



Kozmológiai infláció és sötétenergia egyetlen skalármező paramétereinek függvényében

Kovács Szabolcs

2025. évi 37. OTDK

Kivonat

Egy nem-nulla minimum helyű és értékű skalármező lehetséges szerepét vizsgáltuk homogén és izotrop univerzumban. A fixpontvizsgálat és a differenciálegyenletek numerikus megoldásának módszereivel feltérképeztük a kezdeti feltételeket és a mező paramétereit, amelyek mellett a világegyetem történetének korai illetve kései szakaszaiban gyorsuló tágulást tapasztalunk. Ezek a korszakok megfeleltethetők lennének a kozmológiai inflációnak, illetve a ma tapasztalt sötét energiának, amennyiben az alkalmas paramétertartomány tartalmazná a paraméterek ténylegesen mért értékeit. Ez azonban nem teljesül a ma ismert Brout-Englert-Higgs-potenciál esetén, mivel az inflációt megvalósító ϕ -szereződés mértéke Planck-tömeg nagyságrendű vákuum várható értéket jósol a szimmetriasértett skalármezőnek. Ennek megfelelően választott mező esetén felső becslést tudunk adni a potenciális energia minimum értékére, ami a sötét energiához tartozó kozmológiai konstansként azonosítható be. Bár a fizikai paraméterek nem felelnek meg a részecskefizikából elvártaknak, sikerült bemutatnunk, hogy a két radikálisan más időskálájú jelenséget lehetséges egyetlen modellel vizsgálni.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Mozgásegyenletek származtatása	3
2.1. Skalármezővel kiegészített Einstein-egyenletek	3
2.2. Autonóm egyenletrendszer dimenziótlan változókkal	5
2.3. Divergens tag elkerülése	6
2.4. Gyorsuló tágulás feltétele	6
3. Az autonóm egyenletek megoldása	6
3.1. BEH-szerű potenciális energia	6
3.2. A fixpontvizsgálat módszerei	8
3.2.1. Lineáris stabilitásvizsgálat	8
3.2.2. Központi sokaság elmélet (CMT)	8
3.3. Numerikus analízis	9
3.3.1. Egyenletek megoldása, kezdeti értékek	9
3.3.2. A programról	11
3.3.3. Származtatott mennyiségek	11
3.3.4. Valós időfüggés	12
3.4. Analitikus közelítések	13
3.4.1. A skalármező relatív energiasűrűsége	13
3.4.2. Oszcillációk lépcsőfüggvényként	14
3.4.3. Skalármező az oszcillációk alatt	17
4. Eredmények	17
4.1. Sötét energia	17
4.2. Infláció	20
4.3. Oszcillációk	22
4.4. A világegyetem kora és a Hubble-állandó	24
5. Összegzés	25
5.1. A paramétertér	25
5.2. Módszertanbeli tanulságok	25
5.3. Kitekintés	26

Előszó

Dolgozatomban az [1] cikken alapuló matematikai bevezetés után, a 3. fejezettől a 3.2 szakasz kivételével kizárólag saját munkám eredményeit mutatom be. Ide értem a levezetett egyenleteket, azok analitikus átrendezését, és a numerikus megoldást megvalósító Python programkódot, amelynek ellenőrzésében témavezetőm segítségét is felhasználtam.

A nyelvezetben viszont az irodalomban megszokott többes szám első személyt fogom használni. Ennek oka egyrészt stilisztikai, másrészt pedig utal a támogatásra, amit a kutatás folytatásához kaptam. Szeretném még itt az előszóban megköszönni Trócsányi Tanár Úrnak fáradhatatlan munkáját az egyenleteim, ábráim és helyesírásom javításában; illetve a kutatócsoport tagjainak, hogy meghallgatták eredményeimet, és ötleteikkel iránymutatást adtak későbbi vizsgálatokhoz.

1. Bevezetés

A világegyetem tágulása kísérletileg megfigyelhető jelenség, amelyre elsőként *E. Hubble* következtetett vöröseltolódás méréseiből [2]. Az univerzális tágulás a felfúvódási szakaszokban is érvényes legyen szó akár a ma tapasztalt, sötét energia okozta gyorsuló tágulásról, vagy az inflációs modellek által feltételezett korai exponenciális növekedésről. A sötét energia bizonyítékként szolgálnak a standard gyertyák távolodási sebességein alapuló luminozitás-vöröseltolódás függvényei [3], illetve a Λ CDM modellel jó egyezést mutató CMB hatvány spektrum [4], bár a kétfajta mérés nem ad egyezést a Hubble-állandó értékére [5]. Az inflációs paradigma pedig feloldani tűnik a homogenitás, laposság és hiányzó mágneses monopólok problémáit [6]. Maga a mögöttes mechanizmus viszont az elmúlt évtizedekben sem került feltárássra [7].

Munkám célja, hogy a két, jelentősen más időskálán tapasztalt gyorsuló tágulást megkísérleljem közösen tárgyalni a skalármezők fizikájának nyelvén. Ebben a tanulmányban a választott mezőt a résecskefizika motiválja: a *Brout-Englert-Higgs* mechanizmus potenciális energiáját vizsgáljuk, megengedve a minimum helyének és értékének eltérését a nullától. Az ilyen választás nem új a szakirodalomban [8, 9, 10, 11], azonban általában csak inflatonként használják a mezőt, főként közelítésekkel. A minimumérték pedig bár a részecskefizikában nem kap szerepet, kozmológiailag kiemelkedően fontos, így célszerű nem csak a nullára korlátozni a vizsgálatainkat.

A cikkben két módszert használunk fel a jelenség feltáráására. A sötétenergia szerű viselkedéshez fixpontvizsgálatot alkalmazunk: amennyiben az autonóm egyenletrendszerünk attraktora gyorsulva táguló világegyetemet ír le, akkor a kései időben skalármezőnk tud viselkedni sötétenergiaként. Az inflációhoz a szakirodalomban gyakran használt lassú-gördülés közelítés [7] helyett numerikus szimulációkat alkalmazunk. Ezzel tudjuk validálni azok eredményeit, illetve a tranziens viselkedésbe is belátást nyerni a két időszak közt.

Dolgozatomban mindvégig a $\hbar = c = 1$ választással adódó természetes egységrendszert használom.

2. Mozgásegyenletek származtatása

2.1. Skalármezővel kiegészített Einstein-egyenletek

A mozgásegyenletek származtatása az [1] cikken alapul. Ahhoz, hogy egy Φ skalármező kozmológiai szerepét vizsgáljuk, kiegészíthetjük az Einstein–Hilbert-hatást a skalármező

$$\mathcal{L}_\Phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\Phi)^*\partial_\nu\Phi - V(\Phi) \quad (2.1.1)$$

Lagrange-sűrűségével, amellyel

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_\Phi \right]. \quad (2.1.2)$$

Itt $\mathcal{L}_m$ az anyagmezők Lagrange-sűrűsége, amelynek azonban nem lesz lényeges szerepe tanulmányunkban.

A hatásból származtatható Einstein-egyenletek megoldása a homogén és izotróp univerzumot leíró Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) metrikában történik. Ennek egy különleges esetét, a nulla görbületű (sík) térhez tartozó $k = 0$ paraméterű

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 d\mathbf{r}^2. \quad (2.1.3)$$

metrikát vettük. Elvárásaink szerint a görbületi tagot elnyomná az infláció a simaság problémájának feloldásához, így az egyszerűbb számolások érdekében elhagytuk. Alkalmazva a legkisebb hatás elvét, a skalármező illetve a metrika szerinti variációból kapjuk a Klein-Gordon és az Einstein-egyenleteket. Az utóbbinak az idő- és térszerű komponenseit szétválasztva a Friedmann-egyenletek adódnak:

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \partial_{\Phi}V = 0, \quad (2.1.4)$$

$$\frac{3H^2}{\kappa} = \rho + \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V, \quad (2.1.5)$$

$$-\frac{3H^2}{\kappa} - \frac{2\dot{H}}{\kappa} = P + \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V, \quad (2.1.6)$$

ahol $H = \dot{a}/a$ a skálafaktor relatív változását adott időpillanatban leíró Hubble-paraméter, az Einstein féle gravitációs állandó pedig $\kappa = 8\pi G$, amellyel a redukált Planck-tömeg értéke $M_P = 1/\sqrt{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}m_P$. A kozmológiai elv szerint a Világegyetem nem csak izotróp, hanem homogén is, és emiatt elhanyagoltuk a skalármező $\nabla\Phi$ térszerű változásait is.

A ρ és P skalár mennyiségek az univerzumot kitöltő anyag és sugárzás átlagos energiasűrűsége, illetve nyomása, amelyeket lineáris állapotegyenlet köt össze,

$$P = w\rho. \quad (2.1.7)$$

A w állapotegyenleti paraméter értéke attól függ, hogy a skalármezőn kívüli járulék elsősorban anyag vagy sugárzás, amelyekhez rendre $w = 0$, illetve $w = \frac{1}{3}$ értékek tartoznak. Általában elegendő csak az egyiket figyelembe venni: a korai univerzumban a sugárzást, később pedig az anyagot. Hasonló módon definiálhatjuk a skalármező energiasűrűségét és nyomását is a két egyenlet alapján, amellyel a skalármező állapotegyenleti paramétere

$$w_{\Phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V}, \quad (2.1.8)$$

az összes tagot véve pedig az összes energijárulék effektív állapotegyenleti paraméterét is megkaphatjuk:

$$w_{\text{eff}} = \frac{P + \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V}{\rho + \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V}. \quad (2.1.9)$$

Ez a mennyiség segít jellemezni az univerzum tágulását: ha $w_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}$ egy adott pillanatban, akkor a tágulás gyorsul. Az idő helyett viszont célszerűbb a dimenziótlan η konformális idővel¹ dolgoznunk,

$$\frac{d\eta}{dt} = H, \quad (2.1.10)$$

amely az univerzum méretének e-szereződését (angolul *e-folding*) jelenti, hiszen H definíciójából $a(t) \propto e^{\eta}$ következik. Ennek oka, hogy $O(100)$ nagyságrendű η érték a táguló Világegyetem *teljes* korának felel meg.

¹A skalármezős kozmológia szakirodalmában ez a fogalom utalhat még az $\dot{\eta} = a^{-1}$ egyenlet által definiált időparaméterre is. A két azonos nevű kifejezés nem összetévesztendő, a dolgozatban a (2.1.10) egyenlet által definiált változót értjük konformális idő alatt.

2.2. Autonóm egyenletrendszer dimenziótlan változókkal

A mozgásegyenletek megoldásainak a tanulmányozása végett célszerű dimenziótlan változókat használnunk. A Friedmann-egyenleteket a $3H^2M_P^2$ tényezővel elosztva² az

$$1 = \Omega + k + v, \quad (2.2.1)$$

$$-1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} = w\Omega + k - v, \quad (2.2.2)$$

egyenleteket kapjuk, ahol bevezettük az anyag és sugárzás energiasűrűségének, illetve a skalármező kinetikus és potenciális energiájának

$$\Omega = \frac{\rho}{3H^2M_P^2}, \quad k = \frac{\dot{\Phi}^2}{6H^2M_P^2}, \quad v = \frac{V}{3H^2M_P^2} \quad (2.2.3)$$

dimenziótlan változóit. Ω és k nem lehet kisebb mint nulla, tehát az (2.2.1) egyenletből következik, hogy $\Omega, k, v \in [0, 1]$ ha $v \geq 0$. A dimenziótlanított egyenletekből kifejezhetjük az Ω energiasűrűséget, így

$$-2 \frac{\dot{H}}{H^2} = 3 [1 + w + (1 - w)k - (1 + w)v]. \quad (2.2.4)$$

A dimenziótlan változókat deriválhatjuk az η konformális idő szerint, amit röviden $'$ -vel jelölünk, majd felhasználva a Klein-Gordon egyenletet, megkaphatjuk az autonóm egyenleteinket:

$$k' = 3 [(w - 1)k - (w + 1)kv - (w - 1)k^2] - \sqrt{6}M_P\sqrt{k}\partial_\Phi v, \quad (2.2.5)$$

$$v' = 3 [(w + 1)v - (w - 1)kv - (w + 1)v^2] + \sqrt{6}M_P\sqrt{k}\partial_\Phi v. \quad (2.2.6)$$

Az ezekben szereplő $\partial_\Phi v$ mennyiséget kifejezhetjük az eredeti potenciál parciális deriváltjával, mivel $\frac{\partial_\Phi v}{v} = \frac{\partial_\Phi V}{V}$, így

$$k' = 3 [(w - 1)k - (w + 1)kv - (w - 1)k^2] - \sqrt{6}M_P\sqrt{kv} \frac{\partial_\Phi V}{V}, \quad (2.2.7)$$

$$v' = 3 [(w + 1)v - (w - 1)kv - (w + 1)v^2] + \sqrt{6}M_P\sqrt{kv} \frac{\partial_\Phi V}{V}. \quad (2.2.8)$$

Az

$$x^2 = k, \quad y^2 = v \quad (2.2.9)$$

új változókkal a fázisteret az $x^2 + y^2 \leq 1$ egységkörre tudjuk korlátozni. Így adódik a már [1]-ből is ismerős, végleges általános alakja az egyenletrendszernek:

$$x' = \frac{3}{2} [(w - 1)x - (w + 1)xy^2 - (w - 1)x^3] - \frac{\sqrt{6}}{2}M_P y^2 \frac{\partial_\Phi V}{V}, \quad (2.2.10)$$

$$y' = \frac{3}{2} [(w + 1)y - (w - 1)x^2y - (w + 1)y^3] + \frac{\sqrt{6}}{2}M_P xy \frac{\partial_\Phi V}{V}. \quad (2.2.11)$$

Szebb alakú potenciális energiát beírva ezek az egyenletek írják le az univerzum energiasűrűségének és tágulásának dinamikáját. Általában viszont $\frac{\partial_\Phi V}{V}$ tagból nem esik ki Φ , ezért figyelembe kell vennünk az ő időfüggését is:

$$\Phi' = \sqrt{6}M_P x, \quad (2.2.12)$$

illetve dimenziótlanítva

$$\phi' = \sqrt{6}x. \quad (2.2.13)$$

²Ezt akkor nem tehetnénk meg, ha $H = 0$, ami egy statikus, energiamentes világegyetemnek felel meg a Friedmann-egyenletek szerint.

2.3. Divergens tag elkerülése

A dimenziótlan potenciális energia definíciója alapján

$$0 \leq v = \frac{V}{3H^2 M_P^2} \leq 1, \quad (2.3.1)$$

ahol $V = V(\phi)$. Feltéve, hogy a potenciális energia minimum értéke véges $V(\phi_0) = V_0 > 0$, a fenti kifejezés a minimumban

$$0 \leq v_0 = y_0^2 = \frac{V_0}{3H^2 M_P^2} \leq 1. \quad (2.3.2)$$

Ha $v_0 = 0$ lenne, a definíció alapján $H = \infty$, azaz $H^{-1} = 0$ következne, de az (2.3.1) képletben feltettük, hogy $H^{-1} \neq 0$. Ez alapján elvárjuk a fizikai megoldásoktól, hogy

$$\text{ha } \phi = \phi_0, \text{ és } V_0 \neq 0, \quad \implies \quad y_0 \neq 0, \quad (2.3.3)$$

illetve hasonlóan,

$$\text{ha } \phi = \phi_0, \text{ és } V_0 = 0, \quad \implies \quad y_0 = 0. \quad (2.3.4)$$

2.4. Gyorsuló tágulás feltétele

A világegyetem tágulása akkor gyorsul, ha a benne levő összes energiajárulékot jellemző (2.1.9) állapotegyenleti paraméter értéke $w_{\text{eff}} < -1/3$. A definíciója alapján kifejtethetjük, majd alkalmazva a Friedmann-egyenleteket

$$w_{\text{eff}} = w - (w - 1)k - (w + 1)v \quad (2.4.1)$$

alakra juthatunk. Ezt átírva x és y változókra:

$$w_{\text{eff}} = w - (w - 1)x^2 - (w + 1)y^2, \quad (2.4.2)$$

amely képlettel tetszőleges x és y értékekre meg tudjuk állapítani, hogy az univerzum tágulása éppen gyorsul-e. Ennek feltétele egyszerűen

$$w_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}. \quad (2.4.3)$$

A $w_{\text{eff}} = -1/3$ feltétel által megszabott határ mind anyag ($w = 0$), mind sugárzási ($w = 1/3$) energiajárulékokra hiperbolát jelöl ki.

3. Az autonóm egyenletek megoldása

3.1. BEH-szerű potenciális energia

Véve a részecskefizika skalármezejének negyedfokú potenciális energiáját és egy kozmológiai állandónak megfeleltethető V_0 konstans energia tagot

$$V(\Phi) = \lambda(\Phi^2 - \Phi_0^2)^2 + V_0, \quad (3.1.1)$$

az egyenletekben megjelenő derivált alakja:

$$\frac{\partial_\Phi V}{V} = \frac{4\lambda\Phi(\Phi^2 - \Phi_0^2)}{\lambda(\Phi^2 - \Phi_0^2)^2 + V_0} = \frac{4\Phi(\Phi^2 - \Phi_0^2)}{(\Phi^2 - \Phi_0^2)^2 + V_0/\lambda}. \quad (3.1.2)$$

Dimenziótlannítva

$$\Phi = M_P \phi, \quad \Phi_0 = M_P \phi_0, \quad V_0/\lambda = M_P^4 \Lambda \quad (3.1.3)$$

változókkal, felírható a következőképp:

$$\frac{\partial_\Phi V}{V} = \frac{4\Phi(\Phi^2 - \Phi_0^2)}{(\Phi^2 - \Phi_0^2)^2 + V_0/\lambda} = \frac{4}{M_P} \frac{\phi(\phi^2 - \phi_0^2)}{(\phi^2 - \phi_0^2)^2 + \Lambda}. \quad (3.1.4)$$

Egyenletrendszerünk tehát a skalármező függvényeként

$$x' = \frac{3}{2} [(w-1)x - (w+1)xy^2 - (w-1)x^3] - 2\sqrt{6}y^2 \frac{\phi(\phi^2 - \phi_0^2)}{(\phi^2 - \phi_0^2)^2 + \Lambda}, \quad (3.1.5)$$

$$y' = \frac{3}{2} [(w+1)y - (w-1)x^2y - (w+1)y^3] + 2\sqrt{6}xy \frac{\phi(\phi^2 - \phi_0^2)}{(\phi^2 - \phi_0^2)^2 + \Lambda}, \quad (3.1.6)$$

$$\phi' = \sqrt{6}x. \quad (3.1.7)$$

Egyenleteink két szimmetriát mutatnak, invariánsak az

- $y \rightarrow -y$, illetve az
- $(x, \phi) \rightarrow (-x, -\phi)$ változócserekre.

A számunkra érdekes mennyiségek (az energiasűrűség és az állapotegyenleti paraméter) függetlenek ettől az előjelválasztástól. A szimmetria azonban hasznos számunkra két esetben is. Egyrészt a Φ változónkat a skalármező abszolút értékének feleltettük meg, így nem lehet negatív. Az autonóm egyenletek ezt nem tiltják meg, de a fenti szimmetriát kihasználhadjuk arra, hogy megtartsuk ezt az értelmezést. A hátránya az, hogy x változónk első deriváltja már nem fog folytonosan változni, hanem ugrást szenved, ha ϕ negatívvá válna. Szintén elvárjuk, hogy y ne váltszon előjelet, ugyanis az $y' = 0$ egyenletnek megoldása $y = 0$, tehát a trajektóriák nem metszhetik ezt a síkot. Ha például $y \geq 0$ esetet választjuk egy kezdeti feltételnél, azzal kizárjuk azt, hogy az egyenletrendszer negatívvá tegye a változót. A fenti szimmetria miatt viszont ez egy előjelváltással kiküszöbölhető, ha mégis megtörténne numerikus megoldások esetén. Ezekkel a megfontolásokkal a fázisterünk leszűkíthető a

$$x \in [-1, 1], \quad y \in [0, 1], \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad \phi \geq 0 \quad (3.1.8)$$

tartományra, ami egy egységkör alapú félbevágott hengert jelent $\phi \neq \phi_0$ esetén. Ha $\phi = \phi_0$, akkor viszont $y = 0$ is igaz (ha $H^{-1} \neq 0$), így ott a fázistér az x tengelyre simul. A skalármező változóját is tudjuk korlátozni, kétfelől. Egyrészt bár számításaink klasszikusak, ha az ismeretlen kvantumgravitációs hatásokat szeretnénk elkerülni, akkor célszerű a Planck-tömeg alatt maradnunk, tehát

$$\phi \leq \sqrt{8\pi} \simeq 5. \quad (3.1.9)$$

Ha pedig a $\phi \rightarrow \infty$ vett viselkedését szeretnénk vizsgálni (például fixpontvizsgálat céljából), akkor [12] alapján kompaktifikálhatjuk a fázistér, áttérve a véges intervallumon definiált

$$z = \frac{\phi}{\phi + \phi_0} \in [0, 1] \quad (3.1.10)$$

változóra, amellyel

$$\frac{\phi(\phi^2 - \phi_0^2)}{(\phi^2 - \phi_0^2)^2 + \Lambda} = \frac{1}{\phi_0} \frac{z(1-z)}{(2z-1) + \frac{\Lambda}{\phi_0^4} \frac{(1-z)^4}{2z-1}}. \quad (3.1.11)$$

Tehát az egyenletrendszerünk az x , y és z változóiban:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{3}{2} [(w-1)x - (w+1)xy^2 - (w-1)x^3] \\ &\quad - 2 \frac{\sqrt{6}}{\phi_0} y^2 \frac{z(1-z)}{(2z-1) + \Lambda \frac{(1-z)^4}{2z-1} \phi_0^{-4}}, \\ y' &= \frac{3}{2} [(w+1)y - (w-1)x^2y - (w+1)y^3] \\ &\quad + 2 \frac{\sqrt{6}}{\phi_0} xy \frac{z(1-z)}{(2z-1) + \Lambda \frac{(1-z)^4}{2z-1} \phi_0^{-4}}, \\ z' &= \frac{\sqrt{6}}{\phi_0} x(1-z)^2. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

3.2. A fixpontvizsgálat módszerei

3.2.1. Lineáris stabilitásvizsgálat

Véve a kompakt $\dot{\underline{r}} = \underline{f}(\underline{r})$ egyenletrendszert, ki tudjuk számítani azok $\underline{r}_0$ fixpontjait, amelyekre $\underline{f}(\underline{r}_0) = 0$. Ezek ismeretében vehetjük az $\underline{f}$ függvény egyes változók szerinti deriváltjait tartalmazó $\underline{\underline{J}}$ Jacobi mátrixot, azt kiértékelve a fixpontokban, és megoldva sajátérték-problémáját. Ezzel megkapjuk a Q fixponthoz tartozó, i -vel indexelt $\lambda_i^{(Q)}$ sajátértékeket. Amennyiben a fixpontok hiperbolikusak, azaz a bennük kiértékelt Jacobi mátrixunk minden sajátértékének van nemnulla valós része ($\Re(\lambda_i^{(Q)}) \neq 0 \ \forall i$ -re) akkor a Q fixpontunk:

1. stabil, ha: $\forall i$ esetén $\Re(\lambda_i^{(Q)}) < 0$;
2. instabil, ha: $\forall i$ esetén $\Re(\lambda_i^{(Q)}) > 0$;
3. nyeregpon, ha: $\exists i, j$ amelyre $\Re(\lambda_i^{(Q)}) < 0$ és $\Re(\lambda_j^{(Q)}) > 0$.

A választott rendszerben viszont ez nem elég a teljes vizsgálathoz, mivel a sajátértékek számottevő része zérus. Ebben az esetben a központi sokaság elméletre (*center manifold theory*) kell hagyatkoznunk, a [13] könyv módszerei alapján.

3.2.2. Központi sokaság elmélet (CMT)

Előfordulhat, hogy valamely nagybetűvel jelölt $(X, Y, Z) = Q$ fixpontunkban zérus sajátértékekkel találkozunk, például a z irányban. Ekkor célszerű x és y változóinkat sorba fejteni z -ben:

$$h_X(Z) = X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i Z^{i+1} = a_0 Z + a_1 Z^2 + a_2 Z^3 + \dots, \quad (3.2.1)$$

$$h_Y(Z) = Y = \sum_{i=0}^{\infty} b_i Z^{i+1} = b_0 Z + b_1 Z^2 + b_2 Z^3 + \dots \quad (3.2.2)$$

Velük tetszőleges rendig menve fel tudjuk írni a CMT tangencialitási feltételeit, mint

$$0 = N_X = D_Z[h_X] \cdot z'(h_X, h_Y, Z) - x'(h_X, h_Y, Z), \quad (3.2.3)$$

$$0 = N_Y = D_Z[h_Y] \cdot z'(h_X, h_Y, Z) - y'(h_X, h_Y, Z). \quad (3.2.4)$$

Ezeket kielégítve a $\mathcal{Q}$ pontban, megkaptuk az ott vett X és Y változók Z szerinti sorfejtését, amelyet be tudunk helyettesíteni z' egyenletébe. Ennek előjele a vizsgált intervallumon meghatározza a pont stabilitását.

Érdemes megjegyezni, hogy a CMT-ből adódó stabil fixpont fizikai szerepe kérdéses, mert az elmélet nem tárgyalja, hogyan jut a trajektória olyan közel a fixponthoz, ahol már a CMT megoldás érvényes.

3.3. Numerikus analízis

3.3.1. Egyenletek megoldása, kezdeti értékek

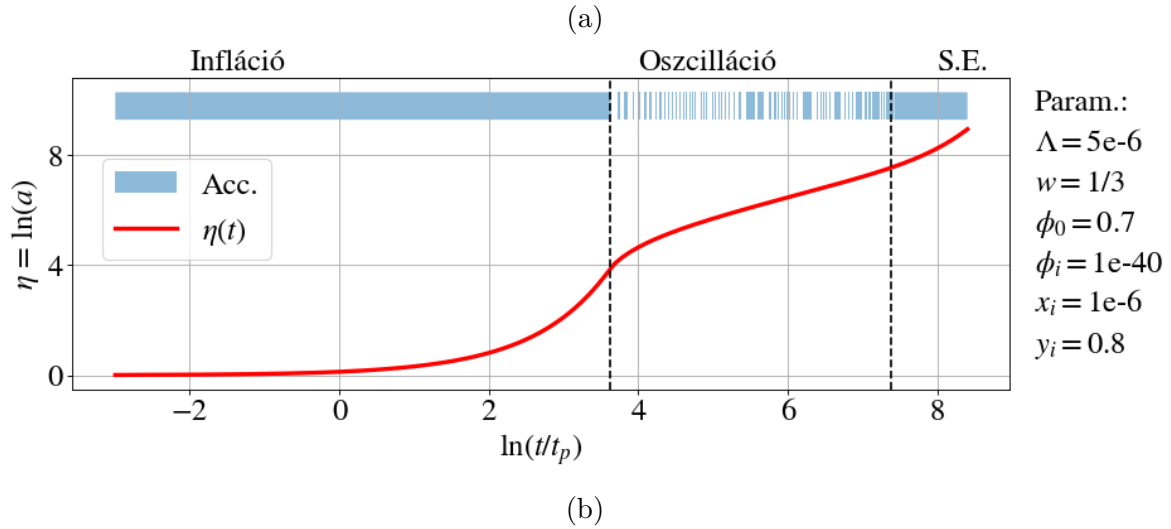
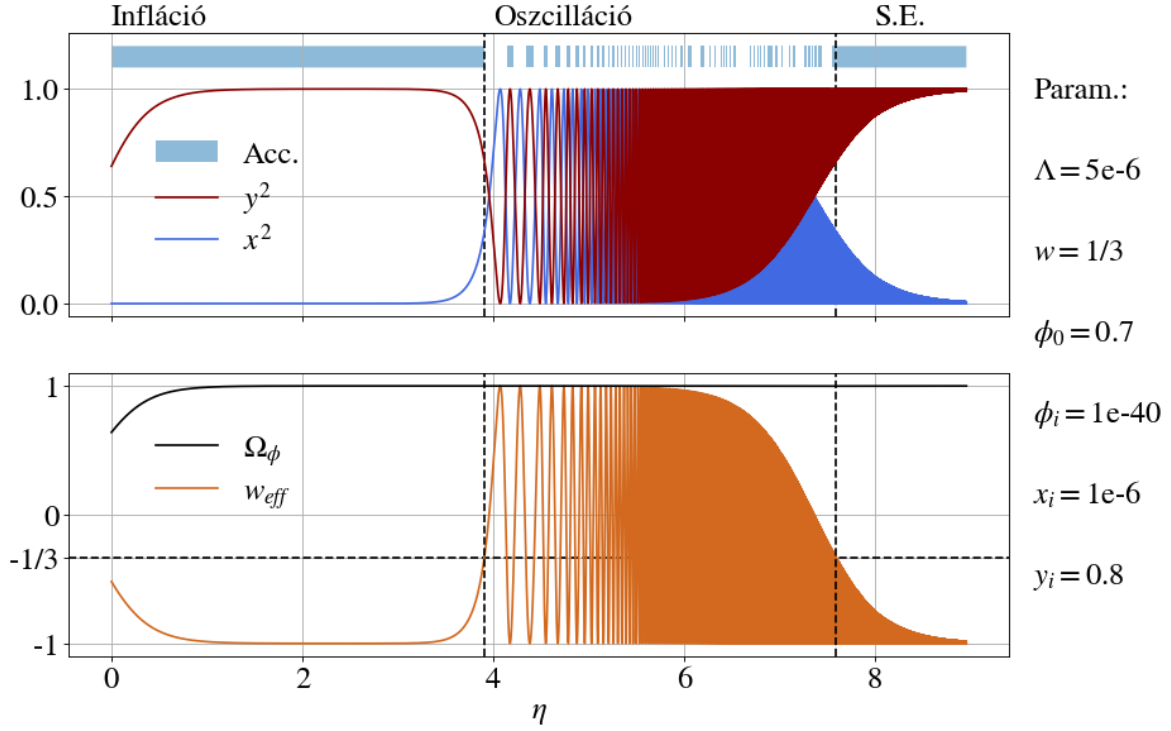
Az autonóm egyenleteket tetszőleges kezdeti feltétel mellett meg tudjuk oldani numerikusan, így megkapva az x , y , ϕ változók értékét az η konformális idő függvényében. Bár első ránézésre a rendszer viselkedése erősen függ a három változó kezdeti értékétől, ezekből néhányat ki tudunk küszöbölni. Jellemzően három féle viselkedést tapasztalunk a sugárzással dominált ($w = 1/3$) univerzumban.

1. *Oscilláció:* A skalármező energiájának kinetikus-potenciális megoszlását leíró x^2 és y^2 változók oszcillálnak 0 és Ω_ϕ közt, a skalármező ϕ abszolútértéke pedig oszcillálva tart ϕ_0 minimumhelyébe.
2. *Infláció:* A kezdeti feltételek függvényében létezhet egy „lassan gördülő” fázis, amíg az energia főként y változóban tárolódik, a skalármező ϕ abszolútértéke pedig viszonylag lassan közelíti a ϕ_0 minimumhelyet.
3. *Sötét energia:* A trajektória elkezd vizonylag hirtelen megközelíteni fixpontját, ahol $(x, y, \phi) \rightarrow (0, 1, \phi_0)$.

Mindhárom lehetséges viselkedést mutatja az 1. ábra. Az egyenletrendszer leggyakoribb megoldása az oszcilláló, azonban az ekkor tapasztalt tágulás sokkal kisebb, mint akkor, amikor van infláció.

Az inflációt leíró 2. fázis szerencsés a kezdeti feltételeink szempontjából. A tapasztalt jelenség akkor kezdődhet, ha $x \simeq 0$, a lassú gördülés feltétele miatt. Minden más x_i kezdeti feltételre is ezt várjuk. A különbség annyi lesz, hogy a skalármező abszolút értéke hogyan változik a lassú gördülési szakasz kezdetéig. A szimuláció kezdetét eltolva ugyanazt kapjuk, mintha $x_i \simeq 0$ kezdeti értéket vennénk más ϕ_i mellett. Ki fog derülni továbbá, hogy y_i kezdeti feltétel sem befolyásolja jelentősen a rendszer viselkedését az infláció alatt, így egyedül a skalármező abszolútértékének ϕ_i kezdeti értéke lesz fontos számunkra.

A trajektóriák végét is hasonlóan egyszerűen tudjuk vizsgálni. Az oszcillációk akkor fognak átváltani sötétenergia-szerű viselkedésbe, ha az egyenletrendszerünkben megjelenő utolsó tag nevezőjében $\Lambda \gg (\phi^2 - \phi_0^2)^2$. Ha azt szeretnénk megszabni kvalitatív feltételnek, hogy az inflációs szakasz *után* történjen a kései tágulás, elegendő a $\Lambda = 0$ esetet szimulálnunk, majd kiszámítani az infláció végén a skalármező abszolútértékét: így felső becslést kaphatunk a potenciál minimumértékére.



1. ábra. (a) Minta trajektória, amin megfigyelhető mindhárom viselkedés. Fent a skalármező kinetikus illetve potenciális energiáit leíró x^2 és y^2 változók rendre sötét kék és piros vonalakkal, a gyorsuló tágulás feltételét teljesítő intervallumok pedig világoskék sávokkal ábrázolva. Közös vízszintes η tengellyel alatta láthatjuk a mező Ω_ϕ relatív energiasűrűségét feketével, illetve narancssárgával az univerzum egészét jellemző w_{eff} állapotegyenleti paramétert. (b) Ugyanezen a trajektórián a skálafaktor tényleges időfejlődésének szimulációja, logaritmikusan ábrázolva. Lekövethetjük rajta a görbe meredekségének változását, amely egyezést mutat a gyorsuló tágulásra megszabott feltételünk teljesülésének kék régióival.

3.3.2. A programról

Trajektóriáink numerikus szimulációja jelentős kihívás, ha a fent felsorolt viselkedések mindegyikét mutatják különböző időszakokban. A korai és kései tágulások esetén változóink lassan haladnak el a fixpont mellett, vagy tartanak abba. Az oszcilláló szakaszokban viszont a skalármező abszolút értékének lecsengésével egyre növekvő ω szögsebességgel keringenek az $(x, y) = (0, 0)$ tengely körül. Szélsőséges esetekben több nagyságrendnyi különbség is lehet az egyes szakaszok jellemző felbontása közt. Munkánkban a Világegyetem teljes fejlődését szeretnénk szimulálni, amelyhez $\Delta\eta \simeq 90$ e-szereződés hosszú intervallum tartozik ilyen jelentős felbontásbeli különbségekkel, ezért a fellépő numerikus problémát kezelniünk kellett.

Két módon orvosoltuk a numerikus pontatlanságokat. A differenciálegyenletrendszert megoldó programunkban a „merev” (angolul *stiff*) problémákra jól működő implicit Radau-módszert alkalmaztuk [14]. A lépésközt a program adaptívan állította be, kompenzálva a felbontásbeli eltéréseket. A kellő pontosság melletti ideális futásidőt viszont így sem értük el ω folyamatos növekedése miatt, ezért egy további módszert alkalmaztunk.

Az egyenletmegoldó algoritmust újraindítottuk minden periódus után, amelyeket x változó $- \rightarrow +$ előjelváltásával követtünk. Ez önmagában végtelen ciklust okozna, viszont ki tudtuk használni egyenletrendszerünk $(x, \phi) \rightarrow (-x, -\phi)$ szimmetriáját. A megoldót ilyen transzformáció után újraindítva már gyorsabb szimulációt kaptunk, a fizikai mennyiségek értékének befolyásolása nélkül.

A fenti lépések megvalósítása Python nyelvben történt, a SciPy csomag `solve_ivp` függvényét felhasználva. Ebben beépített metódus mind a megszokott Runge-Kutta módszer, mind a merev differenciálegyenletekre jobban működő Radau algoritmus, így könnyedén össze tudtuk hasonlítani az eredményeket (2. ábra). Az újraindítások levezényléséhez a függvény `events` opcióját használtuk, az előjelváltásokat terminális eseménynek állítva.

3.3.3. Származtatott mennyiségek

A trajektóriákból tudjuk származtatni a skalármező Ω_ϕ relatív energiasűrűségét, illetve w_{eff} teljes energiasűrűsége vonatkozó állapotegyenleti paramétert, mivel

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2, \quad w_\phi = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (3.3.1)$$

így a többi energiajárulék w állapotegyenleti paraméterével együtt

$$w_{\text{eff}} = w - (w - 1)x^2 - (w + 1)y^2. \quad (3.3.2)$$

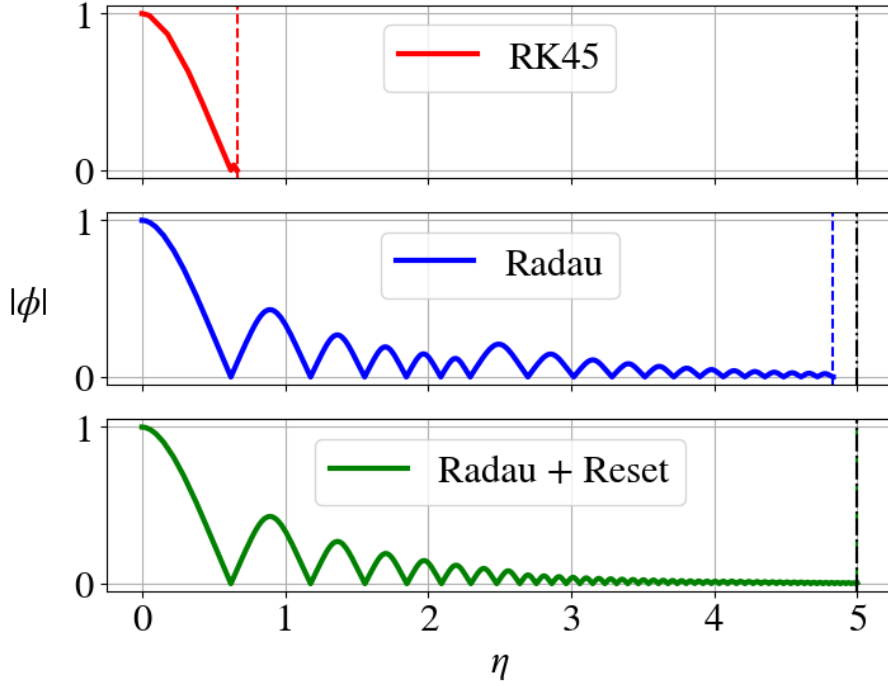
A szimulált trajektóriák mentén ki tudjuk számítani ezeket a mennyiségeket, belőlük pedig azokat a véges intervallumokat, ahol teljesül a gyorsuló tágulás $w_{\text{eff}} < -1/3$ feltétele:

$$\{\eta_{\text{acc}}\} = \{[\eta_a, \eta_b] : \forall \eta_i \in [\eta_a, \eta_b], w_{\text{eff}}(\eta_i) < -1/3\}. \quad (3.3.3)$$

Véve ezeknek az intervallumoknak a $\mu([\eta_a, \eta_b]) = \eta_b - \eta_a$ hosszát, numerikusan megszerüsíteni tudjuk az infláció mértékét. Minden trajektóriára kiszámíthatjuk a fenti feltételt teljesítő leghosszabb egybefüggő intervallumot:

$$\eta_{\text{inf}} = \max(\{\mu(\eta_{\text{acc}})\}). \quad (3.3.4)$$

Megoldók összehasonlítása



2. ábra. A három algoritmus összehasonlítása egy problémás kezdeti feltételekről indított trajektórián, $\eta = 5$ kitűzött végpontig. Jól látható, hogy a szokásos Runge–Kutta-módszer nem tud az inflációs időszakon túljutni, amit orvosol a Radau-megoldó. Az sem éri el viszont a konformális időváltozóban a célt, ráadásul numerikus hibákra utaló csúcsok is megjelennek. Az újraindításokkal ezt sikeresen ki tudtuk küszöbölni.

Inflációt tartalmazó trajektóriákra ez a maximális érték nagyságrendekkel nagyobb lesz az összes többinél, jelentése pedig megfeleltethető a felfúvódás alatt végbement e-szereződésnek. Az univerzumot leíró minimális értéke [4] alapján azok a trajektóriák felelhetnek meg számunkra, amelyekre

$$\eta_{\text{inf}} \gtrsim 45. \quad (3.3.5)$$

Hasonlóképp le tudjuk követni a skalármező Ω_ϕ energiasűrűségének változását, amely az oszcilláló szakaszokban x^2 és y^2 legnagyobb kitéréseit burkolja.

3.3.4. Valós időfüggés

Visszaidézve a dimenziótlan változók definícióját

$$V = 3H^2 M_P^2 y^2, \quad \Phi = \phi M_P, \quad (3.3.6)$$

illetve a potenciális energia alakját

$$V = \lambda(\Phi^2 - \Phi_0^2)^2 + V_0, \quad (3.3.7)$$

ki tudjuk fejezni a Hubble-paramétert is a trajektória tetszőleges pontjában,

$$\left(\frac{H}{M_P} \right)^2 = \frac{\lambda(\phi^2 - \phi_0^2)^2 + \Lambda}{3y^2}. \quad (3.3.8)$$

Továbbá η (2.1.10) definíciója szerint a (3.3.8) egyenletet felhasználva minden η pontban ki tudjuk számítani $\dot{\eta}$ értékét. Így differenciálegyenletet kapunk, amelyet numerikusan megoldva át tudunk térni a t_P Planck-idő egységeiben mért valós időre. Ezzel megkaphatjuk az egyes szakaszok időtartamát, illetve ábrázolni tudjuk a skálafaktor időbeli változását.

3.4. Analitikus közelítések

3.4.1. A skalármező relatív energiasűrűsége

A mező relatív energiasűrűségét leíró Ω_ϕ változó viselkedése bonyolultabbnak bizonyult a vártnál. A $\phi_0 \neq 0$ paraméter melletti szimulációink alapján azt tapasztaltuk, hogy a relativisztikus $w = 1/3$ esetben $\Omega_\phi \rightarrow 1$, viszont eltűnő állapotegyenleti paraméter, $w = 0$ esetén $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Omega_\phi(\eta) = \Omega_\phi(\infty) \equiv \tilde{\Omega}_\phi$ paraméterfüggő állandóhoz tart. Ennek jobb megértéséhez vizsgáljuk a konformális idő szerinti deriváltját:

$$\Omega'_\phi = 2xx' + 2yy', \quad (3.4.1)$$

amelybe behelyettesítve a (3.1.12) alapegyenleteinket az

$$\begin{aligned} \Omega'_\phi = 3[(w-1)x^2 - (w+1)x^2y^2 - (w-1)x^4 + \\ + (w+1)y^2 - (w-1)x^2y^2 - (w+1)y^4] \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

kifejezés adódik. Tekintsük a $w = 1/3$ esetet, és használjuk az $x^2 = \Omega_\phi^2 - y^2$ összefüggést:

$$\Omega'_\phi = 2 \left[\Omega_\phi^2 - \Omega_\phi + 3y^2(1 - \Omega_\phi) \right], \quad (3.4.3)$$

amiből látszik, hogy $\Omega_\phi = 1$ fixpont. Kis $\Delta = 1 - \Omega_\phi$ eltérésekre ez

$$\Delta' = 2(1 - 3y^2)\Delta, \quad (3.4.4)$$

ahol közelíthetjük y változót szinuszos hullámként. Ekkor y^2 egy periodusra kiátlagolt értéke $\frac{1}{2}$ lesz, így relativisztikus világegyetemben $\Delta = 0$, azaz $\Omega_\phi = 1$ vonzópontként fog viselkedni, mert $\Delta' = -\Delta < 0$. Hasonlóképp járhatunk el, ha $w = 0$:

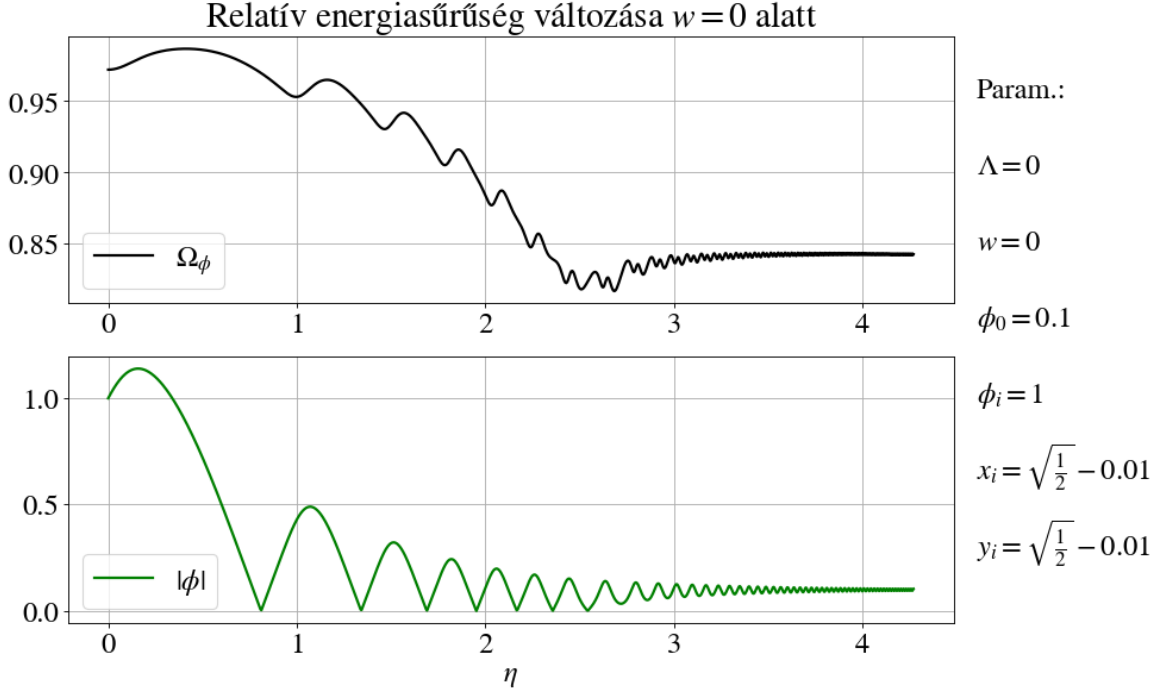
$$\Omega'_\phi = 3 \left[\Omega_\phi^2 - \Omega_\phi + 2y^2(1 - \Omega_\phi) \right], \quad (3.4.5)$$

és újra áttérve a $\Delta = 1 - \Omega_\phi$ változóra

$$\Delta' = 3(1 - 2y^2)\Delta. \quad (3.4.6)$$

Ismét vehetjük az $y \sim \sin \eta$ közelítést, amivel egy periodusra kiátlagolva $\Delta' = 0$, vagyis Δ , és így Ω_ϕ is állandóhoz tart.

Az energiasűrűséghez $w = 0$ esetén az $\tilde{\Omega}_\phi$ állandóra nem tudunk általános becslést adni. Azonban a 3. ábra, és a fenti közelítés alapján azt várjuk, hogy ha $\phi_0 = O(1)$ és a kor elején vett kezdeti $\Omega_i \simeq 1$, akkor a teljes trajektórián a skalármező járuléka mellett elhanyagolható mind a sugárzás, mind az anyag.



3. ábra. Ω_ϕ változásának szemléltetése egy érdekes trajektórián. Azt tapasztaljuk, hogy a felvett $\tilde{\Omega}_\phi$ állandó kapcsolatban áll a kezdeti Ω_i értékkel, illetve a skalármező $|\phi|$ megváltozásának töréspontjaival. Ez utóbbi megkülönbözteti az eltérő ϕ_0 értékekhez az univerzum viselkedését a $w = 0$ -val jellemzett korban. A $\phi_0 = O(1)$ esetben a skalármező oszcillációi nem érik el a nullát, így Ω_ϕ lecsengése sem következik be.

3.4.2. Oszcillációk lépcsőfüggvényként

A kinetikus és potenciális energiák közt oszcilláló mezőnket megközelíthetjük közelíteni olyan alakban, hogy az x^2 és y^2 változók oszcilláló viselkedését lépcsős függvényekkel közelítjük (4. ábra), amit az motivál, hogy azok esetében egzaktul meg tudjuk oldani az egyenletrendszert. Egyszerű, és szimulációink alapján számunkra érdekes esetként vizsgáljuk azt, amikor az univerzum teljes energiajáruléka a skalármező V potenciális energiájából származik. Ekkor a Friedmann-egyenletek:

$$1 = y^2, \quad (3.4.7)$$

$$-1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} = -y^2. \quad (3.4.8)$$

Amelyek eredményül $\dot{H} = 0$ -t adnak, azaz $t = t_i \rightarrow (\eta_i, H_i)$ kezdeti feltételek mellett:

$$\eta_y(t) = H_i(t - t_i) + \eta_i. \quad (3.4.9)$$

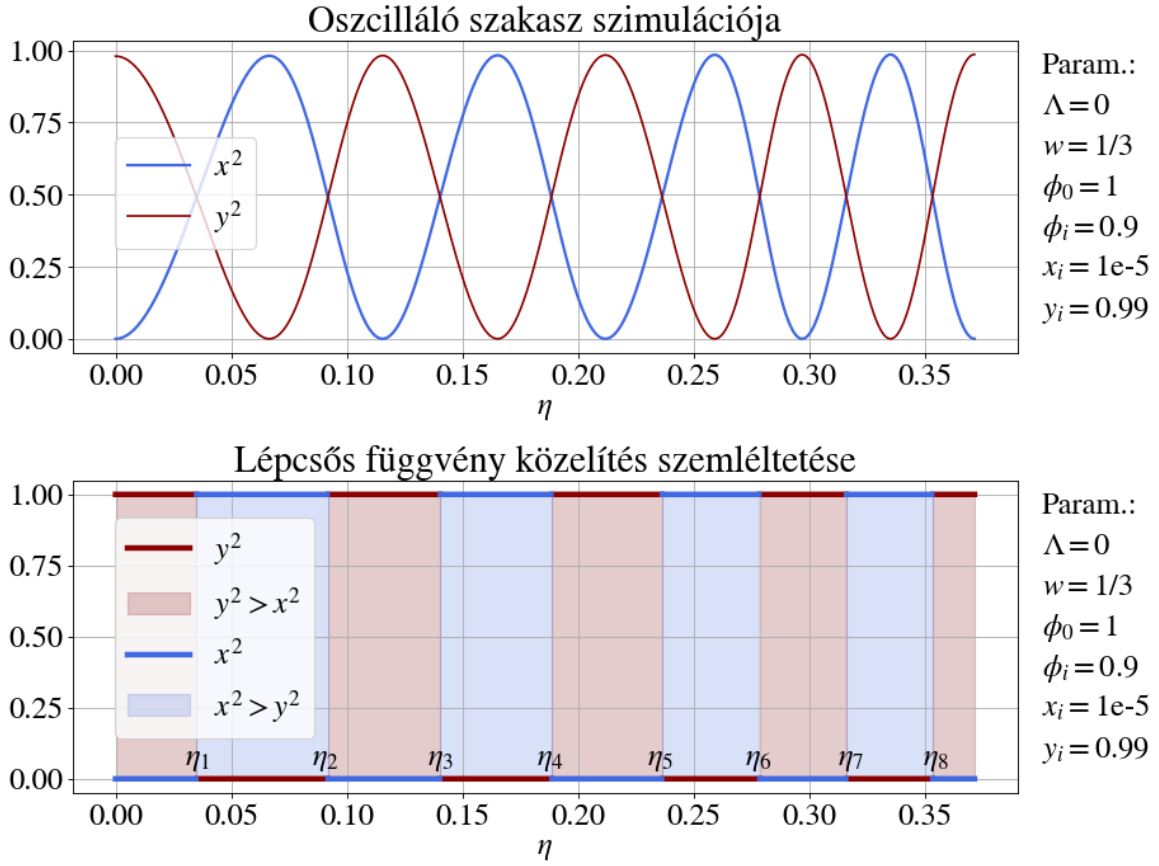
Abban az esetben, ha csak a kinetikus járulékot vesszük figyelembe, az egyenletünk kissé bonyolultabb, de szintén megoldható:

$$1 = x^2, \quad (3.4.10)$$

$$-1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} = x^2, \quad (3.4.11)$$

amely átrendezhető η_x -re vonatkozó egyetlen differenciálegyenletté,

$$\ddot{\eta}_x = -3\dot{\eta}_x^2. \quad (3.4.12)$$



4. ábra. Példaképp egy trajektória (a jobb oldalt található paraméterek mellett) szimulált oszcilláló szakasza, alatta pedig a közelítésünket szemléltető ábra. A fejezetben a kék régió kivételesen *nem* a gyorsuló tágulást jelöli, hanem a kinetikus fázist. A vízszintes tengelyen szemléltettük a kinetikus és potenciális lépések közti váltások η_k pontjait.

A (3.4.12) egyenlet első integrálja a kezdeti feltétel figyelembe vételével az

$$\dot{\eta}_x(t) = \frac{H_i}{1 + 3H_i(t - t_i)} \quad (3.4.13)$$

elsőrendű differenciálegyenlet, és további integrálás után

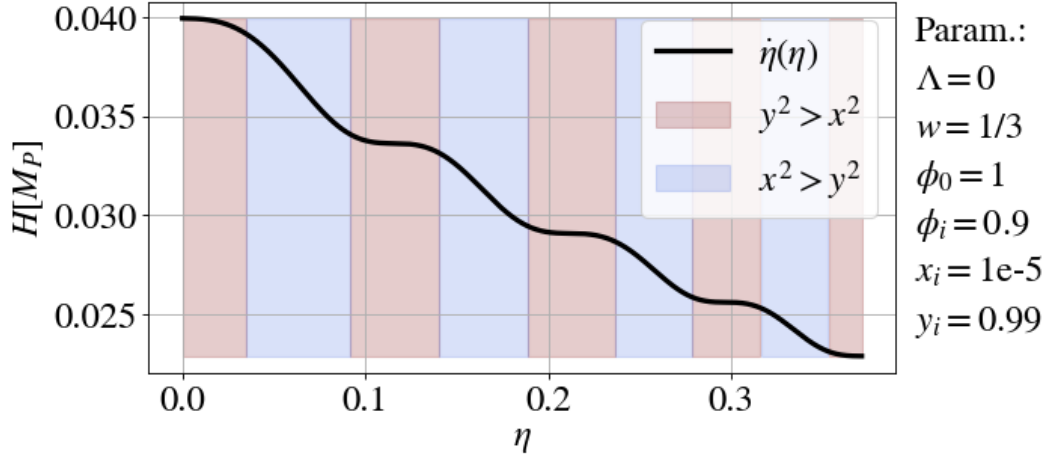
$$\eta_x(t) = \eta_i + \frac{1}{3} \ln \left(1 + 3H_i(t - t_i) \right). \quad (3.4.14)$$

Ezeket kihasználva ki tudjuk fejezni a Hubble-paramétert az η függvényében:

$$H_y(\eta) = H_i, \quad H_x(\eta) = H_i \exp(-3(\eta - \eta_i)), \quad (3.4.15)$$

tehát a kinetikus tag dominálta fázisban azt várjuk, hogy a Hubble-paraméter exponenciálisan csökken a konformális idő függvényeként, míg a potenciális szakaszban nem változik. Ez a várt viselkedés egyezik a szimulált adatokkal, ahogy azt a 5. ábrán is láthatjuk.

Az egyes szakaszokat ismerve megkísérélhetjük a rendszer hosszú idő alatt tapasztalt átlagos viselkedését tárgyalni. Ehhez diszkrétizáljuk az η konformális időt P_η periódusokra az ott domináns energiatípus szerint, ahogy azt a 4. ábrán bemutattuk. A szakaszok határait jelölje η_k . Az inflációt a kinetikus energia által dominált időszak



5. ábra. A fenti trajektóriára kiszámított Hubble-paraméter, η függvényében.

követi, így mi is azzal kezdjük. A fent tárgyaltak alapján tetszőleges η_k váltási pontban megadható a Hubble-paraméter, mégpedig

$$H_y(\eta_k) = H_y(\eta_{k-1}), \quad H_x(\eta_k) = H_x(\eta_{k-1}) \exp(-3(\eta_k - \eta_{k-1})). \quad (3.4.16)$$

Akkor pedig tetszőleges n egész szám esetén

$$H(\eta_{2n}) = H_i \exp \left(-3 \left[\sum_{k=0}^{n-1} \eta_{2k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{2k} \right] \right), \quad (3.4.17)$$

amely azonos P_η periodusonkénti váltakozásokat feltételezve egyszerűen

$$H(nP_\eta) \approx H_i \exp \left(-\frac{3}{2} nP_\eta \right), \quad (3.4.18)$$

illetve tetszőleges η konformális időre közelítőleg

$$H(\eta) \approx H_i \exp \left(-\frac{3}{2} \eta \right). \quad (3.4.19)$$

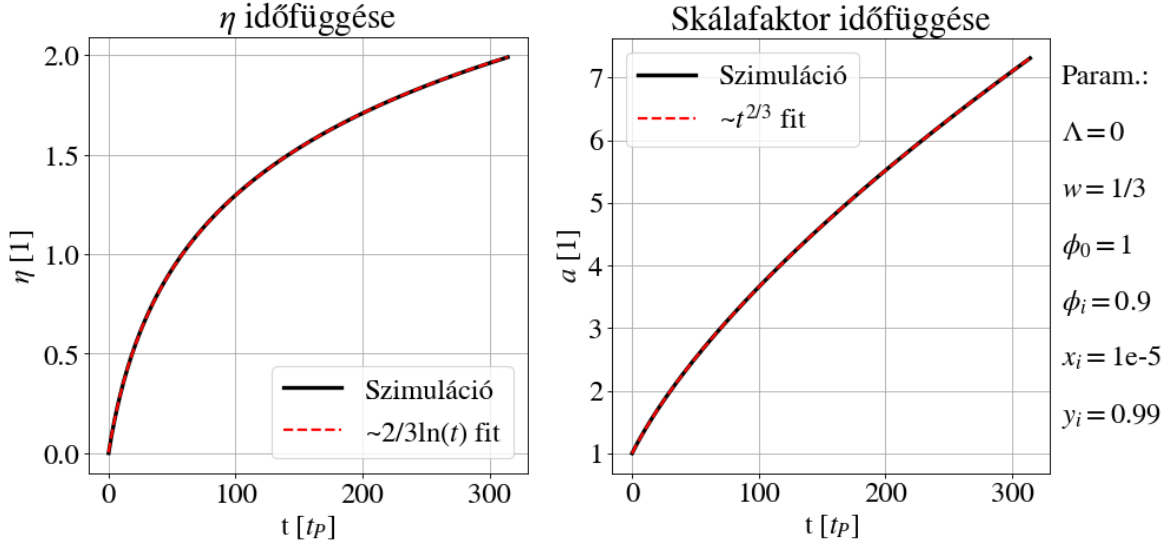
Ha a tényleges időbeni változásokra vagyunk kíváncsiak, akkor tekintsünk a (3.4.19) egyenletre η definíciója alapján differenciálegyenletként, amelynek megoldása tetszőleges kezdeti feltételekre:

$$\eta(t) \approx \frac{2}{3} \ln \left(\frac{3}{2} H_i (t - t_i) + e^{\frac{3}{2} \eta_i} \right). \quad (3.4.20)$$

Tehát $\eta(t) \propto \ln(t^{2/3})$, illetve exponencializálva megkapjuk a skálafaktor átlagos viselkedését az oszcillációk alatt:

$$a(t) \propto t^{2/3}, \quad (3.4.21)$$

aminek pontosan az *anyag által dominált időfüggés felel meg*. Ennek a jóslatnak a jószágát szemléltetik a 6. ábrán látható illesztések.



6. ábra. Konformális idő és a skálafaktor időfüggésének szimulált adatai 100 oszcillációra. A lépcsős közelítéssel számított függvényalakok jó egyezést mutatnak az illesztett analitikus képlettel.

3.4.3. Skalármező az oszcillációk alatt

Az előzőekben meghatároztuk az oszcilláló szakaszon a Hubble-paramétert η függvényében, amit nem csak a skálafaktor időfüggésének becslésére tudunk felhasználni, hanem a skalármezőnek, mint a konformális idő függvényének közelítésére is. Felhasználva a (3.3.8) egyenletet, feltehetjük, hogy benne Λ elhanyagolható a skalármező kitéréséhez képest, illetve potenciális energiát szinuszos periodusokra kiátlagolva $\langle y^2 \rangle_{P_\eta} = \frac{1}{2}$ értéket vehetünk, így:

$$\sqrt{\frac{3}{4\lambda}} \left(\frac{H}{M_P} \right) \approx \phi^2(\eta) - \phi_0^2, \quad (3.4.22)$$

amelybe az előző fejezet eredményét behelyettesítve

$$\sqrt{\frac{3}{4\lambda}} H_i \cdot \exp \left(-\frac{3}{2}\eta \right) \approx \phi^2(\eta) - \phi_0^2. \quad (3.4.23)$$

A kinetikus, illetve potenciális energia által dominált szakaszok váltakozása természetesen ezt befolyásolhatja, viszont látni fogjuk (a későbbiekben a 12. ábrán), hogy az exponens meglepően pontosan $-\frac{3}{2}\eta$ marad. Ez alapján a trajektóriák kiszámítása nélkül meg tudjuk becsülni a skalármező abszolútértékének változását η függvényében, amit később használni fogunk Λ korlátozására.

4. Eredmények

4.1. Sötét energia

Autonóm egyenletrendszerünk fixpontjai az 1. táblázatban találhatók. Mellettük feltüntettük a bennük kiértékelt Jacobi mátrix sajátértékeit, illetve a pont típusát. Érdeemes megjegyeznünk, hogy $V_0 \neq 0$ esetén a táblázat közepén szereplő D, T, A pontokon kívül a többi nem fizikai fixpont a 2.3. fejezetben tárgyaltak alapján, ezért őket elválasztva jelöltük a többitől.

Jel	(x_0, y_0, z_0)	Sajátértékek	Típus
O	$(0, 0, 1/2)$	$\{0, \frac{3}{2}(w-1), \frac{3}{2}(w+1)\}$	nyereg
D	$(0, 1, 1/2)$	$\{-3(w+1), -\frac{3}{2}(\gamma+1), \frac{3}{2}(\gamma-1)\}$	vonzó
T	$(0, 1, 1)$	$\{0, -3, -3(w+1)\}$	vonzó vagy nyereg
A	$(0, 1, 0)$	$\{-3(w+1), -\frac{3}{2}(\beta+1), \frac{3}{2}(\beta-1)\}$	nyereg
B	$(0, 0, 1)$	$\{0, \frac{3}{2}(w-1), \frac{3}{2}(w+1)\}$	nyereg
L	$(-1, 0, 1)$	$\{3, 0, -3(w-1)\}$	taszító vagy nyereg
R	$(1, 0, 1)$	$\{3, 0, -3(w-1)\}$	taszító vagy nyereg

1. táblázat. Modellünk fixpontjai, és hozzájuk tartozó Jacobi-sajátértékek. Megjelenik a sajátértékekben $\beta = \sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{\phi_0^2}{\Lambda + \phi_0^4}} \geq 1$, illetve $\gamma = \sqrt{1 - 2 \frac{16}{3} \frac{\phi_0^2}{\Lambda}}$. Aláhúzással jelöltük a CMT eredményét, ahol felmerül a vonzó fixpont lehetősége.

A fixpontvizsgálat eredményeként két pontot is kaptunk, amelyek potenciálisan viselkedhetnek attraktorként. Először a D pontot vizsgáljuk, amely csak akkor jelenik meg, ha $\Lambda \neq 0$. A három sajátértéke közül az első minden $-1 < w$ esetén teljesíti a feltételt, a második és a harmadik pedig közösen véve akkor ad attraktort, ha $-1 < \Re(\gamma) < 1$. Az alsó határ triviálisan teljesül, a felső pedig igaz, amennyiben ϕ_0 valós és Λ pozitív. A gyök előjele ráadásul nem befolyásolja a stabilitást: képzetes sajátérték esetén $\Re(\gamma) = 0$, ami szintén az adott intervallumba esik: tetszőleges véges γ értékre tehát attraktort tapasztalunk a gyorsuló tágulást leíró tartományban.

A másik lehetséges vonzó pontja a modellnek T, amelynek egy sajátértéke nulla, így rá a központi sokaság elmélet módszereit kell alkalmaznunk. Ennek eredménye másodrendig:

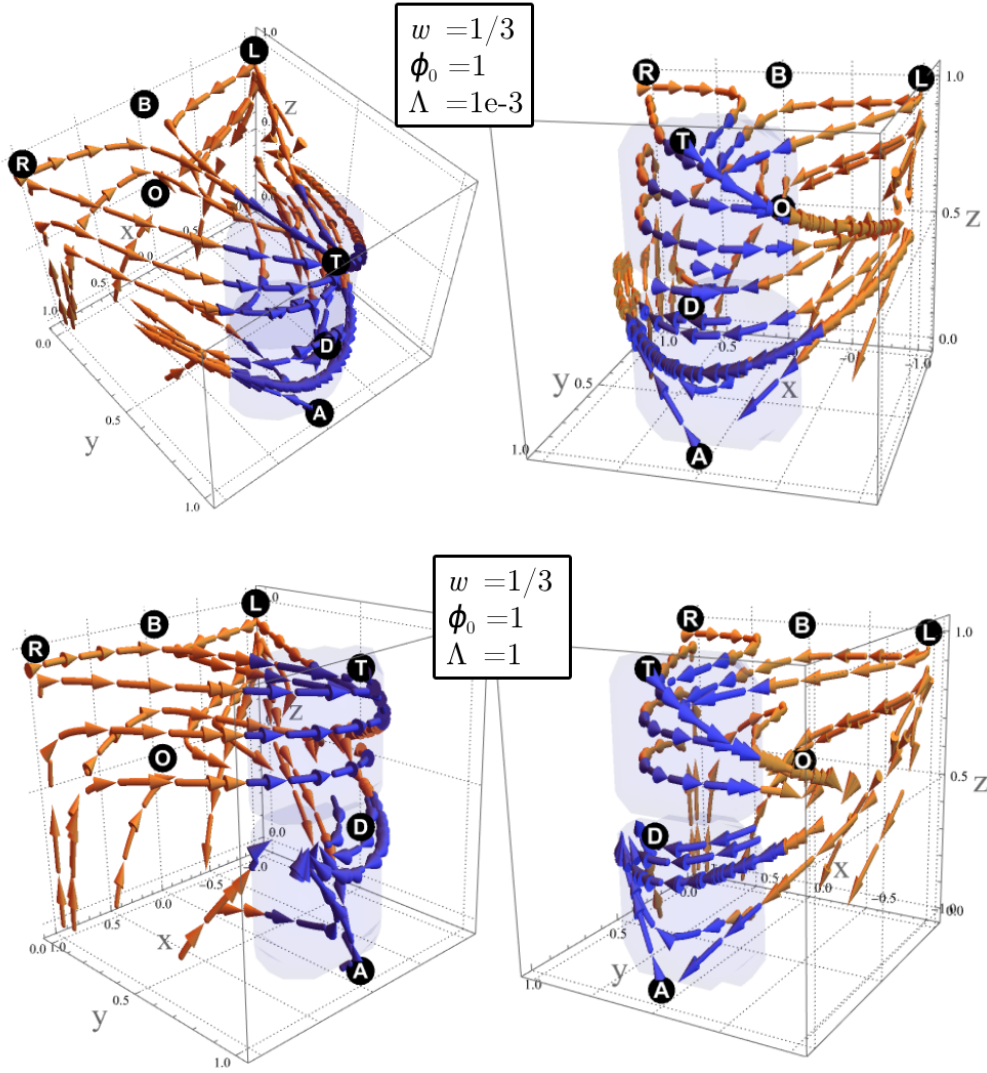
$$Z'_T = \frac{4}{\phi_0^2}(Z_T - 3Z_T^2), \text{ ahol } Z_T \in [-1, 0] \quad \longrightarrow \quad Z'_T < 0, \quad (4.1.1)$$

tehát Z taszító irány, így nyeregpontot kapunk, ami megfelel elvárásainknak: fizikai jelentőséggel bíró vonzó pontot nem kaphatnánk pusztán a központi sokaság viselkedéséből.

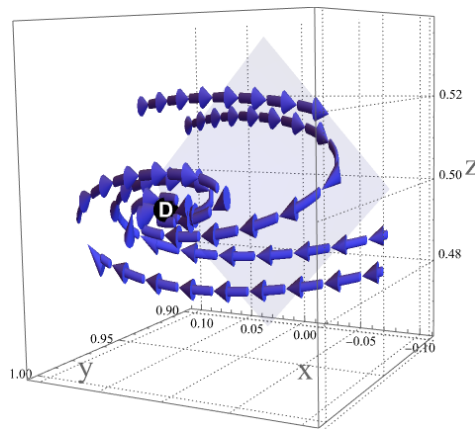
Az egyenletek megoldásaiból ábrázoltunk néhány trajektóriát a 7. ábrán. Célszerű visszaidézni az egyenletrendszer szimmetriáját, amelyet felhasználtunk a tartomány leszűkítéséhez: a $z = 0$ síkot metsző trajektóriák az $x = 0$ síkra tükrözve folytatják útjukat. Lekövetjük rajta a fixpontok fent kiszámított viselkedését, illetve a kettőt összevetve láthatjuk Λ és ϕ_0 relatív nagyságának a hatását a trajektóriákra. A rendszer vonzó pontját külön ábrázoltuk a 8. ábrán, mivel rendkívül besűrűsödtek körülötte a trajektóriák.

Az ábrázolt fixpontok fizikai jelentése könnyíti az ábra értelmezését. A fázistér tetején található $z = 1$ sík felel meg $\phi = \infty$ esetnek, az itt elhelyezkedő pontok írják le a mező minimumértéke feletti kitéréseket. Felfedezhetjük az L és R pontok viselkedését, amelyekre a CMT sem jár eredménnyel³: R nyeregpont lesz, L pedig taszító. Ez konzisztens azzal, hogy a skalármezőt az x változása azt a minimum helyébe tereli. Hasonló szerepet töltenek be a tisztán potenciális energiájú O, B és T nyeregpontok, annyi különbséggel, hogy T már $H^{-1} \neq 0$ értékű fixpont lesz. A T felel meg a $V = \infty$ potenciális energiának a $\phi = \infty$ mező értéknél. Fizikai jelentésű fixpontok a vonzó D

³Rájuk a Ljapunov stabilitás módszereit kell alkalmazni, ami túlmutat ezen a cikken.



7. ábra. Modellünk fázistere különböző paraméterek mellett, két-két nézőpontból. Feltüntetve rajta az egyes fixpontok, illetve késsel a tartomány, amin belül gyorsulva távol a világegyetem.



8. ábra. A "D" pont közeli környezete, szemléltetésképp a $\Lambda = 1 = \phi_0$ esetben. Ráközelítve jól látható, hogy tényleg vonzó pontként viselkedik, magába spirálozva a $(\phi^2 - \phi_0^2)^2 \ll \Lambda$ tartományt elérő trajektóriákat.

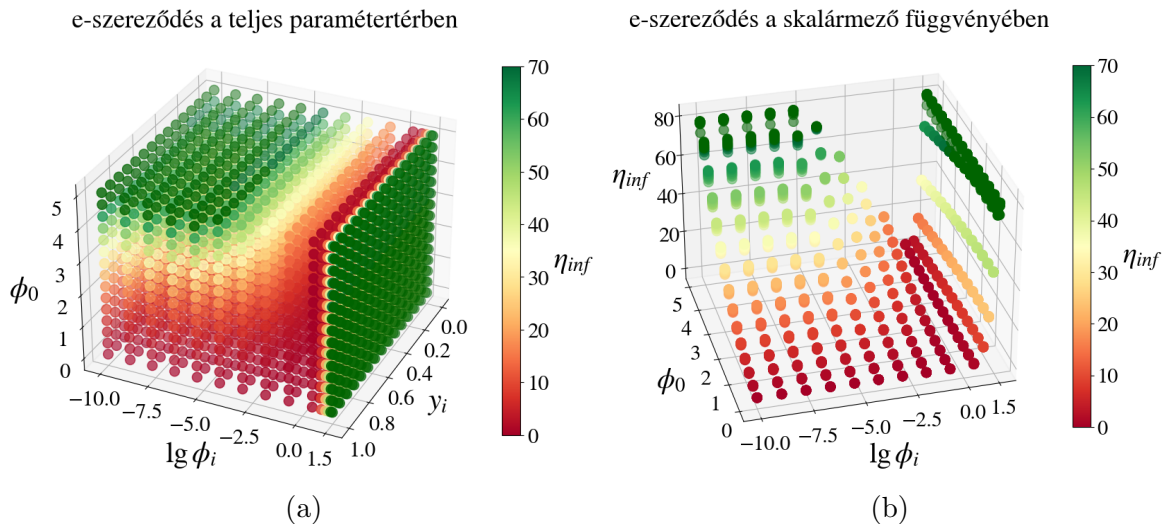
pont és az A nyeregpont. Az utóbbi írja le a potenciál lokális maximumát $\phi = 0$ -ban, D pedig a $\phi = \phi_0$ -hoz tartozó $V = V_0$ globális minimumát.

A fixpontvizsgálat eredményeképpen megkaptuk, hogy csak abban az esetben *nincs* vonzópontja az autonóm egyenlentszernek a gyorsulva táguló tartományon belül, ha $V_0 = 0$. Minden más, tetszőlegesen kicsi $V_0 > 0$ esetben rendszerünk végső soron egy sötét energiának megfeleltethető, végtelenségig gyorsulva táguló sorsra fog jutni.

4.2. Infláció

Numerikus szimulációk alapján feltérképeztük, hogy a változók y_i , ϕ_i kezdeti feltételeihez, illetve a skalármező potenciális energiájának ϕ_0 paraméteréhez mekkora η_{inf} e-szereződés értékek tartoznak a 3.3.3. fejezet módszerei szerint. Az itt mutatott ábrákon a színskála az e-szereződés mértékét jelenti a $[0, 70]$ tartományon. Annak érdekében, hogy egy ábrán tudjuk feltüntetni a különböző fizikailag érdekes eseteket, a skalármező ϕ_i kezdeti feltételét tízes alapú logaritmusban, $\lg \phi_i$ -ként tüntettük fel, mivel annak a nagyságrendje befolyásolta az inflációt.

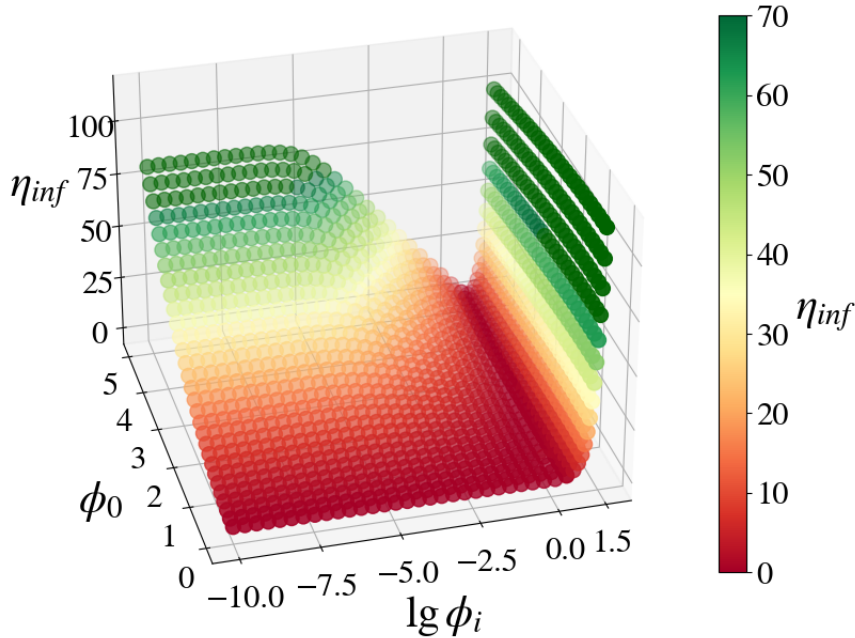
Láthatóan a vizsgált paraméterterben két olyan térrészt találtunk, amelyek az irodalommal egyezően kellően nagy e-szereződéssel járó inflációt mutatnak (sötétzöld tartományok). Az egyik a tetszőleges negyedfokú potenciál, ha a skalármező abszolút értékének kezdeti értéke magas ($\Phi_i \gtrsim 20M_P$), ami annak felel meg, hogy a mező a nulla körüli minimumhelyébe gördül. Ez jó inflációt ad, ha a kezdeti feltétellel attól kellően távolról indítjuk. A másik a nagy, $\Phi_0 \gtrsim 5M_P$ minimumhelyű eset, amikor a mező kezdeti értéke nulla (vagy közel nulla). Erre gondolhatunk egy spontán szimmetriasértés előtti állapotként: az SSB előtti $\Phi_0 = 0$ vákuum várható értékű potenciális energia ezt a kezdeti feltételt jelöli ki a mező abszolút értékének. Amennyiben ezután a minimumhely kellően kiugrik, nagyjából a Planck-tömeg nagyságrendjére, szintén inflációt tapasztalunk. Erre a két eltérő forgatókönyvre a későbbiekben rendre **HF** („magas mezős”, angolul *high field*), illetve **SSB** („szimmetriasértéses”, angolul *spontaneous symmetry breaking*) inflációként fogunk hivatkozni.



9. ábra. Szimulált e-szereződés az y_i , ϕ_i kezdeti feltételek, illetve ϕ_0 függvényében. Hogy a két szeparált tartományt egy ábrán tüntethessük fel, a skalármező kezdeti értékének nagyságrendjére skáláztuk a ϕ_i tengelyt. (a) Bal oldalon külön tengelyen található az y_i kezdeti feltétel, (b) jobbra már átfedésben a többi ponttal.

A 9.(a) ábra mutatja, hogy a különböző paraméterekhez tartozó, színes pöttyökkel feltüntetett e-szereződés mértéke csak gyengén függ y_i kezdeti feltételtől. Ezért a három dimenziós fázisteret „összenyomtuk” ebben a változóban, a függőleges tengelyre az e-szereződést helyezve (ahogy a 9.(b) ábrán látható). A különböző y_i értékekhez tartozó e-szereződések jól láthatóan azonosak, a hozzájuk tartozó pöttyök hibahatáron belül átfednek. Ennek alapján jobban tudtuk optimalizálni a fázistér letapogatását: ezt a kezdeti feltételt $y_i = 0.5$ értékre rögzítve finomítottuk a felbontást a többi paraméterben. Az így kapott, különböző ϕ_0 és ϕ_i kezdeti értékek mellett kiszámított trajektóriák adatsortát használtuk a továbbiakban. Ez tartalmazta az összes trajektóriára azok x, y, ϕ változóit η függvényében, amelyekből a 3.3.3 szakaszban leírt módon számítottuk az e-szereződést. Ezt a 10. ábrán (a 9.(b) ábra finomabb felbontású változata) láthatjuk. Itt már jól kirajzolódik a $\phi_i = \phi_0$ kezdeti feltételhez tartozó völgy, illetve annak két oldalán a SSB és HF infláció.

e-szereződés a skalármező függvényében

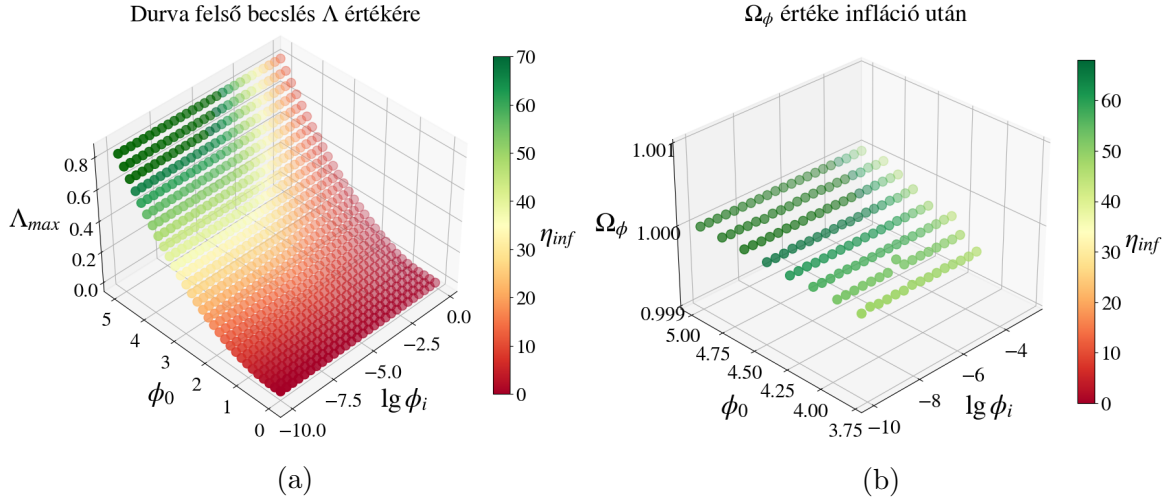


10. ábra. Jobb felbontású szimuláció $y_i = 0.5$ értékkel. Jól látható a két tartomány amelyre inflációt tapasztalunk: balra a $\Phi_0 \simeq m_P$ minimumhelyű SSB esetek, jobbra pedig a $\Phi_i \simeq 4m_P$ kezdeti értékű HF régió.

Az infláció végének η_{inf} konformális időpontjának ismeretében kinyertük adatso-
rainkból az $x(\eta_{\text{inf}}), y(\eta_{\text{inf}}), \phi(\eta_{\text{inf}})$ változók értékeit. Ezekből megkaptuk a skalármező Ω_ϕ relatív energiasűrűségét, illetve abszolút értékének $(\phi^2 - \phi_0^2)^2$ négyzetes eltérését a minimumtól. Az utóbbiból tudtunk számítani durva Λ_{max} felső becslést a kozmológiai állandókra. Mivel a sötéteergia megjelenése $(\phi^2 - \phi_0^2)^2 \approx \Lambda$ feltételhez kötött, az infláció végén a skalármező abszolútértéke felső határt szab a kozmológiai állandónak, ha azt várjuk, hogy az infláció és a kései tágulás ne fedjenek át.

A számításainkat itt már korlátoznunk kellett, kétfelől is. Egyrészt kiemelt szerepet szentelünk az inflációt tartalmazó trajektóriáknak. Így az $\eta_{\text{inf}} > 45$ feltételt teljesítő eseteket vizsgáltuk tovább, ami a numerikus számolásokhoz elég megszorítás lett volna. Azonban a későbbiekben alkalmazott analitikus becslések csak a SSB inflációkra érvényesek, így csak azokra szorítkozunk a továbbiakban. Az energiasűrűséget a jó

inflációt tartalmazó esetekre kiszámítva ismét elértük a függetlenséget a kezdeti feltételektől: *minden ilyen trajektóriánk bekonvergált ugyanarra a $\Omega_\phi \simeq 1$ végpontra.* A SSB-re vonatkozó $\Lambda_{\max}$ felső becslésünk viszont tágnak bizonyult: nagyjából $0.5 M_P^4 \simeq (0.85 M_P)^4$ alá tudtuk korlátozni (11.(a) ábra) az állandó értékét csupán az infláció és a sötét energia időrendjét kihasználva.



11. ábra. A szimmetriesértékes infláció tartományán feltüntettük (a) a durva felső becslést a potenciálminimumhoz tartozó Λ értékre, illetve (b) a skalármező relatív energiasűrűségét az infláció végén. Demonstráltuk az ábrán a két használt maszkot: (a) balra csak az SSB trajektóriák pontjai szerepelnek, (b) jobbra pedig ezen belül is csak a kellő e-szereződéssel járók.

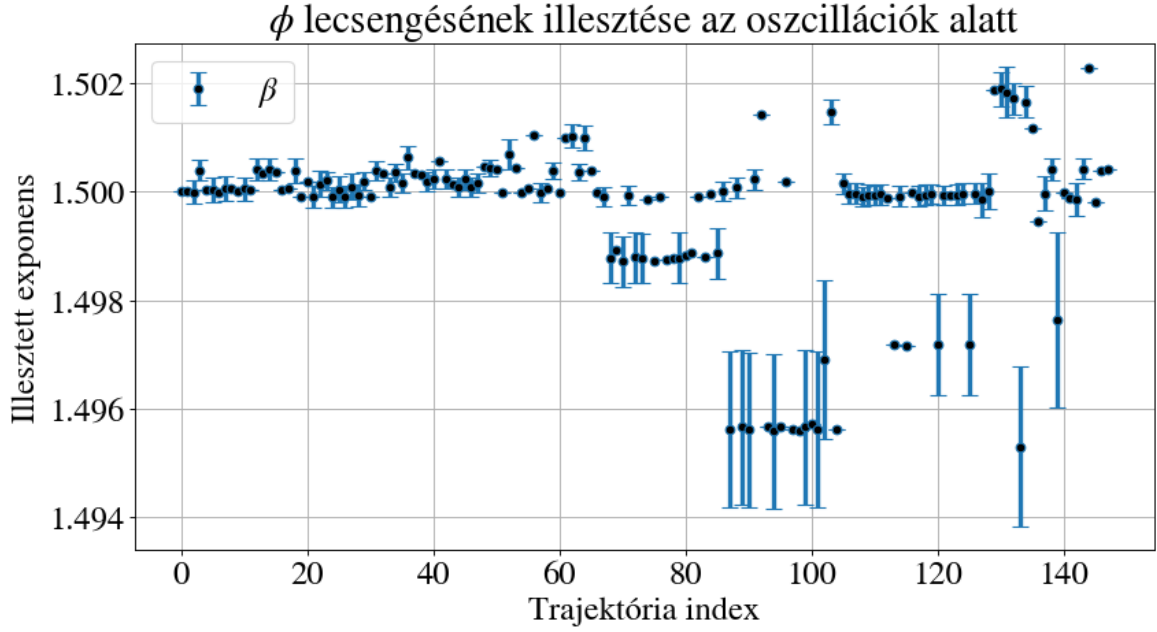
4.3. Oszcillációk

Az inflációt teljesítő tartományok további időfejlődését is tudtuk vizsgálni. Ezek közül kiválasztottuk a SSB eseteket, mivel a nagy ϕ_i mezős, kis ϕ_0 minimumhelyű HF tartományok a 3.4.1. szakaszban tárgyaltak miatt bizonytalanabban kezelhetők ugyanazon módszerekkel. Ahogy a 11.(b) ábrán láttuk, minden trajektórián $\Omega_\phi(\eta_{\text{inf}}) \simeq 1$ teljesült, így ezek időfejlődéséhez alkalmazhattuk a 3.4. szakaszban leírt közelítést:

$$\eta(t) \approx \frac{2}{3} \ln \left(\frac{3}{2} H_i(t - t_i) + e^{\frac{3}{2} \eta_i} \right), \quad (4.3.1)$$

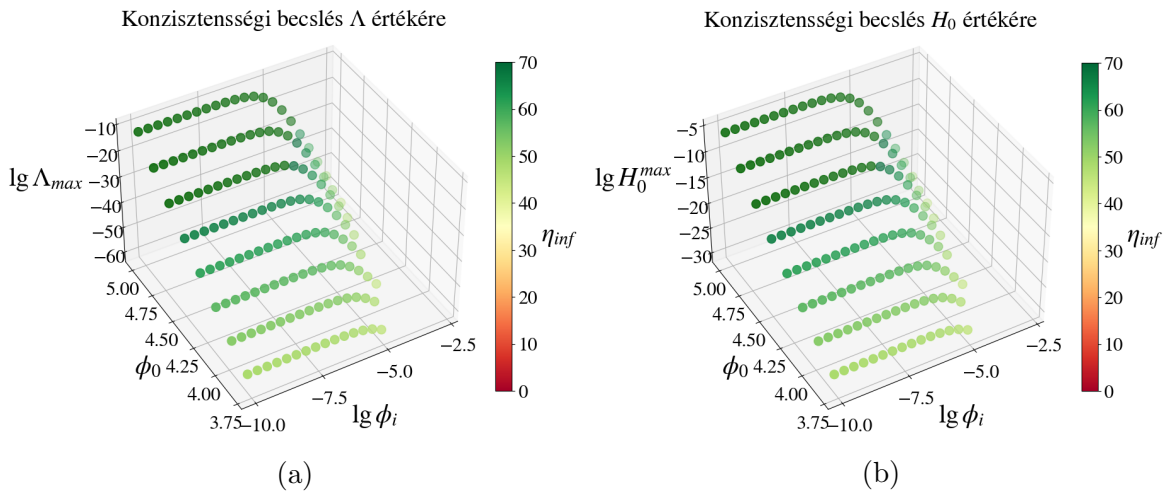
$$\phi^2(\eta) - \phi_0^2 \approx (\phi_i^2 - \phi_0^2) \exp \left(-\frac{3}{2}(\eta - \eta_i) \right). \quad (4.3.2)$$

A közelítés jóságának szemléltetéséhez az $\eta_{\text{inf}} > 45$ SSB inflációjú trajektóriákra tovább futtattuk a numerikus differenciálegyenletet megoldó programot. A minél pontosabb illesztés érdekében mindegyiket a felfúvódás után még 100 oszcilláció lefutásáig szimuláltuk. Ezeken a trajektóriákon leköveltük $\phi^2(\eta) - \phi_0^2$ változását, amelyekre exponenciálisan lecsengő $\propto \exp(-\beta\eta)$ függvényalakot illesztettünk, hogy lássuk mennyire pontos a közelítés által jósolt $\beta = \frac{3}{2}$ exponens. Az így kapott illesztések paraméterei a 12. ábrán találhatók, és egyezést mutatnak a numerikus szimuláció és az analitikus közelítés közt. Ennek eredményeképpen a skalármező Ω_ϕ relatív energiasűrűsége által dominált oszcillációs szakaszon *a világegyetem anyagszerűen viselkedik* a (4.3.1) egyenlet alapján, a skalármező lecsengését pedig jól írja le a (4.3.2) képlet.



12. ábra. A SSB inflációt mutató 150 trajektória szimulációját folytattuk 100-100 oszcillációig. Ezek alatt követtük $\phi^2 - \phi_0^2$ változását, amelyre $A \exp(-\beta(\eta + B))$ függvényt illesztettünk. Az ábrán ezek β paraméterei láthatók, egy standard deviancia hibahatárral.

A (4.3.1) és (4.3.2) egyenletek segítségével tetszőleges t időpontra ki tudtuk számítani a modellünk által jósolt skálafaktort, mező-abszolútértéket és Hubble-paramétert. Az előző becslésünk Λ értékére túl tágnak bizonyult, ezért behelyettesítjük az egyenletekbe azt a t_{DE} időpontot, ahol a sötétenergia és az anyag-szerűen viselkedő mező relatív energiasűrűsége megegyezik. Hogy ellenőrizzük modellünk konzisztens-e a standard kozmológiával, a szakirodalomból [15] vett $t_{DE} > 9.8$ Gyr értékkel kiszámítottuk, hogy mit kapunk $\Lambda_{\max}$ felső határra. Vettük a SSB inflációs tartomány végén érvényes



13. ábra. Az irodalmi sötétenergia megjelenési időt figyelembe vevő felső becslések SSB infláció után: (a) a potenciálunk null pont energiájára és (b) a Hubble-állandóra.

mezőértékeket és Hubble-paramétereket, majd azokra alkalmaztuk a fenti közelítésből kapott időfejlődést. Az így kapott $(\phi_{DE}^2 - \phi_0^2)^2$ értékeket megfektettük $\Lambda_{\max}$ felső határnak minden (ϕ_0, ϕ_i) paraméterű kezdeti pontra, amit a 13.(a) ábrán szemléltetünk. Ezek a $\Lambda_{\max}$ értékek olyan értelemben szabnak korlátot a kozmológiai állandónak, hogy legfeljebb mekkora Λ mellett lesz legalább ilyen későn a sötétegyergia–anyag energiásűrűség egyenlőség. Becslésünk jól láthatóan tartalmazza a kozmológiai állandó irodalmi $\Lambda_{\text{lit}} = 2.888 \cdot 10^{-122}$ értékét. Továbbá a 3.3.3. szakasz segítségével ki tudtuk számítani, hogy ezekhez a trajektóriákhoz mekkora Hubble-paraméter tartozik a fent megadott sötétegyergia–anyag egyenlőségi pontban. Mivel a Hubble-paraméter monoton csökken, ezzel a modellünk által jósolt mai H_0 Hubble-állandóra is felső korlátot tudtunk szabni. Ez a 13.(b) ábrán látható: a Hubble-állandó Planck-egységben mért $H_0 \approx 10^{-61}$ értékét szintén magába foglalja a felső becslésünk által kijelölt térrész.

4.4. A világegyetem kora és a Hubble-állandó

Rögzítettük a kozmológiai állandót a szakirodalomból [5] vett, Planck-egységekben értett $\Lambda_{\text{lit}} = 2.888 \cdot 10^{-122}$ értékre. Az előző fejezet érvelését megfordítva ki tudtuk számítani, hogy milyen valós idő tartozik ahhoz a ponthoz, ahol a kozmológiai konstans és a skalármezőnk járuléka megegyeznek, tehát $y_{DE}^2 = 0.5$, és $(\phi_{DE}^2 - \phi_0^2)^2 = \Lambda$. Ekkor a (4.3.1) és (4.3.2) egyenleteket átrendezve:

$$t_{DE} = \frac{2}{3} \frac{1}{H_i} \frac{\phi_i^2 - \phi_0^2}{\sqrt{\Lambda_{\text{lit}}}}, \quad (4.4.1)$$

amelynek értéke egy szűk, 95% bizonyossághoz tartozó hibahatáron belül minden (H_i, ϕ_i, ϕ_0) SSB infláció utáni értékre ugyanannak adódott:

$$t_{DE} = 11.61620(1) \text{ Gyr}. \quad (4.4.2)$$

Hasonlóképpen ki tudtuk számítani, hogy mekkora H_0 Hubble-paraméter tartozik ahhoz a ponthoz, ahol a sötétegyergia relatív energiasűrűsége $y_{\text{ma}}^2 = 0.7$. Feltéve, hogy ekkorra a skalármező kellően lecsengett, hogy $(\phi_{\text{ma}}^2 - \phi_0^2)^2 \ll \Lambda$ igaz legyen, a (3.3.8) egyenlet leegyszerűsödik:

$$H_0 = \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{10}{7}} \sqrt{\lambda \Lambda} M_P = \sqrt{\frac{10}{21}} \sqrt{\Lambda_{\text{lit}}} M_P = 1.1727 \cdot 10^{-61} t_p^{-1}, \quad (4.4.3)$$

amely ismerősebb egységekben

$$H_0 \simeq 67.1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}. \quad (4.4.4)$$

Ez konzisztens a mért értékkel, ami jó ellenőrzése modellünknek: kihasználva a Λ kozmológiai konstans rögzítő H_0 és Ω_Λ mért értékeket, összeegyeztethető eredményeket kaptunk az irodalmiakkal. Ezzel a (4.4.2) egyenletben kiszámított kort is ellenőrizhetjük, kihasználva az univerzum közelítőleges életkorára vonatkozó $t_H = \frac{1}{H_0}$ összefüggést:

$$t_H \simeq 14.58 \text{ Gyr}. \quad (4.4.5)$$

5. Összegzés

5.1. A paraméterter

Munkánkban egy nullától eltérő minimum helyű és értékű skalármezővel egészítettük ki a Friedmann-egyenleteket. Azt vizsgáltuk, hogy a kozmológiából ismert gyorsuló táguló szakaszok a világegyetem történelmében (a korai infláció és a kései sötétenergia) megjelennek-e ebben az egyszerű modellben. Eredményeink alapján $\Phi_0 \simeq m_p$ és $V_0 > 0$ mellett tapasztalunk olyan trajektóriákat, amik kvalitatíve leírják a világegyetem kezdeti és mai tágulását.

A potenciális energia minimumának ez a két paramétere az, ami befolyásolja rendre az inflációt, és a sötétenergiát. A minimumhely értékét megszabja az e-szereződés mértéke, amennyiben a felfúvódásra egy spontán szimmetriasértés következményeképp tekintünk. Ez feloldja a másik lehetséges forgatókönyv, a magas mezős inflációnak azt a furcsaságát, miszerint a mező csak különösen nagy, Planck-tömeg feletti kezdeti kitérésekre produkál jó e-szereződést. A kezdeti feltételre vonatkozó szigorú megkötés modellünkben eltűnik, viszont az energiaskála problémája megmarad: feltételezett mezőnk vákuum várható értéke (és így a hozzá tartozó bozon tömege) pontosan a Planck-tömeg nagyságrendjébe esik. Ez egy bizonyos szinten várható volt: részecskefizika motiválta potenciállal próbálkoztunk egy gravitációból fakadó hatás leírására, így nem meglepő, hogy megjelent a kettőt összekapcsoló skála.

A ma tapasztalt gyorsuló tágulás alapján a fixpontvizsgálatunk eredménye azt jósolja, hogy $V_0 \neq 0$, modellünkben szerepelnie kell a kozmológiai állandónak. Rá felső korlátot a numerikus szimulációk alapján tudtunk szabni, az univerzum (standard kozmológiából jósolt) korát alulról korlátozva. Ez tartalmazta annak irodalmi értékét, így azt véve Λ paraméterünknek kiszámítottuk modellünk jóslatait a sötétenergia–anyag egyenlőség t_{DE} időpontjára, és a Hubble-állandóra, amelyekre a megfigyelésekkel meglepően összecsengő értékeket kaptunk.

5.2. Módszertanbeli tanulságok

Modellünkben a kozmológiai állandót nem az univerzum energiáinak külön összetevőjeként kezeltük, hanem a mező potenciális energiájába olvasztva. Ennek hála le tudtuk választani a trajektóriákból azokat a szakaszokat, ahol a $V_0 = 0$ esettől nem térnek el megoldásaink. Amikor a skalármező abszolút értékének lecsengése indokolta, újra figyelembe tudtuk venni az állandót.

A drasztikusan más időskálájú események egyidejű vizsgálatához két trükköt alkalmaztunk. A differenciálegyenletek numerikus megoldásban a szimulációknak a 3.3.2. szakaszban részletezett periodikus újraindítása tette lehetővé a trajektóriák teljes végigkövetését. Ez demonstratív célokra, illetve a futásidők csökkentésére elég volt, viszont a sötétenergia viselkedésének megbízható kiszámítására már nem. Ahhoz elengedhetetlenek voltak a 3.4. fejezet analitikus közelítései, amelyekkel már el tudtuk végezni a teljes paraméterter vizsgálatát. Mellékes eredményként ráadásul megkaptuk az oszcilláló mező univerzumának pontos viselkedését, ami meglepő módon egyezik az anyag dominálta világegyetem időfejlődésével.

Finomítást talán a 3.3.4. szakaszban bevezetett valós időfüggésre való áttérés megvalósítása érdemel. Munkánk során ennek a differenciálegyenletnek a megoldására egy primitív, Euler-módszeren alapuló algoritmust használtunk. Céljainkra ez elégnek bizonyult, viszont a program ezen része még nem optimális.

5.3. Kitekintés

Tanulmányunkban sikerült megvalósítani a célkitűzésünket. Felépítettünk egy olyan numerikus és analitikus eszköztárat, amellyel *a skalármezőkkel kiegészített gravitáció-elmélet tanulmányozható olyan szempontból, hogy egyetlen modell keretén belül elérhető-e a világegyetem korai felfúvódásának és kései gyorsuló tágulásának mennyiségi leírása.* A célunk elérése mellett az egyetlen skalármezőt használó konkrét modellünkről nem gondoljuk, hogy teljes képet a világegyetemről. Felsoroltunk néhány gondolatot, amik felmerültek vizsgálataink során.

- Figyelmen kívül hagytuk skalármezőnk elbomlását. A Klein-Gordon egyenletbe bevezethettünk volna olyan további tagot, amely bomlást eredményez, de az egyszerűség jegyében ezt egyelőre nem vizsgáltuk. Jól látható eredményekkel járt, hogy kihagytuk az egyenleteinkből: modellünk világegyetemének a teljes történelmében csak a skalármező energiasűrűsége domináns, a többi járulékot gyakorlatilag el is hagyhattuk volna.
- Az analitikus közelítésünk értelmében tapasztalunk inflációs, anyagszerűen viselkedő oszcillációs, és sötétenergia jellegű szakaszokat az univerzum időfejlődésében. Sehol nem jelent meg sugárzásszerű viselkedés (a modell szempontjából érdektelen infláció előtt időszakot kivéve), amire pedig számítanánk a standard kozmológiából.
- Kiindulásként skalármezőnket a részecskefizika BEH-modelljéből vettük, ami a már ismert Higgs-bozont jósolja $\Phi_0 \approx 246$ GeV értékkel, ami 17 nagyságrenddel kisebb mint az inflációhoz szükséges minimum. Így a vizsgált mezőnk vagy egy másik skalár, vagy a minimumhely időben változik.
- Elvileg lehetséges a skalármező és a görbület kölcsönhatását is figyelembe vevő tag a Lagrange-sűrűségünkben, ami tanulmányozásra érdemes érdekes kiegészítése a modellnek.
- Nem tárgyaltuk az univerzum sűrűségfluktuációinak mértékét. Elképzelhető, hogy bár jó e-szereződést kapunk valamely ϕ_0 paraméterre, de a hozzá tartozó fluktuációk nem összeegyeztethetők a mért értékekkel.

Mindezek a kérdések további izgalmas kutatást vetítenek előre.

Hivatkozások

- [1] Sebastian Bahamonde, Christian G. Böhm, Sante Carloni, Edmund J. Copeland, Wei Fang, and Nicola Tamanini. Dynamical systems applied to cosmology: Dark energy and modified gravity. *Physics Reports*, 775-777:1–122, nov 2018.
- [2] Edwin Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15(3):168–173, March 1929.
- [3] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009–1038, sep 1998.
- [4] D. N. Spergel, R. Bean, O. Dore, M. R. Nolta, C. L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, et al. Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Implications for cosmology. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 170(2):377–408, jun 2007.
- [5] R. L. Workman and Others. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022.
- [6] Alan H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, 1981.
- [7] Andrei D. Linde. Inflationary Cosmology. *Lect. Notes Phys.*, 738:1–54, 2008.
- [8] Andrei D. Linde. Chaotic Inflation. *Phys. Lett. B*, 129:177–181, 1983.
- [9] Fedor L. Bezrukov and Mikhail Shaposhnikov. The Standard Model Higgs boson as the inflaton. *Phys. Lett. B*, 659:703–706, 2008.
- [10] F. Bezrukov, A. Magnin, M. Shaposhnikov, and S. Sibiryakov. Higgs inflation: consistency and generalisations. *JHEP*, 01:016, 2011.
- [11] Jiro Matsumoto and Sergey V. Sushkov. Cosmology with nonminimal kinetic coupling and a higgs-like potential. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(11):047–047, nov 2015.
- [12] S. C. C. Ng, N. J. Nunes, and F. Rosati. Applications of scalar attractor solutions to cosmology. *Physical Review D*, 64(8), sep 2001.
- [13] Stephen Wiggins. *Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos*, volume 4. 2014.
- [14] Ernst Hairer and Gerhard Wanner. Stiff differential equations solved by radau methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 111(1):93–111, 1999.
- [15] Barbara Ryden. Introduction to cosmology. *Introduction to cosmology / Barbara Ryden. San Francisco, CA, USA: Addison Wesley, ISBN 0-8053-8912-1, 2003, IX + 244 pp.*, 01 2003.

Függelék

Saját eredmények

Az átfogó kérdés amely e dolgozatot motiválta, az a skalármezők szerepe az univerzum temporális fejlődésében, külön figyelmet szentelve a gyorsuló tágulást mutató szakaszokra. Munkám célja az volt, hogy az efféle modellek vizsgálatára felépítsek egy módszertant, amelynek segítségével a teljes kronológiát lefedhetjük az inflációtól a sötétenergiáig.

A skalármezős sötétenergia szakirodalmi formalizmusát, illetve a lineáris stabilitásvizsgálat és központi sokaság elmélet módszereit használva kiszámítottam választott modellünk késő ideji viselkedését. A nem zérus minimumhelyű és értékű hatványpotenciál specifikus esetének ilyen tárgyalása legjobb tudomásom szerint új. A számítások megvalósítására, illetve az ábrák rajzolására `Mathematica` kódot írtam. Eredményképp egyrészt pozitív kozmológiai állandót tudtam jósolni, másfelől pedig ellenőriztem a numerikus megoldásokat.

Az inflációs szakasz leírásához a fent említett, η időparaméterre támaszkodó formalizmus használata önálló ötlet volt. Ez alternatívát nyújt a lassú gördülés közelítésre: helyette a differenciálegyenletek numerikus megoldásával kaptam meg az e -szereződés mértékét a kezdeti értékek és a minimumhely függvényében. A megoldások megvalósítására és ábrázolására `Python` kódot készítettem. Sikeresen találtam olyan tartományokat, amelyek telejsítik az elvárt e -szereződést.

A két szakasz összekapcsolásához analitikus és numerikus módszereket is felvázoltam. A numerikus megoldásokra a `SciPy` csomag Radau megoldóját találtam legalkalmasabbnak. Ezt olyan algoritmussal kiegészítettem ki, amely a szimulációt periodusonként újraindította, és ezáltal stabilizáltam a numerikus megoldást tetszőleges végpontig (az erőforrásigényeket figyelembe nem véve). Ezzel párhuzamosan analitikus közelítésekkel leveztettem, hogy az oszcilláló mező kozmológiai járuléka anyagszerű. Ezt a közelítést szimulációkkal támasztottam alá.

Levezettem és implementáltam az η változóról a valós t időre való áttérés módszerét. Ezzel, és a fent részletezett részeredményekkel együtt bemutattam, hogy a kezdeti infláció megoldásai elfolytathatók napjainkig. Demonstrációként a választott modellben inflációt teljesítő trajektóriákra ezt meg is tettem, a standard kozmológiával konzisztens eredményt kapva a kozmológiai konstans és a Hubble-állandó értékeire.

Függelék

Szakdolgozat eltérés

Cél

Bár TDK munkám és szakdolgozatom mind a skalármezős kozmológia tágabb területébe tartoznak, azok alapvető kérdése más. TDK munkám fő célja egy módszertan kiépítése volt: milyen analitikus és numerikus utakon lehet megkapni egy skalárral felruházott világegyetem történelmét kezdetétől napjainkig. Ehhez egy viszonylag egyszerű modellt alkalmaztam demonstrációs célokkal.

Szakdolgozatomban egy specifikus, részecskefizikailag pontosabban körhatárolt skalármező modell volt a vizsgálatom tárgya, feltárva az összes lehetséges viselkedést, amelyet az mutatni tud. Ez esetben nem lehetett értelmezni a korai és kései szakaszok összekötését, mert azok a fázistér diszjunkt tartományaihoz tartoztak.

Modell

TDK dolgozatom választott modellje a kifejlesztett módszerek bemutatását szolgálta. Az inflációs szakaszhoz szükséges legördülés motiválta a nem zérus minimumhely lehetőségét, a kései sötéteenergia pedig a nem zérus minimumértéket. Ezek voltak azok a minimális paraméterek, amelyek mellett tárgyalni tudtuk a korai és kései szakaszok áthidalását.

Szakdolgozatom szigorúan nem-nulla vákuum várható értékű skalárból indult ki, elhagyva a kozmológiai állandót, ezzel magára a mezőre fókuszálva. A skalár benne nem minimálisan csatolt a téridő görbületéhez, hanem konformálisan, ezzel betartva az ekvivalencia elvet. Figyelembe véve a skalár kölcsönhatásait más részecskékkel, a Klein-Gordon egyenlet kiegészült egy új taggal, amely a részecske bomlási szélességével arányos.

A két modell akkor hozható átfedésbe, ha a kozmológiai állandót, a skalár-görbület csatolást, illetve a bomlási szélességet nullának vesszük.

Módszertan

A TDK-ban a skalármezős sötéteenergia szakirodalmi módszertanát terjesztettem ki az univerzum teljes történelmére. A fixpontvizsgálatban használtam a lineáris stabilitásvizsgálat és a központi sokaság elmélet módszereit, illetve kitértem a lehetséges fixpontok divergens viselkedéseire is. A korábbi korszakokhoz stabilizáltam a differenciálegyenlet numerikus megoldásait **Python**-ban.

Szakdolgozatom a TDK munkám eredményeképp megkapott módszereket használja. Az itt részletezett numerikus módszerek és analitikus közelítések ott csak hivatkoztam újbóli levezetés helyett. Az így felszabadult teret diplomamunkámban modell-specifikus számítások vették át.

Utóbbi esetében a konformális csatolásból adódó mozgásegyenleteket részletesen, lépésről lépésre levezettem a variációszámítás módszereivel, amelyhez **Mathematica** programcsomagokat vettem igénybe. Az így kapott egyenletek természetesen más autonóm egyenletrendszerhez vezettek, de annak megoldása hasonló módon történt. A bomlási tag vizsgálatához analitikus közelítéseket tettem, amelyeket numerikus függvény-illesztéssel támasztottam alá. Ezekhez ismét felhasználtam hivatkozásként a TDK dolgozatot.

Eredmények

TDK dolgozatom fő eredménye az η -tól függő autonóm differenciálegyenlet numerikus megoldásának stabilizálása, illetve az ezzel alátámasztott egyszerűsítés, miszerint a skalár oszcillációi anyagként viselkednek. Ezek sikerét mutatja, hogy a választott modell inflációt mutató trajektóriáit a jelenig folytatva egyezést találtam a kozmológiai állandó és a Hubble-állandó standard értékeivel. A megoldásokból viszont hiányzott a sugárzás dominálta szakasz, és az anyag-sötétenergia egyenlőségi pont is későbbre került a vártnál: ezek a modell hiányosságaira utalnak. Az e-szereződés alapján a Φ_0 minimumhelyre Planck-tömeg körüli értéknél kaptam jó eredményt, illetve a már ismert magas kezdeti értékű esetekben.

A szakdolgozatomban vizsgált skalármező két eltérő viselkedést mutatott a paramétereinek függvényében. A vákuum várható érték két átfedésmentes tartományában valósult meg infláció és a sötétenergia. Utóbbi esetben a skalár elméletileg jóslott tömegét $m_s \lesssim 10^{-33}$ eV alá tudtam korlátozni. Az inflációs esetben az e-szereződések mértékéből a minimumhelyre $\Phi_0 \gtrsim 10^{15}$ GeV jóslatot tettem. A tranziens viselkedés itt anyag dominálta végső fázisba torkollt, ahol megjelent egy anyagszerűen viselkedő új $\Omega_s \propto (\Phi_0/M_P)^2$ energiajárulék. A korai szakaszokban a mező bomlásának és anyagszerű oszcillációinak hatására a Hubble-paraméternek lassabb csökkenést jósltam, ezzel annak mai elméleti értékét a standard kozmológiánál feljebb becsülve.