2 n_4 \rangle$ mátrixelemeket.

A Floquet-mátrix 6x6-os blokkokból épül fel, amelyeket az eredeti sztatikus Hamilton-operátor diagonálelemeit $n_2 \hbar \omega_2 + n_4 \hbar \omega_4$ energiákkal eltolva kaphatjuk meg. Ezek a blokkok össze vannak csatolva az elektromos tér által, ezt írja le az utolsó két tag a (17) egyenletben.

A Floquet-elmélet szerint az eredeti időfüggő Hamilton-operátor egyenletének megoldása helyett megoldhatjuk a végtelen dimenziós Floquet-mátrix sajátértékproblémáját, ami természetesen ugyancsak nehéz feladat. A Floquet-mátrix problémáját azonban kezelhetjük perturbatíván, Schrieffer-Wolff transzformációt [30, 31] alkalmazva. Rezonáns gerjesztés esetén megjelenik egy degenerált altér a Floquet-mátrixban, ezt a degenerált alteret szeparálhatjuk el a többi szinttől a Schrieffer-Wolff transzformáció segítségével. A perturbációs számítás során a perturbálatlan része a Floquet-mátrixnak a főátlója lesz, a perturbációt pedig az alagutazási paraméterek és az elektromos gerjesztések jelentik.

A perturbatív számolások során használjuk a következő közelítéseket:

$$U \pm \epsilon + n_2 \hbar \omega_2 + n_4 \hbar \omega_4 \approx U \pm \epsilon, \quad U \pm \epsilon \pm \hbar \omega_z \approx U \pm \epsilon, \quad U \pm \epsilon \pm \hbar \delta \omega_z \approx U \pm \epsilon. \quad (18)$$

A spektrum illesztéséből kapott paraméterek ismeretében láthatjuk, hogy ezek a közelítések valóban érvényesek.

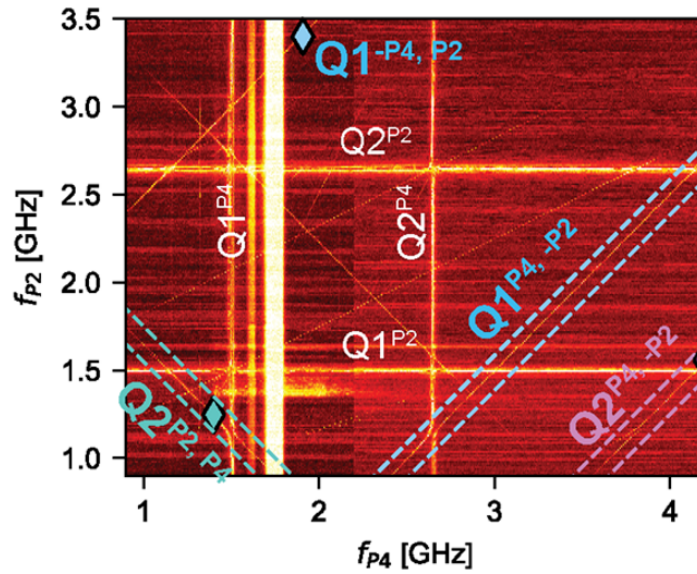
6. Monokromatikus és bikromatikus oszcillációk

A többfotonos monokromatikus és bikromatikus oszcillációk kísérleti demonstrációja a következőképp történt. A sztatikus virtuális kapufeszültségek $(vP1, vP2) = (-10, 10)$ mV értékre voltak beállítva, különböző f_{P2} és f_{P4} gerjesztő frekvenciák esetén mérték a $|\downarrow\downarrow\rangle$ alapállapotban inicializált rendszer válaszát, vagyis a valószínűséget, hogy a rendszer a gerjesztés hatására egy másik állapotba megy át. A mérés eredménye az (f_{P2}, f_{P4}) frekvenciasíkon a 8. ábrán látható.

Az ábrán azonosítva vannak különböző rezonanciavonalak, a használt jelölés:

$$n_2 f_{P2} + n_4 f_{P4} = Q_i \rightarrow Q_i^{n_2 P2, n_4 P4}, \quad (19)$$

ahol Q_i lehet $Q1$, $Q2$ vagy $Q1 + Q2_-$ (a $|\downarrow\downarrow\rangle$ és $|\uparrow\uparrow\rangle$ közötti átmenet).

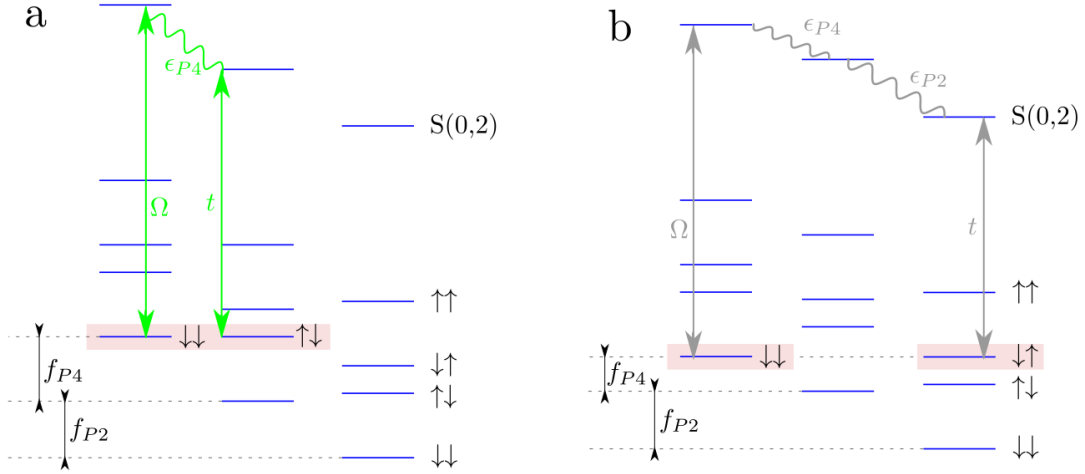


8. ábra. **Többfotonos folyamatok.** Az átlagos valószínűség, hogy adott frekvenciák esetén a rendszer nem az inicializált $|\downarrow\downarrow\rangle$ állapotban marad. A mérés a $(vP1, vP2) = (-10, 10)$ mV pontban volt végezve.

Az ábrán látható vízszintes és függőleges vonalak monokromatikus átmenetekhez tartoznak, amelyek lehetnek egyfotonosak vagy többfotonosak (szubharmonikusok). A ferde vonalak viszont bikromatikus átmenetek, ezek között megfigyelhetők kétfotonos bikromatikus és háromfotonos bikromatikus vonalak is, melyekhez különböző meredekség tartozik.

Egy fontos kísérleti tény az, hogy a bikromatikus átmenetek megfigyeléséhez jelentős ϵ elhangoltság szükséges. A spektrum illesztéséből kaptuk, hogy a Coulomb-energia $U = 2.56$ meV, ehhez képest a sztatikus ϵ elhangoltság a $(vP1, vP2) = (-10, 10)$ mV pontban $\epsilon = 1.834$ meV.

Az átmenetek leírásához a már említett Floquet-elméletet és Schrieffer-Wolff transzformációt használjuk. Rezonancia esetén egy kétdimenziós degenerált altér jön létre a Floquet-mátrixban, Schrieffer-Wolff transzformáció segítségével egy effektív 2×2 -es mátrixot tudunk kapni, amelynek az offdiagonális mátrixelemének kétszerese lesz a Rabi-frekvencia. A perturbációt az alagutazási paraméterek és az elektromos terek jelentik. Annak ellenére, hogy a Floquet-mátrix végtelen dimenziós, a perturbációban adott rendig számolva a mátrixnak csak egy véges része ad járulékot, ezért elvégezhető a számolás. Monokromatikus átmenetek leírásához harmadrendű, míg a bikromatikusokhoz negyedrendű Schrieffer-Wolff transzformáció szükséges.



9. ábra. Monokromatikus és bikromatikus átmenetekhez tartozó Floquet-diagramok.

a. Monokromatikus átmenethez tartozó Floquet-diagram. A két degenerált állapot a $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$ és $|\uparrow\downarrow, 0, -1\rangle$. Ezeket két alagutazási mátrixelem és egy elektromos tér köti össze szinglet állapotokon keresztül. **b.** Bikromatikus átmenethez tartozó Floquet-diagram. A két degenerált állapot $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$ és $|\uparrow\downarrow, -1, -1\rangle$, melyeket két alagutazási mátrixelem és két elektromos tér köt össze szinglet állapotokon keresztül. Az egyszerűség kedvéért csak az $S(0,2)$ állapotok járuléka lett az ábrán feltüntetve, de hasonlóan az $S(2,0)$ járulékat is figyelembe kell venni.

A 9. ábra mutatja a Floquet-szinteket, illetve az azokat összecsatoló elemeket. Az a. panel egy monokromatikus rezonanciát jelöl. A példában a Q1 átmenetet gerjesztjük a P4 elektródával. Az első két oszlop jelöli az állapotokat, amelyek egymáshoz képest el vannak tolva f_{P4} -el, ami éppen megegyezik a $|\uparrow\downarrow\rangle$ és $|\downarrow\downarrow\rangle$ szintek közötti energiakülönbséggel, tehát rezonancia van. A két oszlophoz különböző n_4 fotonszám tartozik, a különbségük 1, hiszen egyfotonos folyamatról beszélünk, a két degenerált Floquet-szint pedig a $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$ és $|\uparrow\downarrow, 0, -1\rangle$. A vezérlés a $(0,2)$ és $(2,0)$ állapotokon keresztül történik (a 9. ábrán csak a $(0,2)$ van jelölve), melyekkel az Ω és t alagutazási amplitúdók kapcsolják össze az $(1,1)$ állapotokat, a különböző fotonszámú állapotokat pedig az elektromos tér, ϵ_{P4} köti össze.

A b. panel egy bikromatikus oszcillációhoz tartozó Floquet-diagramot ábrázol, $Q2^{P2,P4}$ átmenetet. A két degenerált Floquet-szint a $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$ és $|\uparrow\downarrow, -1, -1\rangle$. A különbség a monokromatikus rezonanciához képest az, hogy a két állapot fotonszámait kettővel térnek el, ezért két elektromos tér kell összekösse őket, emiatt szükséges az eggyel magasabb, negyedrendű Schrieffer-Wolff transzformáció.

Az 1. táblázat tartalmazza a mért és számolt monokromatikus illetve bikromatikus Rabi-frekvenciákat. A frekvenciák kiszámolásához szükséges ismerni az Ω és t alagutazási paramétereket, ezeket az anticrossingok illesztéséből kapjuk, a paraméterek megtalálhatóak az 5. táblázatban.

Fontos észrevétel, hogy a számolt Rabi-frekvenciák nem függnék a gerjesztő frekvenciák értékeitől, ez a (18) közelítés eredménye, hiszen az átmenetek a magasabb energiájú állapotokon keresztül mennek végbe. Ez a közelítés az oka annak is, hogy a monokromatikus Rabi-oszcillációk formulái megegyeznek (leszámítva azt, hogy az ϵ_{P2} és ϵ_{P4} eltérhetnek), ugyanez igaz a bikromatikus oszcillációk esetében is.

Egy másik észrevétel, hogy a számolt és mért értékek csak a P2-vel vezérelt monokromatikus oszcillációk esetén egyeznek meg. Ennek az oka az, hogy a modell nem veszi figyelembe a g -tenzor modulációt (g -TMR) [34, 35], vagyis a közvetlen spinfordítást. A g -TMR-re gondolhatunk úgy, mint a kvantumdot alakjának elektromos térrel történő megváltoztatása, ami Rabi-oszcillációkat okoz. A P2 elektróda sokkal nagyobb elhangolt-ság modulációt okoz, mint a P4 elektróda, ezért a P2 elektróda által okozott vezérlés

leírható elhangoltság modulációval, de a P4 elektródáé nem.

Átmenet	Képlet	Mért frekvencia (MHz)	Számolt frekvencia (MHz)
$Q2^{P2}$	$f_R = \frac{4\epsilon_{P2}\epsilon U\Omega t}{h(U^2-\epsilon^2)^2}$	20.66 ± 0.05	19.0 ± 5.1
$Q2_{-}^{P2}$	$f_R = \frac{4\epsilon_{P2}\epsilon U\Omega t}{h(U^2-\epsilon^2)^2}$	22.1 ± 0.1	18.6 ± 5.0
$Q1^{P4}$	$f_R = \frac{4\epsilon_{P4}\epsilon U\Omega t}{h(U^2-\epsilon^2)^2}$	11.76 ± 0.04	2.9 ± 0.8
$Q1_{-}^{P4}$	$f_R = \frac{4\epsilon_{P4}\epsilon U\Omega t}{h(U^2-\epsilon^2)^2}$	5.65 ± 0.02	3.0 ± 0.8
$Q1^{-P2,P4}$	$f_R = \frac{2\epsilon_{P2}\epsilon_{P4}U(U^2+3\epsilon^2)\Omega t}{h(U^2-\epsilon^2)^3}$	6.24 ± 0.04	0.59 ± 0.16
$Q2^{-P2,P4}$	$f_R = \frac{2\epsilon_{P2}\epsilon_{P4}U(U^2+3\epsilon^2)\Omega t}{h(U^2-\epsilon^2)^3}$	1.695 ± 0.008	0.40 ± 0.11
$Q1^{P2,P4}$	$f_R = \frac{2\epsilon_{P2}\epsilon_{P4}U(U^2+3\epsilon^2)\Omega t}{h(U^2-\epsilon^2)^3}$	4.23 ± 0.01	0.65 ± 0.17

1. táblázat. **A mért és számolt monokromatikus és bikromatikus Rabi-frekvenciák.** A második oszlopban látható képletekkel, az Ω és t paraméterek ismeretében kiszámolhatóak a Rabi-frekvenciák, ezek vannak összehasonlítva a mért értékekkel. Az Ω és t paraméterek az anticrossingok illesztésével lettek meghatározva, a kapott értékek az 5. táblázatban találhatóak.

Annak ellenére, hogy a bikromatikus Rabi-frekvenciák értékét nem adja vissza a modell, sok mindent megérthetünk a segítségével. Kiderül, hogy az anticrossingok leírásához elegendő, ha a P2-vel vezérelt monokromatikus oszcillációkat jól leírja az elméletünk.

A 9. fejezetben bemutatjuk a modell g -TMR-rel való kiterjesztését, amely több új paraméter bevezetését teszi szükségessé. Nem áll azonban rendelkezésre elég mérési adat, hogy a kiterjesztett elméletet az adatokra illesszük, ezért pusztán elméleti úton mutatjuk meg, hogy az elhangoltság és a g -tenzor modulációi együtt hogyan eredményezhetik azokat az effektusokat, amelyeket önmagában az elhangoltság modulációja nem tud leírni. Egy ilyen effektus a $Q1^{P4}$ és $Q1_{-}^{P4}$ átmenetek frekvenciái közötti jelentős különbség vagy a különböző bikromatikus frekvenciák eltérése (1. táblázat).

7. Anticrossingok megjelenése

A 8. ábrán látható frekvenciatérképen három bikromatikus átmenet van megjelölve színes szaggatott vonalakkal, a $Q2^{P2,P4}$, $Q1^{-P2,P4}$ és a $Q2^{-P2,P4}$. A Veldhorst csoport a beke-retezett tartományokban nagyobb felbontással mért, ekkor rezonancia anticrossingokat figyeltek meg. Ezek leírásához célszerű bevezetni a Δf_{P2} paramétert. Tekintsünk egy bikromatikus rezonanciát amely a következő egyenlettel írható le:

$$n_2 f_{P2}^{\text{offset}} + n_4 f_{P4} = Q_i, \quad (20)$$

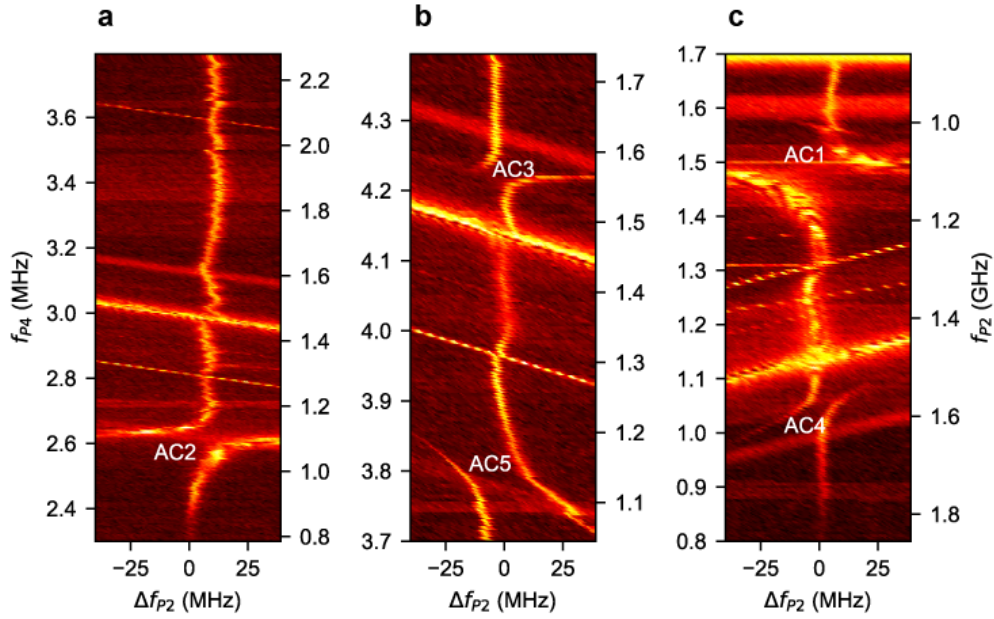
ahol az f_{P2}^{offset} jelenti azt, hogy adott f_{P4} mellett úgy választjuk meg az f_{P2} frekvenciát, hogy tökéletes rezonancia legyen. Egy általános f_{P2} frekvencia, amely nem teljesíti a rezonanciafeltételt a következőképp írható:

$$f_{P2} = f_{P2}^{\text{offset}} + \Delta f_{P2}, \quad (21)$$

vagyis a Δf_{P2} paraméter a rezonanciától való eltérést írja le.

A mért bikromatikus rezonanciák kereszteződnek egyfotonos és háromfotonos rezonanciákkal, a találkozási pontoknál néhány esetben elkerült szintkerezteződés (anticrossing),

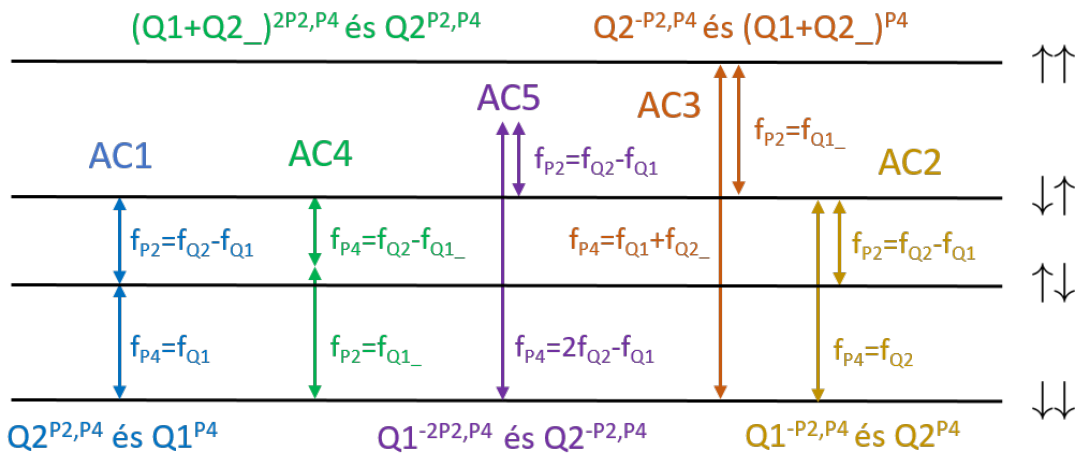
más esetben szintkereszteződés (crossing) alakul ki, ezeket szeretnénk megérteni és leírni. Az egyszerűség kedvéért ezentúl a crossing és anticrossing kifejezéseket használjuk.



10. ábra. A bikromatikus rezonanciák mentén (függőleges vonalak) kialakuló crossingok és anticrossingok. a. A $Q1^{-P2,P4}$ rezonancia mentén látható AC2 anticrossing. b. A $Q2^{-P2,P4}$ átmenet mentén látható AC3 és AC5 anticrossingok. c. A $Q2^{P2,P4}$ rezonanciák mentén látható AC1 és AC4 anticrossingok.

A $Q1^{-P2,P4}$, $Q2^{-P2,P4}$ és $Q2^{P2,P4}$ bikromatikus rezonanciák mentén létrejövő crossingok és anticrossingok láthatóak a 10. ábrán, a világos tartományok jelentik a rezonanciát. Az öt anticrossingot AC1-AC5-el jelöljük. A függőleges vonalak bikromatikusak, a ferde és vízszintes vonalak pedig egy- vagy háromfotonos folyamatok.

Két rezonanciavonal találkozásánál a rendszer dinamikája nem triviális, hiszen egyszerre két különböző szintre gerjesztünk az alapállapotból (mindkét rezonancia az alapállapotból indul). Az anticrossingok és a releváns átmenetek láthatóak a 11. ábrán.



11. ábra. A kísérletben megfigyelt öt anticrossingban résztvevő átmenetek. Az anticrossingok két, az alapállapotból induló átmenetek találkozásánál alakulnak ki.

A két rezonanciavonal találkozásánál teljesülő feltételek:

$$n_{P2}^{(1)} f_{P2} + n_{P4}^{(1)} f_{P4} = f_{Q_i}, \quad n_{P2}^{(2)} f_{P2} + n_{P4}^{(2)} f_{P4} = f_{Q_j}, \quad (22)$$

ahol $f_{Q_i} \neq f_{Q_j}$, az $n_{P2}^{(1)}, n_{P4}^{(1)}$ az 1-es rezonanciához, az $n_{P2}^{(2)}, n_{P4}^{(2)}$ a 2-es rezonanciához tartozó fotonszámok. A két rezonanciához rendelhetünk egy-egy fotonszámot, melyek $|n_{P2}^{(1)}| + |n_{P4}^{(1)}|$ illetve $|n_{P2}^{(2)}| + |n_{P4}^{(2)}|$. Bevezethetjük a két rezonancia különbségét, ha kivonjuk a (22) két egyenletét egymásból:

$$(n_{P2}^{(1)} - n_{P2}^{(2)}) f_{P2} + (n_{P4}^{(1)} - n_{P4}^{(2)}) f_{P4} = f_{Q_i} - f_{Q_j}. \quad (23)$$

Ez azt jelenti, hogy a két gerjesztett állapot, amelyben az eredeti két rezonancia végződik össze lesz csatolva ezen folyamat által, melynek fotonszáma $|n_{P2}^{(1)} - n_{P2}^{(2)}| + |n_{P4}^{(1)} - n_{P4}^{(2)}|$. Erre a folyamatra ezentúl különbség folyamatként hivatkozunk. Az anticrossing létrejöttének feltétele az, hogy a különbség folyamat lényegesen erősebb legyen, mint az eredeti kettő. Ez azért van, mert a különbség átmenet nemnulla mátrixeleme AC-Stark eltolódást [36] okoz, így az eredeti két rezonancia is eltolódik. Ha ez az eltolódás lényegesen nagyobb, mint az eredeti két rezonanciavonal szélessége, akkor megfigyelhető lesz az anticrossing. Szupravezető qubitekkel történő kísérletek során hasonló megfigyelésekre jutottak [37, 38].

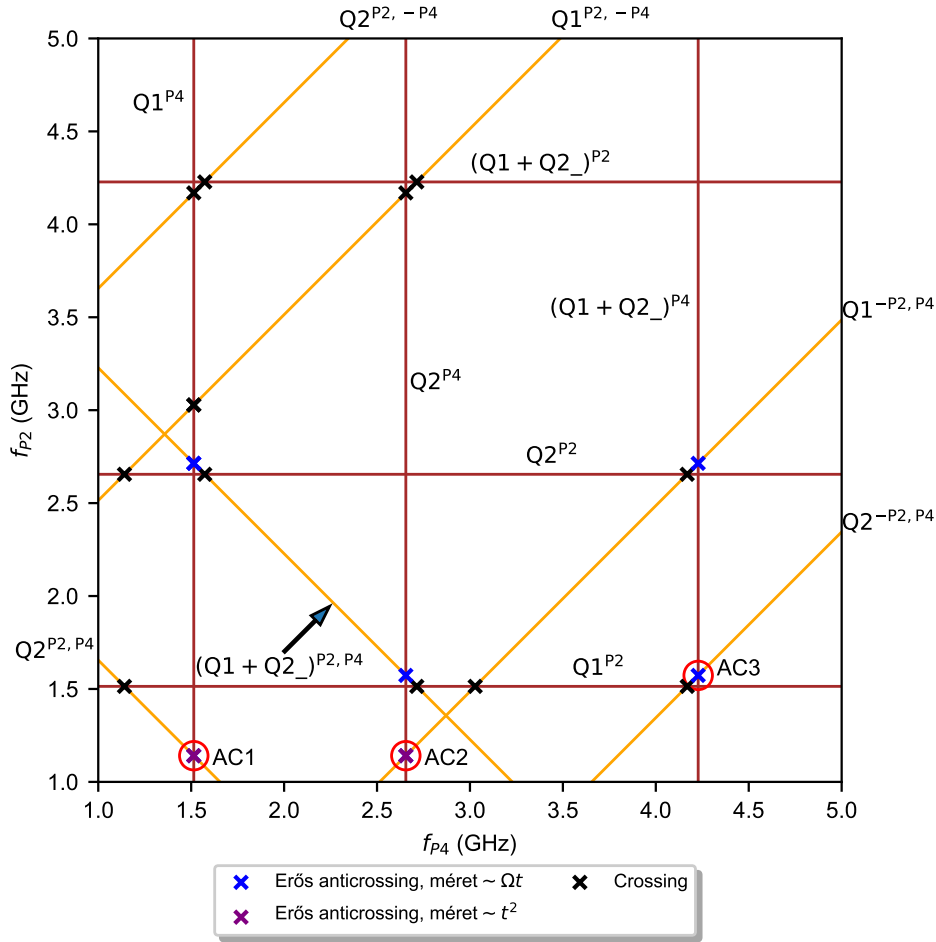
Az anticrossing létrejöttének feltételét egyszerűbben is megfogalmazhatjuk a fotonszámok segítségével. Anticrossing alakul ki, ha mindkét eredeti $i \in \{1, 2\}$ rezonanciavonalra teljesül a következő két feltétel egyike:

- 1. feltétel: a különbség átmenet fotonszáma alacsonyabb, mint az eredeti i átmenet fotonszáma, vagyis $|n_{P2}^{(1)} - n_{P2}^{(2)}| + |n_{P4}^{(1)} - n_{P4}^{(2)}| < |n_{P2}^{(i)}| + |n_{P4}^{(i)}|$.
- 2. feltétel: a különbség átmenet fotonszáma megegyezik az eredeti i átmenet fotonszámával, $|n_{P2}^{(1)} - n_{P2}^{(2)}| + |n_{P4}^{(1)} - n_{P4}^{(2)}| = |n_{P2}^{(i)}| + |n_{P4}^{(i)}|$, de az f_{P2} frekvenciához tartozó fotonszáma a különbség átmenetnek nagyobb, mint az eredeti i -nek, vagyis $|n_{P2}^{(1)} - n_{P2}^{(2)}| > |n_{P2}^{(i)}|$.

Az 1. feltétel abból ered, hogy gyenge gerjesztések esetén (ún. weak-driving regime) a nagyobb fotonszámú átmenetek gyengébbek. A 2. feltétel pedig abból következik, hogy a P2 elektródával történő gerjesztés lényegesen erősebb a P4-nél.

Átmenet	1-foton	2-foton (bikrom.)	2-foton (monokrom.)	3-foton (monokrom.)	3-foton (bikrom.)
1-foton	C	SAC, C	C	C	C
2-foton (bikrom.)		WAC, C	C	C	SAC, WAC, C
2-foton (monokrom.)			C	C	SAC, WAC, C
3-foton (monokrom.)				C	WAC, C
3-foton (bikrom.)					WAC, C

2. táblázat. **Különböző rezonanciavonalak találkozásánál lehetséges crossingok és anticrossingok.** A különböző fotonszámú monokromatikus és bikromatikus átmenetek találkozásánál létrejöhetnek crossingok (C), gyenge anticrossingok (WAC), illetve erős anticrossingok (SAC).

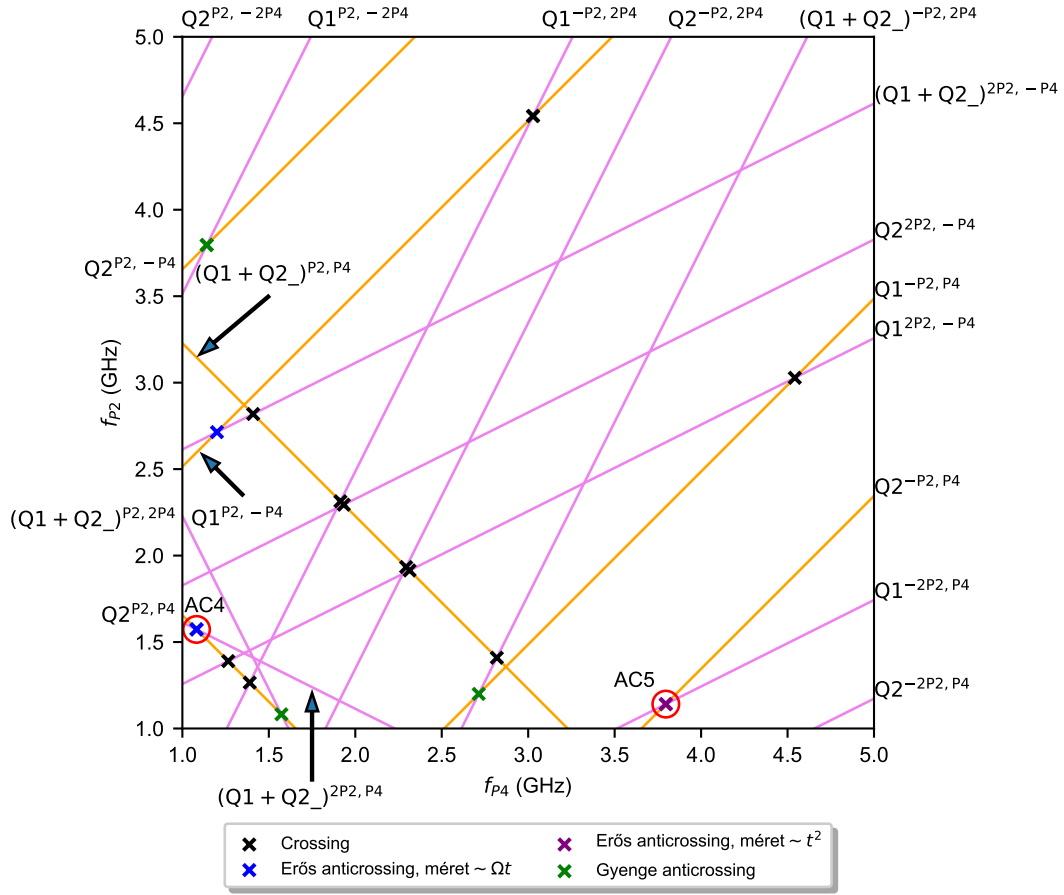


12. ábra. Elméleti jóslatok az egyfotonos (barna) és kétfotonos bikromatikus (sárga) vonalak találkozásánál létrejövő crossingokra és anticrossingokra. Erős anticrossingoknak nevezzük azokat, amelyeket létrehozó mátrixelem ϵ_{P2} -vel arányos, ezek pedig különböző módokon függhetnek az Ω és t alagutazási paraméterektől.

A létrejövő anticrossingokat jellemezhetjük a méretük segítségével. Erős anticrossingoknak (SAC) nevezzük azokat, amelyeknél a különbség átmenet fotonszáma 1 és $n_{P2} = 1$, míg gyenge anticrossingoknak (WAC) azokat, amelyeknél a különbség átmenet fotonszáma 2, vagy ha a fotonszám 1, akkor $n_{P4} = 1$.

A 2. táblázat tartalmazza azt, hogy különböző fotonszámú rezonanciavonalak találkozásánál milyen alakzat alakulhat ki, crossing (C), gyenge anticrossing (WAC) vagy erős anticrossing (SAC). Láthatjuk, hogy csak három különböző esetben jelenhet meg erős anticrossing. A kísérletben mért, a 10. ábrán látható anticrossingok az egyfotonos és kétfotonos bikromatikus (AC1, AC2, AC3), illetve kétfotonos bikromatikus és háromfotonos bikromatikus (AC4, AC5) rezonanciavonalak találkozásánál lehetnek.

A 12. ábrán láthatóak a frekvenciasíkon az egyfotonos monokromatikus és a kétfotonos monokromatikus rezonanciavonalak találkozásai az elméleti várakozások alapján osztályozva mint crossing, gyenge anticrossing, illetve két különböző fajta erős anticrossing. A két erős anticrossing abban különbözik, hogy az anticrossing nagysága hogyan függ a t és Ω alagutazási paraméterektől. A 13. ábrán a kétfotonos bikromatikus és háromfotonos bikromatikus vonalak metszéspontjai vannak hasonlóan osztályozva. A pirossal bekarikázott öt pont a kísérletben részletesen vizsgált AC1-AC5 anticrossinghoz tartozik.

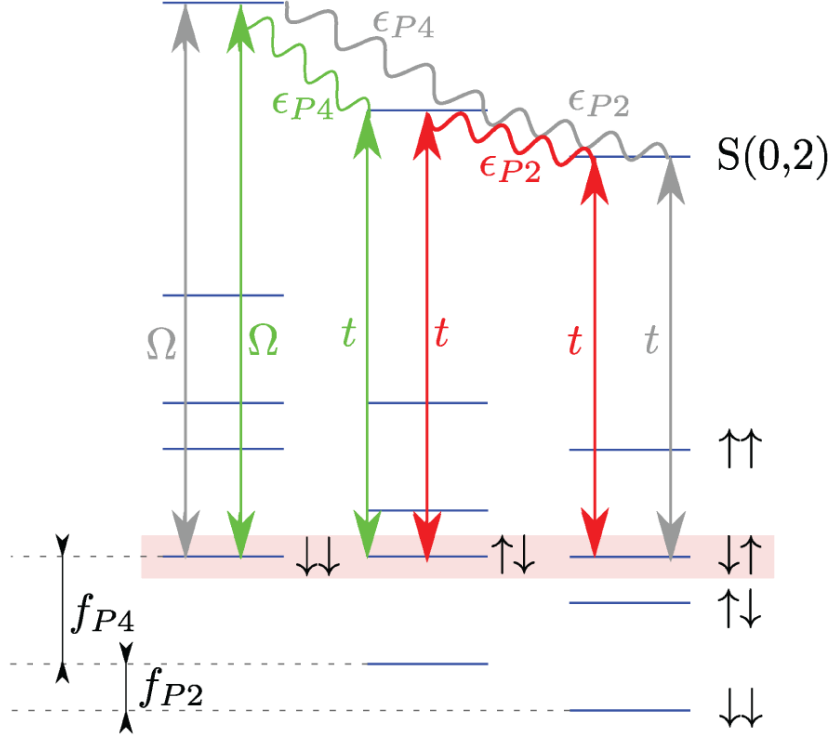


13. ábra. Elméleti jóslatok a háromfotonos bikromatikus (lila) és kétfotonos bikromatikus (sárga) vonalak találkozásánál létrejövő crossingokra és anticrossingokra. Erős anticrossingoknak nevezzük azokat, amelyeket létrehozó mátrixelem ϵ_{P2} -vel arányos, gyenge anticrossingok esetén a mátrixelem ϵ_{P4} -el arányos.

8. Anticrossingok leírása

Az előző fejezetben megállapítottuk, hogy mi annak a feltétele, hogy létrejöjjenek az anticrossingok és osztályoztuk is azokat, az elméleti várakozásokat pedig a mérések igazolták. Ebben a fejezetben pedig a Floquet-elmélet segítségével kvantitatív leírást adunk az anticrossingokról.

A 14. ábrán látható az AC1 anticrossinghoz tartozó Floquet-diagram. Ez hasonló a monokromatikus és bikromatikus oszcillációk esetéhez, itt viszont a kettős rezonancia miatt egy háromszoros degeneráció jelenik meg, a konkrét példában a $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$, $|\uparrow\downarrow, 0, -1\rangle$ és $|\downarrow\uparrow, -1, -1\rangle$ állapotok degeneráltak. A nagyobb fokú degeneráció az ábrán pirossal jelölt különbség átmenetből ered. Negyedrendű Schrieffer-Wolff transzformációval a Floquet-mátrixból egy effektív 3×3 mátrixot tudunk származtatni, amely segítségével leírhatóak az anticrossingok. A következő alfejezetekben az öt kísérletileg vizsgált anticrossing leírása lesz bemutatva.



14. ábra. **Floquet-diagram AC1 anticrossing esetén.** A két gerjesztés miatt háromszoros degeneráció jelenik meg a Floquet-mátrixban, a három degenerált állapot ebben a példában a $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$, $|\uparrow\downarrow, 0, -1\rangle$ és $|\downarrow\uparrow, -1, -1\rangle$.

8.1. $Q2^{P2,P4}$ és $Q1^{P4}$ közötti anticrossing (AC1)

A Floquet-elméletből negyedrendű Schrieffer-Wolff transzformációval levezethető $\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}}$ effektív Floquet-mátrix a következő alakú:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}} = \begin{pmatrix} hf_{\text{BS},1} & \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1^* & hf_{Q1} + hf_{\text{BS},2} - hf_{P4} & \chi_3 \\ \chi_2^* & \chi_3^* & hf_{Q2} + hf_{\text{BS},3} - hf_{P2} - hf_{P4} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

A mátrix bázisállapotai $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$, $|\uparrow\downarrow, 0, -1\rangle$ és $|\downarrow\uparrow, -1, -1\rangle$, az $f_{\text{BS},1}$, $f_{\text{BS},2}$ és $f_{\text{BS},3}$ Bloch-Siegert eltolódások [39], amelyek a diagonálemeknek a gerjesztésből adódó perturbatív korrekciói. Az offdiagonális mátrixelemek:

$$\chi_1 = -\frac{2\epsilon_{P4}U\epsilon\Omega e^{-i\phi\Omega}te^{i\phi t}}{(U^2 - \epsilon^2)^2}, \quad \chi_2 = \frac{\epsilon_{P4}\epsilon_{P2}(U^3 + 3U\epsilon^2)\Omega e^{-i\phi\Omega}te^{-i\phi t}}{(U^2 - \epsilon^2)^3}, \quad \chi_3 = \frac{2\epsilon_{P2}U\epsilon(te^{-i\phi t})^2}{(U^2 - \epsilon^2)^2}. \quad (25)$$

A Bloch-Siegert eltolódások:

$$f_{\text{BS},1} = -\frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)\Omega^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}\epsilon_{P2}^2(f_{P2}), \quad f_{\text{BS},2} = f_{\text{BS},3} = -\frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)t^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}\epsilon_{P2}^2(f_{P2}), \quad (26)$$

ahol elhanyagoltuk az ϵ_{P4} -el arányos tagokat. A Bloch-Siegert eltolódások képletében kifejeztük azok f_{P2} frekvenciafüggését, hiszen kvadratikusan függenek az elektromos gerjesztés erősségétől, ami a csillapítás miatt frekvenciafüggő. Az effektív Floquet-mátrix

diagonáelemeit eltolhatjuk $-hf_{\text{BS},1}$ -el, így kapjuk a következő mátrixot:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1^* & hf_{\text{Q1}} + hf_{\text{BS}} - hf_{\text{P4}} & \chi_3 \\ \chi_2^* & \chi_3^* & hf_{\text{Q2}} + hf_{\text{BS}} - hf_{\text{P2}} - hf_{\text{P4}} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

ahol bevezettük a Bloch-Siegert eltolódások különbségét:

$$f_{\text{BS}} = f_{\text{BS},2} - f_{\text{BS},1} = -\frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)(t^2 - \Omega^2)}{h(U^2 - \epsilon^2)^3} \epsilon_{\text{P2}}^2(f_{\text{P2}}). \quad (28)$$

Ez már ismert mennyiség, hiszen a spektrum illesztéséből ismert az U és a $t^2 - \Omega^2$ értéke is.

Láthatjuk, hogy a χ_1 egy monokromatikus, a χ_2 mátrixelem egy bikromatikus átmenetet ír le, míg a χ_3 a kettő különbségét, vagyis ez az, amit különbség átmenetnek neveztünk. Az anticrossing létrejöttének feltétele az, hogy $|\chi_3|$ lényegesen nagyobb legyen, mint $|\chi_1|$ és $|\chi_2|$. Ez a feltétel teljesül a kiszámolt (25) mátrixelemekre, hiszen $\epsilon_{\text{P4}} \ll \epsilon_{\text{P2}}$.

A rezonancia feltétele az, hogy a $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$ állapot rezonáns legyen valamelyik másik (hibridizált) állapottal. Ez azt jelenti, hogy a $|\uparrow\downarrow, 0, -1\rangle$ és $|\downarrow\uparrow, -1, -1\rangle$ állapotokhoz tartozó 2×2 -es mátrixnak legyen nulla sajátértéke, vagyis a determináns nulla legyen. Célszerű bevezetni a Δf_{P2} , illetve egy x_0 és y_0 paramétert:

$$y_0 = f_{\text{Q1}}, \quad x_0 = f_{\text{Q2}} - f_{\text{P2}} - f_{\text{P4}} + \Delta f_{\text{P2}}, \quad \Delta f_{\text{P2}} = f_{\text{Q2}} - f_{\text{P2}} - f_{\text{P4}}. \quad (29)$$

Az x_0 és y_0 paraméterek konstans eltolások, míg a Δf_{P2} a bikromatikus rezonanciától való eltérést jelenti. Ezekkel a paraméterekkel a rezonancia feltétele felírható:

$$\det \begin{pmatrix} hy_0 + hf_{\text{BS}} - hf_{\text{P4}} & \chi_3 \\ \chi_3^* & -h\Delta f_{\text{P2}} + hf_{\text{BS}} + hx_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (30)$$

Ez egy összefüggést jelent az f_{P4} és a Δf_{P2} paraméterek között, vagyis meghatározza az anticrossing alakját. A Δf_{P2} kifejezve az egyenletből:

$$\Delta f_{\text{P2}} = x_0 - C\epsilon_{\text{P2}}^2(f_{\text{Q2}} - f_{\text{P4}}) - \frac{D^2\epsilon_{\text{P2}}^2(f_{\text{Q2}} - f_{\text{P4}})}{y_0 - C\epsilon_{\text{P2}}^2(f_{\text{Q2}} - f_{\text{P4}}) - f_{\text{P4}}}, \quad (31)$$

ahol az ϵ_{P2} függvény argumentumában az $f_{\text{P2}} = f_{\text{Q2}} - f_{\text{P4}}$ mennyiség szerepel. A C és D paraméterek:

$$C = \frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)(t^2 - \Omega^2)}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}, \quad D = \frac{2U\epsilon t^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^2}. \quad (32)$$

Az anticrossing (31) egyenletében az ismeretlen paraméterek az x_0 , y_0 és a t alagutazási paraméter. Ezeket meghatározhatjuk, ha ráillesztjük az elméleti görbét a mért anticrossingra. Az illesztés eredménye a 15. ábrán látható, az illesztési paraméterek:

$$x_0 = -0.569 \text{ MHz}, \quad y_0 = 1.503 \text{ GHz}, \quad t = 20.42 \mu\text{eV}. \quad (33)$$

Az illesztés során az ϵ_{P2} kísérletileg meghatározott (5. ábra) frekvenciafüggése figyelembe lett véve.

8.2. $(\text{Q1} + \text{Q2}_-)^{2\text{P2},\text{P4}}$ és $\text{Q2}^{2\text{P2},\text{P4}}$ közötti anticrossing (AC4)

Az AC4 anticrossing leírása teljesen hasonló az előző leírásához. Az effektív Floquet-mátrix:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}} = \begin{pmatrix} hf_{\text{BS},1} & \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1^* & hf_{\text{Q}2} + hf_{\text{BS},2} - hf_{\text{P}2} - hf_{\text{P}4} & \chi_3 \\ \chi_2^* & \chi_3^* & hf_{\text{Q}2} + hf_{\text{Q}1_-} + hf_{\text{BS},3} - 2hf_{\text{P}2} - hf_{\text{P}4} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

ahol a bázisállapotok $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$, $|\downarrow\uparrow, -1, -1\rangle$ és $|\uparrow\uparrow, -2, -1\rangle$. A χ_2 mátrixelem egy három-fotonos folyamatot ír le, melynek kiszámításához ötödfokú Schieffer-Wolff transzformáció lenne szükséges, ezért azt gyakorlatilag nullának tekintjük. A másik kettő mátrixelem:

$$\chi_1 = \frac{\epsilon_{\text{P}4}\epsilon_{\text{P}2}(U^3 + 3U\epsilon^2)\Omega e^{-i\phi_\Omega}te^{-i\phi_t}}{(U^2 - \epsilon^2)^3}, \quad \chi_3 = \frac{2\epsilon_{\text{P}2}U\epsilon\Omega e^{-i\phi_\Omega}te^{i\phi_t}}{(U^2 - \epsilon^2)^2}. \quad (35)$$

A Bloch-Siegert eltolódások:

$$f_{\text{BS},1} = f_{\text{BS},3} = -\frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)\Omega^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}\epsilon_{\text{P}2}^2(f_{\text{P}2}), \quad f_{\text{BS},2} = -\frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)t^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}\epsilon_{\text{P}2}^2(f_{\text{P}2}). \quad (36)$$

Itt is eltoljuk a diagonálemeket $-hf_{\text{BS},1}$ -el, illetve bevezetjük a következő paramétereket:

$$b_0 = f_{\text{Q}2} - f_{\text{P}2} - f_{\text{P}4} + \Delta f_{\text{P}2}, \quad b_1 = f_{\text{Q}2} + f_{\text{Q}1_-} - 2f_{\text{P}2} - 2f_{\text{P}4} + 2\Delta f_{\text{P}2}. \quad (37)$$

A Bloch-Siegert eltolódások különbsége:

$$f_{\text{BS}} = f_{\text{BS},2} - f_{\text{BS},1}. \quad (38)$$

Ezek segítségével az effektív Floquet-mátrix:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1^* & hb_0 - h\Delta f_{\text{P}2} + hf_{\text{BS}} & \chi_3 \\ \chi_2^* & \chi_3^* & hb_1 + hf_{\text{P}4} - 2h\Delta f_{\text{P}2} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Az anticrossing egyenletét szintén abból a feltételből kapjuk, hogy a χ_3 -hoz tartozó 2×2 -es blokk determinánsa nulla, ebből adódik, hogy:

$$\Delta f_{\text{P}2} = \frac{2a_1 + a_2 \pm \sqrt{(2a_1 - a_2)^2 + 8|\chi_3|^2/h^2}}{4}, \quad (40)$$

ahol $a_1 = b_0 + f_{\text{BS}}$, $a_2 = b_1 + f_{\text{P}4}$. A $|\chi_3|$ és az a_1 paraméterek szintén függenek az $f_{\text{P}4}$ frekvenciától, az $f_{\text{P}2} = f_{\text{Q}2} - f_{\text{P}4}$ szerint, hiszen $\epsilon_{\text{P}2}$ $f_{\text{P}2}$ függvénye. Az elméleti (40) összefüggést a mért anticrossingra illesztettük, az illesztés eredménye a 15. b. ábrán látható, az illesztési paraméterek:

$$b_0 = 3.011 \text{ MHz}, \quad b_1 = -1.064 \text{ GHz}, \quad t\Omega = 247.83 (\mu\text{eV})^2. \quad (41)$$

Az illesztett $t\Omega$ értékből kiszámolható külön a t és Ω értéke, hiszen a spektrum illesztéséből már rendelkezünk egy t és Ω közötti összefüggéssel. Az eredmény a 4. táblázatban található.

8.3. $\text{Q}1^{-2\text{P}2,\text{P}4}$ és $\text{Q}2^{-\text{P}2,\text{P}4}$ közötti anticrossing (AC5)

Az AC5 anticrossingot leíró effektív Floquet-mátrix:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}} = \begin{pmatrix} hf_{\text{BS},1} & \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1^* & hf_{\text{Q}2} + hf_{\text{BS},2} + hf_{\text{P}2} - hf_{\text{P}4} & \chi_3 \\ \chi_2^* & \chi_3^* & hf_{\text{Q}1} + hf_{\text{BS},3} + 2hf_{\text{P}2} - hf_{\text{P}4} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

ahol a bázisállapotok rendre $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$, $|\downarrow\uparrow, 1, -1\rangle$ és $|\uparrow\downarrow, 2, -1\rangle$. Az AC4-hez hasonlóan itt is a χ_2 mátrixelem egy háromfotonos folyamatot ír le, a másik kettő pedig:

$$\chi_1 = \frac{\epsilon_{P4}\epsilon_{P2}(U^3 + 3U\epsilon^2)\Omega e^{-i\phi\Omega}te^{-i\phi t}}{(U^2 - \epsilon^2)^3}, \quad \chi_3 = \frac{2\epsilon_{P2}U\epsilon(t e^{i\phi t})^2}{(U^2 - \epsilon^2)^2}. \quad (43)$$

A Bloch-Siegert eltolódások értékei:

$$f_{BS,1} = -\frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)\Omega^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}\epsilon_{P2}^2(f_{P2}), \quad f_{BS,2} = f_{BS,3} = -\frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)t^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}\epsilon_{P2}^2(f_{P2}). \quad (44)$$

Bevezetjük a következő paramétereket:

$$b_0 = f_{Q2} + f_{P2} - f_{P4} - \Delta f_{P2}, \quad b_1 = f_{Q1} + 2f_{P2} - 2f_{P4} - 2\Delta f_{P2}, \quad (45)$$

ezeket felhasználva, illetve az effektív Floquet-mátrixban a diagonálemeket $-hf_{BS,1}$ -el eltolva kapjuk, hogy:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1^* & hb_0 + hf_{BS} + h\Delta f_{P2} & \chi_3 \\ \chi_2^* & \chi_3^* & hb_1 + hf_{BS} + hf_{P4} + 2h\Delta f_{P2} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

ahol $f_{BS} = f_{BS,2} - f_{BS,1}$ a Bloch-Siegert eltolódások különbsége. Az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy az anticrossingot leíró egyenlet a következő alakú:

$$\Delta f_{P2} = \frac{-(2a_1 + a_2) \pm \sqrt{(2a_1 - a_2)^2 + 8|\chi_3|^2/h^2}}{4}, \quad (47)$$

ahol $a_1 = b_0 + f_{BS}$, $a_2 = b_1 + f_{P4} + f_{BS}$. Az elméleti (47) egyenletet a mért anticrossingra illesztve kapjuk az illesztési paramétereket:

$$b_0 = 1.046 \text{ MHz}, \quad b_1 = -3.795 \text{ GHz}, \quad t = 21.26 \mu\text{eV}. \quad (48)$$

Az illesztés eredménye a 15. c. ábrán látható.

8.4. $Q2^{-P2,P4}$ és $(Q1 + Q2_-)^{P4}$ közötti anticrossing (AC3)

Az AC3 anticrossingot leíró effektív Floquet-mátrix:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}} = \begin{pmatrix} hf_{BS,1} & \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1^* & hf_{Q1} + hf_{Q2_-} + hf_{BS,2} - hf_{P4} & \chi_3 \\ \chi_2^* & \chi_3^* & hf_{Q2} + hf_{BS,3} + hf_{P2} - hf_{P4} \end{pmatrix}, \quad (49)$$

ahol a bázisállapotok sorrendben $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$, $|\uparrow\uparrow, 0, -1\rangle$ és $|\downarrow\uparrow, 1, -1\rangle$. A χ_1 , χ_2 és χ_3 mátrixelemek:

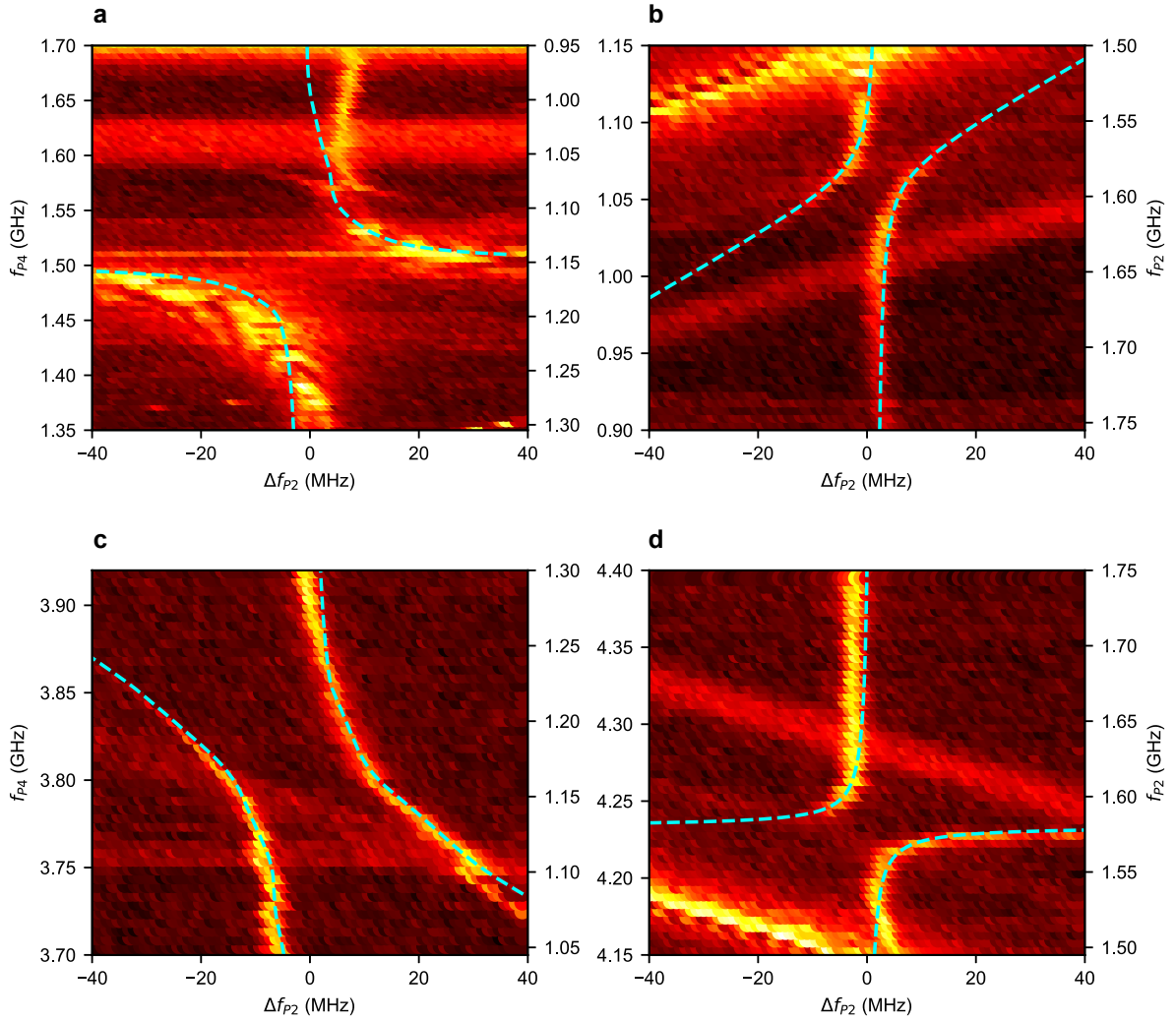
$$\chi_1 = -\frac{2\epsilon_{P4}U\epsilon(\Omega e^{-i\phi\Omega})^2}{(U^2 - \epsilon^2)^2}, \quad \chi_2 = \frac{\epsilon_{P4}\epsilon_{P2}(U^3 + 3U\epsilon^2)\Omega e^{-i\phi\Omega}te^{-i\phi t}}{(U^2 - \epsilon^2)^3}, \quad \chi_3 = \frac{2\epsilon_{P2}U\epsilon\Omega e^{i\phi\Omega}te^{-i\phi t}}{(U^2 - \epsilon^2)^2}. \quad (50)$$

A Bloch-Siegert eltolódások pedig:

$$f_{BS,1} = f_{BS,2} = -\frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)\Omega^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}\epsilon_{P2}^2(f_{P2}), \quad f_{BS,3} = -\frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)t^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}\epsilon_{P2}^2(f_{P2}). \quad (51)$$

Bevezetjük az x_0 és y_0 paramétereket:

$$x_0 = \Delta f_{P2} - f_{Q2} - f_{P2} + f_{P4}, \quad y_0 = f_{Q1} + f_{Q2_-}. \quad (52)$$



15. ábra. **Mért és illesztett anticrossingok** **a.** AC1 anticrossing mérési adata és az arra illesztett elméleti összefüggés (31). **b.** AC4 anticrossing mérési adata és az arra illesztett elméleti görbe (40). **c.** Az AC5 anticrossing mérési adata és az arra illesztett elméleti görbe (47). **d.** Az AC3 anticrossing mérési adata és az arra illesztett elméleti összefüggés (54).

Ezt a két paramétert felhasználva, illetve a diagonálemeket $-hf_{BS,1}$ -el eltolva kapjuk, hogy:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1^* & hy_0 - hf_{P4} & \chi_3 \\ \chi_2^* & \chi_3^* & h\Delta f_{P2} - hx_0 + hf_{BS} \end{pmatrix}, \quad (53)$$

ahol $f_{BS} = f_{BS,2} - f_{BS,1}$ a Bloch-Siegert eltolódások különbsége. Az anticrossing egyenlete:

$$\Delta f_{P2} = \frac{D^2 \epsilon_{P2}^2 (f_{P4} - f_{Q2})}{y_0 - f_{P4}} + x_0 + C \epsilon_{P2}^2 (f_{P4} - f_{Q2}), \quad (54)$$

ahol a C és D paraméterek:

$$C = \frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)(t^2 - \Omega^2)}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}, \quad D = \frac{2U\epsilon t\Omega}{h(U^2 - \epsilon^2)^2}. \quad (55)$$

Az elméleti (54) görbének a mért anticrossingra történő illesztésének eredménye látható az 15 d. ábrán. Az illesztési paraméterek:

$$x_0 = -0.6716 \text{ MHz}, \quad y_0 = 4.2335 \text{ GHz}, \quad t\Omega = 250.78 (\mu\text{eV})^2. \quad (56)$$

8.5. $Q1^{-P2,P4}$ és $Q2^{P4}$ közötti anticrossing (AC2)

Az AC2 anticrossing a másik négygel ellentétben különböző sztatikus elhangoltságon is meg lett mérve, $(vP1, vP2)=(-7, 7)$ mV-tól $(-11, 11)$ mV értékig (18. ábra). Az anticrossing abból a szempontból is kivétel, hogy a 5. ábrán látható módon nagyjából 1.05 GHz érték alatt a P2 elektróda amplitúdója exponenciálisan lecsökken, ez erősen befolyásolja az anticrossing alakját.

Az anticrossingot leíró effektív Floquet-mátrix:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F},\text{eff}} = \begin{pmatrix} hf_{\text{BS},1} & \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1^* & hf_{Q2} + hf_{\text{BS},2} - hf_{P4} & \chi_3 \\ \chi_2^* & \chi_3^* & hf_{Q1} + hf_{\text{BS},3} + hf_{P2} - hf_{P4} \end{pmatrix}, \quad (57)$$

ahol a bázisállapotok rendre $|\downarrow\downarrow, 0, 0\rangle$, $|\downarrow\uparrow, 0, -1\rangle$ és $|\uparrow\downarrow, 1, -1\rangle$. A χ_1 , χ_2 és χ_3 mátrixelemek:

$$\chi_1 = \frac{2\epsilon_{P4}U\epsilon\Omega e^{-i\phi\Omega}te^{-i\phi t}}{(U^2 - \epsilon^2)^2}, \quad \chi_2 = -\frac{\epsilon_{P4}\epsilon_{P2}(U^3 + 3U\epsilon^2)\Omega e^{-i\phi\Omega}te^{i\phi t}}{(U^2 - \epsilon^2)^3}, \quad \chi_3 = \frac{2\epsilon_{P2}U\epsilon(t e^{i\phi t})^2}{(U^2 - \epsilon^2)^2}. \quad (58)$$

A Bloch-Siegert eltolódások pedig:

$$f_{\text{BS},1} = -\frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)\Omega^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}\epsilon_{P2}^2(f_{P2}), \quad f_{\text{BS},2} = f_{\text{BS},3} = -\frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)t^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}\epsilon_{P2}^2(f_{P2}). \quad (59)$$

Ismét bevezetünk két új paramétert:

$$x_0 = f_{P4} - f_{P2} - f_{Q1}, \quad y_0 = f_{Q2}, \quad (60)$$

ezeket felhasználva, illetve az effektív Floquet-mátrix diagonálelemeit $-hf_{\text{BS},1}$ -el eltolva kapjuk, hogy a rezonancia feltétele:

$$\det \begin{pmatrix} hy_0 - hf_{P4} + hf_{\text{BS}} & \chi_3 \\ \chi_3^* & h\Delta f_{P2} - hx_0 + hf_{\text{BS}} \end{pmatrix} = 0, \quad (61)$$

ahol $f_{\text{BS}} = f_{\text{BS},2} - f_{\text{BS},1}$ a Bloch-Siegert eltolódások különbsége. Az anticrossing egyenlete:

$$\Delta f_{P2} = \frac{D^2\epsilon_{P2}^2(f_{P4} - f_{Q1})}{y_0 - f_{P4} - C\epsilon_{P2}^2(f_{P4} - f_{Q1})} + x_0 + C\epsilon_{P2}^2(f_{P4} - f_{Q1}), \quad (62)$$

ahol a C és D paraméterek pedig:

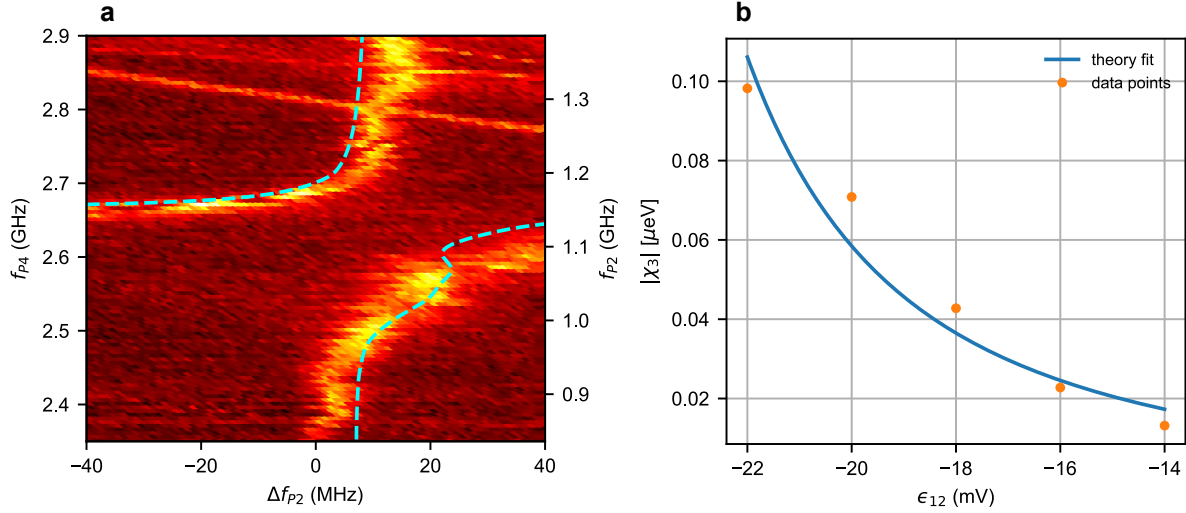
$$C = \frac{U(U^2 + 3\epsilon^2)(t^2 - \Omega^2)}{h(U^2 - \epsilon^2)^3}, \quad D = \frac{2U\epsilon t^2}{h(U^2 - \epsilon^2)^2}. \quad (63)$$

A számolt (62) elméleti görbét az öt különböző elhangoltságnál mért anticrossingokra illesztettük. Az illesztés eredménye látható a 16. ábrán a $(vP1, vP2)=(-11, 11)$ mV esetben, az illesztési paraméterek az öt különböző elhangoltság esetén pedig a 3. táblázatba vannak foglalva.

$(vP1, vP2)$ (mV)	x_0 (MHz)	y_0 (GHz)	t (μeV)
$(-7, 7)$	-7.420	2.617	14.99
$(-8, 8)$	-5.585	2.628	16.54
$(-9, 9)$	-0.899	2.644	18.59
$(-10, 10)$	6.574	2.652	18.91
$(-11, 11)$	7.035	2.666	16.53

3. táblázat. AC2 anticrossing illesztési paraméterei különböző elhangoltság mellett.

Az anticrossing méretét konstans gerjesztési amplitúdó esetén a $|\chi_3|$ paraméter írja le. A különböző elhangoltságoknál mért anticrossingok illesztési t paraméteréből kiszámolhatunk egy $|\chi_3|$ mennyiséget, mely az ϵ elhangoltságtól az (58) egyenlet szerint függ. Az illesztési paraméterekből számolt értékekre illesztettük az elméleti (58) összefüggést, az illesztés eredménye látható a 16. ábrán, az illesztésből kapott átlagos t érték pedig $t = 17.2 \mu\text{eV}$.



16. ábra. **Az AC2 anticrossing elhangoltságtól való függése.** a. A mért AC2 anticrossing $\epsilon_{12} = -22$ mV érték mellett. Kék szaggatott vonallal látható az illesztett elméleti (62) görbe. b. A számolt $|\chi_3|$ értékek konstans gerjesztést véve ($\epsilon_{P2}(f_{P2} = 1.1 \text{ GHz})$), mint az ϵ_{12} függvénye. Az adatpontokra az elméleti (58) görbe lett illesztve.

A modellben egyetlen t és Ω paraméter szerepel, amely nem függ az elhangoltságtól. Emiatt a különböző elhangoltságok mellett illesztett különböző anticrossingok elviekben ugyanazt a t és Ω paramétert kellene adják. Ezek a t és Ω paraméterek megtalálhatóak a 4. táblázatban. A kapott értékek viszonylag közeliek, de nem elhanyagolható a szórásuk.

Anticrossing	ϵ_{12} (mV)	t (μeV)	Ω (μeV)
AC1	-20	20.42	17.19
AC2	-22	16.53	12.32
AC2	-20	18.91	15.37
AC2	-18	18.59	14.98
AC2	-16	16.54	12.34
AC2	-14	14.99	10.18
AC3	-20	17.85	14.05
AC4	-20	17.77	13.95
AC5	-20	21.26	18.18

4. táblázat. **Az illesztésekből számolt t és Ω alagutazási paraméterek.** A spektrum illesztéséből kapott t és Ω közötti összefüggés (13), illetve az anticrossingok illesztéséből meghatározhatóak a t és Ω értékek.

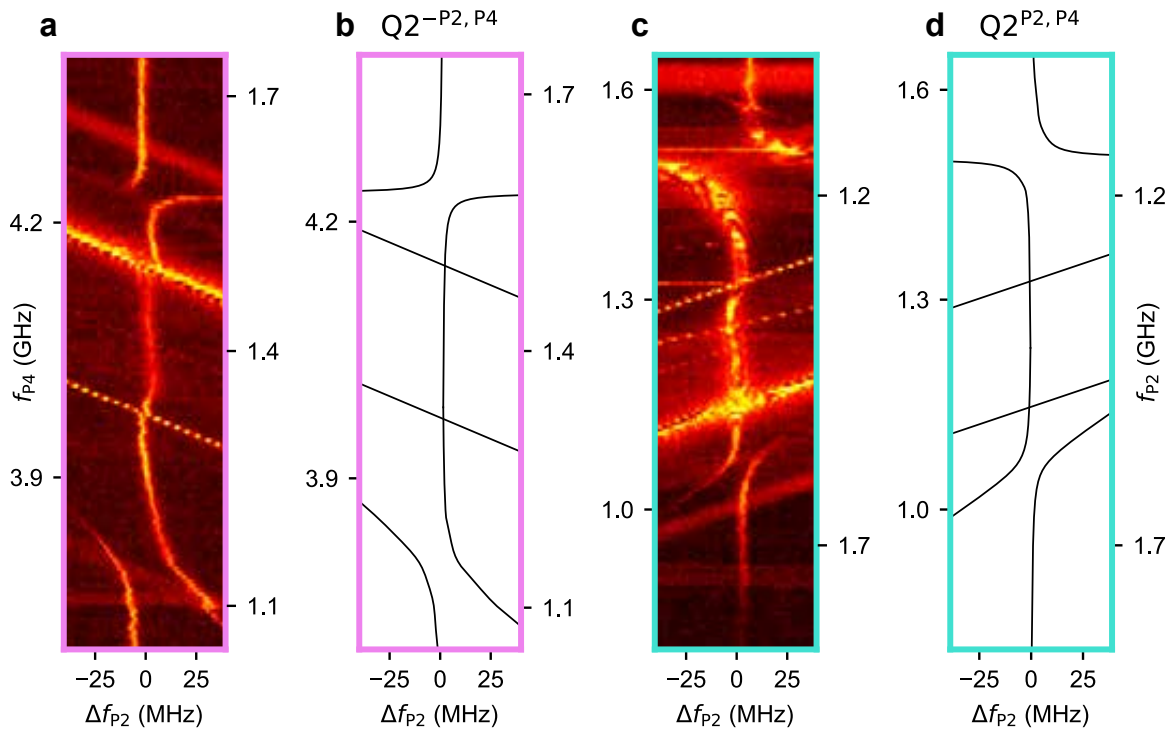
A kapott értékek eltérése magyarázható azzal, hogy valójában a t és Ω értékek is függhetnek az elhangoltságtól, azonban a mérésnél használt intervallumban ez a függés a

kapott értékek alapján nem túl jelentős. Egy másik magyarázat az, hogy az illesztésből származó t és Ω értékeknek hibájuk van, azonban ezeket a hibákat nehéz megbecsülni, ezért itt nem is tesszük ezt meg. Helyette a kapott értékek átlagával dolgozunk tovább, a hibát pedig az értékek szórásával becsültük. Ezek az átlagos értékek megtalálhatóak az 5. táblázatban.

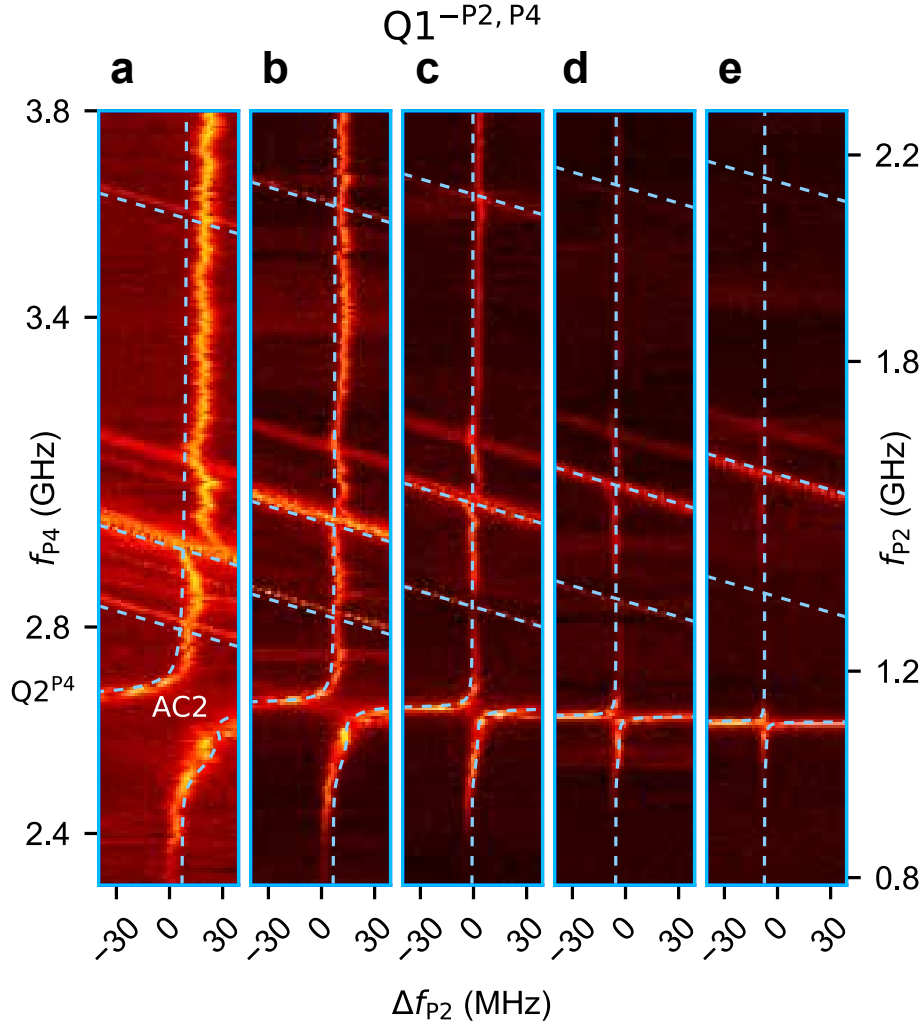
Átlagos t [μeV]	Átlagos Ω [μeV]
18.1 ± 1.9	14.3 ± 2.4

5. táblázat. **Átlagos alagutazási paraméterek.** Felhasználva a különböző anticrossingok illesztéséből kapott értékeket a 4. táblázatból, egy átlagos t és Ω értéket lehet számolni.

Az átlagos t és Ω paramétereket használva megmagyarázhatjuk a főbb kísérleti megfigyeléseket. A P2 elektróda által vezérelt monokromatikus Rabi-frekvenciákat sikeresen visszkapjuk (1. táblázat), illetve az anticrossingok görbéit is jól leírja az elhangoltság modulációja (17. ábra). A különböző elhangoltság mellett az AC2 anticrossing elméleti görbéi (18. ábra) is visszaadják azt a kísérleti megfigyelést, hogy minél nagyobb az elhangoltság, annál nagyobb az anticrossing mérete. A P4 által vezérelt monokromatikus, illetve a bikromatikus oszcillációk megértéséhez az elmélet kiterjesztésére van szükség, amelyet a következő fejezetben tárgyalunk.



17. ábra. **Anticrossingok és a számolt elméleti görbék.** **a.** A $Q2^{-P2,P4}$ bikromatikus rezonancia mentén kialakuló mért anticrossingok. **b.** A $Q2^{-P2,P4}$ átmenet mentén kialakuló anticrossingok elméleti görbéi. **c.** A $Q2^{P2,P4}$ átmenet mentén kialakuló mért anticrossingok. **d.** A $Q2^{P2,P4}$ rezonancia mentén kialakuló anticrossingok elméleti görbéi. Az elméleti görbék számolása során az átlagos alagutazási paraméterek (5. táblázat) lettek felhasználva.



18. ábra. Az AC2 anticrossing elhangoltságtól való függése. A mérési adatokra az átlagos alagutazási paraméterek (5. táblázat) felhasználásával számolt elméleti görbe látható kék szaggatott vonallal. Az ϵ_{12} értéke -22 mV-tól (a. panel) -14 mV-ig változik (e. panel).

9. A modell kiterjesztése g -tenzor modulációval

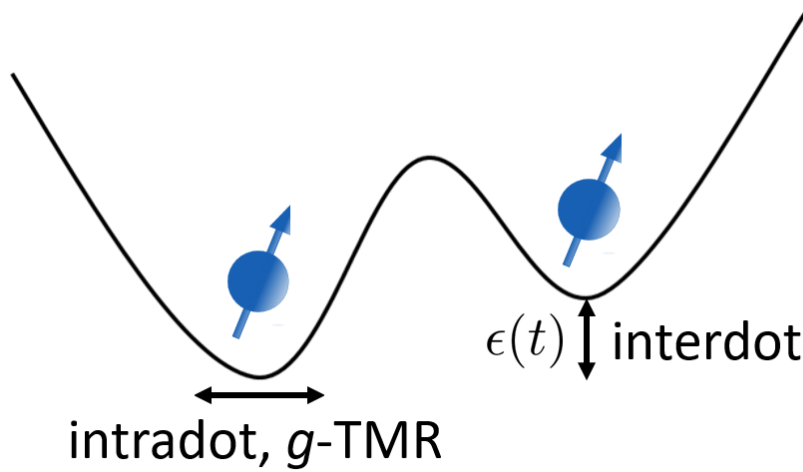
A kísérleti megfigyelések, amelyeket az elhangoltság modulációja önmagában nem tud megmagyarázni, a P4 elektródával való gerjesztéssel állnak kapcsolatban.

A monokromatikus $Q1^{P4}$ átmenet frekvenciája kettes szorzóval eltér a $Q1_{P4}$ frekvenciájától (1. táblázat), vagyis a spinfordítás frekvenciája jelentősen függ a másik spin állapotától.

A különböző bikromatikus átmenetek frekvenciái is jelentősen eltérnek egymástól (1. táblázat), illetve akár egy nagyságrenddel nagyobbak, mint az elhangoltság modulációja alapján várt érték.

Ezen hiányosságok ellenére az elhangoltság modulációján alapuló modell sikeresen megmagyarázta a rendszer spektrumát és a megfigyelt anticrossingokat, hiszen ezekhez elég volt az, hogy a modellünk jól leírja a P2 általi vezérlést (1. táblázat). A modell egyszerűségének köszönhetően a kísérleti adatok illesztéséből meghatároztuk az U Coulomb-energiát, a g -faktorokat, illetve a t és Ω alagutazási paramétereket. Ha a P4-el történő vezérlést is meg szeretnénk érteni, akkor további paramétereket kell bevezetni, amelynek az a következménye, hogy nem leszünk képesek az elméletet a mérési adatokra illeszteni

a paraméterek túl nagy száma miatt. Emiatt elméleti jelleggel írjuk le a vezérlést a két effektus jelenlétében.



19. ábra. Elhangoltság moduláció és g -tenzor moduláció (g -TMR) összehasonlítása. Az elhangoltság modulációja egy interdot, míg a g -TMR egy intradot effektus.

A 19. ábrán látható a két vezérlési mechanizmus vázlatos rajza. Az elhangoltság modulációja egy interdot (kvantumdotok közötti) effektus, ezzel szemben a g -TMR egy intradot (kvantumdoton belüli) effektus. A két effektust elképzelhetjük úgy, hogy az elhangoltság modulációja a kvantumdotok bezáró potenciáljainak alakját nem változtatja, csak az elhangoltságot, viszont a g -TMR a potenciál alakját változtatja. Az elhangoltság modulációján alapuló vezérlés a (2,0) és (0,2) állapotokon keresztül történik, ezzel szemben a g -TMR közvetlen spinfordítást tesz lehetővé.

A közvetlen spinfordítást a következő új taggal vehetjük figyelembe a Hamilton-operátorban:

$$\delta H(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_R(t) + iy_R(t) & x_L(t) - iy_L(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_L(t) + iy_L(t) & x_R(t) - iy_R(t) & 0 & 0 \\ x_R(t) - iy_R(t) & x_L(t) - iy_L(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_L(t) + iy_L(t) & x_R(t) + iy_R(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (64)$$

ahol az x_R , y_R , x_L és y_L paraméterek valósak. Ezeket ki lehet fejezni az elektromos gerjesztésekkel:

$$x_R(t) = c_{R,2}\epsilon_{P2} \cos \omega_2 t + c_{R,4}\epsilon_{P4} \cos \omega_4 t, \quad (65)$$

$$x_L(t) = c_{L,2}\epsilon_{P2} \cos \omega_2 t + c_{L,4}\epsilon_{P4} \cos \omega_4 t, \quad (66)$$

$$y_R(t) = d_{R,2}\epsilon_{P2} \cos \omega_2 t + d_{R,4}\epsilon_{P4} \cos \omega_4 t, \quad (67)$$

$$y_L(t) = d_{L,2}\epsilon_{P2} \cos \omega_2 t + d_{L,4}\epsilon_{P4} \cos \omega_4 t. \quad (68)$$

Célszerű a paramétereket amplitúdókkal és fázisokkal írni:

$$c_{R2} + id_{R2} = a_{R2}e^{i\phi_{R2}}, \quad c_{L2} + id_{L2} = a_{L2}e^{i\phi_{L2}}, \quad (69)$$

$$c_{R4} + id_{R4} = a_{R4}e^{i\phi_{R4}}, \quad c_{L4} + id_{L4} = a_{L4}e^{i\phi_{L4}}, \quad (70)$$

ahol az amplitúdók pozitívak és a fázisok 0 és 2π közötti számok. Ezeket felhasználva a teljes Hamilton-operátor a következő alakban írható:

$$H(t) = H_0 + V_2(t) + V_4(t), \quad (71)$$

ahol H_0 a sztatikus tag, $V_2(t)$ és $V_4(t)$ írják le a P2 és P4 elektródák által okozott gerjesztést. A H_0 a következő alakban írható:

$$H_0 = \begin{pmatrix} -\hbar\delta\omega_z & 0 & 0 & 0 & -te^{-i\phi_t} & -te^{-i\phi_t} \\ 0 & \hbar\delta\omega_z & 0 & 0 & te^{i\phi_t} & te^{i\phi_t} \\ 0 & 0 & \hbar\omega_z & 0 & -\Omega e^{i\phi_\Omega} & -\Omega e^{i\phi_\Omega} \\ 0 & 0 & 0 & -\hbar\omega_z & -\Omega e^{-i\phi_\Omega} & -\Omega e^{-i\phi_\Omega} \\ -te^{i\phi_t} & te^{-i\phi_t} & -\Omega e^{-i\phi_\Omega} & -\Omega e^{i\phi_\Omega} & U - \epsilon & 0 \\ -te^{i\phi_t} & te^{-i\phi_t} & -\Omega e^{-i\phi_\Omega} & -\Omega e^{i\phi_\Omega} & 0 & U + \epsilon \end{pmatrix}, \quad (72)$$

ahol ϵ a sztatikus, nem modulált elhangoltság. A $V_2(t)$ és $V_4(t)$ mátrixok:

$$V_2(t) = \begin{pmatrix} -A_2 & 0 & a_{R2}e^{i\phi_{R2}} & a_{L2}e^{-i\phi_{L2}} & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & a_{L2}e^{i\phi_{L2}} & a_{R2}e^{-i\phi_{R2}} & 0 & 0 \\ a_{R2}e^{-i\phi_{R2}} & a_{L2}e^{-i\phi_{L2}} & B_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_{L2}e^{i\phi_{L2}} & a_{R2}e^{i\phi_{R2}} & 0 & -B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon_{P2} \cos \omega_2 t, \quad (73)$$

$$V_4(t) = \begin{pmatrix} -A_4 & 0 & a_{R4}e^{i\phi_{R4}} & a_{L4}e^{-i\phi_{L4}} & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & a_{L4}e^{i\phi_{L4}} & a_{R4}e^{-i\phi_{R4}} & 0 & 0 \\ a_{R4}e^{-i\phi_{R4}} & a_{L4}e^{-i\phi_{L4}} & B_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_{L4}e^{i\phi_{L4}} & a_{R4}e^{i\phi_{R4}} & 0 & -B_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon_{P4} \cos \omega_4 t, \quad (74)$$

ahol bevezettük az A_2 , A_4 , B_2 és B_4 paramétereket, amelyek a g -faktorok modulációját írják le.

A kiterjesztett modellben ugyanazokat a számolási módszereket használhatjuk, mint eddig, vagyis Floquet-elméletet és Schrieffer-Wolff transzformációt. A különbség annyi, hogy a sok paraméter miatt bonyolultabb formulákat kapunk a Rabi-frekvenciákra.

A számolások során feltesszük, hogy a következő hierarchia áll fenn a paraméterek között:

$$A\epsilon_P \sim B\epsilon_P \sim a\epsilon_P \ll \delta\omega_z \sim \omega_z \sim t \sim \Omega \ll \epsilon_P \ll \epsilon \sim U, \quad (75)$$

ahol A lehet A_2 , A_4 , B lehet B_2 , B_4 , a lehet a_{L2} , a_{L4} , a_{R2} és a_{R4} , ϵ_P lehet ϵ_{P2} és ϵ_{P4} . Ezekkel a feltevésekkel a sok perturbatív tagból, amely a számolás során megjelenik kiválaszthatjuk a vezető rendűeket.

9.1. Monokromatikus oszcillációk

Vezető rendben a monokromatikus oszcillációk frekvenciái az elhangoltság modulációjából és a g -TMR-ből állnak, a két effektus interferenciájából adódó tagok magasabb rendűek. A Rabi-frekvencia a 2×2 -es effektív Floquet-mátrix offdiagonális eleméből kapható, a frekvencia a mátrixelem kétszeresének abszolút értéke. Jelöljük a komplex mátrixelem kétszeresét $\tilde{f}$ -el, míg ennek az abszolút értékét f -el.

A $Q1^{P4}$ átmenethez tartozó frekvencia vezető rendben:

$$h\tilde{f}_{Q1^{P4}} = e^{i\phi_{L4}} a_{L4} \epsilon_{P4} - 4e^{i(\phi_t - \phi_\Omega)} \frac{U\epsilon t \Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2} \epsilon_{P4}. \quad (76)$$

Ehhez képest a $Q1_{-P4}$ átmenet frekvenciája:

$$h\tilde{f}_{Q1_{-P4}} = e^{-i\phi_{L4}} a_{L4}\epsilon_{P4} + 4e^{-i(\phi_t - \phi_\Omega)} \frac{U\epsilon t\Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2} \epsilon_{P4} \quad (77)$$

Az ezekhez tartozó abszolút értékek:

$$hf_{Q1^{P4}} = \sqrt{\left(a_{L4} - \frac{4U\epsilon t\Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2} \cos \varphi_1\right)^2 + \left(\frac{4U\epsilon t\Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2}\right)^2 \sin^2 \varphi_1} \cdot \epsilon_{P4}, \quad (78)$$

$$hf_{Q1_{-P4}} = \sqrt{\left(a_{L4} + \frac{4U\epsilon t\Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2} \cos \varphi_1\right)^2 + \left(\frac{4U\epsilon t\Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2}\right)^2 \sin^2 \varphi_1} \cdot \epsilon_{P4}, \quad (79)$$

ahol $\varphi_1 = \phi_t - \phi_\Omega - \phi_{L4}$. Hasonlóan a $Q2^{P4}$ és $Q2_{-P4}$ átmenetekre kapjuk, hogy:

$$h\tilde{f}_{Q2^{P4}} = e^{i\phi_{R4}} a_{R4}\epsilon_{P4} + 4e^{-i(\phi_t + \phi_\Omega)} \frac{U\epsilon t\Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2} \epsilon_{P4}, \quad (80)$$

$$h\tilde{f}_{Q2_{-P4}} = e^{-i\phi_{R4}} a_{R4}\epsilon_{P4} - 4e^{i(\phi_t + \phi_\Omega)} \frac{U\epsilon t\Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2} \epsilon_{P4}. \quad (81)$$

Az abszolút értékek pedig:

$$hf_{Q2^{P4}} = \sqrt{\left(a_{R4} + \frac{4U\epsilon t\Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2} \cos \varphi_2\right)^2 + \left(\frac{4U\epsilon t\Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2}\right)^2 \sin^2 \varphi_2} \cdot \epsilon_{P4}, \quad (82)$$

$$hf_{Q2_{-P4}} = \sqrt{\left(a_{R4} - \frac{4U\epsilon t\Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2} \cos \varphi_2\right)^2 + \left(\frac{4U\epsilon t\Omega}{(U^2 - \epsilon^2)^2}\right)^2 \sin^2 \varphi_2} \cdot \epsilon_{P4}, \quad (83)$$

ahol $\varphi_2 = \phi_t + \phi_\Omega + \phi_{R4}$.

A (76) és (77) egyenletekben megjelenő első tag a g -TMR, a második tag az elhangolság modulációjának a járuléka. Ezek külön-külön ugyanakkora Rabi-frekvenciához vezetnek, viszont ha mindkettő egyszerre van jelen, akkor a különböző átmenetek esetén különböző módon interferálnak. Így a két effektus együttese megmagyarázhatja a kapott kísérleti eredményt (1. táblázat).

A teljes monokromatikus Rabi-frekvenciák megtalálhatóak a függelék A. szekciójában.

A bikromatikus frekvenciák formuláinak bonyolultsága miatt ezentúl konkrét paraméterekkel is kiszámoljuk a mennyiségeket. A használt paraméterek:

$\epsilon_{P2} = 100 \mu\text{eV}$, $\epsilon_{P4} = 100 \mu\text{eV}$, $U = 2500 \mu\text{eV}$, $\epsilon = 1800 \mu\text{eV}$, $\hbar\omega_z = 10 \mu\text{eV}$, $\hbar\delta\omega_z = 4 \mu\text{eV}$, $t = 20 \mu\text{eV}$, $\Omega = 15 \mu\text{eV}$, $a_{L2}\epsilon_{P4} = 0.025 \mu\text{eV}$, $a_{L4}\epsilon_{P4} = 0.04 \mu\text{eV}$, $a_{R2}\epsilon_{P4} = 0.05 \mu\text{eV}$, $a_{R4}\epsilon_{P4} = 0.025 \mu\text{eV}$, $A_2\epsilon_{P4} = 0.125 \mu\text{eV}$, $B_2\epsilon_{P4} = 0.175 \mu\text{eV}$, $A_4\epsilon_{P4} = 0.125 \mu\text{eV}$, $B_4\epsilon_{P4} = 0.175 \mu\text{eV}$, $\phi_t = 0.2$, $\phi_\Omega = 1.7$, $\phi_{L2} = 1.2$, $\phi_{R2} = 2.2$, $\phi_{L4} = 1.1$ és $\phi_{R4} = 2.2$. A g -TMR miatt bevezetett paraméterek konkrét értékei úgy lettek megválasztva, hogy a belőlük számolt frekvenciák tükrözzék a kísérletben megfigyelt effektusokat, de ezt leszámítva a paraméterek választása véletlenszerű volt.

A választott paraméterekkel a monokromatikus Rabi-frekvenciákra a következő eredmények adódnak: $f_{Q1^{P4}} = 23.24 \text{ MHz}$, $f_{Q1_{-P4}} = 7.90 \text{ MHz}$, $f_{Q2^{P4}} = 18.56 \text{ MHz}$ és $f_{Q2_{-P4}} = 12.00 \text{ MHz}$.

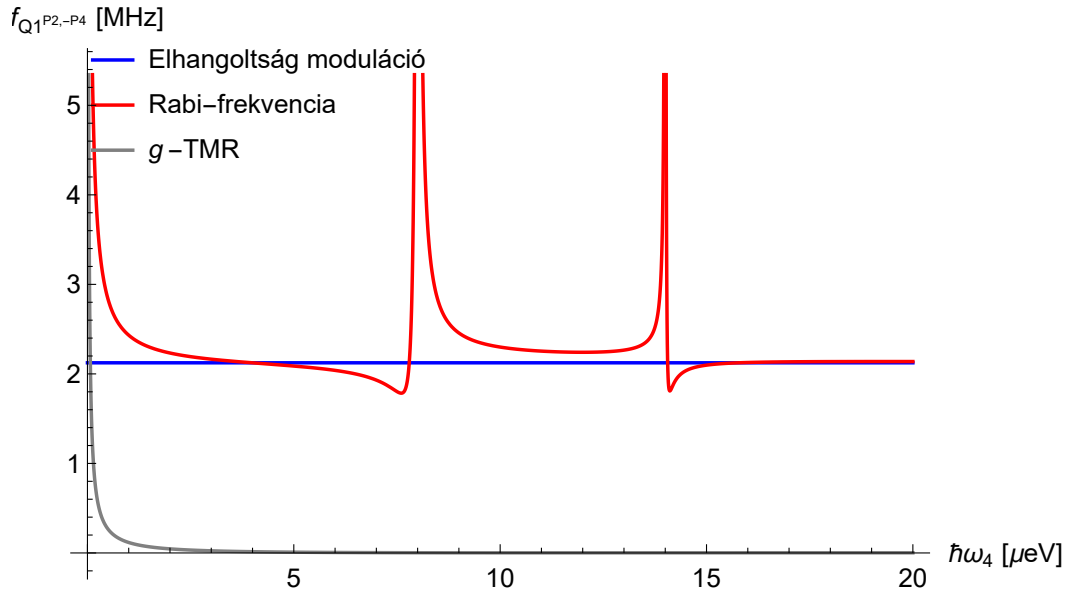
9.2. Bikromatikus oszcillációk

A bikromatikus formulák vezető tagjai megtalálhatóak a függelék B alfejezetében.

A 20. ábrán látható a $Q1^{P2,-P4}$ átmenethez tartozó Rabi-frekvencia az ω_4 vezérlő frekvencia függvényében. Az ω_2 úgy van beállítva, hogy a rezonanciafeltétel teljesüljön, vagyis $\omega_2 - \omega_4 = f_{Q1}$. Szürkével és kékkel láthatóak a tisztán g -tenzor modulációból és elhangoltság modulációból származó frekvenciák.

Az elhangoltság modulációjából eredő járulék nem függ a vezérlő frekvenciától, hiszen a vezérlés a (0,2) és (2,0) állapotokon keresztül történik. Ezzel szemben a g -tenzor modulációja $\omega_4 = 0$ közelében függ lényegesen a vezérlő frekvenciától, ettől távol elhanyagolható. Az $\omega_4 \approx 0$ feltétel a bikromatikus vezérlés helyett egy P2-vel történő monokromatikus vezérlés.

Ha mindkét effektus egyszerre van jelen (20. ábra piros görbéje), akkor a két effektus interferenciája mellett kevert tagok is megjelennek a perturbatív számolásban. A vezető rendű kevert tagok megtalálhatóak a függelék B. alfejezetében. Ezek a tagok pontosan egy olyan mátrixelemet tartalmaznak, amely összecsatolja az (1,1) töltés konfigurációval rendelkező állapotokat. Ez a mátrixelem lehet spinfordítás (a_{L2} , a_{L4} , a_{R2} vagy a_{R4}) vagy nem spinfordítás (A_2 , A_4 , B_2 vagy B_4). Többnyire azok a bikromatikus átmenetek az érdekesek a kvantumszámítás szempontjából, amikor a két spin közül csak az egyiket fordítjuk, ekkor az említett mátrixelem ha spinfordítás, akkor a (0,2) és (2,0) átmeneteket az (1,1) töltés konfigurációval rendelkező állapotokkal összekötő mátrixelemek közül két spinfordító alagutazás (Ω^2) vagy két spintartó alagutazás (t^2) jelenik meg. Abban az esetben, ha a g -tenzor modulációból jövő mátrixelem nem spinfordítás, az alagutazási mátrixelemek közül az egyik spinfordító, a másik spintartó kell legyen, vagyis $t\Omega$ -val lesz arányos a járulék.

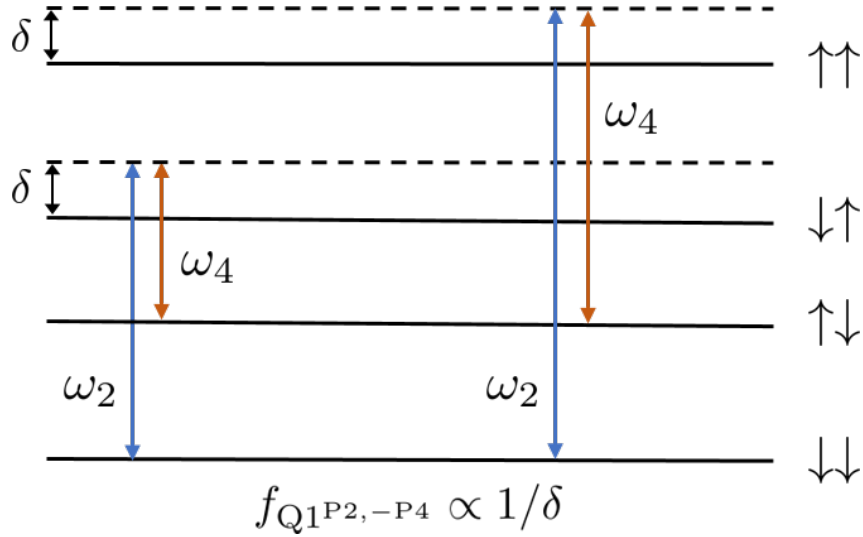


20. ábra. $Q1^{P2,-P4}$ átmenet bikromatikus Rabi-frekvenciája az ω_4 vezérlő frekvencia függvényében. A (90) képlet alapján kiszámolt Rabi-frekvencia látható pirossal, a szürke vonal mutatja a tisztán g -tenzor moduláció, a kék vonal pedig a tisztán elhangoltság moduláció járulékát.

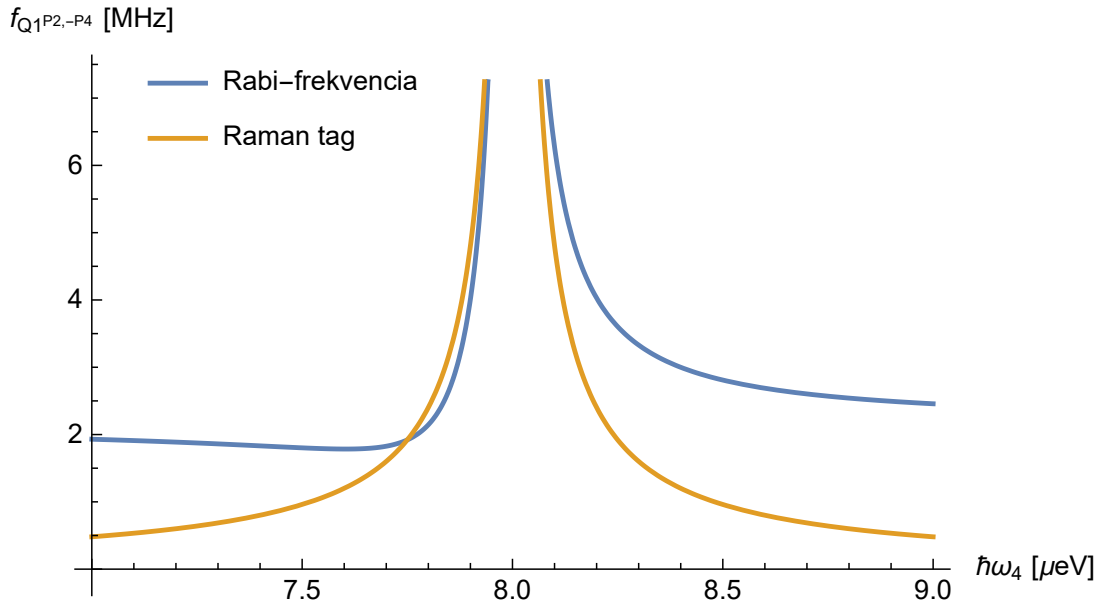
A Rabi-frekvenciát ω_4 függvényében ábrázolva láthatunk három csúcsot a 20. ábrán. Az első a már említett monokromatikus átmenethez tartozik, a másik kettő azonban ún. Raman-folyamatokhoz tartozik, ezt szemlélteti a 21. ábra. A Raman-folyamat azt jelenti, hogy a bikromatikus átmenetet megvalósító virtuális energianívók (az ábrán szaggatott

vonalak) közel vannak egy valódi energiaszinthez, a perturbatív számolás során pedig megjelenik egy olyan tag, amely a virtuális és valódi szint δ távolságának reciprokával arányos. Ha ez a δ érték kicsi, akkor gyors oszcillációkat kapunk.

Természetesen nem kaphatunk tetszőlegesen gyors oszcillációkat, hiszen a perturbatív számolás nem lesz érvényes abban az esetben, ha δ túl kicsi. Ekkor a Schrieffer-Wolff transzformáció nem alkalmazható egy kétdimenziós altérre, hanem egy háromdimenziós altéren kell számolni, hasonlóan az anticrossingokhoz. Túl kis δ esetén a virtuális nívó is populálódhat.



21. ábra. A g -TMR és az elhangoltság modulációjának interferenciájából megjelenő Raman-folyamat. Az első a 20. ábrán $8 \mu\text{eV}$ -nál, a második pedig a $14 \mu\text{eV}$ -nál megjelenő csúcs.



22. ábra. **Raman-folyamat.** A Raman-folyamat közelében mutatja a Rabi-frekvenciát (90. egyenlet, kék görbe) összehasonlítva a folyamatot okozó domináns taggal (84. egyenlet, narancssárga görbe).

A Raman-folyamat nem jelenik meg tisztán g -tenzor moduláció vagy elhangoltság moduláció esetén. Előbbinél csak egy gyenge, magasabbrendű folyamat lenne a Raman,

hiszen az dupla spinfordítást igényel (a 21. ábrán az első esetben $\downarrow\uparrow\downarrow$, a második esetben $\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow$ átmenet). Az elhangoltság modulációnál azért nem lehetséges a Raman-folyamat, mert a vezérlés a (0,2) és (2,0) állapotokon keresztül történik.

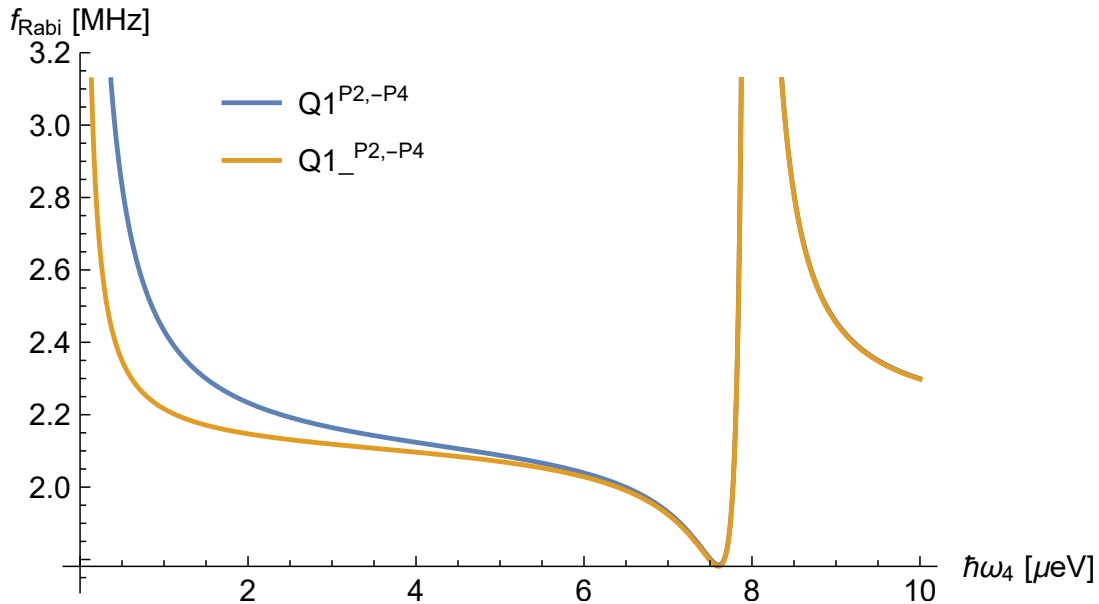
A Raman-folyamathoz hozzájáruló tag a $Q1^{P2,-P4}$ átmenetnél:

$$h\tilde{f}_{Q1^{P2,-P4}}^{(\text{Raman},1)} = \frac{2e^{i(\phi_{R2}+2\phi_t)}t^2U\epsilon a_{R2}\epsilon_{P2}\epsilon_{P4}}{\hbar(\omega_4 - 2\delta\omega_z)(U^2 - \epsilon^2)^2}. \quad (84)$$

Látható, hogy $\omega_4 = 2\delta\omega_z$ esetén a nevező nulla, vagyis tényleg Raman-folyamatot kapunk. Ez a járulék (84. egyenlet) látható összehasonlítva a bikromatikus frekvenciával (90. egyenlet) a 22. ábrán.

A másik lehetséges Raman-folyamatot okozó tag:

$$h\tilde{f}_{Q1^{P2,-P4}}^{(\text{Raman},2)} = \frac{2e^{-i(\phi_{R4}+2\phi_\Omega)}\Omega^2U\epsilon a_{R2}\epsilon_{P2}\epsilon_{P4}}{\hbar(\omega_z + \delta\omega_z - \omega_4)(U^2 - \epsilon^2)^2}. \quad (85)$$



23. ábra. A $Q1^{P2,-P4}$ és $Q1_{-}^{P2,-P4}$ átmenetek Rabi-frekvenciáinak összehasonlítása az ω_4 függvényében. A (90) és (91) formulák lettek kiértékelve különböző ω_4 frekvenciák mellett.

A 23. ábrán vannak összehasonlítva a $Q1^{P2,-P4}$ és $Q1_{-}^{P2,-P4}$ bikromatikus átmenetek frekvenciái az ω_4 gerjesztő frekvencia függvényében. A különbség csak alacsonyabb frekvenciákon jelentős.

A $Q2^{P2,-P4}$ és $Q2_{-}^{P2,-P4}$ átmenetek Rabi-frekvenciái (a vezető tagok) megtalálhatóak a függelék B. szekciójában. Hasonlóan vizsgálható a $(Q1 + Q2_{-})^{P2,-P4}$ bikromatikus átmenet, azonban a kettős spinfordítás az alkalmazások szempontjából kevésbé lényeges, ezért a dolgozatban ezzel nem foglalkozunk.

10. Összegzés

A dolgozatban germánium lyukakon alapuló spin qubitek bikromatikus vezérlésének első kísérleti demonstrációját megmagyarázó elméletünket mutattuk be. Az elméleti munka a delfti Veldhorst kísérleti csoporttal közös kollaboráció része volt, az eredményekből egy kézirat készült [7], amely publikálása elfogadásra került a Physical Review Letters folyóiratban.

A bikromatikus vezérlés motivációja az utóbbi pár évben felmerült skálázhatósági probléma, mely szerint négyzetrácsos architektúra szükséges ahhoz, hogy a vezérlő elektrodák száma kezelhető maradjon. A megszokott monokromatikus vezérlés egy négyzetrácsos architektúrában több extra művelet beiktatását teszi szükségessé, erre jelenthet alternatívát a bikromatikus vezérlés, mely lehetővé teszi a szelektív vezérlést és az egyqubit műveletek párhuzamosítását.

A Veldhorst csoport egy négyqubitese germánium kvantumprocesszor két kvantumbitjét vezérelte bikromatikus. Egy egyszerű Hamilton-operátorral modelleztük a kettős kvantumdotot, a vezérlési mechanizmus az elhangoltság modulációja volt. A kísérleti spektrumot a modellünkre illesztve meghatároztuk a Coulomb-kölcsönhatás mértékét illetve a g -faktorokat. A kísérletben különböző rezonanciavonalak találkozásánál kialakuló anticrossingokra kvalitatív és kvantitatív magyarázatot adtunk, az anticrossingok illesztéséből meghatároztuk a modellben szereplő alagutazási paramétereket.

Az elmélet azonban nem volt képes leírni a bikromatikus oszcillációk frekvenciáit, hiszen csak az elhangoltság modulációját tartalmazta, g -tenzor modulációt viszont nem. A dolgozat végén bemutattuk az elméletünk kiterjesztését az említett effektus figyelembevételével, ez a kiterjesztett modell nem volt része a munkából írt cikknek, ebben a dolgozatban lett először bemutatva. A kiterjesztett modell megmagyarázza a $Q1^{P4}$ és $Q1_{-}^{P4}$ monokromatikus átmenetek frekvenciái között tapasztalt jelentős eltérést, illetve a bikromatikus átmenetekre kapott eltérő értékeket is megmagyarázhatja. A kiterjesztett elmélet kísérleti adatokra történő illesztése nem volt megoldható a túl sok ismeretlen paraméter miatt.

A skálázhatóság szempontjából érdekes bikromatikus vezérlés megértéséhez fontos lépést jelent ez a dolgozat, azonban az alkalmazásokhoz további vizsgálatokra van szükség, például a töltésaj szerepének megértésére, a bikromatikus oszcillációk jóságának és sebességének optimalizálására.

11. Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, **Széchenyi Gábornak**, illetve **Pályi Andrásnak**, hogy részt vehettem ebben a szórakoztató kutatásban, az elméleti munkában nyújtott sok segítségüket és iránymutatásukat. Köszönöm az együttműködést a Veldhorst csoportnak, kiváltképp **Valentin John**, **Francesco Borsoi**, **Chien-An Wang** és **Menno Veldhorst** munkáját.

Köszönet illeti még **Dávid Gyulát**, hogy az első egyetemi éveim alatt a kötelező órákon túl is sokat tanulhattam tőle.

A kutatást az Innovációs és Technológiai Minisztérium és a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal támogatta a Kvantuminformatika Nemzeti Laboratórium 2022-2.1.1-NL-2022-00004 számú projekt keretében, illetve a Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-23-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

12. Függelék

A. Monokromatikus Rabi-frekvenciák

A monokromatikus Rabi-frekvenciák teljes formulái:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{Q1^{P4}} = & \epsilon_{P4} \left(a_{L4} e^{i\phi_{L4}} - \frac{t^2 U a_{R4} e^{i\phi_{R4} + 2i\phi_t}}{\hbar(U - \epsilon)(U + \epsilon)\delta\omega_z} + \frac{U\Omega^2 a_{R4} e^{-i\phi_{R4} - 2i\phi_\Omega}}{\hbar(U - \epsilon)(U + \epsilon)\omega_z} - \frac{A_4 t \Omega e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{\hbar(U - \epsilon)(\omega_z - \delta\omega_z)} + \right. \\ & - \frac{A_4 t \Omega e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{\hbar(U + \epsilon)(\omega_z - \delta\omega_z)} + \frac{B_4 t \Omega e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{\hbar(U - \epsilon)(\omega_z - \delta\omega_z)} + \frac{B_4 t \Omega e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{\hbar(U + \epsilon)(\omega_z - \delta\omega_z)} - \frac{t\Omega e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{(U - \epsilon)^2} + \\ & \left. + \frac{t\Omega e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{(U + \epsilon)^2} \right). \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{Q1_{-}^{P4}} = & \epsilon_{P4} \left(a_{L4} e^{-i\phi_{L4}} + \frac{t^2 U a_{R4} e^{-i\phi_{R4} - 2i\phi_t}}{\hbar(U - \epsilon)(U + \epsilon)\delta\omega_z} - \frac{U\Omega^2 a_{R4} e^{i\phi_{R4} + 2i\phi_\Omega}}{\hbar(U - \epsilon)(U + \epsilon)\omega_z} + \frac{A_4 t \Omega e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{\hbar(U - \epsilon)(\omega_z - \delta\omega_z)} + \right. \\ & + \frac{A_4 t \Omega e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{\hbar(U + \epsilon)(\omega_z - \delta\omega_z)} - \frac{B_4 t \Omega e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{\hbar(U - \epsilon)(\omega_z - \delta\omega_z)} - \frac{B_4 t \Omega e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{\hbar(U + \epsilon)(\omega_z - \delta\omega_z)} + \frac{t\Omega e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{(U - \epsilon)^2} + \\ & \left. - \frac{t\Omega e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{(U + \epsilon)^2} \right). \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{Q2^{P4}} = & \epsilon_{P4} \left(\frac{t^2 U a_{L4} e^{i\phi_{L4} - 2i\phi_t}}{\hbar(U - \epsilon)(U + \epsilon)\delta\omega_z} + \frac{U\Omega^2 a_{L4} e^{-i\phi_{L4} - 2i\phi_\Omega}}{\hbar(U - \epsilon)(U + \epsilon)\omega_z} + a_{R4} e^{i\phi_{R4}} - \frac{A_4 t \Omega e^{-i\phi_t - i\phi_\Omega}}{\hbar(U - \epsilon)(\delta\omega_z + \omega_z)} + \right. \\ & - \frac{A_4 t \Omega e^{-i\phi_t - i\phi_\Omega}}{\hbar(U + \epsilon)(\delta\omega_z + \omega_z)} - \frac{B_4 t \Omega e^{-i\phi_t - i\phi_\Omega}}{\hbar(U - \epsilon)(\delta\omega_z + \omega_z)} - \frac{B_4 t \Omega e^{-i\phi_t - i\phi_\Omega}}{\hbar(U + \epsilon)(\delta\omega_z + \omega_z)} + \frac{t\Omega e^{-i\phi_t - i\phi_\Omega}}{(U - \epsilon)^2} + \\ & \left. - \frac{t\Omega e^{-i\phi_t - i\phi_\Omega}}{(U + \epsilon)^2} \right). \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{Q2_{-}^{P4}} = & \epsilon_{P4} \left(-\frac{t^2 U a_{L4} e^{2i\phi_t - i\phi_{L4}}}{\hbar(U - \epsilon)(U + \epsilon)\delta\omega_z} - \frac{U\Omega^2 a_{L4} e^{i\phi_{L4} + 2i\phi_\Omega}}{\hbar(U - \epsilon)(U + \epsilon)\omega_z} + a_{R4} e^{-i\phi_{R4}} + \frac{A_4 t \Omega e^{i\phi_t + i\phi_\Omega}}{\hbar(U - \epsilon)(\delta\omega_z + \omega_z)} + \right. \\ & + \frac{A_4 t \Omega e^{i\phi_t + i\phi_\Omega}}{\hbar(U + \epsilon)(\delta\omega_z + \omega_z)} + \frac{B_4 t \Omega e^{i\phi_t + i\phi_\Omega}}{\hbar(U - \epsilon)(\delta\omega_z + \omega_z)} + \frac{B_4 t \Omega e^{i\phi_t + i\phi_\Omega}}{\hbar(U + \epsilon)(\delta\omega_z + \omega_z)} - \frac{t\Omega e^{i\phi_t + i\phi_\Omega}}{(U - \epsilon)^2} + \\ & \left. + \frac{t\Omega e^{i\phi_t + i\phi_\Omega}}{(U + \epsilon)^2} \right). \end{aligned} \quad (89)$$

B. Bikromatikus Rabi-frekvenciák vezető tagjai

A bikromatikus Rabi-frekvenciák vezető tagjai:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{Q1^{P2}, -P4} = & 2\epsilon_{P2}\epsilon_{P4} \left(\frac{\Omega^2 a_{L2} e^{i\phi_{L2}}}{4(-U - \epsilon)^2 (-\hbar(\omega_4 - \omega_z) - \hbar\omega_z)} - \frac{\Omega^2 a_{L2} e^{i\phi_{L2}}}{4(\epsilon - U)^2 (-\hbar(\omega_4 - \omega_z) - \hbar\omega_z)} + \right. \\
& + \frac{t^2 a_{L2} e^{i\phi_{L2}}}{4(-U - \epsilon)^2 (\hbar(\omega_4 + \omega_z) - \hbar\omega_z)} - \frac{t^2 a_{L2} e^{i\phi_{L2}}}{4(\epsilon - U)^2 (\hbar(\omega_4 + \omega_z) - \hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{t^2 a_{L4} e^{i\phi_{L4}}}{4(-U - \epsilon)^2 (-\hbar(\omega_4 - \delta\omega_z) - \hbar\omega_z)} - \frac{t^2 a_{L4} e^{i\phi_{L4}}}{4(\epsilon - U)^2 (-\hbar(\omega_4 - \delta\omega_z) - \hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{\Omega^2 a_{L4} e^{i\phi_{L4}}}{4(-U - \epsilon)^2 (-\hbar(\delta\omega_z - \omega_4 - 2\omega_z) - \hbar\omega_z)} - \frac{\Omega^2 a_{L4} e^{i\phi_{L4}}}{4(\epsilon - U)^2 (-\hbar(\delta\omega_z - \omega_4 - 2\omega_z) - \hbar\omega_z)} + \\
& - \frac{t^2 a_{R2} e^{i\phi_{R2} + 2i\phi_t}}{4(-U - \epsilon)^2 (-\hbar(2\delta\omega_z - \omega_4 - \omega_z) - \hbar\omega_z)} + \frac{t^2 a_{R2} e^{i\phi_{R2} + 2i\phi_t}}{4(\epsilon - U)^2 (-\hbar(2\delta\omega_z - \omega_4 - \omega_z) - \hbar\omega_z)} + \\
& - \frac{t^2 a_{R4} e^{i\phi_{R4} + 2i\phi_t}}{4(-U - \epsilon)^2 (-\hbar(\delta\omega_z + \omega_4) - \hbar\omega_z)} + \frac{t^2 a_{R4} e^{i\phi_{R4} + 2i\phi_t}}{4(\epsilon - U)^2 (-\hbar(\delta\omega_z + \omega_4) - \hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{t\Omega e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{2(-U - \epsilon)^3} + \frac{t\Omega e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{2(\epsilon - U)^3} - \frac{t\Omega A_2 e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{4(-U - \epsilon)^2 (-\hbar(\omega_4 - \delta\omega_z) - \hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{t\Omega A_2 e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{4(\epsilon - U)^2 (-\hbar(\omega_4 - \delta\omega_z) - \hbar\omega_z)} - \frac{t\Omega B_2 e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{4(-U - \epsilon)^2 (-\hbar(\delta\omega_z - \omega_4 - 2\omega_z) - \hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{t\Omega B_2 e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{4(\epsilon - U)^2 (-\hbar(\delta\omega_z - \omega_4 - 2\omega_z) - \hbar\omega_z)} - \frac{t\Omega B_4 e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{4(-U - \epsilon)^2 (-\hbar(\omega_4 - \omega_z) - \hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{t\Omega B_4 e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{4(\epsilon - U)^2 (-\hbar(\omega_4 - \omega_z) - \hbar\omega_z)} - \frac{t\Omega A_4 e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{4(-U - \epsilon)^2 (\hbar(\omega_4 + \omega_z) - \hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{t\Omega A_4 e^{i\phi_t - i\phi_\Omega}}{4(\epsilon - U)^2 (\hbar(\omega_4 + \omega_z) - \hbar\omega_z)} + \frac{\Omega^2 a_{R2} e^{-i\phi_{R2} - 2i\phi_\Omega}}{4(-U - \epsilon)^2 (-\hbar\omega_z - \hbar(\omega_4 + \omega_z))} + \\
& - \frac{\Omega^2 a_{R2} e^{-i\phi_{R2} - 2i\phi_\Omega}}{4(\epsilon - U)^2 (-\hbar\omega_z - \hbar(\omega_4 + \omega_z))} + \frac{\Omega^2 a_{R4} e^{-i\phi_{R4} - 2i\phi_\Omega}}{4(-U - \epsilon)^2 (-\hbar(\delta\omega_z - \omega_4) - \hbar\omega_z)} + \\
& - \frac{\Omega^2 a_{R4} e^{-i\phi_{R4} - 2i\phi_\Omega}}{4(\epsilon - U)^2 (-\hbar(\delta\omega_z - \omega_4) - \hbar\omega_z)} + \frac{\frac{a_{L4} e^{i\phi_{L4}} (A_2 - B_2)}{-\delta\omega_z + \omega_4 + \omega_z} - \frac{e^{i\phi_{L2}} a_{L2} (A_4 - B_4)}{\omega_4}}{4\hbar} \left. \right). \tag{90}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{Q1_P2,-P4} = & 2\epsilon_{P2}\epsilon_{P4} \left(\frac{\Omega^2 a_{L2} e^{-i\phi_{L2}}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\omega_z - \omega_4))} - \frac{\Omega^2 a_{L2} e^{-i\phi_{L2}}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\omega_z - \omega_4))} + \right. \\
& + \frac{t^2 a_{L2} e^{-i\phi_{L2}}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\omega_4 + \omega_z))} - \frac{t^2 a_{L2} e^{-i\phi_{L2}}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\omega_4 + \omega_z))} + \\
& + \frac{t^2 a_{L4} e^{-i\phi_{L4}}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\delta\omega_z - \omega_4))} - \frac{t^2 a_{L4} e^{-i\phi_{L4}}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\delta\omega_z - \omega_4))} + \\
& + \frac{\Omega^2 a_{L4} e^{-i\phi_{L4}}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(-\delta\omega_z + \omega_4 + 2\omega_z))} - \frac{\Omega^2 a_{L4} e^{-i\phi_{L4}}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(-\delta\omega_z + \omega_4 + 2\omega_z))} + \\
& + \frac{(e^{i\phi_{L2}} a_{L4} (A_2 - B_2) \omega_4 - e^{i\phi_{L4}} a_{L2} (A_4 - B_4) (-\delta\omega_z + \omega_4 + \omega_z)) e^{-i(\phi_{L2} + \phi_{L4})}}{4\hbar\omega_4 (-\delta\omega_z + \omega_4 + \omega_z)} + \\
& - \frac{t^2 a_{R2} e^{-i\phi_{R2} - 2i\phi_t}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(-2\delta\omega_z + \omega_4 + \omega_z))} + \frac{t^2 a_{R2} e^{-i\phi_{R2} - 2i\phi_t}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(-2\delta\omega_z + \omega_4 + \omega_z))} + \\
& - \frac{t^2 a_{R4} e^{-i\phi_{R4} - 2i\phi_t}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar(\delta\omega_z + \omega_4) + \hbar\omega_z)} + \frac{t^2 a_{R4} e^{-i\phi_{R4} - 2i\phi_t}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar(\delta\omega_z + \omega_4) + \hbar\omega_z)} + \\
& - \frac{t\Omega e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{2(-U-\epsilon)^3} - \frac{t\Omega e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{2(\epsilon-U)^3} - \frac{t\Omega A_2 e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\delta\omega_z - \omega_4))} + \\
& + \frac{t\Omega A_2 e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\delta\omega_z - \omega_4))} - \frac{t\Omega B_4 e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\omega_z - \omega_4))} + \\
& + \frac{t\Omega B_4 e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\omega_z - \omega_4))} - \frac{t\Omega A_4 e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\omega_4 + \omega_z))} + \\
& + \frac{t\Omega A_4 e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\omega_4 + \omega_z))} - \frac{t\Omega B_2 e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(-\delta\omega_z + \omega_4 + 2\omega_z))} + \\
& + \frac{t\Omega B_2 e^{i\phi_\Omega - i\phi_t}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(-\delta\omega_z + \omega_4 + 2\omega_z))} + \frac{\Omega^2 a_{R2} e^{i\phi_{R2} + 2i\phi_\Omega}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar\omega_z + \hbar(\omega_4 + \omega_z))} + \\
& - \frac{\Omega^2 a_{R2} e^{i\phi_{R2} + 2i\phi_\Omega}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar\omega_z + \hbar(\omega_4 + \omega_z))} + \frac{\Omega^2 a_{R4} e^{i\phi_{R4} + 2i\phi_\Omega}}{4(-U-\epsilon)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\omega_4 - \delta\omega_z))} + \\
& - \frac{\Omega^2 a_{R4} e^{i\phi_{R4} + 2i\phi_\Omega}}{4(\epsilon-U)^2 (\hbar\omega_z - \hbar(\omega_4 - \delta\omega_z))} \left. \right). \tag{91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{Q2^{P2},-P4} = & 2\epsilon_{P2}\epsilon_{P4} \left(-\frac{e^{i\phi_{L4}-2i\phi_t}a_{L4}t^2}{4(-U-\epsilon)^2(-\hbar(\omega_4-\delta\omega_z)-\hbar\omega_z)} + \frac{e^{i\phi_{L4}-2i\phi_t}a_{L4}t^2}{4(\epsilon-U)^2(-\hbar(\omega_4-\delta\omega_z)-\hbar\omega_z)} + \right. \\
& + \frac{e^{i\phi_{R4}}a_{R4}t^2}{4(-U-\epsilon)^2(-\hbar(\delta\omega_z+\omega_4)-\hbar\omega_z)} - \frac{e^{i\phi_{R4}}a_{R4}t^2}{4(\epsilon-U)^2(-\hbar(\delta\omega_z+\omega_4)-\hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{e^{i\phi_{R2}}a_{R2}t^2}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar(\omega_4+\omega_z)-\hbar\omega_z)} - \frac{e^{i\phi_{R2}}a_{R2}t^2}{4(\epsilon-U)^2(\hbar(\omega_4+\omega_z)-\hbar\omega_z)} + \\
& - \frac{e^{i\phi_{L2}-2i\phi_t}a_{L2}t^2}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar(2\delta\omega_z+\omega_4+\omega_z)-\hbar\omega_z)} + \frac{e^{i\phi_{L2}-2i\phi_t}a_{L2}t^2}{4(\epsilon-U)^2(\hbar(2\delta\omega_z+\omega_4+\omega_z)-\hbar\omega_z)} + \\
& - \frac{e^{-i\phi_t-i\phi_\Omega}\Omega t}{2(-U-\epsilon)^3} - \frac{e^{-i\phi_t-i\phi_\Omega}\Omega t}{2(\epsilon-U)^3} - \frac{e^{-i\phi_t-i\phi_\Omega}\Omega A_2 t}{4(-U-\epsilon)^2(-\hbar(\delta\omega_z+\omega_4)-\hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{e^{-i\phi_t-i\phi_\Omega}\Omega A_2 t}{4(\epsilon-U)^2(-\hbar(\delta\omega_z+\omega_4)-\hbar\omega_z)} + \frac{e^{-i\phi_t-i\phi_\Omega}\Omega B_4 t}{4(-U-\epsilon)^2(-\hbar(\omega_4-\omega_z)-\hbar\omega_z)} + \\
& - \frac{e^{-i\phi_t-i\phi_\Omega}\Omega B_4 t}{4(\epsilon-U)^2(-\hbar(\omega_4-\omega_z)-\hbar\omega_z)} - \frac{e^{-i\phi_t-i\phi_\Omega}\Omega A_4 t}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar(\omega_4+\omega_z)-\hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{e^{-i\phi_t-i\phi_\Omega}\Omega A_4 t}{4(\epsilon-U)^2(\hbar(\omega_4+\omega_z)-\hbar\omega_z)} + \frac{e^{-i\phi_t-i\phi_\Omega}\Omega B_2 t}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar(\delta\omega_z+\omega_4+2\omega_z)-\hbar\omega_z)} + \\
& - \frac{e^{-i\phi_t-i\phi_\Omega}\Omega B_2 t}{4(\epsilon-U)^2(\hbar(\delta\omega_z+\omega_4+2\omega_z)-\hbar\omega_z)} + \frac{\frac{e^{i\phi_{R2}}a_{R2}(A_4+B_4)}{\omega_4} - \frac{e^{i\phi_{R4}}a_{R4}(A_2+B_2)}{\delta\omega_z+\omega_4+\omega_z}}{4\hbar} + \\
& + \frac{e^{-i\phi_{L4}-2i\phi_\Omega}\Omega^2 a_{L4}}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar(\delta\omega_z+\omega_4)-\hbar\omega_z)} - \frac{e^{-i\phi_{L4}-2i\phi_\Omega}\Omega^2 a_{L4}}{4(\epsilon-U)^2(\hbar(\delta\omega_z+\omega_4)-\hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{e^{i\phi_{R2}}\Omega^2 a_{R2}}{4(-U-\epsilon)^2(-\hbar(\omega_4-\omega_z)-\hbar\omega_z)} - \frac{e^{i\phi_{R2}}\Omega^2 a_{R2}}{4(\epsilon-U)^2(-\hbar(\omega_4-\omega_z)-\hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{e^{-i\phi_{L2}-2i\phi_\Omega}\Omega^2 a_{L2}}{4(-U-\epsilon)^2(-\hbar\omega_z-\hbar(\omega_4+\omega_z))} - \frac{e^{-i\phi_{L2}-2i\phi_\Omega}\Omega^2 a_{L2}}{4(\epsilon-U)^2(-\hbar\omega_z-\hbar(\omega_4+\omega_z))} + \\
& + \frac{e^{i\phi_{R4}}\Omega^2 a_{R4}}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar(\delta\omega_z+\omega_4+2\omega_z)-\hbar\omega_z)} - \frac{e^{i\phi_{R4}}\Omega^2 a_{R4}}{4(\epsilon-U)^2(\hbar(\delta\omega_z+\omega_4+2\omega_z)-\hbar\omega_z)} \Bigg). \tag{92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{Q2_P2,-P4} = & 2\epsilon_{P2}\epsilon_{P4} \left(-\frac{e^{2i\phi_t-i\phi_{L4}}a_{L4}t^2}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\delta\omega_z-\omega_4))} + \frac{e^{2i\phi_t-i\phi_{L4}}a_{L4}t^2}{4(\epsilon-U)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\delta\omega_z-\omega_4))} + \right. \\
& + \frac{e^{-i\phi_{R4}}a_{R4}t^2}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar(\delta\omega_z+\omega_4)+\hbar\omega_z)} - \frac{e^{-i\phi_{R4}}a_{R4}t^2}{4(\epsilon-U)^2(\hbar(\delta\omega_z+\omega_4)+\hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{e^{-i\phi_{R2}}a_{R2}t^2}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\omega_4+\omega_z))} - \frac{e^{-i\phi_{R2}}a_{R2}t^2}{4(\epsilon-U)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\omega_4+\omega_z))} + \\
& - \frac{e^{2i\phi_t-i\phi_{L2}}a_{L2}t^2}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar\omega_z-\hbar(2\delta\omega_z+\omega_4+\omega_z))} + \frac{e^{2i\phi_t-i\phi_{L2}}a_{L2}t^2}{4(\epsilon-U)^2(\hbar\omega_z-\hbar(2\delta\omega_z+\omega_4+\omega_z))} + \\
& + \frac{e^{i\phi_t+i\phi_\Omega}\Omega t}{2(-U-\epsilon)^3} + \frac{e^{i\phi_t+i\phi_\Omega}\Omega t}{2(\epsilon-U)^3} - \frac{e^{i\phi_t+i\phi_\Omega}\Omega A_2 t}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar(\delta\omega_z+\omega_4)+\hbar\omega_z)} + \\
& + \frac{e^{i\phi_t+i\phi_\Omega}\Omega A_2 t}{4(\epsilon-U)^2(\hbar(\delta\omega_z+\omega_4)+\hbar\omega_z)} + \frac{e^{i\phi_t+i\phi_\Omega}\Omega B_4 t}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\omega_z-\omega_4))} + \\
& - \frac{e^{i\phi_t+i\phi_\Omega}\Omega B_4 t}{4(\epsilon-U)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\omega_z-\omega_4))} - \frac{e^{i\phi_t+i\phi_\Omega}\Omega A_4 t}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\omega_4+\omega_z))} + \\
& + \frac{e^{i\phi_t+i\phi_\Omega}\Omega A_4 t}{4(\epsilon-U)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\omega_4+\omega_z))} + \frac{e^{i\phi_t+i\phi_\Omega}\Omega B_2 t}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\delta\omega_z+\omega_4+2\omega_z))} + \\
& - \frac{e^{i\phi_t+i\phi_\Omega}\Omega B_2 t}{4(\epsilon-U)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\delta\omega_z+\omega_4+2\omega_z))} + \\
& + \frac{e^{-i(\phi_{R2}+\phi_{R4})}(e^{i\phi_{R4}}a_{R2}(A_4+B_4)(\delta\omega_z+\omega_4+\omega_z)-e^{i\phi_{R2}}a_{R4}(A_2+B_2)\omega_4)}{4\hbar\omega_4(\delta\omega_z+\omega_4+\omega_z)} + \\
& + \frac{e^{i\phi_{L4}+2i\phi_\Omega}\Omega^2 a_{L4}}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\delta\omega_z+\omega_4))} - \frac{e^{i\phi_{L4}+2i\phi_\Omega}\Omega^2 a_{L4}}{4(\epsilon-U)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\delta\omega_z+\omega_4))} + \\
& + \frac{e^{-i\phi_{R2}}\Omega^2 a_{R2}}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\omega_z-\omega_4))} - \frac{e^{-i\phi_{R2}}\Omega^2 a_{R2}}{4(\epsilon-U)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\omega_z-\omega_4))} + \\
& + \frac{e^{i\phi_{L2}+2i\phi_\Omega}\Omega^2 a_{L2}}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar\omega_z+\hbar(\omega_4+\omega_z))} - \frac{e^{i\phi_{L2}+2i\phi_\Omega}\Omega^2 a_{L2}}{4(\epsilon-U)^2(\hbar\omega_z+\hbar(\omega_4+\omega_z))} + \\
& + \frac{e^{-i\phi_{R4}}\Omega^2 a_{R4}}{4(-U-\epsilon)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\delta\omega_z+\omega_4+2\omega_z))} - \frac{e^{-i\phi_{R4}}\Omega^2 a_{R4}}{4(\epsilon-U)^2(\hbar\omega_z-\hbar(\delta\omega_z+\omega_4+2\omega_z))} \Big). \tag{93}
\end{aligned}$$

Hivatkozások

- [1] Daniel Loss and David P DiVincenzo. Quantum computation with quantum dots. *Physical Review A*, 57(1):120, 1998.
- [2] Denis V Bulaev and Daniel Loss. Electric dipole spin resonance for heavy holes in quantum dots. *Physical review letters*, 98(9):097202, 2007.
- [3] TF Watson, SGJ Philips, Erika Kawakami, DR Ward, Pasquale Scarlino, Menno Veldhorst, DE Savage, MG Lagally, Mark Friesen, SN Coppersmith, et al. A programmable two-qubit quantum processor in silicon. *nature*, 555(7698):633–637, 2018.
- [4] Vitaly N Golovach, Massoud Borhani, and Daniel Loss. Electric-dipole-induced spin resonance in quantum dots. *Physical Review B*, 74(16):165319, 2006.

- [5] Ruoyu Li, Luca Petit, David P Franke, Juan Pablo Dehollain, Jonas Helsen, Mark Steudtner, Nicole K Thomas, Zachary R Yoscovits, Kanwal J Singh, Stephanie Wehner, et al. A crossbar network for silicon quantum dot qubits. *Science advances*, 4(7):eaar3960, 2018.
- [6] Zoltán György, András Pályi, and Gábor Széchenyi. Electrically driven spin resonance with bichromatic driving. *Physical Review B*, 106(15):155412, 2022.
- [7] Valentin John, Francesco Borsoi, Zoltán György, Chien-An Wang, Gábor Széchenyi, Floor van Riggelen, William IL Lawrie, Nico W Hendrickx, Amir Sammak, Giordano Scappucci, et al. Bichromatic Rabi control of semiconductor qubits. *arXiv preprint arXiv:2308.01720*, 2023.
- [8] Richard P Feynman et al. Simulating physics with computers. *Int. j. Theor. phys*, 21(6/7), 2018.
- [9] Google AI Quantum, Collaborators*†, Frank Arute, Kunal Arya, Ryan Babbush, Dave Bacon, Joseph C Bardin, Rami Barends, Sergio Boixo, Michael Broughton, Bob B Buckley, et al. Hartree-Fock on a superconducting qubit quantum computer. *Science*, 369(6507):1084–1089, 2020.
- [10] Marco Cerezo, Andrew Arrasmith, Ryan Babbush, Simon C Benjamin, Suguru Endo, Keisuke Fujii, Jarrod R McClean, Kosuke Mitarai, Xiao Yuan, Lukasz Cincio, et al. Variational quantum algorithms. *Nature Reviews Physics*, 3(9):625–644, 2021.
- [11] Peter W Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM review*, 41(2):303–332, 1999.
- [12] Lov K Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 212–219, 1996.
- [13] Frank Arute, Kunal Arya, Ryan Babbush, Dave Bacon, Joseph C Bardin, Rami Barends, Rupak Biswas, Sergio Boixo, Fernando GSL Brandao, David A Buell, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 574(7779):505–510, 2019.
- [14] Yunseong Nam, Jwo-Sy Chen, Neal C Pienti, Kenneth Wright, Conor Delaney, Dmitri Maslov, Kenneth R Brown, Stewart Allen, Jason M Amini, Joel Apisdorf, et al. Ground-state energy estimation of the water molecule on a trapped-ion quantum computer. *npj Quantum Information*, 6(1):33, 2020.
- [15] Hatam Mahmudlu, Robert Johanning, Albert Van Rees, Anahita Khodadad Kashi, Jörn P Epping, Raktim Halder, Klaus-J Boller, and Michael Kues. Fully on-chip photonic turnkey quantum source for entangled qubit/qudit state generation. *Nature Photonics*, pages 1–7, 2023.
- [16] Denis D Sukachev, Alp Sipahigil, Christian T Nguyen, Mihir K Bhaskar, Ruffin E Evans, Fedor Jelezko, and Mikhail D Lukin. Silicon-vacancy spin qubit in diamond: a quantum memory exceeding 10 ms with single-shot state readout. *Physical review letters*, 119(22):223602, 2017.

- [17] M Veldhorst, JCC Hwang, CH Yang, AW Leenstra, Bob de Ronde, JP Dehollain, JT Muhonen, FE Hudson, Kohei M Itoh, A t Morello, et al. An addressable quantum dot qubit with fault-tolerant control-fidelity. *Nature nanotechnology*, 9(12):981–985, 2014.
- [18] Zhiguang Yan, Yu-Ran Zhang, Ming Gong, Yulin Wu, Yarui Zheng, Shaowei Li, Can Wang, Futian Liang, Jin Lin, Yu Xu, et al. Strongly correlated quantum walks with a 12-qubit superconducting processor. *Science*, 364(6442):753–756, 2019.
- [19] EA Laird, Christian Barthel, EI Rashba, CM Marcus, MP Hanson, and AC Gosard. Hyperfine-mediated gate-driven electron spin resonance. *Physical review letters*, 99(24):246601, 2007.
- [20] Yasuhiro Tokura, Wilfred G van der Wiel, Toshiaki Obata, and Seigo Tarucha. Coherent single electron spin control in a slanting Zeeman field. *Physical review letters*, 96(4):047202, 2006.
- [21] Katja C Nowack, FHL Koppens, Yu V Nazarov, and LMK Vandersypen. Coherent control of a single electron spin with electric fields. *Science*, 318(5855):1430–1433, 2007.
- [22] Nico W Hendrickx, William IL Lawrie, Maximilian Russ, Floor van Riggelen, Sander L de Snoo, Raymond N Schouten, Amir Sammak, Giordano Scappucci, and Menno Veldhorst. A four-qubit germanium quantum processor. *Nature*, 591(7851):580–585, 2021.
- [23] Stephan GJ Philips, Mateusz T Mądzik, Sergey V Amitonov, Sander L de Snoo, Maximilian Russ, Nima Kalhor, Christian Volk, William IL Lawrie, Delphine Brousse, Larysa Tryputen, et al. Universal control of a six-qubit quantum processor in silicon. *Nature*, 609(7929):919–924, 2022.
- [24] NW Hendrickx, WIL Lawrie, L Petit, A Sammak, G Scappucci, and M Veldhorst. A single-hole spin qubit. *Nature communications*, 11(1):3478, 2020.
- [25] NW Hendrickx, DP Franke, A Sammak, G Scappucci, and M Veldhorst. Fast two-qubit logic with holes in germanium. *Nature*, 577(7791):487–491, 2020.
- [26] Francesco Borsoi, Nico W Hendrickx, Valentin John, Marcel Meyer, Sayr Motz, Floor van Riggelen, Amir Sammak, Sander L de Snoo, Giordano Scappucci, and Menno Veldhorst. Shared control of a 16 semiconductor quantum dot crossbar array. *Nature Nanotechnology*, pages 1–7, 2023.
- [27] David P Franke, James S Clarke, Lieven MK Vandersypen, and Menno Veldhorst. Rent’s rule and extensibility in quantum computing. *Microprocessors and Microsystems*, 67:1–7, 2019.
- [28] Nikiforos Paraskevopoulos, Fabio Sebastiano, Carmen G Almudever, and Sebastian Feld. SpinQ: Compilation strategies for scalable spin-qubit architectures. *arXiv preprint arXiv:2301.13241*, 2023.
- [29] Floor van Riggelen-Doelman, Chien-An Wang, Sander L de Snoo, William IL Lawrie, Nico W Hendrickx, Maximilian Rimbach-Russ, Amir Sammak, Giordano Scappucci, Corentin Déprez, and Menno Veldhorst. Coherent spin qubit shuttling through germanium quantum dots. *arXiv preprint arXiv:2308.02406*, 2023.

- [30] Roland Winkler and Roland Winkler. Quasi-degenerate perturbation theory. *Spin—Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems*, pages 201–205, 2003.
- [31] John R Schrieffer and Peter A Wolff. Relation between the Anderson and Kondo Hamiltonians. *Physical Review*, 149(2):491, 1966.
- [32] Tak-San Ho, Shih-I Chu, and James V Tietz. Semiclassical many-mode Floquet theory. *Chemical Physics Letters*, 96(4):464–471, 1983.
- [33] Jon H Shirley. Solution of the Schrödinger equation with a Hamiltonian periodic in time. *Physical Review*, 138(4B):B979, 1965.
- [34] Y Kato, RC Myers, DC Driscoll, AC Gossard, J Levy, and DD Awschalom. Gigahertz electron spin manipulation using voltage-controlled g-tensor modulation. *Science*, 299(5610):1201–1204, 2003.
- [35] Alessandro Crippa, Romain Maurand, Léo Bourdet, Dharmraj Kotekar-Patil, Anthony Amissé, Xavier Jehl, Marc Sanquer, Romain Laviéville, Heorhii Bohuslavskyi, Louis Hutin, et al. Electrical spin driving by g-matrix modulation in spin-orbit qubits. *Physical review letters*, 120(13):137702, 2018.
- [36] Ingvild Hansen, Amanda E Seedhouse, Kok Wai Chan, FE Hudson, Kohei M Itoh, Arne Laucht, Andre Saraiva, Chih Hwan Yang, and Andrew S Dzurak. Implementation of an advanced dressing protocol for global qubit control in silicon. *Applied Physics Reviews*, 9(3), 2022.
- [37] Mika A Sillanpää, Jian Li, Katarina Cicak, Fabio Altomare, Jae I Park, Raymond W Simmonds, Gheorghe-Sorin Paraoanu, and Pertti J Hakonen. Autler-Townes effect in a superconducting three-level system. *Physical review letters*, 103(19):193601, 2009.
- [38] M Baur, Stefan Filipp, R Bianchetti, JM Fink, M Göppl, L Steffen, Peter J Leek, Alexandre Blais, and Andreas Wallraff. Measurement of Autler-Townes and Mollow transitions in a strongly driven superconducting qubit. *Physical review letters*, 102(24):243602, 2009.
- [39] F Bloch and A Siegert. Magnetic resonance for nonrotating fields. *Physical Review*, 57(6):522, 1940.