

Korrelációs függvények integrálható peremváltás esetén

Tudományos Diákköri Dolgozat

Fülepi Dávid
Fizika BSC III. évfolyam

Témavezető:
Dr. Bajnok Zoltán
HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

Eötvös Loránd Tudományegyetem
2024.07.15.

Absztrakt

A statisztikus fizikai nem egyensúlyi folyamatok közül az egyik leginkább kutatott az ún. *kvencs*, ami során a rendszer Hamilton-függvényét hirtelen megváltoztatjuk, és vizsgáljuk a további fejlődését. A dolgozatban ilyen folyamatot elemzünk ki egy integrálható kvantumtérelméletben, a peremes Lee–Yang-modellben. Egy peremmel ellátott félvégtelen síkban elhelyezkedő tömbi operátor korrelációs függvényét vizsgáljuk, ha a peremet egy peremváltó operátorral hirtelen megváltoztatjuk. Két irányból folytatjuk a vizsgálatot. Elsőként kritikus esetben a konform térelmélet segítségével számoljuk ki a korrelációs függvényt. Majd elméleti bevezető után off-kritikus esetben *form-faktorok* segítségével kapjuk meg a korrelációs függvényt. Az eredményeket összevetjük az elvárásokkal, hogy egy relaxációs időszak után tér majd át a tér a másik peremhez tartozó állapotába. Vizsgáljuk a relaxáció tulajdonságait és az aszimptotikus viselkedését is. Végül kitekintést nyújtunk a kapott eredményeink általánosítására, illetve kísérleti úton történő bizonyításukra.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Konform térelméleti megközelítés	6
2.1. Rövid bevezetés a konform térelméletbe	6
2.2. Tömbi várható érték konform peremváltás után	7
3. A kritikus ponttól eltávolodva	12
3.1. Form-faktorok	13
3.1.1. Tömbi form-faktorok	13
3.1.2. Peremváltó operátor form-faktora	15
3.2. A korrelációs függvény kiszámítása form-faktorokkal	16
3.3. Aszimptotikus viselkedés	19
4. Konklúzió	24
A. Saját eredmények	27

1. fejezet

Bevezetés

Kezdetekben a statisztikus fizika csak az egyensúlyi rendszerek leírásával foglalkozott, de a tudomány fejlődésével egyre inkább nőtt az igény a nem egyensúlyi rendszerek megmagyarázására. Manapság ezeknek folyik az aktív vizsgálata, kiváltképp kvantumrendszerekben. A nem egyensúlyi folyamatokon belül a leginkább kutatott az ún. *kvencs*, ami során megváltoztatjuk a rendszer Hamilton-függvényét egy adott pillanatban, és vizsgáljuk a fejlődését az új paraméterek szerint [1][2].

Az egyensúlyon túli fizika kutatását egy alapvető dolog nehezíti meg. A fizikai rendszereknek általában nem található egzakt megoldása, csak numerikus módszerekkel lehet közelíteni a viselkedésüket. Kvantumtérelméletek közül speciálisak az integrálható modellek, amikben felírható egzakt, zárt alakú megoldás. Integrálható elméletekben végtelen sok megmaradó mennyiség van, így a részecskék tökéletesen rugalmasan szóródnak. (Pedagógiai ismertetőt nyújt az integrálhatóságról [3].) Sokáig úgy gondolták, hogy valós fizikai rendszerekre ezek nem alkalmazhatóak, egyszerűségük miatt csupán "játékmodellek", amikkel a bonyolultabb rendszerek bizonyos tulajdonságai vizsgálhatóak.

A kísérleti megvalósításuk fő nehézsége az volt, hogy olyan rendszereket hozzanak létre, amiknek vizsgálható a belső időfejlődésük anélkül, hogy ezt a környezettel való kölcsönhatás megzavarná. Az egyik első áttörő sikert Kinoshita *et al.* érte el a kvantum Newton-bölcsővel [4]. ^{87}Rb atomok Bose-Einstein kondenzátumát egy optikai hálóval csapdázták be és korlátozták a dinamikáját 1 dimenzióra. Az atomok oszcillációja és ütközése során nem figyeltek meg termalizációt. Különös módon, 3D-s gázzal elvégezve ugyanezt a kísérletet néhány ütközés után visszaállt a hőmérsékleti eloszlás. Ez arra engedett következtetni, hogy csak az egydimenziós rendszer viselkedett közel integrálható módon, és ez magasabb dimenziókban nem fordul elő.

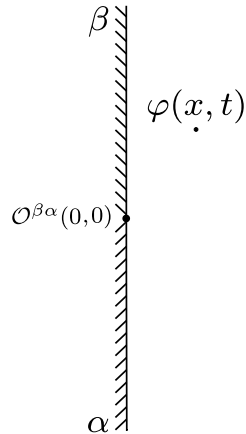
Ezt az eredményt kihasználva gyorsan megindult a fejlődés a kísérleti módszerekben, és már számtalan rendszerben figyeltek meg integrálhatóságot. Ezeket tekinti át [5] és [6], valamint kiemelt figyelemmel a termalizáció kérdésére [7]. Az integrálhatóság elméletét kihasználva sikerült általános elméletet is adni az ultrahideg atomokkal végzett kísérletek leírására az általánosított hidrodinamika elméletével [8].

Az integrálhatóság nem csak a modern statisztikus és kondenzált anyag fizika elengedhetetlen fogalma. A mai elméleti fizika egyik leginkább kutatott jelenségében, az AdS/CFT dualításban is fellép az integrálhatóság. A dualitás AdS oldalán egy 5 dimenziós Anti-de Sitter tér és egy gömbfelület direktszorzat terén értelmezett szuperhúrelmélet áll. A CFT pedig az $\mathcal{N} = 4$ szuper Yang–Mills-elmélet, ami egy szuper- és konform szimmetrikus mértékelmélet. Kiderült, hogy a húrelmélet leírható egy kétdimenziós integrálható modellel, így a dualitás miatt az AdS oldalon is megjelenik az integrálhatóság.

Ez az eredmény jelentős, hiszen így alkalmazhatóak az integrálható rendszerek tanulmányozása során megismert módszerek az $\mathcal{N} = 4$ SYM-ben és az ezzel duális húrelméletben. Erről a témáról nyújt alapszintű bevezetést a [9]-es összefoglaló cikk, aminek az integrálhatóságot mélyebben leíró fejezete [10], valamint egy erről szóló, részletes leírást adó doktori dolgozat a [11].

A dolgozatunkban a Lee–Yang-modellben vizsgálunk egy peremes kvencset. Ez a modell tűnik fel a kétdimenziós Ising-modell Yang–Lee peremsingularitásában, azaz, ha a rendszerre tisztán képzetes mágneses teret kapcsolunk a kritikus hőmérséklet felett [12]. Más irányból megközelítve is eljuthatunk a Lee–Yang-modellhez. Egy egydimenziós bozongáz viselkedését a szintén integrálható Lieb–Liniger-modell írja le. Kormos *et al.* megmutatta, hogy a sinh-Gordon-modell nemrelativisztikus határesetben visszaadja a Lieb–Linigert [13]. A Lee–Yang-modell pedig tekinthető a sinh-Gordon egy speciális módosításának, amikor a pozitív dimenziótlan csatolás helyett $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ a csatolási állandó. A Lee–Yang-modell viszont nem unitér, így a kísérleti megvalósítása valószínűleg nem lehetséges. A vizsgálata mégis azért hasznos, mert egyszerűen tanulmányozható benne az integrálható modellek különleges viselkedése.

A peremes kvencs során egy féltéren definiált rendszerben megváltoztatjuk a peremfeltételt $t = 0$ -ban egy peremváltó operátorral. Ezután azt nézzük, hogyan változik a tömbi (angol irodalomban *bulk*) operátor várható értéke a hirtelen peremfeltétel változtatás hatására. Ezt az elrendezést mutatja az 1.1 ábra. Azt várjuk, hogy egy relaxációs időszak után tér át a másik peremhez tartozó állapotba, aminek a frekvenciáját és amplitúdóját vizsgáljuk majd és egyeztetjük az aszimptotikus viselkedéssel.



1.1. ábra. Az általunk vizsgált rendszer, ahol α és β a két peremfeltétel, $\mathcal{O}$ a kettő között váltó operátor és φ egy tömbi operátor.

A vizsgálatot több irányból fogjuk végezni. A kritikus pontban, ahol a részecskék tömege 0, megjelenik a konform szimmetria. A rövidtávú viselkedést, tehát a peremhez közel, és amikor az operátorok egymáshoz is közel vannak, a konform térelmélet adja meg.

Off-kritikus esetben a konform elmélet tömeges perturbációjaként kapott skálázó Lee–Yang-elméletet használjuk. Az integrálható peremek elméletét Zamolodchikov és Goshal alapozta meg [14], ahol felírták a reflexiós amplitúdók meghatározásához szükséges egyenleteket. Bajnok, Palla és Takács végezte el a peremes *bootstrap* programot és határozták meg peremoperátorok mátrixelemeit [15]. Végül Bajnok és Holló fejezték be a programot

a peremváltó operátorok mátrixelemeinek kiszámolásával [16]. Az ő eredményeiket alkalmazzuk majd a 1.1. ábrán bemutatott elrendezés leírásához. A form-faktoros módszer tökéletesen kiegészíti a konform térelméleti számolást, hiszen a form-faktorok nagyobb térfogaton adnak jó eredményt.

Végül összefoglaljuk és értelmezzük az eredményeinket, felsoroljuk a lehetséges pontosításokat és azt, hogy milyen irányban szeretnénk folytatni a kutatást.

2. fejezet

Konform térelméleti megközelítés

2.1. Rövid bevezetés a konform térelméletbe

A Bevezetőben felvázolt rendszert elsőként konform térelméletben vizsgáltuk, de ehhez ebben az alfejezetben egy rövid ismertetőt adunk magáról a CFT-ről (*Conformal field theory*). Az alfejezetben végig a [17]-es forrást használjuk fel.

Konformnak nevezzük az olyan koordináta-transzformációkat, amik a metrikát csak egy skalárszorzóval szorozzák:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (2.1)$$

Két dimenzióban kiderül, hogy a lokális konform leképezéseknek megfelelnek a komplex analitikus függvények. Ha úgy vezetjük be a két koordinátát, hogy $z, \bar{z} = x^0 \pm x^1$ és $z \rightarrow f(z)$, $\bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z})$, akkor a metrika változása:

$$ds^2 = dzd\bar{z} \rightarrow \left| \frac{df}{dz} \right|^2 dzd\bar{z}. \quad (2.2)$$

A szakasz további részében nem írjuk ki az antiholomorf $\bar{z}$ függést az egyszerűség kedvéért.

Definiálható ezután egy térelmélet, amiben vannak speciális, *primér* terek, amik a következő módon változnak konform transzformáció hatására:

$$\Phi(z) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^h \Phi(f(z)); \quad (2.3)$$

itt h -t a tér (konform) súlyának hívjuk.

A nagymértékű szimmetria miatt a primér terek korrelációs függvénye erősen meg van határozva. Egyszerűen kiszámolható, hogy a hárompont-függvényig a következő alakúak lesznek a korrelációs függvények (bevezetve a $z_{ij} = z_i - z_j$ jelölést):

$$\langle 0 | \Phi(z) | 0 \rangle = 0; \quad (2.4)$$

$$\langle 0 | \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) | 0 \rangle = \frac{\delta_{h_1 h_2}}{(z_{12})^{2h_1}}; \quad (2.5)$$

$$\langle 0 | \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \Phi_3(z_3) | 0 \rangle = \frac{C_{123}}{(z_{12})^{h_1+h_2-h_3} (z_{13})^{h_1+h_3-h_2} (z_{23})^{h_2+h_3-h_1}}; \quad (2.6)$$

és C_{123} a terektől függő konstans.

Számunkra viszont a négy pont-függvényt kell majd kiszámolni, amiben megjelenik egy $x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}$ keresztaránytól való szabad függés, mivel ezt a mennyiséget invariánsan hagyja a transzformáció. Vezessük még be a $h = \sum_{i=1}^4 h_i$ jelölést:

$$\langle 0 | \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \Phi_3(z_3) \Phi_4(z_4) | 0 \rangle = f(x) \prod_{i < j} z_{ij}^{-(h_i + h_j) + h/3}. \quad (2.7)$$

Az $f(x)$ függvény a CFT algebrájának vizsgálatával levezethető differenciálegyenlet megoldásával kapható meg.

2.2. Tömbi várható érték konform peremváltás után

Egy tömbi tér várható értékét akarjuk kiszámítani a peremfeltétel hirtelen megváltoztatása esetén. Egy L széles sávon dolgozunk, amit tetszőlegesen nagynak vehetünk, így nem befolyásolva a perem közelében kapott értéket. A számolást Lee–Yang-modellben fogjuk végezni, ahol a korábban említett súly $h = -\frac{1}{5}$. Ebben a modellben két peremfeltétel lehetséges, a $\mathbb{I}$ identitás perem, illetve a Φ perem. Ezeket úgy képzelhetjük el klasszikusan, mint a Dirichlet- és a Neumann-féle peremfeltételeket. A peremfeltételeket meg is változtathatjuk egy rendszeren belül. Esetünkben legyen egy $\psi^\dagger$ peremváltó operátor az $x, t = 0$ helyen, ami az $x = 0$ -ban lévő peremet váltja az $\mathbb{I}$ peremről a Φ peremre (ekkor ψ váltja vissza). Az $x = L$ -ben lévő perem legyen $\mathbb{I}$. Helyezzünk még be egy φ tömbi teret egy x, t helyre a síkba. A peremváltás jelenlétében a tömbi tér várható értékét az alábbi korrelációs függvénnyel számolhatjuk ki:

$$\mathbb{I} \langle \psi | \varphi(x, t) \psi^\dagger(0) | 0 \rangle_{\mathbb{I}}. \quad (2.8)$$

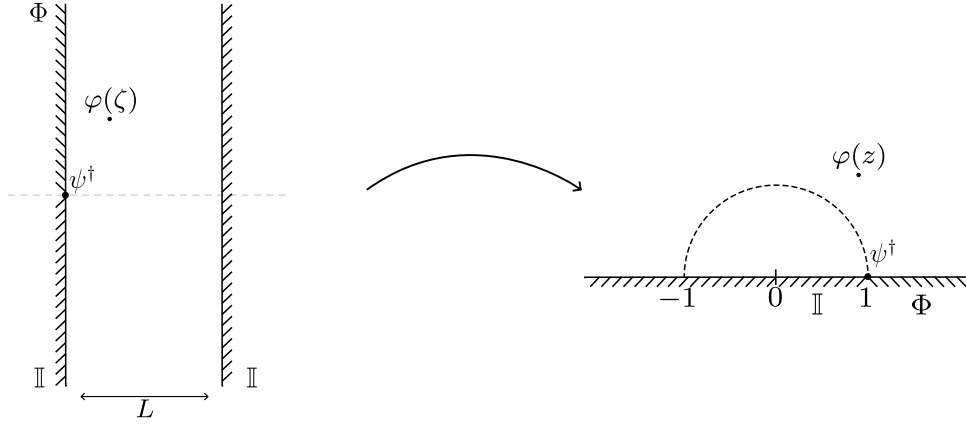
Vezessük be a következő koordinátákat, attól függően, hogy Minkowski- (2.9) vagy euklideszi térben (2.10) dolgozunk:

$$\zeta = t - x \quad ; \quad \bar{\zeta} = t + x \quad (2.9)$$

$$\zeta = x + iy \quad ; \quad \bar{\zeta} = x - iy \quad (2.10)$$

A konform elméletet úgy kvantáljuk, hogy először kompaktifikáljuk a tér koordinátát egy hengerré, majd a hengert leképezzük a felső félsíkra:

$$z = e^{i\frac{\pi}{L}\zeta} = \tilde{x} + i\tilde{y} \quad ; \quad \bar{z} = e^{-i\frac{\pi}{L}\bar{\zeta}} = \tilde{x} - i\tilde{y} \quad (2.11)$$



2.1. ábra. A bal oldalon látható a vizsgált peremes rendszer, amit leképezve a konform síkra kapjuk a jobb oldali elrendezést.

A korrelációs függvényt eltranszformáljuk (2.3) szerint, amit egy konstans fázisfaktorig adunk meg. A $h = -\frac{1}{5}$ értéket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\mathbb{I} \langle \psi | \varphi(x, t) \psi^\dagger(0) | 0 \rangle_{\mathbb{I}} \sim \left(\frac{\pi}{L} \right)^{-\frac{3}{5}} (z\bar{z})^{-\frac{1}{5}} \langle \psi | \varphi(z, \bar{z}) \psi^\dagger(1) | 0 \rangle. \quad (2.12)$$

Konform invariáns perem miatt az antiholomorf koordinátafüggést a felső félsíkon úgy tekintjük, mintha $\bar{z} = z^*$ holomorf koordinátafüggés lenne az alsó félsíkon. Tehát a tömbi, nem-királis $\varphi(z, \bar{z})$ teret két királis $\varphi(z)$ és $\varphi(\bar{z} = z^*)$ szorzatával helyettesítjük. Így a

$$\langle \psi | \varphi(z, \bar{z}) \psi^\dagger(1) | 0 \rangle = \langle \psi | \varphi(z) \varphi(\bar{z}) \psi^\dagger(1) | 0 \rangle \quad (2.13)$$

királis négypont-függvényt kell kiszámolni a síkon. (2.7) általános formulát alkalmazva erre a rendszerre a korrelációs függvény a következő alakú lesz:

$$\langle \psi | \varphi(z) \varphi(\bar{z}) \psi^\dagger(1) | 0 \rangle = [(z - \bar{z})(z - 1)(\bar{z} - 1)]^{\frac{2}{15}} f\left(\frac{\bar{z} - 1}{z - 1}\right). \quad (2.14)$$

A konform leképezés miatt a $t = 0$ egyenes a felső egységfélkörre kerül, a peremváltó operátor pedig $\tilde{x} = 1$ -be, ahogy az a 2.1 ábrán is látható. Felírhatjuk a tömbi-peremes operátorszorzat-kifejtést ahogy $\tilde{y} \rightarrow 0$, ahol figyelembe vesszük, hogy $\tilde{x} < 1$ -re az $\mathbb{I}$ peremfeltételt vetjük ki, $\tilde{x} > 1$ -re pedig a Φ peremfeltételt [18]:

$$\langle \psi | \varphi(z) \varphi(\bar{z}) \psi^\dagger(1) | 0 \rangle \Big|_{\tilde{x} < 1} \sim (2\tilde{y})^{\frac{2}{5}} B_{\Phi, \mathbb{I}}^{(\mathbb{I})} + \dots; \quad (2.15)$$

$$\langle \psi | \varphi(z) \varphi(\bar{z}) \psi^\dagger(1) | 0 \rangle \Big|_{\tilde{x} > 1} \sim (2\tilde{y})^{\frac{2}{5}} B_{\Phi, \mathbb{I}}^{(\Phi)} + (2\tilde{y})^{\frac{1}{5}} B_{\Phi, \varphi} \langle \psi | \varphi(\tilde{x}) \psi^\dagger(1) | 0 \rangle + \dots; \quad (2.16)$$

és (2.16) második tagjában megjelenő mennyiség a

$$\langle \psi | \varphi(x) \psi^\dagger(1) | 0 \rangle = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{-\frac{2}{5}} \langle 0 | \psi(z) \varphi(\tilde{x}) \psi^\dagger(1) | 0 \rangle = C_{\psi\varphi\psi^\dagger} (\tilde{x} - 1)^{\frac{1}{5}} \quad (2.17)$$

hárompont-függvény.

A (2.14)-ben megjelenő f függvényt a konform algebrában levezethető differenciálegyenlet megoldásaként kaphatjuk meg. [19] alapján ismert, hogy a differenciálegyenlet megoldásainak lineáris terén 2 hipergeometrikus függvény ad bázist. A hipergeometrikus függvények együttthatóját úgy határozhatjuk meg, hogy egyeztetjük a peremhez tartó limeszt a négypontfüggvénynek az operátorszorzat-kifejtéssel (természetesen mind a $\tilde{x} < 0$ mind az $\tilde{x} > 0$ limesznek egyeznie kell). Ezután már felírhatjuk a négypont-függvényt:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \varphi(z) \varphi(\bar{z}) \psi^\dagger(1) | 0 \rangle = c_1 (z - \bar{z})^{\frac{1}{5}} (\bar{z} - 1)^{\frac{1}{5}} F_{2,1} \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5} \middle| \frac{\bar{z} - 1}{z - 1} \right) \\ + c_2 \frac{(z - \bar{z})^{\frac{1}{5}} (\bar{z} - 1)^{\frac{2}{5}}}{(z - 1)^{\frac{1}{5}}} F_{2,1} \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5} \middle| \frac{\bar{z} - 1}{z - 1} \right), \quad (2.18) \end{aligned}$$

ahol a megjelenő konstansok:

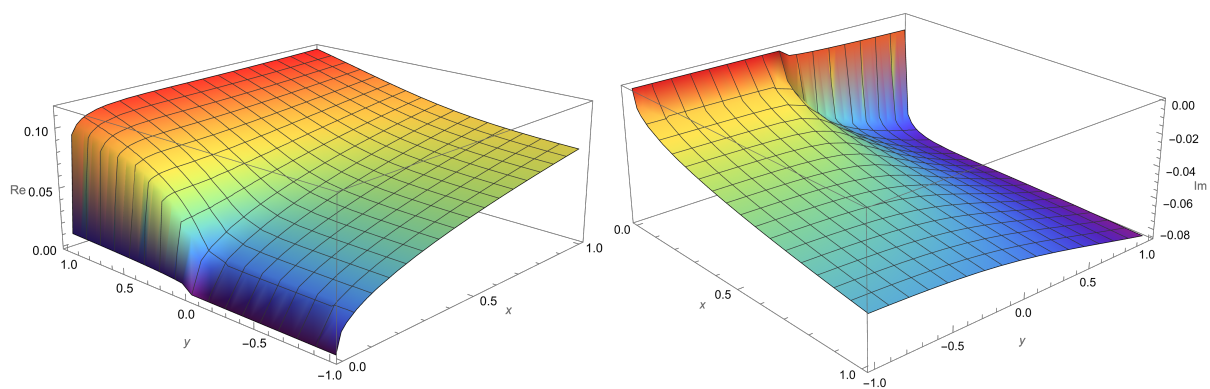
$$c_1 = (5 + \sqrt{5})^{-1} \quad \text{és} \quad c_2 = -\frac{(-1)^{\frac{2}{5}} 2\pi^2}{\Gamma(\frac{1}{5})^3 \Gamma(\frac{2}{5})}. \quad (2.19)$$

Elsőként gondoljuk át milyen viselkedést is várunk a peremfeltétel megváltoztatásának hatására. Egy jó analógia lehet elképzelni, hogy a tömbi operátor egy csónak a tavon, a peremváltás pedig egy nagy kő, amit beleejtünk a peremen. Ahogy a beeső kő által keltett hullámok elérik a csónakot az megmozdul, majd visszatér az új vízállásnak megfelelő nyugalmi helyzetébe. Off-kritikus esetben a csónaknak van tehetetlensége, így ringatózva tér át az új helyzetébe. Itt, kritikus esetben olyan, mintha nulla tömegű lenne, így nem várunk oszcillációt.

Ábrázoljuk a kapott függvényeket euklideszi és Minkowski-térben. Ehhez a konform síkra kapott (2.18) korrelációs függvényt visszatranszformáljuk a fizikai síkra (2.12) transzformáció felhasználásával.

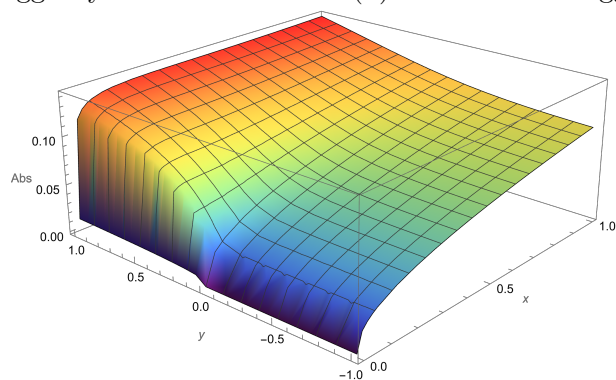
Euklideszi térben (2.2 ábra) az elvárt alaknak megfelelően kapjuk vissza a korrelációs függvényt. Egyértelműen látható, hogy $y < 0$ -ra és $y > 0$ -ra különböző meredekséggel tart a függvény a peremhez, ami egyezik a (2.15) és (2.16)-ben felírt viselkedéssel.

Minkowski-térben (2.3. ábra) is megfigyelhető, hogy különböző meredekséggel érkezik a peremhez a függvény a negatív és a pozitív időkre. Az ábrán megjelennek a fénykúpok is, ami a pozitív t -k tartományára helyes is, mert így a modell kielégíti a kauzalitást. A $t < 0$ tartományon viszont nem kéne fénykúpnak megjelennie, hiszen ez azt jelentené, hogy a tömbi tér már azelőtt tudja, hogy meg fogjuk változtatni a peremet mielőtt az megtörténne. A probléma forrása az, hogy a korrelációs függvényben mindig időrendezzük az operátorokat, így a negatív időkre nem az ehhez a fizikai helyzethez tartozó korrelációs függvényt számoljuk. A későbbi számolások során emiatt csak a $t > 0$ tartományt fogjuk vizsgálni.



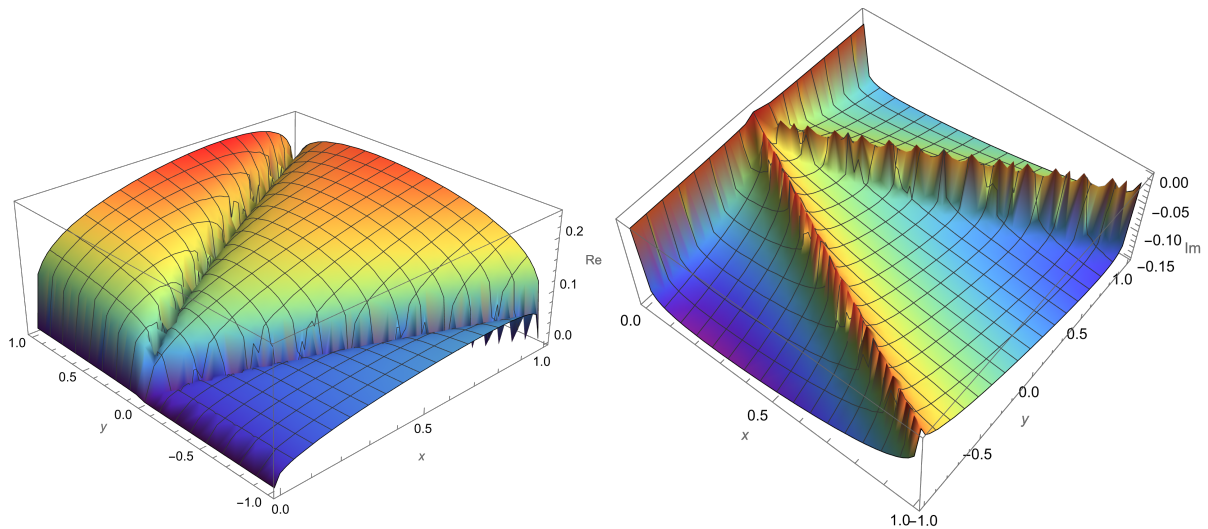
(a) A korrelációs függvény valós része.

(b) A korrelációs függvény képzetes része.



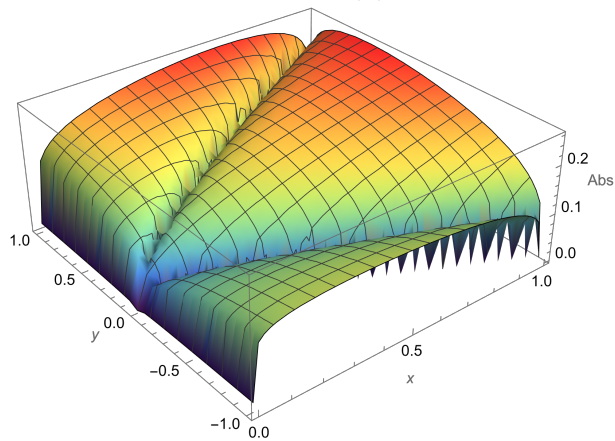
(c) A korrelációs függvény abszolútértéke.

2.2. ábra. A korrelációs függvény ábrázolása euklideszi térben $L = 10$ esetén.



(a) A korrelációs függvény valós része.

(b) A korrelációs függvény képzetes része.

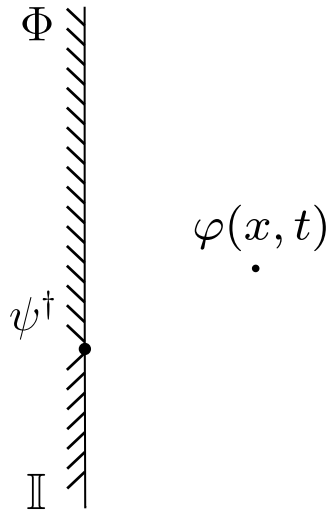


(c) A korrelációs függvény abszolútértéke.

2.3. ábra. A korrelációs függvény ábrázolása Minkowski-térben $L = 10$ esetén.

3. fejezet

A kritikus ponttól eltávolodva



3.1. ábra. A peremes rendszer ábrázolása.

A kritikus ponton kívül a skálázó Lee–Yang-modell (*SLYM* - *scaling Lee–Yang model*) írja le a 3.1. ábrán látható rendszerünket. Ez az egyik legegyszerűbb relativisztikus térelmélet, ami a konform Lee–Yang-modell integrálható tömeges perturbációjának felel meg. A *SLYM*-ben megjelenő tereket megfeleltethetjük a konform elmélet tereivel, mivel a *SLYM* terei azok folytonos deformációi. Így a konform elmélet primér tereinek – az $\mathbb{I}$ identitásnak és a φ -nek – is megtalálható a modellben a deformáltjuk, amiket ugyanezekkel a szimbólumokkal jelölünk. Továbbá a modell csak egy típusú, m tömegű részecskéket tartalmaz. A *SLYM*-ben két lehetséges peremfeltétel van: az $\mathbb{I}$ perem, amit $t < 0$ -ra vetünk ki, és a Φ perem, amit $t > 0$ -ra. A két perem között egy $\psi_{\Phi\mathbb{I}} = \psi^\dagger$ peremváltó operátor vált a $t = 0$ pontban. Azt nézzük meg, hogy ez a hirtelen peremfeltétel váltás hogyan hat egy tömbi φ operátorra, amit a korrelációs függvénnyel jellemezhetünk:

$${}_\Phi \langle 0 | \varphi(x, t) \psi^\dagger(0) | 0 \rangle_{\mathbb{I}} \quad (3.1)$$

Ezt úgy tudjuk kiszámolni, hogy beillesztünk egy teljes rendszert a két operátor közé:

$${}_\Phi \langle 0 | \varphi(x, t) \psi^\dagger(0) | 0 \rangle_{\mathbb{I}} = \sum_n {}_\Phi \langle 0 | \varphi(x, t) | n \rangle_\Phi {}_\Phi \langle n | \psi^\dagger(0) | 0 \rangle_{\mathbb{I}}, \quad (3.2)$$

ahol az összegzésben fellépő tagok két tényezőjét form-faktorokra vezetjük vissza.

Elsőként a form-faktorok általános elméletét írjuk le ebben a fejezetben. Majd a felvázolt elméletet alkalmazzuk, és elemezzük a kapott eredményt.

3.1. Form-faktorok

Ebben a fejezetben [20] alapján dolgozunk.

A modell integrálhatósága miatt nem semmisülnek meg vagy keletkeznek új részecskék, hanem csak rugalmasan szóródnak. 1+1 dimenzióban a részecskék jellemezhetők a θ rapiditásukkal. Ekkor az energiájuk $E_i = m \cosh \theta_i$ és impulzusuk $p_i = m \sinh \theta_i$ képlettel adható meg.

Egy bemeneti állapotban, ahogy $t \rightarrow -\infty$, a részecskék szabadok és rapiditásuk szerint rendezettek. Ezt az állapotot így jelöljük:

$$|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\rangle_{be}, \quad \text{ahol} \quad \theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_n > 0. \quad (3.3)$$

A kölcsönhatások után, ahogy $t \rightarrow \infty$ a kimenő állapotban szintén szabadok a részecskék:

$$|\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_n\rangle_{ki}, \quad \text{ahol} \quad \theta'_1 < \theta'_2 < \dots < \theta'_n < 0. \quad (3.4)$$

A be- és a kimeneti állapotokat köti össze az S szórásmátrix, ami az integrálhatóság miatt faktorizálódik kétrészecske kölcsönhatásokra:

$$|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\rangle_{be} = \prod_{i < j} S(\theta_i - \theta_j) |\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\rangle_{ki}. \quad (3.5)$$

Az S -mátrix a Lee–Yang-modellben a következő alakot veszi fel:

$$S(\theta) = \frac{\sinh \theta + i \sin \frac{\pi}{3}}{\sinh \theta - i \sin \frac{\pi}{3}}. \quad (3.6)$$

Ha van egy lokális $\mathcal{O}(x, t)$ operátorunk, akkor ennek a két állapot közötti mátrixelemét hívjuk form-faktornak:

$$F_{mn}^{\mathcal{O}}(\theta'_1, \dots, \theta'_m; \theta_1, \dots, \theta_n) = {}_{ki}\langle \theta'_1, \dots, \theta'_m | \mathcal{O}(0, 0) | \theta_1, \dots, \theta_n \rangle_{be}, \quad (3.7)$$

ami visszavezethető elemi form-faktorokra. Ezek

$$F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \langle 0 | \mathcal{O}(0, 0) | \theta_1, \dots, \theta_n \rangle \quad (3.8)$$

alakúak.

3.1.1. Tömbi form-faktorok

A form-faktorokat először teljes (perem nélküli) térben adjuk meg ismét [20] alapján.

Felírhatók axiómák, amik megadják milyen tulajdonságokat kell kielégíteniük a keresett függvényeknek, hogy form-faktorok lehessenek. Ezek megtalálhatók [21]-ben és [20]-ben is, most csak a belőlük kapott megoldást mutatjuk be. A form-faktor axiómákat teljesítő függvények alakja (ahol a $\mathcal{O} = \varphi$ jelölést elhagytuk):

$$F_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \langle \varphi \rangle H_n \prod_{i < j} \frac{f(\theta_i - \theta_j)}{x_i + x_j} Q_n(x_1, \dots, x_n), \quad (3.9)$$

ahol bevezetjük az $x_i = e^{\theta_i}$ jelölést. Az $f(\theta)$ függvény a

$$f(\theta) = \frac{e^\theta + e^{-\theta} - 2}{e^\theta + e^{-\theta} + 1} v(i\pi - \theta) v(i\pi + \theta) \quad (3.10)$$

képlettel kifejezhető minimális form-faktor, ahol a $v(\theta)$ függvény definíciója pedig:

$$v(\theta) = \exp \left\{ 2 \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{i\frac{\theta t}{\pi}} \frac{\sinh \frac{t}{2} \sinh \frac{t}{3} \sinh \frac{t}{6}}{\sinh^2 t} \right\}. \quad (3.11)$$

Numerikus számolásokra viszont a következő alakot használjuk gyorsabb konvergenciája miatt:

$$v(\theta) = \prod_{n=1}^N \left[\frac{(\frac{\theta}{2i\pi} + n + \frac{1}{2})(\frac{\theta}{2i\pi} + n - \frac{1}{6})(\frac{\theta}{2i\pi} + n - \frac{1}{3})}{(\frac{\theta}{2i\pi} + n - \frac{1}{2})(\frac{\theta}{2i\pi} + n + \frac{1}{6})(\frac{\theta}{2i\pi} + n + \frac{1}{3})} \right]^n \cdot \exp \left(2 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\sinh \frac{t}{2} \sinh \frac{t}{3} \sinh \frac{t}{6}}{\sinh^2 t} (N + 1 - Ne^{-2t}) e^{-2Nt + i\frac{\theta t}{\pi}} \right). \quad (3.12)$$

Továbbá H_n egy normálási faktor:

$$H_n = \left(\frac{3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}} v(0)} \right)^n. \quad (3.13)$$

$Q_n(x)$ az axiómákból meghatározható, és kiderül, hogy szimmetrikus polinomnak kell lennie. Érdekes, hogy csak ebben a tagban jelenik meg a kifejezés operátorfüggése. Az első három $Q(x)$ -et írjuk fel a $\sigma_k(x_1, \dots, x_n)$ szimmetrikus bázispolinomokkal kifejezve:

$$Q_1 = 1; \quad Q_2(x_1, x_2) = \sigma_1(x_1, x_2); \quad Q_3(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1(x_1, x_2, x_3) \sigma_2(x_1, x_2, x_3). \quad (3.14)$$

A szimmetrikus bázispolinomok a következőképpen vannak definiálva:

$$\prod_{i=1}^n (x + x_i) = \sum_k x^{n-k} \sigma_k(x_1, \dots, x_n) \quad (3.15)$$

Az első kettő form-faktor kicsit más viselkedésű. F_0 megegyezik az operátor vákuum várható értékével, F_1 pedig a relativisztikus invariancia miatt nem függhet a rapiditástól, így mindkettő konstans lesz:

$$F_0 = \langle \varphi \rangle = -\frac{\pi m^2}{4\sqrt{3}} \quad \text{és} \quad F_1 = -\frac{i\pi m^2}{2^{\frac{5}{2}} 3^{\frac{1}{4}} v(0)}. \quad (3.16)$$

Mindezt kihasználva felbonthatunk egy tetszőleges kétpont-függvényt a form-faktorok segítségével:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{O}(r) \mathcal{O}(0) | 0 \rangle &= \sum_n \langle 0 | \mathcal{O}(r) | n \rangle \langle n | \mathcal{O}(0) | 0 \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta_1}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta_n}{2\pi} F_n(\theta_1, \dots, \theta_n) F_n(\theta_n, \dots, \theta_1) e^{imr \sum_i \cosh \theta_i}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.1.2. Peremváltó operátor form-faktora

Az előző alfejezetben leírtak általánosíthatóak peremes rendszerekre is. Ehhez az egész alfejezetben [16]-t használjuk.

A bemenő és kimenő állapotokat ugyanúgy definiálhatjuk egy tetszőleges α perem esetén mint korábban, viszont az állapotok szórását leíró (3.5) egyenlet módosulni fog, még hozzá

$$|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\rangle_{be}^\alpha = \prod_{i < j} S(\theta_i - \theta_j) S(\theta_i + \theta_j) \prod_i R^\alpha(\theta_i) |-\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_n\rangle_{ki}^\alpha \quad (3.18)$$

módon, ami kifejezi azt is, hogy a részecskék kétszer szóródnak egymáson – emiatt van két S-mátrix – és megjelenik a részecskéknek a peremről való visszaverődését leíró $R^\alpha(\theta)$ reflexiós amplitúdó, ami egy részecskére így hat:

$$|\theta\rangle_{be}^\alpha = R^\alpha(\theta) |-\theta\rangle_{ki}^\alpha \quad (3.19)$$

Ezeket a reflexiós amplitúdókat megadjuk az $\mathbb{I}$ identitás és a Φ peremre:

$$R^\mathbb{I}(\theta) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \left(-\frac{2}{3}\right); \quad (3.20)$$

$$R^\Phi(\theta) = R^\mathbb{I}(\theta) S(\theta - \theta_0) S(\theta + \theta_0), \quad (3.21)$$

ahol bevezettük az

$$(x) = \frac{\sinh(\frac{\theta}{2} + i\frac{\pi x}{2})}{\sinh(\frac{\theta}{2} - i\frac{\pi x}{2})} \quad \text{és} \quad \theta_0 = i\pi \frac{3-b}{6} \quad (3.22)$$

jelöléseket. A megjelenő b egy dimenziótlan konstans, ami a perem csatolási állandójával áll kapcsolatban.

Egy α peremről β peremre váltó operátor form-faktorára is felírhatók axiómák, amik [16]-ben megtalálhatók. Most csak az $\mathbb{I}$ peremről a Φ -re váltó $\psi^{\Phi\mathbb{I}} = \psi^\dagger$ operátor form-faktora jelenik meg a további számolásunkban.

(3.9) egyenlethez hasonlóan felírható lesz az n -részecske form-faktor paraméterezett formában:

$$F_n^{\Phi\mathbb{I}}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \langle \psi^\dagger \rangle H_n^{\Phi\mathbb{I}} \prod_{i=1}^n \frac{r^{\Phi\mathbb{I}}(\theta_i)}{y_i} \prod_{i < j} \frac{f(\theta_i - \theta_j) f(\theta_i + \theta_j)}{y_i + y_j} Q_n^{\Phi\mathbb{I}}(y_1, \dots, y_n), \quad (3.23)$$

ahol $y = e^\theta + e^{-\theta}$. A $\langle \psi^\dagger \rangle$ a peremváltó operátor vákuum várható értéke nem ismert, ezért most egynek fogjuk venni.

A tömbi esettel ellentétben az egyrészecske form-faktor is függeni fog a rapiditástól, ugyanis a perem elrontotta a Lorentz-invarianciát:

$$F_1^{\Phi\mathbb{I}}(\theta) = r^{\Phi\mathbb{I}}(\theta) Q_1^{\Phi\mathbb{I}}(y). \quad (3.24)$$

Az $f(\theta)$ függvények ugyanazok, mint amiket a tömbi form-faktornál definiáltunk (3.10) képlettel. A $H_n^{\Phi\mathbb{I}}$ normálást szintén ugyanúgy határozzuk meg, mint (3.13)-ban.

Az $r^{\Phi\mathbb{I}}(\theta)$ egyrészecske minimális peremváltó form-faktort két segédmennyiséggel definiálhatjuk:

$$r^{\Phi\mathbb{I}}(\theta) = -r^{\mathbb{III}}(\theta) r_\phi(\theta). \quad (3.25)$$

Az $r^{\text{III}}(\theta)$ az identitás peremhez tartozó egyrészecske form-faktor minimális megoldása:

$$r^{\text{III}}(\theta) = 4i \sinh \theta \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{dt \sinh(t) - \cosh(\frac{t}{2} - \frac{i\theta t}{\pi})(\sinh \frac{5t}{6} + \sinh \frac{t}{2} - \sinh \frac{t}{3})}{t \sinh \frac{t}{2} \sinh t} \right\}. \quad (3.26)$$

Az $r_\phi(\theta)$ faktor pedig a következő alakú:

$$r_\phi(\theta) = \mathcal{N} \exp \left\{ 2 \int_0^\infty \frac{dt \sinh \frac{b+1}{6}t + \sinh \frac{b-1}{6}t - \sinh \frac{b+7}{6}t - \sinh \frac{b+5}{6}t}{t \sinh^2 t} \sin^2 \left(\frac{i\pi - \theta}{2\pi} t \right) \right\}, \quad (3.27)$$

ahol $\mathcal{N}$ egy normálási faktor:

$$\mathcal{N} = -\frac{1}{4} \exp \left\{ 2 \int_0^\infty \frac{dt \cosh(\frac{b+3}{6}t)(\sinh \frac{t}{3} + \sinh \frac{2t}{3}) - \sinh t}{t \sinh^2 t} \right\}. \quad (3.28)$$

A $Q_n^{\psi^\dagger}$ -eket ismét szimmetrikus polinomokként állíthatjuk elő (csak az Q_2 -ig kellene a kifejezések):

$$Q_0^{\psi^\dagger} = 1, \quad Q_1^{\psi^\dagger}(y_1) = 1, \quad Q_2^{\psi^\dagger}(y_1, y_2) = -y(\theta_0) + y_1 + y_2. \quad (3.29)$$

3.2. A korrelációs függvény kiszámítása form-faktorokkal

Az általunk meghatározni kívánt korrelációs függvény a már említett alakú:

$${}_\Phi \langle 0 | \varphi(x, t) \psi^\dagger(0) | 0 \rangle_{\mathbb{I}}. \quad (3.30)$$

Illesszünk be egy teljes rendszert a két operátor közé. Innentől minden kifejtést csak a kétrészecske állapotokig végzünk el, mivel elég gyorsan konvergálnak az integrálok.

$$\begin{aligned} {}_\Phi \langle 0 | \varphi(x, t) \psi^\dagger(0) | 0 \rangle_{\mathbb{I}} &= {}_\Phi \langle 0 | \varphi(x, t) | 0 \rangle_\Phi {}_\Phi \langle 0 | \psi^\dagger(0) | 0 \rangle_{\mathbb{I}} + \\ &\quad \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} {}_\Phi \langle 0 | \varphi(x, t) | \theta \rangle_\Phi {}_\Phi \langle \theta | \psi^\dagger(0) | 0 \rangle_{\mathbb{I}} + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2} {}_\Phi \langle 0 | \varphi(x, t) | \theta_1, \theta_2 \rangle_\Phi {}_\Phi \langle \theta_1, \theta_2 | \psi^\dagger(0) | 0 \rangle_{\mathbb{I}} + \dots \end{aligned} \quad (3.31)$$

Mindegyik tagban a Φ peremhez tartozó Hamilton-függvénnyel fejlesszük az időt 0-ból t -be, valamint a második tagot helyettesíthetjük a peremváltó operátor form-faktorával:

$$0 \text{ részecske: } {}_\Phi \langle 0 | \varphi(x, 0) | 0 \rangle_\Phi e^{iE_\Phi t} F_0^{\Phi \mathbb{I}}; \quad (3.32)$$

$$1 \text{ részecske: } {}_\Phi \langle 0 | \varphi(x, 0) | \theta \rangle_\Phi e^{i(E_\Phi + m \cosh \theta)t} F_1^{\Phi \mathbb{I}}(\theta); \quad (3.33)$$

$$2 \text{ részecske: } {}_\Phi \langle 0 | \varphi(x, 0) | \theta_1, \theta_2 \rangle_\Phi e^{i(E_\Phi + m \cosh \theta_1 + m \cosh \theta_2)t} F_2^{\Phi \mathbb{I}}(\theta_1, \theta_2), \quad (3.34)$$

ahol a megjelenő E_Φ a perem energiája, ami a Φ peremre $E_\Phi = \frac{y(\theta_0)}{2}$ [16].

A kapott kifejezésekben az első tag egy operátor form-faktora perem jelenlétében. Ezt [18] alapján átírhatjuk úgy, mintha "elfordítanánk" a téridőt 90° -kal, és az operátor elnyelne részecskéket majd egy peremállapottal hatna kölcsön. Az elfordítás során a rapiditást is el kell tolni $-\frac{i\pi}{2}$ -vel. Ezt felírva egy tetszőleges ϕ operátorra kapjuk, hogy:

$${}_\Phi \langle 0 | \phi(x, 0) | n \rangle_\Phi = \left\langle n - \frac{i\pi}{2} \left| \phi(0, ix) \right| B_\Phi \right\rangle. \quad (3.35)$$

A $|B_\Phi\rangle$ mennyiséget peremállapotnak hívjuk. Ez kifejezhető a Zamolodchikov-Faddeev algebrából származó $A(\theta)$ operátorral, ami egy θ rapiditású részecskét kelt. Ezt a sorfejtést ismét két részecskéig használjuk:

$$|B_\Phi\rangle = \left(1 + \frac{g_\Phi}{2}A(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} K_\Phi(\theta)A(-\theta)A(\theta) + \dots\right) |0\rangle. \quad (3.36)$$

Itt a g_Φ a perem-részecske csatolási állandó, és K_Φ (3.21) képlettel definiált R^Φ -vel áll kapcsolatban:

$$g_\Phi = -2i \frac{\text{tg}[(b+2)\frac{\pi}{12}]}{\text{tg}[(b-2)\frac{\pi}{12}]} \sqrt{2\sqrt{3}-3} \quad \text{és} \quad K_\Phi(\theta) = R^\Phi\left(\frac{i\pi}{2} - \theta\right). \quad (3.37)$$

(3.35) egyenletet úgy fogjuk alkalmazni, hogy egy teljes rendszert illesztünk be az operátor és a peremállapot közé, majd kifejtjük a kapott eredményt.

Nézzük meg ezt először a 0 tömbi részecskét tartalmazó tagra, de csak kettő peremállapotbeli részecskéig:

$$\begin{aligned} \langle 0|\varphi(0, ix)|B_\Phi\rangle &\approx \langle 0|\varphi|0\rangle + \frac{g_\Phi}{2}\langle 0|\varphi|\tilde{\theta}=0\rangle e^{-mx} + \int_0^\infty \frac{d\tilde{\theta}}{2\pi} \langle 0|\varphi|\tilde{\theta}, -\tilde{\theta}\rangle e^{-2mx \cosh \tilde{\theta}} \\ &= F_0 + \frac{g_\Phi}{2}F_1 e^{-mx} + \int_0^\infty \frac{d\tilde{\theta}}{2\pi} F_2(\tilde{\theta}, -\tilde{\theta}) K(\tilde{\theta}) e^{-2mx \cosh \tilde{\theta}}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

ahol az F_n függvények (3.9) tömbi form-faktorok, illetve most a szabad Hamilton-operátorral végeztük el az "időfejlesztést".

Az egyrészecskés tag esetén figyelembe kell venni a form-faktor keresztezési szimmetriáját, ami azt mondja hogy

$$\langle \theta'|\varphi|\theta\rangle = \langle 0|\varphi|\theta' + i\pi, \theta\rangle = F_2(\theta' + i\pi, \theta). \quad (3.39)$$

És így a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \left\langle \theta - \frac{i\pi}{2} \left| \varphi(0, ix) \right| B_\Phi \right\rangle &\approx F_1(\theta) e^{xm \cosh(\theta - \frac{i\pi}{2})} + \frac{g_\Phi}{2} F_2\left(\theta + \frac{i\pi}{2}, 0\right) e^{xm[\cosh(\theta - \frac{i\pi}{2}) - 1]} + \\ &+ \int_0^\infty \frac{d\tilde{\theta}}{2\pi} F_3\left(\theta + \frac{i\pi}{2}, \tilde{\theta}, -\tilde{\theta}\right) K(\tilde{\theta}) e^{mx[\cosh(\theta - \frac{i\pi}{2}) - 2 \cosh \tilde{\theta}]}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

És a két részecskét tartalmazó tagra is felírjuk:

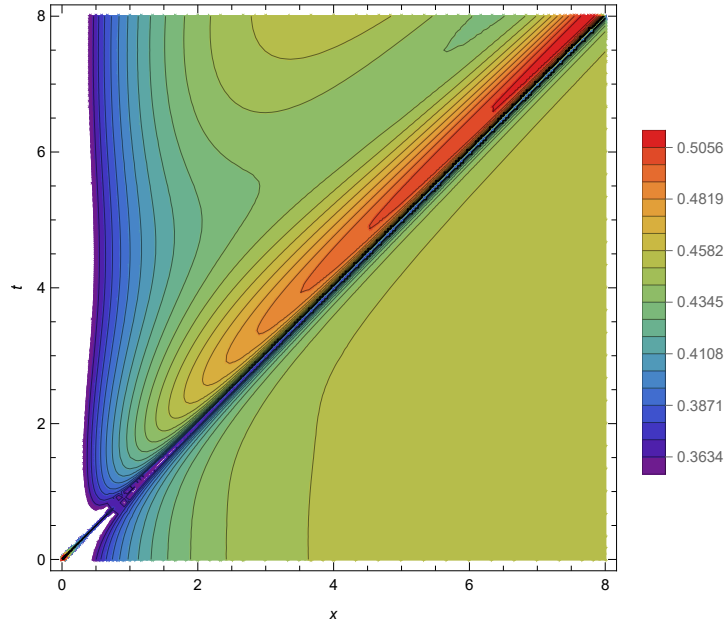
$$\begin{aligned} \left\langle \theta_1 - \frac{i\pi}{2}, \theta_2 - \frac{i\pi}{2} \left| \varphi(0, ix) \right| B_\Phi \right\rangle &\approx \\ &\approx F_2\left(\theta_1 + \frac{i\pi}{2}, \theta_2 + \frac{i\pi}{2}\right) e^{xm[\cosh(\theta_1 - \frac{i\pi}{2}) + \cosh(\theta_2 - \frac{i\pi}{2})]} + \\ &+ \frac{g_\Phi}{2} F_3\left(\theta_1 + \frac{i\pi}{2}, \theta_2 + \frac{i\pi}{2}, 0\right) e^{xm[\cosh(\theta_1 - \frac{i\pi}{2}) \cosh(\theta_2 - \frac{i\pi}{2}) - 1]} + \\ &+ \int_0^\infty \frac{d\tilde{\theta}}{2\pi} F_4\left(\theta_1 + \frac{i\pi}{2}, \theta_2 + \frac{i\pi}{2}, \tilde{\theta}, -\tilde{\theta}\right) K(\tilde{\theta}) e^{mx[\cosh(\theta_1 - \frac{i\pi}{2}) + \cosh(\theta_2 - \frac{i\pi}{2}) - 2 \cosh \tilde{\theta}]}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

A numerikus számolásnál mind tömbi, mind peremállapotban csak egy részecskéig megyünk el (kivéve a 0 tömbi részecskés állapotban, mert ott még a kétrészecskés peremállapot is jelentős járulékot ad), mivel ezek elég gyorsan konvergálnak és elég pontos

eredményt adnak ahhoz, hogy szemléltetni tudjuk a viselkedésüket. Így végül az általunk numerikusan vizsgált korrelációs függvény a következő lesz:

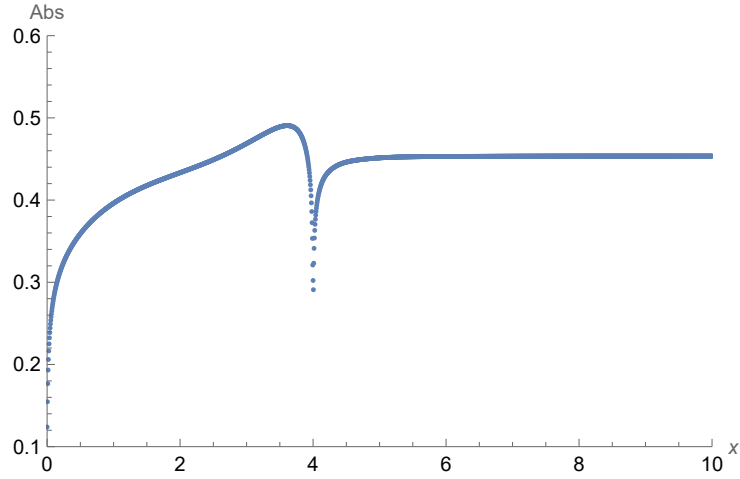
$$\begin{aligned} {}_{\Phi}\langle 0|\varphi(x,t)\psi^{\dagger}(0)|0\rangle_{\mathbb{I}} &\approx \\ &\approx e^{iE_{\Phi}t}F_0^{\Phi\mathbb{I}}\left(F_0+\frac{g_{\Phi}}{2}F_1e^{-mx}+\int_0^{\infty}\frac{d\theta}{2\pi}F_2(\theta,-\theta)K(\theta)e^{-2mx\cosh\theta}\right)+ \\ &+e^{iE_{\Phi}t}\int_0^{\infty}\frac{d\theta}{2\pi}e^{im(t\cosh\theta-x\sinh\theta)}\left(F_1F_1^{\Phi\mathbb{I}}(\theta)+\frac{g_{\Phi}}{2}F_1^{\Phi\mathbb{I}}(\theta)F_2\left(\theta+\frac{i\pi}{2},0\right)e^{-mx}\right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ábrázoljuk ennek az abszolútértékét a $t-x$ síkon!



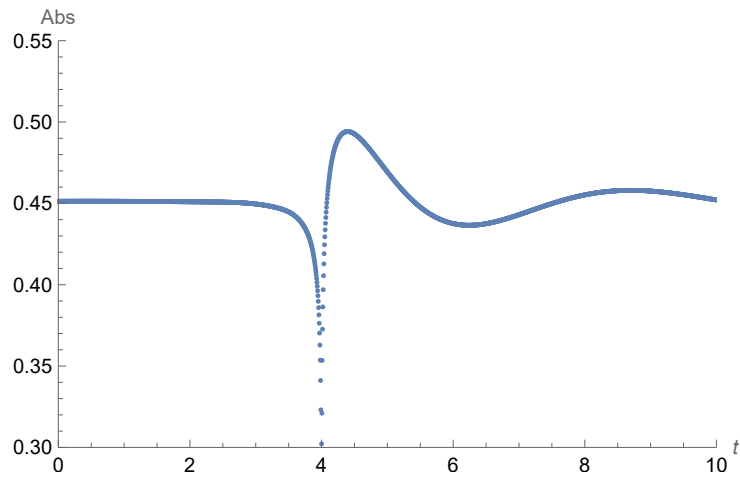
3.2. ábra. A (3.42) abszolútértékének ábrázolása $x, t \in [0, 8]$ intervallumon, $m = 1$ és $b = -\frac{1}{2}$ mellett.

A 3.2 ábráról három dolgot tudunk megállapítani. Először is látjuk, hogy az $x = t$ egyenes szétválasztja a téridőt két tartományra. Ez pont olyan, mint egy fénykúp, aminek a jelenléte Minkowski-térben a kauzalitás miatt elvárt. Az az információ, hogy megváltoztattuk a peremfeltételt, véges sebességgel terjed, így csak az origótól időszerűen szeparált pontok érzik a hatását. Emiatt arra számítottunk, hogy a térszerűen szeparált rész úgy érzi, mintha az $\mathbb{I}$ perem lenne rá kivette, míg az időszerűen szeparáltra a Φ .



3.3. ábra. A korrelációs függvény abszolútértékének ábrázolása konstans $t = 4$ metszetben.

A térszerű részben (3.3 ábra) azt látjuk, hogy ahogy nő x , a megoldás gyorsan lecseng, és közelít egy konstans értékhez. A konstans érték x növelésével tart a tömbi operátor vákuum várható értékéhez $\mathbb{I}$ perem mellett – ez egyenlő F_0 -al – ahogy a többi tag járuléka lecseng.



3.4. ábra. A korrelációs függvény abszolútértéke $x = 4$ metszetben.

Az időszerű részben pedig (3.4 ábra) azt látjuk, hogy valóban oszcillálva közelít a tömbi tér vákuum várható értékéhez. Mindkét ábrán megfigyelhető a szingularitás is a fénykúpon, azaz amikor $x = t$.

3.3. Aszimptotikus viselkedés

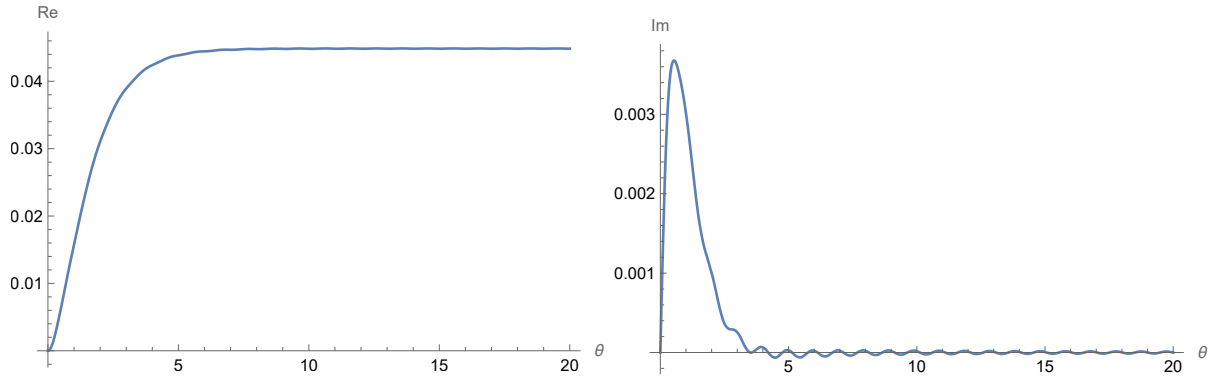
Vizsgáljuk meg a (3.42) korrelációs függvény aszimptotikus viselkedését az időszerűen, illetve a térszerűen szeparált téridőtartományokban!

Elsőként tekintsük azt az esetet, hogy $x < t$ adott, azaz a téridő időszerű részében vizsgálódunk. Látjuk, hogy ekkor a csak x -et tartalmazó integrálok egy konstans komplex szám járulékat adnak, amit jelöljünk C_x -szel. A korrelációs függvényt – amit jelöljünk

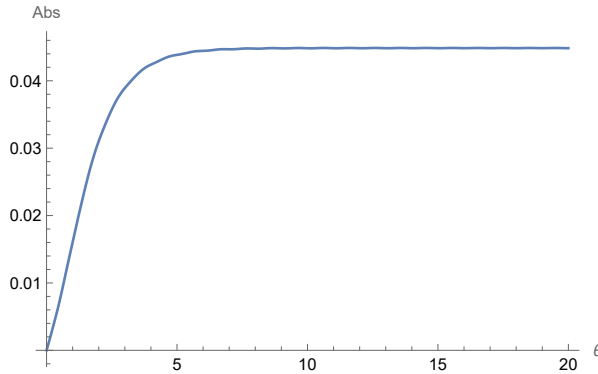
$G(x, t)$ -vel – átírhatjuk a következő alakra:

$$G(x, t) \approx e^{iE_\Phi t} C_x + e^{iE_\Phi t} \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} e^{im(t \cosh \theta - x \sinh \theta)} F_1^{\Phi\mathbb{I}}(\theta) \left(F_1 + \frac{g_\Phi}{2} F_2 \left(\theta + \frac{i\pi}{2}, 0 \right) e^{-mx} \right). \quad (3.43)$$

Az egyrészecskét tartalmazó integrálban megjelenő form-faktorokból álló szorzótényezőnek a becsléséhez kihasználjuk, hogy a valós része és az abszolútértéke közel megegyezik (ahogy látható a 3.5 ábrán), így az integrál közelítésében az egész szorzófaktor helyett csak az abszolútértékének rapiditásban nulladrendű kifejtését vesszük, amit pedig jelöljünk $|\tilde{F}(\theta_0)|$ -val. Az egyezés kicsi argumentumokra már nem ennyire egzakt, de ezt egy szorzófaktorral vesszük figyelembe nulladik közelítésben.



(a) Az integrálban megjelenő szorzófaktor valós része. (b) Az integrálban megjelenő szorzófaktor képzetes része.



(c) Az integrálban megjelenő szorzófaktor abszolútértéke.

3.5. ábra. Az integrálban megjelenő szorzófaktorok viselkedése.

Mindezt figyelembe véve a korrelációs függvény egy adott x -nél kifejezhető a következő módon:

$$G(x, t) \sim e^{iE_\Phi t} \left(C_x + |\tilde{F}(\theta_0)| \int_0^\infty d\theta e^{im(t \cosh \theta - x \sinh \theta)} \right). \quad (3.44)$$

Az integrandus nagyon gyorsan oszcillál, így numerikusan nehezen kiszámolható az integrál értéke, analitikusan pedig nem lehet zárt alakú megoldást találni rá. A közelítéséhez a nyeregponthoz módszert alkalmazzuk [22], ami jól használható exponenciálist tartalmazó

integrálok kiszámolásához:

$$I(t) = \int_{z_1}^{z_2} dz e^{f(z,t)} = \int_0^\infty dz e^{im(t \cosh z - x \sinh z)}. \quad (3.45)$$

Elsőként meg kell keresni a kitevő nyeregpontját, ahol $f'(z)|_{z_0} = 0$, és ekörül a pont körül kell sorba fejteni. Így már csak második (ill. magasabb) rendben függ z -től. Ezután az integrálási görbét el kell transzformálni (ami a komplex síkon megtehető, ha közben nem haladunk át szingularitáson és egyezik a hosszútávú aszimptotika) abba az irányba, amerre az integrandus abszolútértéke a legmeredekebben csökken. Mivel ekkor az integrál gyorsan lecseng, közelíthetjük már Gauss-integrállal.

Esetünkben a kitevő nyeregpontja $\theta_0 = \operatorname{arth}(\frac{x}{t})$, amit visszahelyettesítve kapjuk, hogy:

$$f(\theta_0, t) = im(t \cosh \theta_0 - x \sinh \theta_0) = im\sqrt{t^2 - x^2}. \quad (3.46)$$

Ha a kitevőt ezután második rendig sorba fejtjük kapjuk, hogy:

$$e^{im(t \cosh z - x \sinh z)} \approx e^{im\sqrt{t^2 - x^2} + \frac{im}{2}\sqrt{t^2 - x^2}(z - \theta_0)^2 + \mathcal{O}(z^3)}, \quad (3.47)$$

ahol láthatjuk, hogy az integrandus csak másodrendben függ az integrálási változótól, ezért a z -től független nulladrendű tagot kiemeljük. Észrevehetjük, hogy a visszamaradt integrandus kitevőjének valós része egy nyeregfelületet ír le. Ezután térjünk át polárkoordináták alakjára: $z - \theta_0 = re^{i\phi}$. Így a megmaradt integrandus:

$$e^{\frac{im}{2}\sqrt{t^2 - x^2}(z - \theta_0)^2} = \exp\left(\frac{mr^2}{2}\sqrt{t^2 - x^2}e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\phi)}\right). \quad (3.48)$$

ϕ a nyeregfelület legmeredekebb csökkenésének iránya, amit ha jól választunk meg egy sima Gauss-integrált kell kiszámolnunk. A kitevőben tehát egy negatív valós számot akarunk látni. Ez a $\phi = \frac{\pi}{4}$ vagy $\phi = -\frac{3\pi}{4}$ választásnál teljesül. A form-faktoros eredménnyel egyeztetve kiderül viszont, hogy bár az integrál Gauss-szal való közelítése helyes, a $\phi = \frac{3\pi}{4}$ adja a helyes viselkedést. Ennek valószínűleg a numerikus implementáció során használt függvények sajátos definíciója lehet az oka. Az integrál elvégzésével végül a következő eredményt kaptuk:

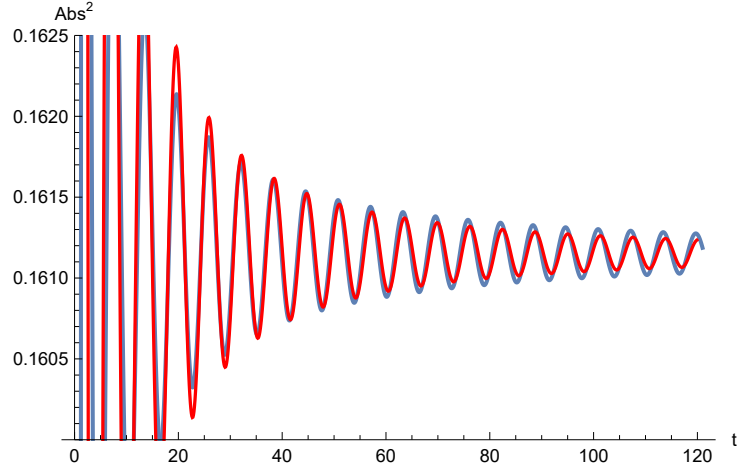
$$I(t) \approx e^{im\sqrt{t^2 - x^2} + i\frac{3\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}m\sqrt{t^2 - x^2}r^2} dr \propto \frac{e^{im\sqrt{t^2 - x^2} + i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt[4]{t^2 - x^2}}. \quad (3.49)$$

A (3.44)-ben megjelenő form-faktorokból álló közelítő szorzófaktort a nyeregponti módszer által meghatározott θ_0 -ban kell venni. Mivel $\frac{x}{t} \rightarrow 0$, $\operatorname{arth}(\frac{x}{t}) \sim \frac{x}{t}$ helyettesítés aszimptotikusan pontos közelítést ad. Összefoglalva a kapott kifejezés a korrelációs függvényre az időszerű tartományban:

$$G(x, t) \sim e^{iE_\Phi t} \left(C_x + C \left| \tilde{F}\left(\frac{x}{t}\right) \right| \frac{e^{im\sqrt{t^2 - x^2} + i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt[4]{t^2 - x^2}} \right), \quad (3.50)$$

ahol a C valós konstans a nyeregponti módszerben fellépő konstansokból, és a form-faktor abszolútértékkel való közelítésének korrekciójából származik.

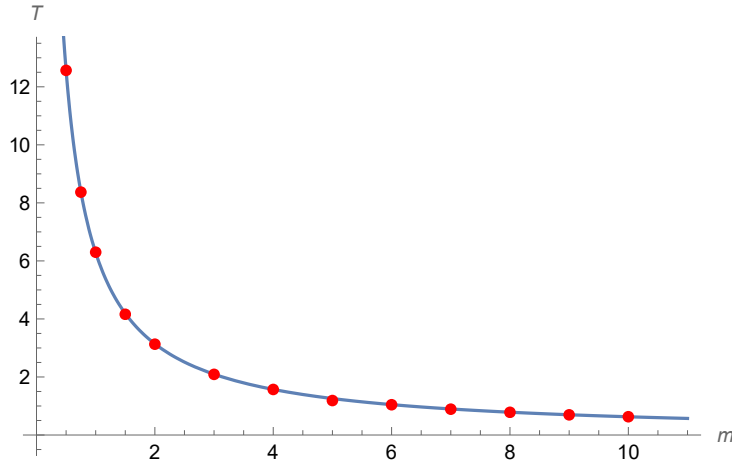
Mindezek után kiszámoltuk a korrelációs függvény numerikusan kapott értékét $x = 1$ mellett és a kapott közelítést, amit a 3.6. ábrán szemléltetünk.



3.6. ábra. A korrelációs függvény abszolútérték négyzetének ábrázolása (*kékkel*) $x = 1$ -nél $m = 1$ tömeg mellett, és az aszimptotikus formula abszolútérték négyzete (*pirossal*) ugyanezen tartományon.

Minél nagyobb időket nézünk, $\text{arth}(\frac{x}{t}) \rightarrow \frac{x}{t}$ -hez és mint láthattuk, az integrál ennek a pontnak a környezetéből szedi össze a legnagyobb járulékot. Ez pont egy rapiditásjellegű mennyiség. Tehát első közelítésben azon részecskék járulékát vettük csak figyelembe az integrálban, amik egyenes vonalon mozogva jutottak el az origóból a vizsgált pontunkba.

Az oszcilláció periódusát (T) több tömegértéknél is megmértük. Azt tapasztaltuk, hogy a periódus fordítottan arányos a tömeggel. Ez nagyon jól egyezik az aszimptotikus kifejezésből elvárt $\frac{2\pi}{m}$ oszcillációs periódussal.

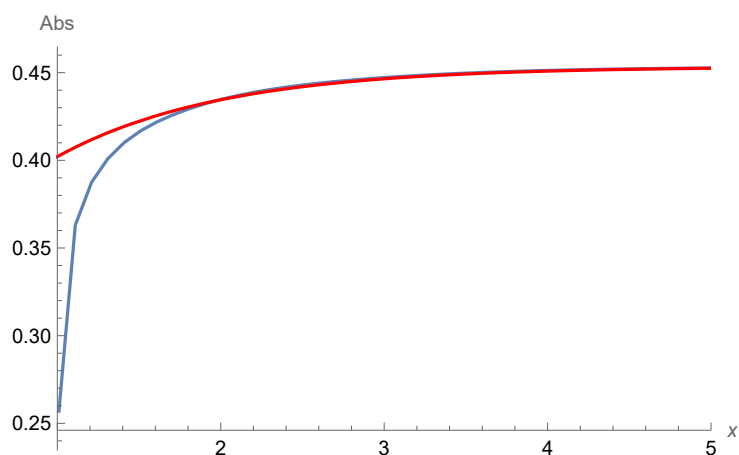


3.7. ábra. A mért periódusok (*pirossal*) ábrázolva a várt $\frac{2\pi}{m}$ -es viselkedéssel (*kék*).

A térszerű téridőtartományban egy adott t idő mellett vizsgáljuk a korrelációs függvény aszimptotikus viselkedését $x > t$ -re. A (3.42) képletben az integrális tagok járuléka az előzőekben leírt nyeregponthoz közelítésként kiindulva $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ vagy ennél még gyorsabban lecsengő. Hosszú távon tehát csak az F_0 tömbi várható értéke, és az exponenciális tag határozza meg a függvény aszimptotikáját. Ezáltal a korrelációs függvény aszimptotikus közelítése a térszerű részben felírható a következő függvénnyel:

$$G(x, t) \sim e^{iE_{\Phi}t} \left(F_0 + \frac{g_{\Phi}}{2} F_1 e^{-mx} \right). \quad (3.51)$$

Összehasonlíthatjuk, hogy (3.51) mennyira ad jó közelítést a korrelációs függvényre:



3.8. ábra. A korrelációs függvény abszolútértékének ábrázolása $t = 1$ -nél (*kék*) $m = 1$ tömegre, és az aszimptotikus közelítés abszolútértékének ábrázolása (*piros*).

Az aszimptotikus formula $x > 2$ értékekre jó közelítést ad, annál közelebb már a fénykúp jelentős hatással van a terekre, így magasabb rendű sorfejtésre lenne szükség, a még jobban egyező leíráshoz.

4. fejezet

Konklúzió

A dolgozatban a peremes Lee–Yang-modellben vizsgáltuk azt a fizikai rendszert, hogy az $\mathbb{I}$ identitás peremfeltételt hirtelen átváltjuk egy peremváltó operátorral a Φ peremfeltételre. Ezen belül a peremváltó operátor és egy tömbi operátor korrelációs függvényét számoltuk ki.

Elsőként a kritikus esetben konform térelmélettel írtuk le a folyamatot. Rövid elméleti bevezető után átranzormáltuk a rendszert a konform síkra, ami során a korrelációs függvényből egy négy pont-függvényt kaptunk, mely egy differenciálegyenletet elégített ki. Illesztettük ennek megoldásait a peremfeltételekhez, majd ábrázoltuk a függvényeket. Mind euklideszi, mind Minkowski-térben láttuk, hogy az $\mathbb{I}$ és a Φ peremeket különböző meredekséggel közelíti a függvény, ami megfelelt az elmélet által jósolt viselkedésnek. Minkowski metrikában a fénykúpok is megjelentek, mely helyesen adta vissza a várt relativisztikus viselkedést. Mivel a konform térelméletben időrendezett operátorok korrelációs függvényét tudjuk csak kiszámolni a Minkowski metrikában, ezért számolásunk csak $t > 0$ -ra írta le helyesen a fizikai folyamatot.

Ezután off-kritikus elméletben visszavezettük a korrelációs függvényt form-faktorokból álló sorfejtésre. Felírtuk a szükséges form-faktorok definícióját, illetve a peremállapot kifejezését is. A részecskeszám szerinti sorfejtést a gyors konvergencia és a numerikus számolás korlátai miatt csak egy részecskét tartalmazó tagokig vettük figyelembe. Kiszámoltuk a korrelációs függvényt $b = -\frac{1}{2}$ csatolás és $m = 1$ részecsketömeg esetén numerikusan. Ismét megjelent a relativisztikusan elvárt fénykúp, ami elválasztja az időszerű és térszerű megoldásokat. Időszerű tartományban megfigyeltük az oszcillációt, ami során a tér beáll az új egyensúlyi állapotba a hirtelen peremfeltétel változtatás hatására. Térszerű részben ez gyors lecsengéssel történik. Megvizsgáltuk a függvény aszimptotikáját mind időszerű, mind térszerű tartományokban, valamint megállapítottuk, hogy az oszcilláció periódusa fordítottan arányos a részecskék tömegével.

A továbbiakban a számolás általánosítása és igazolása a célunk. Elsőként a konform csonkolt állapotter közelítéssel (TCSA) szerettük volna kimérni az ismertett rendszer korrelációs függvényét. A TCSA módszerét Yurov és Zamolodchikov vezette be a skálázó Lee–Yang-modellre, és sikeresen kiszámolták vele a részecskék energiaspektrumát [23]. Pozsgay és Takács form-faktorok számolására is alkalmazta [21], majd Dorey *et al.* általánosította peremes rendszerekre ([24]). Végül Kormos és Takács ezt felhasználva különféle diagonális és nem-diagonális mátrixelemeket határozott meg vele ([25]). Az felsorolt eredményekből kiindulva sikeresen általánosítottuk peremváltás esetére a TCSA-t, ám az eredmények közlése túlmutat a dolgozat keretein. A hátralévő feladat a *Mathematica* programban megvalósított kód továbbfejlesztése, és a korrelációs függvény kiszámolása

lesz.

További fejlesztési irányok közé tartozik még az eredeti form-faktor sorfejtés konvergenciájának a vizsgálata. Tetszőleges b csatolásra szeretnénk meghatározni a form-faktor kifejtést és az aszimptotikát, és vizsgálni fogjuk ezek esetlegesen különlegesen viselkedő eseteit. A nyeregponthoz javításával pontosítani akarjuk a kapott aszimptotikus formulákat, és megtalálni az átfedést a form-faktoros felírás és a konform elmélet között. Az eredményeinket egy későbbi publikációban tervezzük közzétenni.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Bajnok Zoltánnak, aki támogatásával és magas-szintű szakmai tudásával elősegítette ennek a dolgozatnak a megvalósulását, miközben megismertetett a tudományos munkával. Hálás vagyok, hogy elvállalta a témavezetése-met, és immár két és fél éve tartó munkánk során rengeteg ismeretet és tapasztalatot sajátíthattam el tőle.

Köszönjük Lencsés Máténak is, hogy segített a dolgozat alapjául szolgáló probléma felvetésében, és annak fizikai megértésében.

A. függelék

Saját eredmények

Felvetett tudományos kérdés

- Peremváltó operátor és tömbi operátor kölcsönhatásának vizsgálata a Lee–Yang-modellben:
 - kritikus esetben a konform elmélet használatával;
 - off-kritikus esetben a skálázó Lee–Yang-modell felhasználásával.

Alkalmazott módszerek

- Konform szimmetria kihasználása kritikus esetben:
 - A rendszer konform el- és az eredmény visszatranszformálása;
 - A korrelációs függvény visszavezetése négy pont-függvényre;
 - A négy pont-függvény ismert bázismegoldásainak az illesztése a peremközeli operátorszorzat-kifejtéshez;
 - Ábrázolás Minkowski- és euklideszi térben *Mathematica* programmal.
- Form-faktor kifejtés off-kritikus esetben:
 - A korrelációs függvény felbontása mátrixelemekre teljes rendszer beillesztésével;
 - Koordináta elfejlesztése az energiával és az impulzussal;
 - Peremállapot felismerése a téridő elforgatása után, majd az ezt tartalmazó mátrixelem kifejtése a form-faktor axiómák segítségével;
 - Korrelációs függvény és metszeteinek ábrázolása *Mathematica* programmal.
- Aszimptotikus viselkedés vizsgálata:
 - Nyeregponthoz módszer alkalmazása
 - Integrandus sorfejtése;
 - Integrálási út eltolása a komplex síkon.

Eredmények

- A peremváltást tartalmazó rendszerhez tartozó térelméleti mennyiség felírása.
- Konform elméletben a korrelációs függvény helyes meghatározása a hipergeometrikus bázisfüggvények segítségével.
- Off-kritikus esetben a korrelációs függvény sorfejtése form-faktorok segítségével.
- A tér- és időfüggés aszimptotikus viselkedésének meghatározása első rendben.

Irodalomjegyzék

- [1] Davide Fioretto and Giuseppe Mussardo. Quantum quenches in integrable field theories. *New Journal of Physics*, 12(5):055015, may 2010.
- [2] Deepak Iyer, Huijie Guan, and Natan Andrei. Exact formalism for the quench dynamics of integrable models. *Physical Review A*, 87(5), may 2013.
- [3] Zoltan Bajnok. How Integrability Works (for AdS/CFT). *Acta Phys. Polon. B*, 47:2451–2477, 2016.
- [4] Toshiya Kinoshita, Trevor Wenger, and David S. Weiss. A quantum newton’s cradle. *Nature*, 440(7086):900–903, Apr 2006.
- [5] M. A. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac, and M. Rigol. One dimensional bosons: From condensed matter systems to ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*, 83(4):1405–1466, dec 2011.
- [6] Xi-Wen Guan and Peng He. New trends in quantum integrability: Recent experiments with ultracold atoms, 2022.
- [7] Tim Langen, Thomas Gasenzer, and Jörg Schmiedmayer. Prethermalization and universal dynamics in near-integrable quantum systems. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2016(6):064009, June 2016.
- [8] Alvise Bastianello, Andrea De Luca, and Romain Vasseur. Hydrodynamics of weak integrability breaking. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2021(11):114003, November 2021.
- [9] Niklas Beisert, Changrim Ahn, Luis F. Alday, Zoltán Bajnok, James M. Drummond, Lisa Freyhult, Nikolay Gromov, Romuald A. Janik, Vladimir Kazakov, Thomas Klose, Gregory P. Korchemsky, Charlotte Kristjansen, Marc Magro, Tristan McLoughlin, Joseph A. Minahan, Rafael I. Nepomechie, Adam Rej, Radu Roiban, Sakura Schäfer-Nameki, Christoph Sieg, Matthias Staudacher, Alessandro Torrielli, Arkady A. Tseytlin, Pedro Vieira, Dmytro Volin, and Konstantinos Zoubos. Review of ads/cft integrability: An overview. *Letters in Mathematical Physics*, 99(1–3):3–32, October 2011.
- [10] Zoltán Bajnok. Review of ads/cft integrability, chapter iii.6: Thermodynamic bethe ansatz. *Letters in Mathematical Physics*, 99(1–3):299–320, July 2011.
- [11] Dmytro Volin. Quantum integrability and functional equations: applications to the spectral problem of ads/cft and two-dimensional sigma models. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(12):124003, February 2011.

- [12] John L. Cardy. Conformal invariance and the yang-lee edge singularity in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 54:1354–1356, Apr 1985.
- [13] M. Kormos, G. Mussardo, and A. Trombettoni. One-dimensional lieb-liniger bose gas as nonrelativistic limit of the sinh-gordon model. *Physical Review A*, 81(4), April 2010.
- [14] SUBIR GHOSHAL and ALEXANDER ZAMOLODCHIKOV. Boundary s matrix and boundary state in two-dimensional integrable quantum field theory. *International Journal of Modern Physics A*, 09(21):3841–3885, August 1994.
- [15] Z. Bajnok, L. Palla, and G. Takács. On the boundary form factor program. *Nuclear Physics B*, 750(3):179–212, aug 2006.
- [16] Z. Bajnok and L. Hollo. On form factors of boundary changing operators. *Nuclear Physics B*, 905:96–131, apr 2016.
- [17] Paul Ginsparg. Applied conformal field theory, 1988.
- [18] P.E. Dorey, M. Pillin, R. Tateo, and G.M.T. Watts. One-point functions in perturbed boundary conformal field theories. *Nuclear Physics B*, 594(3):625–659, feb 2001.
- [19] Zoltán Bajnok, László Holló, and Gerard Watts. Defect scaling lee–yang model from the perturbed DCFT point of view. *Nuclear Physics B*, 886:93–124, sep 2014.
- [20] Al.B. Zamolodchikov. Two-point correlation function in scaling lee–yang model. *Nuclear Physics B*, 348(3):619–641, 1991.
- [21] B. Pozsgay and G. Takács. Form factors in finite volume i: Form factor bootstrap and truncated conformal space. *Nuclear Physics B*, 788(3):167–208, jan 2008.
- [22] Péter Gnädig. *Bevezetés a disztribúcióelméletbe és fizikai alkalmazásaiba*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1981.
- [23] V. P. YUROV and AL. B. ZAMOLODCHIKOV. Truncated comformal space approach to scaling lee–yang model. *International Journal of Modern Physics A*, 05(16):3221–3245, 1990.
- [24] Patrick Dorey, A.J. Pocklington, Roberto Tateo, and Gérard Watts. Tba and tcsa with boundaries and excited states. *Nuclear Physics B*, 525(3):641–663, August 1998.
- [25] M. Kormos and G. Takács. Boundary form factors in finite volume. *Nuclear Physics B*, 803(3):277–298, November 2008.