

DICKE ÁLLAPOTOK ÖSSZEFONÓDÁSA – TDK DOLGOZAT, 2024

NYÁRI PÉTER ÁDÁM
TÉMAVEZETŐ: DR. SZALAY SZILÁRD, WIGNER FK

KIVONAT. A kvantumrendszerekben megjelenő korrelációk sokkal erősebbek lehetnek a klasszikus rendszerekénél, melynek legfontosabb megjelenési formája a kvantum-összefonódás. Két részrendszer összefonott vagy szeparálható lehet, de kettőnél több részrendszer esetén ez az osztályozás jóval bonyolultabbá válik, melyet részleges összefonódásnak neveznek.

A dolgozatban áttekintjük a sokrészű összetett rendszerek kvantum-összefonódásának matematikai leírását, majd vizsgáljuk a tiszta Dicke állapotú kvantumrendszerek részleges összefonódását tetszőleges dimenziójú (qudit) elemi részrendszerekre. Ehhez kiszámítjuk a Dicke állapotok Schmidt-dekompozícióját és redukáltjait általánosan, zárt alakban. Ezeknek az eredményeknek a felhasználásával kiszámítjuk a Dicke állapotok különböző típusú részleges összefonódásainak mértékeit, melyek által kimerítően jellemezzük az ilyen állapotú kvantumrendszerek részleges összefonódását. A Schmidt-dekompozíciós eredményeink felhasználásával megadjuk a Dicke-állapotok mátrixszorzat alakját, amely felírására kevés expliciten kiszámolt példa létezik az irodalomban.



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	3
2. Hilbert-terek és a kvantummechanika	3
2.1. Hilbert-terek.	3
2.2. Hilbert-terek tenzorszorzata.	6
2.3. Különleges lineáris operátorok.	7
3. Kvantumrendszerek leírása	8
3.1. Állapotterek.	9
3.2. Qubit.	10
4. Összetett rendszerek kvantumelmélete	12
4.1. Rendszerek, részrendszerek és állapotterek.	12
4.2. Mátrixszorzat-állapot.	14
4.3. Korreláció, összefonódás.	16
4.4. Korreláció és összefonódás mértékei.	18
5. Elemi szimmetrikus állapotok leírása	21
5.1. Permutációoperátorok.	22
5.2. Elemi szimmetrikus állapotok, 2 dimenziós (qubit) eset.	23
5.3. Elemi szimmetrikus állapotok, általános dimenziós (qudit) eset.	27
6. Dicke-állapotok korrelációja és összefonódása	30
7. Dicke-állapotok mátrixszorzat alakja.	34
8. Összefoglalás	36
Köszönetnyilvánítás	36
Hivatkozások	36

1. BEVEZETÉS

1935-ben Erwin Schrödinger megalkotta az összefonódás kifejezést [1], kiemelve, hogy

„[az összefonódás] a kvantummechanika nem egyik, hanem inkább a legfontosabb jellemzője, amely kikényszeríti a klasszikustól eltérő gondolkodást.”

A kvantumrendszerekre jellemző szuperpozíció elvéből következnek a részrendszerek közötti úgynevezett nemklasszikus korrelációk. Ilyen például az összefonódás, ami a nemklasszikus korrelációk legfontosabb megnyilvánulása. Klasszikus korrelációk létrehozhatók a részrendszereken végzett, „lokális” műveletekkel és a köztük lévő klasszikus kommunikációval, amit a köztük átvitt klasszikus rendszerekkel való klasszikus kölcsönhatásokkal lehet megvalósítani. Összefonódásról beszélünk akkor, ha a korrelációkat ezek segítségével sem lehet létrehozni, hanem ehhez valódi kvantumos kölcsönhatás kell. Ez egy a klasszikusnál erősebb korreláció, amelyet kihasználni nehéz, de fontos erőforrás a „kvantum előny” eléréséhez, a kvantumalgoritmusokban, kvantumkommunikációban, kvantumtitkosírásban, melyek napjaink népszerű kutatási témái [5].

Sok qubit összetett rendszerének Dicke-állapotai erősen, de nem maximálisan összefonott állapotok, melyeknek fontos szerepük van a kvantum hálózatokban, kvantum játékelméletben vagy kvantum metrológiában. A jelen dolgozatban ilyen állapotok sokrészösszefonódását fogjuk vizsgálni általánosabb, qudit részrendszerek esetében. Ehhez először a 2. fejezetben áttekintjük a kvantummechanikában használt Hilbert-tér formalizmust véges dimenziós esetben, majd a 3. fejezetben felhasználjuk ezeket az ismereteket a diszkrét véges kvantumrendszerek leírására az állapotterek bevezetésével, egy példát, a qubitet részletesebben megvizsgálva. Ezután a 4. fejezetben megvizsgáljuk a sokrészű diszkrét véges összetett rendszerek leírását, majd bevezetjük ezeknek a rendszereknek a korrelációját és összefonódását, illetve bevezetjük az ezeknek a szám-szerűsítéséhez használt matematikai módszereket. Ezek után az 5. fejezetben bevezetjük az elemi szimmetrikus, vagy Dicke-állapotokat, és megvizsgáljuk ezen állapotok tulajdonságait qubit (két dimenziós) és qudit (tetszőleges dimenziós) esetben, amiknek segítségével a 6. fejezetben kiszámítjuk az ezen állapotokból képzett tiszta állapotok korrelációját és összefonódását, majd a 7. fejezetben felírjuk a Dicke-állapotok mátrixszorzat (MPS, matrix product state) alakját. Végezetül a 8. fejezetben összefoglaljuk az eredményeinket.

Az új eredményeink *egy részét* a Dicke-állapotok Schmidt dekompozíciója általános dimenziójú, qudit elemi részrendszerek esetén (ez az eredmény qubitekre már ismert az irodalomból), *másrészt* a Dicke-állapotok összefonódásának, illetve korrelációjának kiszámítása, *harmadrészt* a Dicke-állapotok MPS alakja általános dimenziójú, qudit elemi részrendszerek esetén (ez az eredmény qubitekre már ismert az irodalomból).

2. HILBERT-TEREK ÉS A KVANTUMMECHANIKA

A kvantummechanikában a mérhető mennyiségeket vagy obszervábiliseket Hilbert-téren ható lineáris operátorokként reprezentáljuk. Ezért ebben a fejezetben részletesebben megismerkedünk a Hilbert-terekkel [1, 5, 6].

2.1. Hilbert-terek. Egy $\mathcal{H}$ vektorteret a $\mathbb{C}$ számtest feletti *komplex Hilbert-térnek* nevezzük, ha értelmezve van rajta egy *belső szorzat* vagy *skaláris szorzat*, ami teljes normált teret indukál. A belső szorzat egy olyan

$$(2.1) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

leképezés, amely *nemnegatív*, azaz egy vektor saját magával vett belső szorzata nem negatív, vagyis $\langle \psi, \psi \rangle \geq 0$. *Nem degenerált*, azaz ha egy vektor saját magával vett belső szorzata 0, akkor a vektor az a nullvektor, vagyis $\langle \psi, \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$. *Konjugált szimmetrikus* vagy *hermitikus*, azaz ha megfordítjuk a belső szorzatban a vektorok sorrendjét, akkor az eredeti belső szorzat konjugáltját kapjuk, vagyis $\langle \psi, \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi, \psi \rangle}$. *Lineáris* a *második argumentumában*, azaz véges

szummára $\langle \psi, \sum_i \lambda_i \varphi_i \rangle = \sum_i \lambda_i \langle \psi, \varphi_i \rangle$. Belátható, hogy mivel a belső szorzat konjugált szimmetrikus, illetve lineáris a második argumentumában, ezért az első argumentumában konjugált lineáris, azaz véges szummára $\langle \sum_i \lambda_i \psi_i, \varphi \rangle = \sum_i \bar{\lambda}_i \langle \psi_i, \varphi \rangle$.

Ezek mellett belátható, hogy az ilyen tulajdonságokkal rendelkező belső szorzatra érvényes a *Cauchy-Bunyakovski-Schwarz egyenlőtlenség*, ami szerint $\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}$ -ra

$$(2.2) \quad |\langle \psi, \varphi \rangle|^2 \leq \langle \psi, \psi \rangle \cdot \langle \varphi, \varphi \rangle.$$

Ha a térben van egy a fenti tulajdonságokkal rendelkező belső szorzatot, akkor definiálható egy *norma* a

$$(2.3) \quad \|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$$

módon, amellyel a Cauchy-Bunyakovski-Schwarz egyenlőtlenség, alakja $\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}$ -ra

$$(2.4) \quad |\langle \psi, \varphi \rangle| \leq \|\psi\| \cdot \|\varphi\|.$$

$\mathcal{H}$ Hilbert-tér, ha erre a normára nézve *teljes*, azaz minden $\mathcal{H}$ -beli Cauchy-sorozat konvergál.

A vektorterekben a lineáris kombináció a fontos struktúra, ezért azok a leképezések lesznek fontosak, amelyek ezt megőrzik. Egy $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ operátorra azt mondjuk, hogy *lineáris*, ha minden $\psi_i \in \mathcal{H}$ vektorra

$$(2.5) \quad A\left(\sum_i c_i \psi_i\right) = \sum_i c_i A\psi_i.$$

Az ilyen A operátorokat lineáris operátoroknak nevezzük, és $A \in \text{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ módon jelöljük. Belátható, hogy a lineáris operátorok is vektorteret alkotnak. Egy általános $A \in \text{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operátor $A^\dagger \in \text{Lin}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ *adjungáltját* úgy definiáljuk, hogy minden $\psi \in \mathcal{H}$ és $\varphi \in \mathcal{K}$ esetén

$$(2.6) \quad \langle \varphi, A\psi \rangle = \langle A^\dagger \varphi, \psi \rangle.$$

A $\mathcal{H}$ Hilbert-tér *duálisának* nevezzük a $\text{Lin}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ vektorteret, azaz a $\mathcal{H}$ térből a számtestbe leképező lineáris funkcionálokat. Ezt a teret $\mathcal{H}^*$ -gal jelöljük. A Hilbert-tér elemei, és a tér duálisának elemei között be lehet vezetni egy kölcsönösen egyértelmű, konjugált lineáris megfeleltetést,

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}^* \\ \psi &\longmapsto \psi^\dagger, \end{aligned}$$

ahol $\psi^\dagger$ olyan funkcionál, melynek hatása

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \psi^\dagger : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \psi^\dagger(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Ez alapján bevezethetjük a *Dirac-féle bra-ket* jelölést, ami szerint az úgynevezett „*ketvektorok*”

$$(2.9) \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H},$$

illetve a „*bravektorok*”

$$(2.10) \quad (|\psi\rangle)^\dagger =: \langle \psi| \in \mathcal{H}^*.$$

Ezek alapján a $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ és $\langle \varphi| \in \mathcal{H}^*$ vektorok skaláris szorzata pedig a

$$(2.11) \quad \langle \psi, \varphi \rangle = \langle \psi| \varphi \rangle$$

alakban írható.

Egy $\mathcal{H}$ Hilbert-téren *bázisnak* nevezzük vektoroknak egy olyan halmazát, amelyek lineárisan függetlenek, és a tér bármely vektora előállítható ezen bázisvektorok lineáris kombinációjaként. A bázisvektorok száma, ami megegyezik a lineárisan független vektorok maximális számával, a

Hilbert-tér *dimenziója*, $\dim(\mathcal{H})$, ami a dolgozat során végig véges lesz. A $[d] = \{1, 2, \dots, d\} \in \mathbb{N}$ jelölést használva egy

$$(2.12) \quad \left\{ |\phi_j\rangle \in \mathcal{H} \mid j \in [\dim(\mathcal{H})] \right\}$$

bázisra azt mondjuk, hogy *ortonormált*, ha

$$(2.13) \quad \langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij}.$$

A továbbiakban, ha külön nem említjük, akkor ortonormált bázisokat fogunk használni. Mivel minden vektor egyértelműen felírható a bázisvektorok lineárkombinációjaként, ezért egy tetszőleges $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ vektor felírható a

$$(2.14) \quad |\psi\rangle = \sum_i c_i |\phi_i\rangle$$

alakban. A c_i együtthatókat úgy lehet megkapni, hogy ezt a kifejezést megszorozzuk balról $|\phi_j\rangle$ -vel. Ekkor

$$(2.15) \quad \langle \phi_j | \psi \rangle = \langle \phi_j | \sum_i c_i |\phi_i\rangle = \sum_i c_i \langle \phi_j | \phi_i \rangle = \sum_i c_i \delta_{ji} = c_j.$$

A $\mathcal{H}^*$ téren is lehet definiálni egy úgynevezett duális bázist a $\mathcal{H}$ tér bázisvektorai alapján a (2.7) megfeleltetés segítségével.

Az $I \in \text{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \text{Lin}(\mathcal{H})$ operátort *identitásoperátornak* nevezzük, ha minden vektort önmagába képez, azaz minden $|\psi\rangle$ -re $I|\psi\rangle = |\psi\rangle$. Belátható, hogy bármely bázist használva az identitásoperátor felírható az

$$(2.16) \quad I = \sum_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$$

alakban. Ehhez hattassuk ezt egy tetszőleges $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ vektorra.

$$(2.17) \quad I|\psi\rangle = \sum_i \left(|\phi_i\rangle \langle \phi_i| \right) |\psi\rangle = \sum_i c_i |\phi_i\rangle = |\psi\rangle.$$

Ez alapján megkaphatjuk egy tetszőleges $A \in \text{Lin}(\mathcal{H})$ operátor kifejtését, mivel $IAI|\psi\rangle = IA|\psi\rangle = A|\psi\rangle$, tehát

$$(2.18) \quad \begin{aligned} IAI &= A = \sum_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| A \sum_j |\phi_j\rangle \langle \phi_j| = \sum_i \sum_j |\phi_i\rangle \langle \phi_i| A |\phi_j\rangle \langle \phi_j| = \\ &= \sum_i \sum_j \langle \phi_i | A | \phi_j \rangle |\phi_i\rangle \langle \phi_j| = \sum_i \sum_j A_{ij} |\phi_i\rangle \langle \phi_j|. \end{aligned}$$

Tehát a $|\phi_i\rangle \langle \phi_j|$ *diádok* bázist alkotnak a $\text{Lin}(\mathcal{H})$ téren, és egy tetszőleges $A \in \text{Lin}(\mathcal{H})$ operátor ezen bázisvektorhoz tartozó kifejtési együtthatója $A_{ij} = \langle \phi_i | A | \phi_j \rangle$.

Egy $A \in \text{Lin}(\mathcal{H})$ operátor *nyoma*, vagy *trace-e*

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \sum_i \langle \phi_i | A | \phi_i \rangle = \sum_i \langle \phi_i | \left(\sum_j \sum_k A_{jk} |\phi_j\rangle \langle \phi_k| \right) | \phi_i \rangle = \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k A_{jk} \langle \phi_i | \phi_j \rangle \langle \phi_k | \phi_i \rangle = \sum_i \sum_j \sum_k A_{jk} \delta_{ij} \delta_{ki} = \sum_j \sum_k A_{jk} \delta_{jk} = \sum_k A_{kk}, \end{aligned}$$

vagyis az operátor mátrixának főátlóbeli elemeinek összege, amelynek az értéke, ahogyan később látni fogjuk, bázisfüggetlen, azaz ugyanaz minden $\{|\phi_i\rangle\}$ bázis esetén.

2.2. Hilbert-terek tenzorszorzata. A $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek *tenzorszorzatán* a $\mathcal{H}$, illetve $\mathcal{K}$ Hilbert-terek elemeiből képzett, úgynevezett *elemi tenzorok* által kifeszített vektorteret értjük, azaz

$$(2.20) \quad \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = \text{Span}\{|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \mid |\psi\rangle \in \mathcal{H}, |\varphi\rangle \in \mathcal{K}\}.$$

A tenzorszorzás művelet bilineáris, azaz

$$(2.21a) \quad \left(\sum_i c_i |\psi_i\rangle\right) \otimes |\varphi\rangle = \sum_i c_i (|\psi_i\rangle \otimes |\varphi\rangle)$$

$$(2.21b) \quad |\psi\rangle \otimes \left(\sum_i c_i |\varphi_i\rangle\right) = \sum_i c_i (|\psi\rangle \otimes |\varphi_i\rangle).$$

Be lehet látni, hogy a $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ vektortér is Hilbert-tér a

$$(2.22) \quad \langle \psi_1 \otimes \varphi_1 | \psi_2 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}} \cdot \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle_{\mathcal{K}}$$

belső szorzattal, ahol a $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ a $\mathcal{H}$, a $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$ a $\mathcal{K}$ Hilbert-téren értelmezett belső szorzás. Legyen $\{|\phi_i\rangle_{\mathcal{H}}\}$ bázis a $\mathcal{H}$ téren, és $\{|\phi_i\rangle_{\mathcal{K}}\}$ bázis a $\mathcal{K}$ téren. Ekkor

$$(2.23) \quad \begin{aligned} |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle &= \left(\sum_i \psi_i |\phi_i\rangle_{\mathcal{H}}\right) \otimes \left(\sum_j \varphi_j |\phi_j\rangle_{\mathcal{K}}\right) = \\ &= \sum_i \sum_j \psi_i \varphi_j (|\phi_i\rangle_{\mathcal{H}} \otimes |\phi_j\rangle_{\mathcal{K}}) = \sum_i \sum_j (|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle)_{ij} (|\phi_i\rangle_{\mathcal{H}} \otimes |\phi_j\rangle_{\mathcal{K}}), \end{aligned}$$

tehát a $|\phi_i\rangle_{\mathcal{H}} \otimes |\phi_j\rangle_{\mathcal{K}}$ elemi tenzorok bázist alkotnak a $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ téren, és egy tetszőleges $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ elemi tenzor hozzájuk tartozó kifejtési együtthatója $\psi_i \varphi_j$.

Vizsgáljuk a

$$(2.24) \quad \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^* = \text{Span}\{|\psi_1\rangle \otimes \langle\psi_2| = |\psi_1\rangle \langle\psi_2| \mid |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}\}$$

teret. Ez a tér izomorf a $\text{Lin}(\mathcal{H})$ térrel, ha egy tetszőleges $A = |\psi_1\rangle \langle\psi_2| \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$ eleme úgy hat egy $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ vektoron, hogy

$$(2.25) \quad A|\varphi\rangle = (|\psi_1\rangle \langle\psi_2|)|\varphi\rangle = |\psi_1\rangle \langle\psi_2|\varphi\rangle \in \mathcal{H}.$$

Tehát $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^* = \text{Lin}(\mathcal{H})$. Emellett $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}^* = \text{Lin}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, és egy tetszőleges $|\psi\rangle \langle\chi|$ eleme úgy hat egy $|\varphi\rangle \in \mathcal{K}$ vektoron, hogy $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \forall |\chi\rangle \in \mathcal{K}$

$$(2.26) \quad (|\psi\rangle \langle\chi|)|\varphi\rangle = |\psi\rangle \langle\chi|\varphi\rangle \in \mathcal{H}.$$

Tetszőleges $A \in \text{Lin}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}'_1)$ és $B \in \text{Lin}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}'_2)$, illetve $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ és $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ esetén

$$(2.27) \quad (A \otimes B)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (A|\psi_1\rangle) \otimes (B|\psi_2\rangle).$$

Ezeknek az ismeretében bevezethetünk különböző operátorokon értelmezett műveletek tenzor-szorozatos, bázisfüggetlen értelmezését.

Korábban bevezettük a Nyomot bázison, a (2.19) módon, most meg vizsgáljuk meg a művelet általános definícióját a tenzorszorzat segítségével. Legyen a Nyom olyan lineáris művelet, amely minden $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ és $\langle\varphi| \in \mathcal{H}^*$ ra

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \text{Tr} : \text{Lin}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ |\psi\rangle \langle\varphi| &\longmapsto \langle\varphi|\psi\rangle. \end{aligned}$$

Belátható, hogy ez ekvivalens a korábbi bázisfüggő (2.29) definícióval. Valóban egy tetszőleges $A \in \text{Lin}(\mathcal{H})$ operátor trace-e

$$(2.29) \quad \text{Tr}\left(\sum_i \sum_j A_{ij} |\phi_i\rangle \langle\phi_j|\right) = \sum_i \sum_j A_{ij} \text{Tr}(|\phi_j\rangle \langle\phi_j|) = \sum_i \sum_j A_{ij} \langle\phi_j|\phi_i\rangle = \sum_i \sum_j A_{ij} \delta_{ij} = \sum_i A_{ii}.$$

Tehát egy operátor trace-e az operátor mátrixának főátlóbeli elemeinek összege.

Korábban bevezettük az adjungálást bázison, a (2.6) módon, most viszont vizsgáljuk meg a művelet általános definícióját a tenzorszorzat segítségével. Az adjungálás olyan konjugált lineáris művelet, amely

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \dagger : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} &\longrightarrow \mathcal{K}^* \otimes \mathcal{H}^* \\ |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle &\longmapsto \langle\psi| \otimes \langle\varphi|. \end{aligned}$$

Speciális esetben

$$(2.31) \quad \dagger : \text{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}^* = \text{Lin}(\mathcal{K}, \mathcal{H}),$$

mivel véges dimenzióban $(\mathcal{H}^*)^* = \mathcal{H}$. Egy tetszőleges $A \in \text{Lin}(\mathcal{H})$ operátor adjungáltja

$$(2.32) \quad A^\dagger = \left(\sum_i \sum_j A_{ij} |i\rangle\langle j| \right)^\dagger = \sum_i \sum_j \overline{A_{ij}} (|i\rangle\langle j|)^\dagger = \sum_i \sum_j \overline{A_{ij}} |j\rangle\langle i| = \sum_i \sum_j (A^\dagger)_{ji} |j\rangle\langle i|.$$

Ez alapján

$$(2.33) \quad (A^\dagger)_{ij} = \overline{A_{ji}}.$$

Vagyis az adjungált operátor mátrixa az operátor mátrixának transzponált konjugáltja.

A $\text{Lin}(\mathcal{H})$ téren be lehet vezetni az úgynevezett *Hilbert-Schmidt skalárszorzást* a

$$(2.34) \quad \begin{aligned} (\cdot|\cdot) : \text{Lin}(\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (A|B) &\longmapsto \text{Tr}(A^\dagger B) \quad \forall A, B \in \text{Lin}(\mathcal{H}) \end{aligned}$$

módon. Belátható, hogy ez a művelet valóban skalárszorzás, vagyis nemnegatív, $(A|A) \geq 0$, nem degenerált, $(A|A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$, konjugált szimmetrikus, $(A|B) = \overline{(B|A)}$ és a második argumentumában lineáris, azaz véges szummára $(A|\sum_i \lambda_i B_i) = \sum_i \lambda_i (A|B_i)$.

2.3. Különleges lineáris operátorok. Egy általános $A \in \text{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operátort fel lehet írni

$$(2.35) \quad A = \sum_i^{d_{\min}} s_i |\alpha_i\rangle\langle\beta_i|$$

alakban, ahol bevezettük a $d_{\min} = \min\{\dim(\mathcal{H}), \dim(\mathcal{K})\}$ jelölést. A (2.35) felírást az A operátor *szinguláris érték felbontásának* nevezzük, ahol az $\{|\alpha_i\rangle\} \in \mathcal{K}$ ortonormált bázis vektorait az operátor *bal oldali szinguláris vektorainak*, a $\{|\beta_i\rangle\} \in \mathcal{H}$ ortonormált bázis vektorait az operátor *jobb oldali szinguláris vektorainak* és a $0 \leq s_i \in \mathbb{R}$ számokat az operátor *szinguláris értékeinek* nevezzük [1]. Egy operátor *rangján* azt értjük, hogy az operátornak hány nem nulla szinguláris értéke van, és $\text{rk}(A)$ módon jelöljük.

Normálisnak nevezünk egy olyan $A \in \text{Lin}(\mathcal{H})$ operátort, amelyre

$$(2.36) \quad [A, A^\dagger] = AA^\dagger - A^\dagger A = 0.$$

Belátható, hogy az ilyen operátorok felírhatóak

$$(2.37) \quad A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$$

alakban, ahol az $a_i \in \mathbb{C}$ számok az A operátor *sajátértékei* és az $|\alpha_i\rangle \in \mathcal{H}$ vektorok, amelyek ortonormált bázist alkotnak, az operátor *sajátvektorai*. Ezt nevezzük az A operátor *spektrális felbontásának*.

Önadjungáltnak vagy hermitikusnak nevezünk egy olyan $A \in \text{Lin}(\mathcal{H})$ operátort, amelyre

$$(2.38) \quad A^\dagger = A.$$

Ezek az operátorok nyilvánvalón normálisak, és a (2.37) spektrális felbontásukban az összes sajátértékük valós, azaz

$$(2.39) \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i.$$

Ezt úgy lehet bizonyítani, hogy a (2.37) segítségével felírjuk a (2.38) egyenletet, $A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = A^\dagger = \sum_i \bar{a}_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$. Ez akkor teljesül, ha $a_i = \bar{a}_i$, tehát minden sajátérték valós.

Unitérnek nevezünk egy olyan $A \in \text{Lin}(\mathcal{H})$ operátort, amelyre

$$(2.40) \quad A^\dagger = A^{-1}.$$

Ezek az operátorok nyilvánvalón normálisak, és a (2.37) spektrális felbontásukban az összes sajátértéküknek az abszolút értéke 1, azaz

$$(2.41) \quad |a_i| = 1 \quad \forall i.$$

Ezt úgy lehet bizonyítani, hogy a (2.37) segítségével felírjuk a (2.40) egyenletet,

$$AA^\dagger = \sum_i \sum_j a_i \bar{a}_j |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j| = \sum_i |a_i|^2 |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = I = \sum_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|. \text{ Ez akkor teljesül, ha } |a_i| = 1.$$

Pozitív szemidefinitnek nevezünk egy $A \in \text{Lin}(\mathcal{H})$ operátort, ha minden $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ -ra

$$(2.42) \quad \langle\psi|A\psi\rangle \geq 0.$$

Ha az A operátor pozitív szemidefinit, azt úgy jelöljük, hogy

$$(2.43) \quad A \geq 0.$$

Ezeknek az operátoroknak minden sajátértéke nagyobb vagy egyenlő 0-nál, azaz

$$(2.44) \quad a_i \geq 0 \quad \forall i.$$

Ezt úgy lehet bizonyítani, hogy a (2.37) segítségével felírjuk a (2.42) egyenletet, $\langle\psi|A\psi\rangle = \langle\psi|(\sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|)|\psi\rangle = \sum_i a_i \langle\psi|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|\psi\rangle = \sum_i a_i |\langle\psi|\alpha_i\rangle|^2 \geq 0$. Ez akkor teljesül, ha $a_i \geq 0$.

Projektornak nevezünk egy $P \in \text{Lin}(\mathcal{H})$ operátort, ha

$$(2.45) \quad \begin{aligned} P^2 &= P \\ P^\dagger &= P \end{aligned}$$

azaz idempotensek és önadjungáltak. Ezek az operátorok nyilvánvalón normálisak, és a (2.37) spektrális felbontásukban az összes sajátértékük 0 vagy 1, azaz

$$(2.46) \quad a_i \in \{0, 1\} \quad \forall i.$$

Ezt úgy lehet bizonyítani, hogy a (2.37) segítségével felírjuk a (2.45) egyenletet, $P^2 = \sum_i \sum_j a_i a_j |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j| = \sum_i a_i^2 |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = P$. Ez akkor teljesül, ha $a_i^2 = a_i$, tehát minden sajátérték vagy 0 vagy 1.

3. KVANTUMRENDSZEREK LEÍRÁSA

Ebben a fejezetben áttekintjük a kvantumrendszerek leírását a korábban bemutatott Hilbert-tér formalizmus segítségével. Végül egy példán, a qubiten bemutatjuk ezek konkrét használatát.

3.1. Állapotterek. A kvantummechanikában a *mérhető mennyiségeket*, vagy *obszervábiliseket* normális operátorokkal reprezentáljuk. *Diszkrét véges rendszereknek* nevezzük az olyan rendszereket, amelyeknél az obszervábiliseket véges dimenziós Hilbert-téren tudjuk reprezentálni [2]. A dolgozat során ilyen rendszerekkel fogunk foglalkozni. Ha a Hilbert-tér dimenziója 2, akkor a rendszert qubitnek hívjuk, ha több, akkor quditnek. Ha megmérünk egy obszervábilist, a mérés eredményei az operátor (2.37) spektrális felbontásában szereplő a_i sajátértékei, a rendszer mérés utáni állapotai az operátor $|\alpha_i\rangle$ sajátvektorai által reprezentált, úgynevezett sajátállapotai lehetnek. A Born-szabály alapján a rendszert leírja egy $|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1$ *állapotvektor*, és ha egy ilyen $|\psi\rangle$ állapotban mérjük meg az obszervábilist, annak a valószínűsége, hogy a_i lesz a mérés eredménye

$$(3.1) \quad p_i = |\langle \alpha_i | \psi \rangle|^2.$$

Ezek alapján az obszervábilis várható értéke a $|\psi\rangle$ állapotban

$$(3.2) \quad \mathbb{E}_{|\psi\rangle}(A) = \sum_i p_i a_i = \sum_i |\langle \alpha_i | \psi \rangle|^2 a_i = \sum_i a_i \langle \psi | \alpha_i \rangle \langle \alpha_i | \psi \rangle = \langle \psi | \left[\sum_i a_i |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i| \right] | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle.$$

Ha bevezetjük a

$$(3.3) \quad \pi = |\psi\rangle \langle \psi|$$

operátort, amely egy 1-rangú projektor, amit *tiszta állapotnak* nevezünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$(3.4) \quad \mathbb{E}_{|\psi\rangle}(A) = \text{Tr}(\pi A) = \text{Tr}(\pi^\dagger A) = (\pi | A).$$

Ha különböző tiszta állapotokkal leírt rendszerek w_i súlyokkal súlyozott statisztikus sokaságát vizsgáljuk, akkor egy $|\psi\rangle$ állapot helyett több $|\psi_j\rangle$ állapot van, $w_j \geq 0$ súlyokkal, úgy, hogy $\sum_j w_j = 1$. Ekkor az A obszervábilis várható értéke

$$(3.5) \quad \mathbb{E}_{\{|\psi_j\rangle, w_j\}_j}(A) = \sum_j w_j \mathbb{E}_{|\psi_j\rangle}(A) = \sum_j \text{Tr}[|\psi_j\rangle \langle \psi_j| A] = \text{Tr}\left[\left(\sum_j w_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|\right) A\right].$$

Itt bevezethetjük a

$$(3.6) \quad \rho = \sum_j w_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$$

operátort, amely egy pozitív szemidefinit 1-nyomú operátor, melyet *kevert állapotnak* nevezünk. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$(3.7) \quad \mathbb{E}_{\{|\psi_j\rangle, w_j\}_j}(A) = \text{Tr}(\rho A) = \text{Tr}(\rho^\dagger A) = (\rho | A).$$

Ezek alapján bevezethetjük az úgynevezett *állapotteret*, aminek az elemei a fent definiált ρ operátorok, azaz

$$(3.8) \quad \mathcal{D}(\mathcal{H}) = \left\{ \rho \in \text{Lin}(\mathcal{H}) \mid \rho = \sum_j w_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|, |\psi_j\rangle \in \mathcal{H}, \|\psi_j\| = 1, \sum_j w_j = 1 \right\}.$$

A $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ operátorokat *sűrűségoperátoroknak* nevezzük, és egy tetszőleges A obszervábilis várható értéke a ρ állapotban levő rendszerben

$$(3.9) \quad \mathbb{E}_\rho(A) = (\rho | A) = \text{Tr}(\rho A).$$

Az állapottér speciális pontja az úgynevezett *fehér zaj*

$$(3.10) \quad \rho = \frac{1}{d} I,$$

ahol $d = \dim(\mathcal{H})$, mert ebben minden (nemdegenerált) obszervábilis minden mérési kimenetelre $\frac{1}{d}$ valószínűségű. Vegyük észre, hogy a sűrűségoperátor (3.8) definícióban felírt alakja nem

spektrális felbontás, hanem egy általános konvex felbontás, mivel a $\{|\psi_i\rangle\}$ vektorok nem ortonormálisok, csak normáltak. Ennek a konvex felbontásnak a speciális esete a spektrális felbontás, amiben a felírásban szereplő vektorok ortonormáltak. Egy $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ sűrűségoperátor spektrális felbontására a

$$(3.11) \quad \rho = \sum_i \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

jelölést használjuk. Belátható, hogy a (3.8) definíció ekvivalens a

$$(3.12) \quad \mathcal{D}(\mathcal{H}) = \{\rho \in \text{Lin}(\mathcal{H}) \mid \rho^\dagger = \rho \geq 0, \text{Tr}(\rho) = 1\}$$

definícióval, vagyis a sűrűségoperátorok pontosan a pozitív szemidefinit 1-nyomú operátorok. Hasonlóan definiálható a tiszta állapotok tere, amelynek az elemei a fentebb bevezetett π tiszta állapotok, azaz

$$(3.13) \quad \mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{\pi \in \text{Lin}(\mathcal{H}) \mid \pi = |\psi\rangle\langle\psi|, |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1\}.$$

Ezekre a terekre (3.8) alapján fennáll az, hogy az állapottér a tiszta állapotok *konvex burka*,

$$(3.14) \quad \mathcal{D}(\mathcal{H}) = \text{Conv}(\mathcal{P}(\mathcal{H})),$$

azaz egy $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ sűrűségoperátor felírható tiszta állapotok konvex kombinációjaként,

$$(3.15) \quad \rho = \sum_j w_j \pi_j,$$

ahol $\sum_j w_j = 1$. Emellett belátható, hogy a tiszta állapotok az állapottér *extrém pontjai*,

$$(3.16) \quad \mathcal{P}(\mathcal{H}) = \text{Extr}(\mathcal{D}(\mathcal{H})),$$

ami azt jelenti, hogy ha egy $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ tiszta állapotot fel akarunk írni $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ sűrűségoperátorok konvex kombinációjaként, azt csak egyféleképpen lehet megtenni, a $\pi = 1 \cdot \pi + \sum_i 0 \cdot \rho$ módon [1]. Belátható, hogy az állapottér valós dimenziója

$$(3.17) \quad \dim(\mathcal{D}(\mathcal{H})) = \dim(\mathcal{H})^2 - 1,$$

a tiszta állapotok terének valós dimenziója pedig

$$(3.18) \quad \dim(\mathcal{P}(\mathcal{H})) = 2\dim(\mathcal{H}) - 2.$$

3.2. Qubit. Qubit esetén $\dim(\mathcal{H}) = 2$, ez alapján az állapottér dimenziója $\dim(\mathcal{D}(\mathcal{H})) = 3$ és a tiszta állapotok terének dimenziója $\dim(\mathcal{P}(\mathcal{H})) = 2$. Mivel 2 dimenziós Hilbert-tére a feles spint tudjuk ábrázolni, válasszuk bázisnak az $SU(2)$ csoport generátorait, azaz az úgynevezett *Pauli-operátorokat* és az identitásoperátort, tehát a bázis az

$$(3.19) \quad \{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

elemekből áll. A Pauli operátorok önadjungáltak, $\sigma_a^\dagger = \sigma_a$, nyomtalanok $\text{Tr}(\sigma_a) = 0$, szorzatszabályuk $\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} I + i \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \sigma_c$, kommutációs relációjuk $[\sigma_a, \sigma_b] = \sigma_a \sigma_b - \sigma_b \sigma_a = 2i \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \sigma_c$, antikommutációs relációjuk $\{\sigma_a, \sigma_b\} = \sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_a = 2\delta_{ab} I$. Vezessük be a

$$(3.20) \quad v_1 \sigma_1 + v_2 \sigma_2 + v_3 \sigma_3 = \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}$$

jelölést, ahol $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$. A Pauli operátorok tulajdonságai alapján

$$(3.21) \quad (\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\mathbf{u} \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{v} \mathbf{u} I + i(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \boldsymbol{\sigma}.$$

Legyen egy tetszőleges $\rho \in \mathcal{D}$ sűrűségoperátor előállítható a

$$(3.22) \quad \rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \boldsymbol{\sigma})$$

alakban. Az $\frac{1}{2}$ szorzó azért kell, mert így lesz a ρ nyoma 1. Mivel $\rho^\dagger = \rho$, ezért az $\mathbf{r}$ elemei mind valósak, tehát $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. Ezeket az $\mathbf{r}$ vektorokat *Bloch-vektoroknak* nevezzük. Tehát (3.22) egy

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathbf{r} &\longmapsto \rho(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

affin leképezés, mert tartja a konvex kombinációt, azaz ha $w_1 \geq 0$, $\sum_i w_i = 1$, akkor

$$(3.24) \quad \rho\left(\sum_i w_i \mathbf{r}_i\right) = \sum_i w_i \rho(\mathbf{r}_i).$$

Ez azért fontos, mert így a Bloch-vektorok $\mathbb{R}^3$ -beli geometriája megfelel a $\mathcal{D}$ állapottér geometriájának.

Egy ρ sűrűségoperátor pontosan akkor ír le tiszta állapotot, ha idempotens, azaz $\rho^2 = \rho$. Ekkor a sűrűségoperátorok (3.22) alakjával azt kapjuk, hogy

$$(3.25) \quad \rho^2 = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})\frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4}(I + \|\mathbf{r}\|^2 I + 2\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}) = \rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}).$$

Ez akkor teljesül, ha $\frac{1}{2}(1 + \|\mathbf{r}\|^2) = 1$, azaz akkor ha az $\mathbf{r}$ hossza 1,

$$(3.26) \quad \|\mathbf{r}\| = 1.$$

Tehát a lehetséges $\mathbf{r}$ Bloch-vektorok egy 1 sugarú gömbfelületet határoznak meg, amit *Bloch-gömb(felület)nek* (*Bloch sphere*) hívunk. Ezek alapján a qubit tiszta állapotok tere

$$(3.27) \quad \mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}) \mid \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{r}\| = 1 \right\}.$$

Mivel az állapottér a tiszta állapotok konvex burka, ezért az állapotokat leíró lehetőséget $\mathbf{r}$ Bloch-vektorok egy 1 sugarú tömör gömböt határoznak meg, amit *Bloch-gömbnek* (*Bloch ball*) hívunk. Ezek alapján az állapottér

$$(3.28) \quad \mathcal{D} = \text{Conv}(\mathcal{P}) = \left\{ \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}) \mid \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{r}\| \leq 1 \right\}.$$

Az állapottér speciális pontja az $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ nullvektorhoz tartozó $\rho(\mathbf{0}) = \frac{1}{2}I$ állapot, amit fehér zajnak nevezünk.

A sűrűségoperátorok sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározásához az identitásoperátor tulajdonságai miatt elég meghatározni az $\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$ operátor sajátértékeit és sajátállapotait. Mivel $(\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})^2 = \|\mathbf{r}\|^2 I$ és $\text{Tr}(\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}) = 0$, ezért a sajátértékek négyzetei $\|\mathbf{r}\|^2$ és az összegük 0. Ezek alapján a két sajátérték $\pm\|\mathbf{r}\|$. Tehát az $\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$ operátor spektrális felbontása

$$(3.29) \quad \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma} = \|\mathbf{r}\| \cdot |\varphi_+\rangle\langle\varphi_+| - \|\mathbf{r}\| \cdot |\varphi_-\rangle\langle\varphi_-|.$$

Mivel a $|\varphi_+\rangle$ és $|\varphi_-\rangle$ sajátvektorok bázist alkotnak $\mathcal{H}$ -n, ezért az identitásoperátor felírható az $I = |\varphi_+\rangle\langle\varphi_+| + |\varphi_-\rangle\langle\varphi_-|$ alakban. Ez, és az $\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$ operátor (3.29) spektrális felbontása alapján a sajátvektorokból képzett diádok, amik állapotok a

$$(3.30) \quad |\varphi_\pm\rangle\langle\varphi_\pm| = \frac{1}{2}\left(I \pm \frac{\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}}{\|\mathbf{r}\|}\right),$$

módon írhatók fel. Mivel $\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})$, ezért a ρ sajátértékei

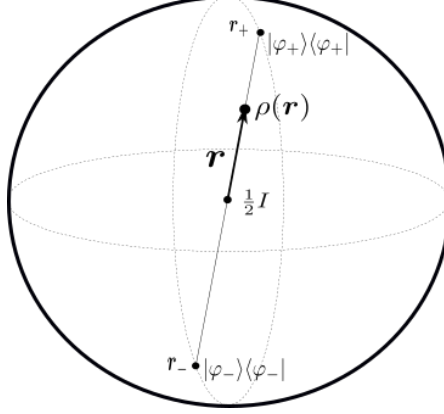
$$(3.31) \quad \lambda_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \|\mathbf{r}\|).$$

Ezek alapján a ρ sűrűségoperátor spektrális felbontása felírható a

$$(3.32) \quad \rho = \lambda_+ |\varphi_+\rangle\langle\varphi_+| + \lambda_- |\varphi_-\rangle\langle\varphi_-|$$

alakban.

A Bloch-vektorok geometriája nyelvén a ρ sűrűségoperátor sajátvektoraiból képzett $|\varphi_{\pm}\rangle\langle\varphi_{\pm}|$ tiszta állapotokhoz tartozó $\mathbf{r}_{\pm}$ Bloch-vektorokat úgy lehet (3.30) alapján megkapni, hogy vesszük a $\rho(\mathbf{r})$ -hez tartozó $\mathbf{r}$ Bloch-vektort, mindkét irányba meghosszabbítjuk, és ahol metszi a Bloch-gömböt, ott lesznek a keresett $\mathbf{r}_{\pm} = \pm \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$ vektorok, és a sajátértékek megadják, hogy a két tiszta állapot közé behúzott egyenest milyen arányban osztja a $\rho(\mathbf{r})$ sűrűségoperátor, ahogyan azt az 1. ábrán is lehet látni.



1. ÁBRA. A $|\varphi_{\pm}\rangle\langle\varphi_{\pm}|$ tiszta állapotok meghatározása.

4. ÖSSZETETT RENDSZEREK KVANTUMELMÉLETE

A dolgozatban több részrendszerből álló, úgynevezett összetett rendszerekkel fogunk foglalkozni, ezért ebben a fejezetben áttekintjük az ilyen rendszerek leírását, illetve az ezeket a rendszereket jellemző korrelációt és összefonódást, valamint az ezek számszerűsítéséhez szükséges matematikai módszereket.

4.1. Rendszerek, részrendszerek és állapotterek. A dolgozatban összetett rendszerekkel fogunk foglalkozni. Az összetett rendszer álljon $n \in \mathbb{N}$ *elemi részrendszerből*, amelyeknek a Hilbert-tereit jelöljük $\mathcal{H}_a$ -val, ahol az $a \in L := [n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ index az elemi részrendszert jelöli. Ezeknek a tereknek a dimenziói: $\dim(\mathcal{H}_a) =: d_a \geq 2$. Egy ilyen rendszeren legyen a

$$(4.1) \quad \{|\phi_{a,j}\rangle \in \mathcal{H}_a \mid j \in [d_a]\}$$

vektorok halmaza egy bázis. Legyenek a bázisok ortonormáltak, azaz minden $a \in L$ -re

$$(4.2) \quad \langle\phi_{a,j}|\phi_{a,i}\rangle = \delta_{ji}.$$

Egy általános $X \subseteq L$ *részrendszernek* a $\mathcal{H}_X$ Hilbert-tere az $a \in X$ indexű elemi részrendszerek Hilbert-terének tenzorszorzataként áll elő, azaz

$$(4.3) \quad \mathcal{H}_X = \bigotimes_{a \in X} \mathcal{H}_a.$$

Ezek alapján $\mathcal{H}_X$ dimenziója az elemi részrendszereinek dimenzióinak szorzata, azaz $d_X := \dim(\mathcal{H}_X) = \prod_{a \in X} d_a$. Ennek a részrendszernek a $\mathcal{H}_X$ Hilbert-terén is találhatunk bázist az elemi részrendszerek bázisainak segítségével az alábbi módon

$$(4.4) \quad \{|\phi_{X,i}\rangle = \bigotimes_{a \in X} |\phi_{a,i_a}\rangle \in \mathcal{H}_X\}.$$

Itt $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_x) \in [d_1] \times [d_2] \times \dots \times [d_x] = \times_{a \in X} [d_a] =: \mathbf{I}_X$ a *multiindex*, ami azt jelöli, hogy az adott a indexű Hilbert-térben melyik indexű bázisvektort vesszük. Ezen a Hilbert-téren is bevezethetjük az állapotteret, $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}(\mathcal{H}_X)$. A tiszta állapotok tere $\mathcal{P}_X = \mathcal{P}(\mathcal{H}_X)$.

Ha van egy ρ_L állapotú rendszer, akkor az $X \subseteq L$ részrendszer ρ_X állapota az lesz, ami megadja a részrendszer A_X obszervábilisainak várható értékét. Ezt a ρ_X állapotot szeretnénk meghatározni. Ehhez vegyünk egy $X \subseteq L$ részrendszert, aminek komplementere az $\bar{X} = L \setminus X$, és vizsgáljunk egy $A_X \in \text{Lin}(\mathcal{H}_X)$ operátort. Ebből készíthető egy olyan operátor, ami a $A_L \in \text{Lin}(\mathcal{H}_L)$ téren hat a

$$(4.5) \quad A_L = A_X \otimes I_{\bar{X}}$$

módon. (3.9) alapján az A_L obszervábilis várható értéke egy $\rho_L = \sum_k R_k \otimes S_k$, állapotban, ahol $R_k \in \text{Lin}(\mathcal{H}_X)$ és $S_k \in \text{Lin}(\mathcal{H}_{\bar{X}})$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_{\rho_L}(A_L) &= (\rho_L | A_L) = \text{Tr}[\rho_L (A_X \otimes I_{\bar{X}})] = \text{Tr}\left[\left(\sum_k R_k \otimes S_k\right) \otimes (A_X \otimes I_{\bar{X}})\right] = \\ &= \sum_k \text{Tr}\left[(R_k A_X) \otimes (S_k I_{\bar{X}})\right] = \sum_k \text{Tr}(R_k A_X) \text{Tr}(S_k) = \\ &= \text{Tr}\left[\sum_k (R_k \text{Tr}(S_k)) A_X\right] = \text{Tr}(\rho_X A_X) = \mathbb{E}_{\rho_X}(A_X), \end{aligned}$$

ahol bevezetve a *részleges nyom* vagy *parciális trace* műveletét a

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \text{Tr}_{\bar{X}} : \text{Lin}(\mathcal{H}_L) &\longrightarrow \text{Lin}(\mathcal{H}_X) \\ A_X \otimes B_{\bar{X}} &\longmapsto \text{Tr}_{\bar{X}}(A_X \otimes B_{\bar{X}}) = A_X \text{Tr}(B_{\bar{X}}) \end{aligned}$$

vagy elemi tenzorokra

$$(4.8) \quad \bigotimes_{a \in L} A_a \longmapsto \text{Tr}_{\bar{X}}\left(\bigotimes_{a \in L} A_a\right) = \left(\bigotimes_{a \in X} A_a\right) \text{Tr}\left(\bigotimes_{b \in \bar{X}} A_b\right)$$

módon, azt kapjuk, hogy ρ_X az eredeti ρ_L sűrűségoperátor parciális trace-e, azaz

$$(4.9) \quad \rho_X = \text{Tr}_{\bar{X}}(\rho_L).$$

Ezt az állapot *redukáltjának* vagy *redukált állapotának* hívjuk, és azt kaptuk, hogy a részleges nyom művelettel tudjuk megkapni a (4.9) módon. A részleges nyom képzés is egy kvantumcsatorna.

Vegyünk egy tetszőleges $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_L$ vektort, és a belőle képzett $|\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{P}_L$ tiszta állapotot. A rendszert szedjük szét X , illetve $\bar{X}$ részrendszerekre, és az általánosság sértése nélkül legyen az X részrendszer dimenziója kisebb, $d_X = \dim(\mathcal{H}_X) \leq d_{\bar{X}} = \dim(\mathcal{H}_{\bar{X}})$. Írjuk fel a redukált állapot spektrális felbontását

$$(4.10) \quad \rho_X = \text{Tr}_{\bar{X}}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{i=1}^{d_X} \eta_i |\varphi_{X,i}\rangle\langle\varphi_{X,i}|,$$

ahol az operátor η_i sajátértékei legyenek csökkenő sorrendben, azaz $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_{d_X} \geq 0$, és $\sum_i \eta_i = 1$. Legyen $\text{rk}(\rho_X) = r$, és ekkor

$$(4.11) \quad \begin{aligned} 1 \leq i \leq r : \eta_i &\geq 0 \\ r < i : \eta_i &= 0. \end{aligned}$$

A $|\psi\rangle$ vektor felírható a (4.10) kifejezésben található $\{|\varphi_{X,i}\rangle \in \mathcal{H}_X\}$ és tetszőleges $\{|\phi_{\overline{X},i}\rangle \in \mathcal{H}_{\overline{X}}\}$ ortonormált bázisokkal a

$$(4.12) \quad |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_X} \sum_{j=1}^{d_{\overline{X}}} \psi_{ij} |\varphi_{X,i}\rangle \otimes |\phi_{\overline{X},j}\rangle = \sum_{i=1}^{d_X} |\varphi_{X,i}\rangle \otimes |\chi_{\overline{X},i}\rangle$$

módon, ahol bevezettük a $|\chi_{\overline{X},i}\rangle = \sum_{j=1}^{d_{\overline{X}}} \psi_{ij} |\phi_{\overline{X},j}\rangle$ vektorokat. Számoljuk ki a (4.12) vektorból képzett tiszta állapot redukált állapotát, és hasonlítsuk össze a (4.10) spektrális felbontásával.

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \rho_X &= \text{Tr}_{\overline{X}}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \text{Tr}_{\overline{X}} \left[\sum_{i=1}^{d_X} \left(|\varphi_{X,i}\rangle \otimes |\chi_{\overline{X},i}\rangle \right) \otimes \sum_{j=1}^{d_X} \left(\langle\varphi_{X,j}| \otimes \langle\chi_{\overline{X},j}| \right) \right] = \\ &= \text{Tr}_{\overline{X}} \left[\sum_{i=1}^{d_X} \sum_{j=1}^{d_X} |\varphi_{X,i}\rangle \langle\varphi_{X,j}| \otimes |\chi_{\overline{X},i}\rangle \langle\chi_{\overline{X},j}| \right] = \sum_{i=1}^{d_X} \sum_{j=1}^{d_X} |\varphi_{X,i}\rangle \langle\varphi_{X,j}| \cdot \text{Tr} [|\chi_{\overline{X},i}\rangle \langle\chi_{\overline{X},j}|] = \\ &= \sum_{i=1}^{d_X} \sum_{j=1}^{d_X} \langle\chi_{\overline{X},i}|\chi_{\overline{X},j}\rangle \cdot |\varphi_{X,i}\rangle \langle\varphi_{X,j}| = \sum_{i=1}^{d_X} \eta_i |\varphi_{X,i}\rangle \langle\varphi_{X,i}| \end{aligned}$$

Ez az egyenlőség akkor érvényesül, ha $\langle\chi_{\overline{X},i}|\chi_{\overline{X},j}\rangle = \eta_i \delta_{ij}$. Vezessük be a

$$(4.14) \quad |\varphi_{\overline{X},i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta_i}} |\chi_{\overline{X},i}\rangle$$

vektort. Ezt visszaírva a $|\psi\rangle$ vektor (4.12) alakjába megkapjuk a vektor *Schmidt kanonikus alakját* a

$$(4.15) \quad |\psi\rangle = \sum_{i=1}^r \sqrt{\eta_i} |\varphi_{X,i}\rangle \otimes |\varphi_{\overline{X},i}\rangle$$

alakban, ahol a $\{|\varphi_{X,i}\rangle\}$, illetve $\{|\varphi_{\overline{X},i}\rangle\}$ vektorok az úgynevezett *Schmidt bázisok*, a $\sqrt{\eta_i}$ számok pedig a *Schmidt együtthatók*, r pedig a vektor *Schmidt rangja*. Megjegyezzük, hogy ha a $|\psi\rangle$ vektor Schmidt rangja 1, azaz $r = 1$, akkor a vektor a $|\psi\rangle = |\varphi_X\rangle \otimes |\varphi_{\overline{X}}\rangle$ elemi tenzor. Ezek mellett a $|\psi\rangle\langle\psi|$ állapot redukáltjait is ki lehet számolni a Schmidt kanonikus alakból a

$$(4.16a) \quad \rho_X = \text{Tr}_{\overline{X}}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{i=1}^r \eta_i |\varphi_{X,i}\rangle \langle\varphi_{X,i}|,$$

$$(4.16b) \quad \rho_{\overline{X}} = \text{Tr}_X(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{i=1}^r \eta_i |\varphi_{\overline{X},i}\rangle \langle\varphi_{\overline{X},i}|$$

módon, tehát a két redukált állapot spektruma megegyezik. Megjegyezzük, hogy a $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_{\overline{X}}$ vektorok Schmidt-felbontásához hasonlóan bizonyítható az $A \in \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}^* = \text{Lin}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operátorok (2.35) szinguláris érték felbontása.

4.2. Mátrixszorzat-állapot. A (4.15) Schmidt-dekompozíció azért jó, mert csak egy összegzést tartalmaz, és a Schmidt-vektorok ortonormált készleteket alkotnak. Sajnos kettőnél több részre való felvágásra nincsen ilyen jó tenzordekompozíciós módszer. Itt most bemutatunk egy lehetséges módszert, amelyet *mátrixszorzat-állapotnak* vagy MPS-nek (matrix prудuct state) hívunk és nagyon fontos szerepet játszik a kvantummechanikai soktest rendszerek kezelésénél, mind a numerikus, mind az elméleti leírásnál [11]. Tegyük fel, hogy egy tetszőleges $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_L$

vektornak ismerjük az összes $X = \{1, 2, \dots, k\}$, illetve $\bar{X} = \{k+1, k+2, \dots, n\}$ részrendszerre való Schmidt-dekompozícióját a

$$(4.17) \quad |\psi\rangle = \sum_{\alpha_k} \sqrt{\eta_{\alpha_k}^{(k)}} |\varphi_{\alpha_k}^X\rangle \otimes |\varphi_{\alpha_k}^{\bar{X}}\rangle$$

alakban, ahol a k index azt jelöli, hogy mekkora az X részrendszer, $k = |X|$. A számolások során a $|\phi_i\rangle = |i\rangle$ jelölést használjuk a bázisvektorokra. Az egyszerűség kedvéért vizsgáljunk most egy $n = 4$ elemi részrendszerből álló összetett rendszert. Ekkor a $|\psi\rangle$ vektort fel lehet írni a

$$(4.18) \quad |\psi\rangle = \sum_{i_1} |i_1\rangle \otimes |\tau_{i_1}^{\{2,3,4\}}\rangle$$

módon, ahol $|\tau_{i_1}^{\{2,3,4\}}\rangle \in \mathcal{H}_{\{2,3,4\}}$. Mivel a $\{|\varphi_{\alpha_k}^X\rangle\}$ Schmidt-vektorok bázist alkotnak a $\mathcal{H}_X$ téren, ezért felírhatjuk a $|\tau_{i_1}^{\{2,3,4\}}\rangle$ vektor Schmidt-bázis szerinti felbontását a

$$(4.19) \quad |\tau_{i_1}^{\{2,3,4\}}\rangle = \sum_{\alpha_i} |\varphi_{\alpha_i}^{\{2,3,4\}}\rangle \langle \varphi_{\alpha_i}^{\{2,3,4\}} | \tau_{i_1}^{\{2,3,4\}} \rangle$$

módon, ahol az összefüggésben felmerülő skalárszorzatot nevezzük el $\Gamma_{\alpha_1}^{(1)i_1} \sqrt{\eta_{\alpha_1}^{(1)}}$ -nek, vagyis a megfelelő Schmidt-együtthatót, mely ilyenkor nem nulla, kiemeljük. Ekkor a $|\psi\rangle$ vektor alakja a

$$(4.20) \quad |\psi\rangle = \sum_{i_1} \sum_{\alpha_1} \Gamma_{\alpha_1}^{(1)i_1} \sqrt{\eta_{\alpha_1}^{(1)}} |i_1\rangle \otimes |\varphi_{\alpha_1}^{\{2,3,4\}}\rangle$$

lesz. Az ebben az összefüggésben megjelenő $|\varphi_{\alpha_1}^{\{2,3,4\}}\rangle$ vektort a (4.18) lépéshez hasonlóan írjuk fel a $|\varphi_{\alpha_1}^{\{2,3,4\}}\rangle = \sum_{i_2} |i_2\rangle \otimes |\tau_{\alpha_1, i_2}^{\{3,4\}}\rangle$ alakban, ahol $|\tau_{\alpha_1, i_2}^{\{3,4\}}\rangle \in \mathcal{H}_{\{3,4\}}$. Az (4.19) lépésben látható módon felírhatjuk a $|\tau_{\alpha_1, i_2}^{\{3,4\}}\rangle$ vektor $\{|\varphi_{\alpha_2}^{\{3,4\}}\rangle\}$ Schmidt-bázis szerinti felbontását a $|\tau_{\alpha_1, i_2}^{\{3,4\}}\rangle = \sum_{\alpha_2} |\varphi_{\alpha_2}^{\{3,4\}}\rangle \langle \varphi_{\alpha_2}^{\{3,4\}} | \tau_{\alpha_1, i_2}^{\{3,4\}} \rangle$ módon, ahol a skalárszorzatot nevezzük el $\Gamma_{\alpha_1, \alpha_2}^{(2)i_2} \sqrt{\eta_{\alpha_2}^{(2)}}$ -nek. Ezt visszaírva a (4.20) összefüggésbe azt kapjuk, hogy

$$(4.21) \quad |\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \Gamma_{\alpha_1}^{(1)i_1} \sqrt{\eta_{\alpha_1}^{(1)}} \Gamma_{\alpha_1, \alpha_2}^{(2)i_2} \sqrt{\eta_{\alpha_2}^{(2)}} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes |\varphi_{\alpha_2}^{\{3,4\}}\rangle.$$

Az előzőekhez hasonlóan felbonthatjuk a $|\varphi_{\alpha_2}^{\{3,4\}}\rangle$ vektort, és ekkor a $|\psi\rangle$ vektorra azt kapjuk, hogy

$$(4.22) \quad |\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, i_3} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \Gamma_{\alpha_1}^{(1)i_1} \sqrt{\eta_{\alpha_1}^{(1)}} \Gamma_{\alpha_1, \alpha_2}^{(2)i_2} \sqrt{\eta_{\alpha_2}^{(2)}} \Gamma_{\alpha_2, \alpha_3}^{(3)i_3} \sqrt{\eta_{\alpha_3}^{(3)}} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes |i_3\rangle \otimes |\varphi_{\alpha_3}^{\{4\}}\rangle.$$

Végül fejtjük ki a $|\varphi_{\alpha_3}^{\{4\}}\rangle$ vektort a $|\varphi_{\alpha_3}^{\{4\}}\rangle = \sum_{i_4} |i_4\rangle \langle i_4 | \varphi_{\alpha_3}^{\{4\}} \rangle$ módon, és az előjövő skalárszorzatot nevezzük el $\Gamma_{\alpha_3}^{(4)i_4}$ -nek. Ha ezt visszaírjuk a (4.22) összefüggésbe, akkor megkapjuk a $|\psi\rangle$ vektor MPS alakját a

$$(4.23) \quad |\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \Gamma_{\alpha_1}^{(1)i_1} \sqrt{\eta_{\alpha_1}^{(1)}} \Gamma_{\alpha_1, \alpha_2}^{(2)i_2} \sqrt{\eta_{\alpha_2}^{(2)}} \Gamma_{\alpha_2, \alpha_3}^{(3)i_3} \sqrt{\eta_{\alpha_3}^{(3)}} \Gamma_{\alpha_3}^{(4)i_4} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes |i_3\rangle \otimes |i_4\rangle$$

alakban, ahol az i_1, i_2, i_3, i_4 indexek úgynevezett *fizikai indexek*, az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ indexek pedig *virtuális indexek*. Figyeljük meg, hogy a különböző α_k indexekre való összegzésnél nem írtuk ki az összegzés felső határát, de azok a (4.15) alapján adott X és $\bar{X}$ esetén $\min(d_X, d_{\bar{X}}) = b_k$ lesz, amit *bond-dimenzió*nak nevezünk. Ha bevezetjük a

$$(4.24) \quad \Sigma_{\alpha_k, \alpha'_k}^{(k)} = \sqrt{\eta_{\alpha_k}^{(k)}} \delta_{\alpha_k, \alpha'_k}$$

alapján a Σ mátrixokat, akkor az MPS a $\Sigma^{(k)}$ és $\Gamma^{(k),i_k}$ mátrixokkal

$$(4.25) \quad |\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \Gamma^{(1)i_1} \Sigma^{(1)} \Gamma^{(2)i_2} \Sigma^{(2)} \Gamma^{(3)i_3} \Sigma^{(3)} \Gamma^{(4)i_4} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes |i_3\rangle \otimes |i_4\rangle$$

alakot ölti. Ha kihasználjuk, hogy a $|i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes |i_3\rangle \otimes |i_4\rangle$ vektorok bázist alkotnak a $\mathcal{H}_L$ téren, és a $|\psi\rangle$ vektor ezen a bázison a $\sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \psi_{i_1, i_2, i_3, i_4} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes |i_3\rangle \otimes |i_4\rangle$ alakban írható fel, akkor a $|\psi\rangle$ vektor kifejtési együtthatói a

$$(4.26) \quad \psi_{i_1, i_2, i_3, i_4} = \Gamma^{(1)i_1} \Sigma^{(1)} \Gamma^{(2)i_2} \Sigma^{(2)} \Gamma^{(3)i_3} \Sigma^{(3)} \Gamma^{(4)i_4}$$

mátrixszorzat alakban kaphatók meg. Általánosan (4.25) vagy (4.26) felírást a $|\psi\rangle$ mátrixszorzat alakjának nevezzük.

A $\Sigma^{(k)}$ mátrixokat gyakran nem kezelik külön. Az $A^{(1)i_1} = \Gamma^{(1)i_1}$ és $A^{(k)i_k} = \Sigma^{(k-1)} \Gamma^{(k)i_k}$, $k > 1$ mátrixok bevezetésével megkaphatjuk a $|\psi\rangle$ vektor *balkanonikus MPS* alakját a

$$(4.27) \quad \psi_{i_1, i_2, i_3, i_4} = A^{(1)i_1} A^{(2)i_2} A^{(3)i_3} A^{(4)i_4}$$

alakban. A $B^{(n)i_n} = \Gamma^{(n)i_n}$ és $B^{(k)i_k} = \Gamma^{(k)i_k} \Sigma^{(k)}$, $k < n$ mátrixok bevezetésével megkaphatjuk a $|\psi\rangle$ vektor *jobbkanonikus MPS* alakját a

$$(4.28) \quad \psi_{i_1, i_2, i_3, i_4} = B^{(1)i_1} B^{(2)i_2} B^{(3)i_3} B^{(4)i_4}$$

alakban.

Az itt bemutatott módszer egy lehetséges MPS alakot állít elő, de általában az MPS-ben szereplő mátrixoknak az alakja nem egyértelmű. Ezt *mértékszabadságnak* nevezzük. Ha végrehajtunk egy $\Gamma^{(k)} \mapsto (G^{(k-1)})^{-1} \Gamma^{(k)} G^{(k)}$, $\Sigma^{(k)} \mapsto (G^{(k)})^{-1} \Sigma^{(k)} G^{(k)}$ *mértéktranszformációt*, ahol $G^{(k)} \in \text{GL}(b_k)$, akkor ugyanazt kapjuk, mint (4.26)-ban.

Az MPS alak azért hasznos, mert ha spinláncban a kölcsönhatások rövid hatótávolságúak (azaz mindegyik részrendszer csak a hozzá közeliakkal hat kölcsön) és a rendszer nem kritikus (fázisátalakulástól távoli), akkor az alapállapotban a korrelációk rövid hatótávolságúak lesznek (azaz a távolsággal nagy exponenssel csengenek le) és az MPS alak a bond-dimenziók limitálásával az állapotnak nagyon jó közelítését adja [7].

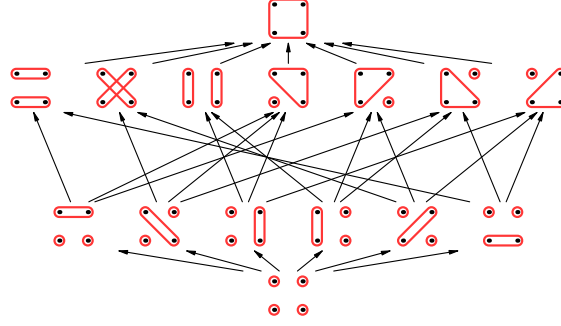
4.3. Korreláció, összefonódás. A sokrészű összetett rendszerek korrelációját és összefonódását különböző felosztásaira, vagy partícióira nézve tekintjük [8, 9]. Az L rendszer egy *partícióján* [3] az $X_i \in L$ részrendszerek egy olyan $\xi = \{X_1, X_2, \dots, X_{|\xi|}\}$ halmazát értjük, amelynek elemei nem üresek, azaz $\forall X \in \xi : X \neq \emptyset$, *diszjunktak*, azaz $X \neq X' \in \xi : X \cap X' = \emptyset$ és lefedik a teljes rendszert, $\bigcup_{X \in \xi} X = L$. Az L rendszer összes partíciójának halmazát $\Pi(L)$ módon jelöljük. Tetszőleges $v, \xi \in \Pi(L)$ partíciókra azt mondjuk, hogy v „finomabb”, mint ξ , vagy ξ „durvább”, mint v , ha v megkapható ξ elemeinek darabolásával. Ezt $v \preceq \xi$ módon jelöljük, és

$$(4.29) \quad v \preceq \xi \quad \Leftrightarrow \quad \forall Y \in v \quad \exists X \in \xi : Y \subseteq X.$$

Ez a reláció egy *részbenrendezés*, mivel $\forall \xi, v, \zeta \in \Pi(L)$ esetén a reláció *reflexív*, azaz $\xi \preceq \xi$, *antiszimmetrikus*, azaz $\xi \preceq v, v \preceq \xi \Leftrightarrow \xi = v$ és *transzítív*, azaz $\xi \preceq v, v \preceq \zeta \Rightarrow \xi \preceq \zeta$. Sőt, erre nézve a $\Pi(L)$ halmaz *hálót* alkot, azaz $\forall \xi, v \in \Pi(L)$ partícióknak létezik *legkisebb felső korlátja*, $\xi \vee v$, illetve *legnagyobb alsó korlátja*, $\xi \wedge v$. A *legfinomabb partíció*t, aminek elemei az elemi részrendszerek, a $\perp = \{\{i\}, i \in L\} \in \Pi(L)$ módon jelöljük. A *legdurvább partíció*t, vagy triviális partíció, aminek egyetlen eleme a rendszer, $\top = \{L\} \in \Pi(L)$ módon jelöljük. Egy 4 elemi részrendszerből álló összetett rendszer összes partícióját láthatjuk a 2. ábrán.

Egy adott $\xi \in \Pi(L)$ partícióra az A_X , $X \in \xi$ operátorok *korrelációja*

$$(4.30) \quad C_\xi(\rho, \{A_X\}_{X \in \xi}) = \mathbb{E}_\rho \left(\bigotimes_{X \in \xi} A_X \right) - \prod_{X \in \xi} \mathbb{E}_{\rho_X} (A_X).$$



2. ÁBRA. Egy 4 elemi részrendszerből álló összetett rendszer partíciói. A nyilak a finomabb partícióból mutatnak a durvább felé.

Felhasználva a (3.9) összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 C_\xi(\rho, \{A_X\}_{X \in \xi}) &= \left(\rho \middle| \bigotimes_{X \in \xi} A_X \right) - \prod_{X \in \xi} (\rho_X | A_X) = \text{Tr} \left(\rho \bigotimes_{X \in \xi} A_X \right) - \prod_{X \in \xi} \text{Tr}(\rho_X A_X) = \\
 (4.31) \quad &= \text{Tr} \left(\rho \bigotimes_{X \in \xi} A_X \right) - \text{Tr} \left(\bigotimes_{X \in \xi} \rho_X A_X \right),
 \end{aligned}$$

ahol $\rho_X = \text{Tr}_{\overline{X}}(\rho)$. Bevezetve a

$$(4.32) \quad \Gamma_\xi = \rho - \bigotimes_{X \in \xi} \rho_X$$

és a

$$(4.33) \quad A_\xi = \bigotimes_{X \in \xi} A_X$$

operátorokat, a korrelációra azt kapjuk, hogy

$$(4.34) \quad C_\xi(\rho, \{A_X\}_{X \in \xi}) = \text{Tr}(\Gamma_\xi A_\xi) = (\Gamma_\xi | A_\xi).$$

Ha $C_\xi(\rho, \{A_X\}_{X \in \xi}) = 0$, akkor az $\{A_X\}_{X \in \xi}$ obszervábilisek *korrelálatlanok*. Ha

$$(4.35) \quad C_\xi(\rho, \{A_X\}_{X \in \xi}) = 0 \quad \forall \{A_X\}_{X \in \xi},$$

akkor a ρ állapot ξ -*korrelálatlan*. A korrelációra kapott (4.34) képlet alapján, felhasználva a Γ_ξ (4.32) definícióját, azt kapjuk, hogy egy ρ állapot pontosan akkor ξ -korrelálatlan, ha felírható szorzatalakban, vagyis

$$(4.36) \quad \rho = \bigotimes_{X \in \xi} \rho_X,$$

azaz felírható állapotok tenzorszorzataként. Ezek alapján felírhatjuk a ξ -*korrelálatlan állapotok* terét a

$$(4.37) \quad \mathcal{D}_{\xi\text{-unc}} = \left\{ \bigotimes_{X \in \xi} \rho_X \mid \rho_X \in \mathcal{D}_X \right\}$$

módon. A tiszta ξ -korrelálatlan állapotok

$$(4.38) \quad \mathcal{P}_{\xi\text{-unc}} = \mathcal{D}_{\xi\text{-unc}} \cap \mathcal{P}_L.$$

Az állapottér $\mathcal{D}_L \setminus \mathcal{D}_{\xi\text{-unc}}$ maradékának elemei a ξ -korrelált állapotok, melyeket nem lehet preparálni kommunikáció nélkül. A klasszikus eloszlások mindig megkaphatók szorzat eloszlások statisztikus keverékeként, de a kvantum állapotokra ez nem igaz. Ezt nevezzük összefonódásnak. Klasszikus keverésnek nevezzük a klasszikus kommunikációt, illetve a klasszikus kölcsönhatást. Összefont az olyan állapot, amit nem lehet klasszikus keveréssel létrehozni, hanem valódi kvantumos kölcsönhatás kell hozzá. Ehhez vezessük be a ξ -szeparálható állapotok terét a ξ -korrelálatlan állapotok terének konvex burkaként,

$$(4.39) \quad \mathcal{D}_{\xi\text{-sep}} = \text{Conv}(\mathcal{D}_{\xi\text{-unc}}).$$

A tiszta ξ -szeparálható állapotok korrelálatlanok lesznek,

$$(4.40) \quad \mathcal{P}_{\xi\text{-sep}} = \mathcal{D}_{\xi\text{-sep}} \cap \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\xi\text{-unc}} = \text{Extr}(\mathcal{D}_{\xi\text{-sep}}).$$

Az állapottér $\mathcal{D}_L \setminus \mathcal{D}_{\xi\text{-sep}}$ maradékának elemei az ξ -összefont állapotok, amelyeket nem lehet preparálni klasszikus kommunikációval sem.

Fontos látni, hogy mind a korreláció, mind az összefonódás lokális bázisválasztástól független, ezért belátható, hogy a korreláció és az összefonódás lokális unitér transzformációkra invariáns, viszont tenzorszorzatfüggő, mert a tenzorszorzat adja meg a részrendszereket, erre nézve beszélünk összefonódásról, illetve korrelációról.

Belátható, hogy finomabb partícióra nézve korrelálatlan, illetve szeparálható állapotok durvább partícióra nézve is korrelálatlan, illetve szeparálható állapotok lesznek, azaz tetszőleges $v, \xi \in \Pi(L)$ partíciók esetén

$$(4.41a) \quad v \preceq \xi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{D}_{v\text{-unc}} \subseteq \mathcal{D}_{\xi\text{-unc}},$$

$$(4.41b) \quad v \preceq \xi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{D}_{v\text{-sep}} \subseteq \mathcal{D}_{\xi\text{-sep}}.$$

illetve a legdurvább partícióra nézett korrelálatlan, illetve szeparálható állapotok tere megegyezik a rendszer állapotterével, azaz

$$(4.42) \quad \mathcal{D}_{\top\text{-unc}} = \mathcal{D}_{\top\text{-sep}} = \mathcal{D}_L.$$

Vizsgáljuk a tiszta, $X|\overline{X}$ -szeparálható $|\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{P}_{X|\overline{X}\text{-sep}}$ állapotokat. Ezekre (4.15) alapján felírható az állapot Schmidt-kanonikus alakja, amiből felírható (4.16a) alapján a redukált állapota

$$(4.43) \quad \rho_X = \text{Tr}_{\overline{X}}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{i=1}^r \eta_i |\phi_{X,i}\rangle\langle\phi_{X,i}|$$

módon. Mivel $|\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{P}_{X|\overline{X}\text{-sep}}$, ezért $\rho_X \in \mathcal{P}_X$, tehát $r = 1$, azaz a tiszta szeparálható állapotok Schmidt-rangja 1.

4.4. Korreláció és összefonódás mértékei. Az a célunk, hogy a korrelációt, illetve az összefonódást számszerűsítsük, és az adódó mennyiségek fontos jellemzője lesz, hogy az állapotok megváltozásával hogyan viselkednek. A kvantumrendszerek megváltozását (például időfejlődését, vagy tetszőleges fizikai folyamatot, a szelektív mérést kivéve) az úgynevezett *kvantumcsatornákkal* írjuk le. Egy

$$(4.44) \quad \Phi : \text{Lin}(\mathcal{H}) \longrightarrow \text{Lin}(\mathcal{H}')$$

lineáris leképezés kvantumcsatorna, ha kvantumállapotot kvantumállapotba képez le, azaz

$$(4.45) \quad \Phi : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H}'),$$

vagyis nyom-őrző és pozitív, és ez teljesül akkor is, ha egy nagyobb rendszer részrendszerén hat, azaz

$$(4.46) \quad \Phi \otimes \mathcal{I} : \mathcal{D}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}),$$

ahol $\mathcal{I} \in \text{Lin}(\mathcal{K})$ az identitás leképezés, vagyis *teljesen pozitív*. *Bisztochasztikusnak* nevezünk egy kvantumcsatornát, ha egységőrző, ekkor a fehér zajt invariánsan hagyja,

$$(4.47) \quad \Phi\left(\frac{1}{d}I\right) = \frac{1}{d}I.$$

Ezekre úgy gondolhatunk, hogy nem visznek be információt a rendszerbe.

Egy ρ sűrűségoperátor *Neumann entrópiája*

$$(4.48) \quad \begin{aligned} S : \mathcal{D}(\mathcal{H}) &\longrightarrow [0, \ln(\dim(\mathcal{H}))] \\ \rho &\longmapsto S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln(\rho)). \end{aligned}$$

Felhasználva a ρ sűrűségoperátor (3.11) alakját, azt kapjuk, hogy a Neumann entrópia a

$$(4.49) \quad S(\rho) := -\sum_i \lambda_i \ln(\lambda_i)$$

módon számolható ki. (Az $f(x) = -x \ln(x)$ függvény az $x = 0$ -ban jobbról folytonossá tehető a $\lim_{x \rightarrow 0}(f(x)) = 0$ választásával.) A Neumann entrópia *konkáv*, azaz

$$(4.50) \quad S\left(\sum_i w_i \rho_i\right) \geq \sum_i w_i S(\rho_i).$$

Belátható, hogy pontosan a tiszta állapotok Neumann entrópiája nulla, azaz

$$(4.51) \quad S(\rho) = 0 \iff \rho \in \mathcal{P}(\mathcal{H}).$$

A Neumann entrópia *Schur konkáv*, azaz akkor, ha

$$(4.52) \quad \rho_1 \preceq \rho_2 \iff S(\rho_1) \geq S(\rho_2),$$

ahol az összefüggés bal oldala azt jelenti, hogy ρ_2 *majorálja* ρ_1 -et, azaz

$$(4.53) \quad \rho_1 \preceq \rho_2 : \quad \sum_{i=1}^k \lambda_{1i}^\downarrow \leq \sum_{i=1}^k \lambda_{2i}^\downarrow \quad \forall k,$$

ahol $\lambda_{1i}^\downarrow$ és $\lambda_{2i}^\downarrow$ a ρ_1 és ρ_2 sűrűségoperátorok sajátértékei csökkenő sorrendben [1]. A majorálás az állapotok kevertségének összehasonlítása, tehát a Neumann entrópia és általában a Schur-konkáv függvények az állapotok kevertségét mérik. A Schur konkavitás az entrópiák legfontosabb definiáló tulajdonsága. Ezek mellett U unitér operátorokra

$$(4.54) \quad S(U\rho U^\dagger) = S(\rho).$$

Belátható, hogy minden $\Phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ bisztochasztikus kvantum csatorna esetén, a kevertséget növeli, $\Phi(\rho) \succeq \rho$ (ez a kvantum Hardy-Littlewood-Pólya lemma). A (4.52) Schur-konkavitás alapján az ilyen folyamatok során a Neumann entrópia nő, azaz

$$(4.55) \quad S(\Phi(\rho)) \geq S(\rho).$$

A Neumann entrópia *szubadditív*, azaz

$$(4.56) \quad S(\rho) \leq \sum_{X \in \xi} S(\rho_X),$$

ezek mellett *erősen szubadditív*, azaz

$$(4.57) \quad S(\rho_{X \cap Y}) + S(\rho_{X \cup Y}) \leq S(\rho_X) + S(\rho_Y).$$

A (4.56) összefüggésben egyenlőség korrelálatlan rendszerek esetén van, azaz

$$(4.58) \quad S\left(\bigotimes_{X \in \xi} \rho_X\right) = \sum_{X \in \xi} S(\rho_X),$$

tehát a Neumann entrópia *extenzív*.

Definiálhatjuk az *Umegaki relatív entrópiát*, más néven a kvantum Kullback-Leibler divergenciát a

$$(4.59) \quad \begin{aligned} D : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \times \mathcal{D}(\mathcal{H}) &\longrightarrow [0, \infty] \\ \rho, \sigma &\longmapsto D(\rho||\sigma) = \text{Tr}(\rho[\ln(\rho) - \ln(\sigma)]) \end{aligned}$$

módon. Mivel belátható, hogy

$$(4.60) \quad D(\rho||\sigma) := 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \sigma,$$

illetve

$$(4.61) \quad D(\rho||\sigma) \geq 0,$$

de nem szimmetrikus, ezért az Umegaki relatív entrópia nem *metrika*, hanem *divergencia* [1]. Ismert, hogy ez a relatív entrópia a kvantum hipotézistesztesznél a tévesztés valószínűségének lecsengési rátája, és ilyen értelemben lesz az állapotok megkülönböztethetőségének mértéke. Az Umegaki relatív entrópia együtt konvex a két változójára, azaz

$$(4.62) \quad D\left(\sum_i w_i \rho_i \middle| \middle| \sum_i w_i \sigma_i\right) \leq \sum_i w_i D(\rho_i || \sigma_i),$$

illetve minden $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ kvantum csatornára csökken az értéke, azaz

$$(4.63) \quad D(\Phi(\rho)||\Phi(\sigma)) \leq D(\rho||\sigma),$$

vagyis a fizikai folyamatokban a megkülönböztethetőség csak csökkenhet. Ez a monotonitás a relatív entrópiák legfontosabb definiáló tulajdonsága. Ezek mellett U unitér operátorokra

$$(4.64) \quad D(U\rho U^\dagger || U\sigma U^\dagger) = D(\rho||\sigma).$$

Ezeknek az entrópiáknak az ismeretében bevezethetjük a ξ -*korreláció relatív entrópiáját* [4, 9] az

$$(4.65) \quad I_\xi(\rho) := \min_{\sigma \in \mathcal{D}_{\xi\text{-unc}}} D(\rho||\sigma) = \sum_{X \in \xi} S(\rho_X) - S(\rho)$$

módon, ahol a jobboldalon álló mennyiség neve ξ -kölcsonös információ, és az egyenlőség annak köszönhető, hogy a minimalizálás kiszámítható, és a minimum helye $\sigma = \bigotimes_{X \in \xi} \rho_X$, ahol $\rho_X = \text{Tr}_{\overline{X}}(\rho)$ [4]. Fontos, hogy a $\Phi_\xi := \bigotimes_{X \in \xi} \Phi_X$ lokális műveletekre (kvantumcsatornákra) nézve a ξ -korreláció relatív entrópiája nem nőhet,

$$(4.66) \quad I_\xi(\Phi_\xi(\rho)) \leq I_\xi(\rho),$$

ami könnyen belátható a definícióból adódóan, mivel a ξ -lokális műveletek a ξ -korrelálatlan állapotok $\mathcal{D}_{\xi\text{-unc}}$ halmazát önmagára képzik le. A lokális műveletekre való monoton csökkenés a korrelációs mértékek definiáló tulajdonsága. Finomabb partícióra nézve a korreláció nagyobb vagy egyenlő, azaz tetszőleges $v, \xi \in \Pi(L)$ partíciókra

$$(4.67) \quad ,$$

mivel a ξ -korreláció relatív entrópiájának (4.65) definíciója alapján mindkét esetben ugyanazt a minimumot kell kiszámítani, csak I_v esetében a $\mathcal{D}_{v\text{-unc}}$ téren, I_ξ esetében pedig a $\mathcal{D}_{\xi\text{-unc}}$ téren, és (4.41a) alapján $\mathcal{D}_{v\text{-unc}} \subseteq \mathcal{D}_{\xi\text{-unc}}$, illetve a nagyobb téren számolt minimum nem lehet nagyobb a kisebb téren számolt minimumnál. (A Neumann entrópia (4.56) szubadditivitása miatt ez a korreláció relatív entrópiájának (4.65) konkrét entrópiás alakjából is látszik.)

Ehhez hasonlóan bevezethetjük az ξ -*összefonódás relatív entrópiáját* [4, 10] a

$$(4.68) \quad E_\xi(\rho) := \min_{\sigma \in \mathcal{D}_{\xi\text{-sep}}} D(\rho||\sigma)$$

módon. A korrelációval ellentétben a minimalizálást itt nem lehet zárt alakban megadni. Fontos, hogy ha Λ_ξ lokális műveletek klasszikus kommunikációval, akkor erre nézve a ξ -összefonódás relatív entrópiája nem nőhet,

$$(4.69) \quad E_\xi(\Lambda_\xi(\rho)) \leq E_\xi(\rho),$$

ami könnyen belátható a definícióból adódóan, mivel a ξ -lokális műveletek klasszikus kommunikációval a ξ -szeparálható állapotok $\mathcal{D}_{\xi\text{-sep}}$ halmazát önmagára képzik le. A lokális műveletekre és klasszikus kommunikációra való monoton csökkenés az összefonódási mértékek definiáló tulajdonsága. Finomabb partícióra nézve az összefonódás nagyobb vagy egyenlő, azaz tetszőleges $v, \xi \in \Pi(L)$ partíciókra

$$(4.70) \quad v \preceq \xi \quad \Leftrightarrow \quad E_v \geq E_\xi,$$

mivel a ξ -összefonódás relatív entrópiájának (4.68) definíciója alapján mindkét esetben ugyanazt a minimumot kell kiszámítani, csak E_v esetében a $\mathcal{D}_{v\text{-sep}}$ téren, E_ξ esetében pedig a $\mathcal{D}_{\xi\text{-sep}}$ téren, és (4.41b) alapján $\mathcal{D}_{v\text{-sep}} \subseteq \mathcal{D}_{\xi\text{-sep}}$, illetve a nagyobb téren számolt minimum nem lehet kisebb a kisebb téren számolt minimumnál. Az összefonódás mindig kisebb vagy egyenlő, mint a teljes korreláció, mivel ennek egy része az összefonódás, méghozzá az a része, amit nem lehet klasszikus kommunikációval létrehozni. Azaz minden $\xi \in \Pi(L)$ esetén

$$(4.71) \quad E_\xi \leq I_\xi,$$

mivel mindkét relatív entrópia kiszámításában a (4.65) és (4.68) definíciók alapján ugyanazt a minimumot kell kiszámolni, csak korreláció esetén a $\mathcal{D}_{\xi\text{-unc}}$ téren, összefonódás esetén a $\mathcal{D}_{\xi\text{-sep}}$ téren, és (4.39) alapján $\mathcal{D}_{\xi\text{-unc}} \subseteq \mathcal{D}_{\xi\text{-sep}}$, illetve a nagyobb téren számolt minimum nem lehet nagyobb a kisebb téren számolt minimumnál.

Egy tetszőleges $X|\bar{X}$ bipartícióra kiszámítható a tiszta állapotok korrelációja a

$$(4.72) \quad \begin{aligned} I_{X|\bar{X}}(|\psi\rangle\langle\psi|) &= S(\text{Tr}_X(|\psi\rangle\langle\psi|)) + S(\text{Tr}_{\bar{X}}(|\psi\rangle\langle\psi|)) - S(|\psi\rangle\langle\psi|) = \\ &= 2S(\text{Tr}_{\bar{X}}(|\psi\rangle\langle\psi|)) = 2\left(-\sum \eta_i \ln(\eta_i)\right) \end{aligned}$$

módon, ahol felhasználtuk a korreláció relatív entrópiájának (4.65) definícióját, $|\psi\rangle$ vektor (4.15) Schmidt kanonikus alakját, illetve a (4.48) Neumann entrópia tulajdonságait.

Az összefonódásra is adódik egy hasonló képlet, de ennek levezetése nem egyszerű [10],

$$(4.73) \quad E_{X|\bar{X}}(|\psi\rangle\langle\psi|) = S(\text{Tr}_{\bar{X}}(|\psi\rangle\langle\psi|)) = -\sum \eta_i \ln(\eta_i),$$

tehát

$$(4.74) \quad 2E_{X|\bar{X}}(|\psi\rangle\langle\psi|) = I_{X|\bar{X}}(|\psi\rangle\langle\psi|).$$

Sajnos kettőnél több részre vágásnál nincsen hasonló eredmény, mivel a nincsen a (4.15) Schmidt dekompozícióhoz hasonlóan jól használható eredmény kettőnél több részre vágás esetén.

5. ELEMI SZIMMETRIKUS ÁLLAPOTOK LEÍRÁSA

A dolgozatban az úgynevezett Dicke-állapotokkal, vagy elemi szimmetrikus állapotokkal foglalkozni, amelyek fontos szerepet játszanak a kvantumoptikai Dicke modellben. Ezért ebben a fejezetben részletesebben is megismerkedünk a szimmetrikus, illetve a Dicke-állapotokkal.

5.1. Permutációoperátorok. Legyen ugyanúgy $L = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ a rendszer, illetve az elemi részrendszerek dimenziói legyenek azonosak, azaz

$$(5.1) \quad \dim(\mathcal{H}_a) = d \quad \forall a \in L.$$

Permutációnak nevezzük az olyan $\sigma : L \rightarrow L$ műveleteket, amelyek *bijektívek*, azaz kölcsönösen egyértelműek. Ezeknek a műveleteknek a halmazát S_L *szimmetrikus csoportnak* hívjuk. Ezek tényleg csoportot alkotnak, mert S_L a szorzásra *zárt*, azaz permutációk egymásutánja is permutáció, tehát ha $\sigma \in S_L$ és $\tau \in S_L$ akkor $\sigma\tau \in S_L$. A permutációk szorzása asszociatív, azaz minden $\sigma, \tau, \omega \in S_L$ -re $\sigma(\tau\omega) = (\sigma\tau)\omega$. Létezik egy $e \in S_L$ *egységelem*, amelyre $e(i) = i$ és egy $\sigma \in S_L$ permutációnak létezik σ^{-1} *inverze*, azaz $\sigma^{-1}\sigma(i) = e$.

Ebben a dolgozatban a részrendszereket fogjuk permutálni, vagyis az S_L csoport olyan ábrázolását készítjük el $\mathcal{H}_L$ -en, ami az elemi részrendszerek Hilbert-tereit permutálja. Egy adott permutációhoz megkonstruálható egy *permutációoperátor*, a

$$(5.2) \quad \sigma \mapsto R_\sigma = \bigotimes_{a \in L} \left(\sum_{i_a \in [d]} |\phi_{\sigma(a), i_a}\rangle \langle \phi_{a, i_a}| \right) = \bigotimes_{a \in L} R_{a, \sigma(a)}$$

módon. Nézzük meg, hogy hogyan hat egy ilyen $R_{a, \sigma(a)} \in \text{Lin}(\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_{\sigma(a)})$ operátor egy általános $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_a$ vektoron. Ehhez írjuk fel a $|\psi\rangle$ bázis szerinti felbontását

$$(5.3) \quad |\psi\rangle = \sum_{j \in [d]} \psi_j |\phi_{a, j}\rangle.$$

Ekkor

$$(5.4) \quad R_{a, \sigma(a)} |\psi\rangle = \sum_{i \in [d]} |\phi_{\sigma(a), i}\rangle \langle \phi_{a, i}| \sum_{j \in [d]} \psi_j |\phi_{a, j}\rangle = \sum_{j \in [d]} \psi_j \sum_{i \in [d]} |\phi_{\sigma(a), i}\rangle \delta_{ij}.$$

Tehát

$$(5.5) \quad R_{a, \sigma(a)} |\psi\rangle = \sum_{j \in [d]} \psi_j |\phi_{\sigma(a), j}\rangle.$$

Ezek alapján az $R_{a, \sigma(a)}$ operátor úgy hat a $|\psi\rangle$ vektoron, hogy azt „átviszi” a $\mathcal{H}_{\sigma(a)}$ Hilbert-térbe úgy, hogy a $|\phi_{\sigma(a), j}\rangle \in \mathcal{H}_{\sigma(a)}$ bázisvektorhoz tartozó kifejtési együttható megegyezik a $|\phi_{a, j}\rangle \in \mathcal{H}_a$ bázisvektorhoz tartozó kifejtési együtthatóval. Megjegyezzük, hogy noha ezeknek a permutációs operátoroknak a megkonstruálásához szükségünk volt a bázisok rögzítésére, de maguknak az operátoroknak hatása bázisfüggetlen. A különböző $\mathcal{H}_a$ terek vektorait persze azonosítani kellett, amit a bázis megadásával meg tettünk, de máshogyan is megtehetnénk.

Permutációoperátorok szorzására érvényes a

$$(5.6) \quad R_{\sigma\tau} = R_\sigma R_\tau.$$

összefüggés. Tehát az R_σ operátorok az S_L csoport egy *ábrázolását* adják. Ennek bizonyításához használjuk a permutációoperátor (5.2) alakját. Ekkor

$$(5.7) \quad R_\sigma R_\tau = \bigotimes_{a \in L} R_{a, \sigma(a)} \cdot \bigotimes_{b \in L} R_{b, \tau(b)} = \bigotimes_{a \in L} R_{a, \sigma(a)} R_{\tau^{-1}(a), a} = \bigotimes_{a \in L} R_{a, \sigma(\tau(a))} = R_{\sigma\tau},$$

ahol kihasználtuk, hogy $R_{a, \sigma(a)} R_{\tau^{-1}(a), a} = R_{a, \sigma(\tau(a))}$, mivel a bal oldal először a $\mathcal{H}_{\tau^{-1}(a)}$ -ből viszi a $\mathcal{H}_a$ -ba, majd ebből a $\mathcal{H}_{\sigma(a)}$ -ba, ami összességében olyan, mintha a Hilbert-tereket a $\sigma\tau$ permutáció szerint cserélnénk, ami pont az $R_{a, \sigma(\tau(a))}$ operátor hatása. A permutációoperátorok adjungáltjára érvényes az

$$(5.8) \quad R_\sigma^\dagger = R_\sigma^{-1} = R_{\sigma^{-1}}$$

összefüggés. Tehát az ábrázolás unitér. Ennek bizonyításához használjuk a permutációoperátor (5.2) alakját. Ekkor

$$\begin{aligned}
 R_\sigma^\dagger &= \bigotimes_{a \in L} \sum_{i_a \in [d]} |\phi_{a,i_a}\rangle \langle \phi_{\sigma(a),i_a}| = \bigotimes_{\sigma^{-1}(b) \in L} \sum_{i_{\sigma^{-1}(b)} \in [d]} |\phi_{\sigma^{-1}(b),i_{\sigma^{-1}(b)}}\rangle \langle \phi_{b,i_{\sigma^{-1}(b)}}| = \\
 (5.9) \quad &= \bigotimes_{b \in L} \sum_{i_b \in [d]} |\phi_{\sigma^{-1}(b),i_b}\rangle \langle \phi_{b,i_b}| = R_{\sigma^{-1}},
 \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy $b \in \sigma(L)$, tehát mindegy, hogy a $b \in \sigma(L)$ -re vagy $b \in L$ -re összegzünk, hiszen a permutációk csoportot alkotnak. Vagyis $R_\sigma^\dagger = R_{\sigma^{-1}}$. Az $R_{\sigma^{-1}} = R_\sigma^{-1}$ összefüggés annak a következménye, hogy (5.6) alapján az R_σ egy ábrázolás.

Bevezethetjük a

$$(5.10) \quad P := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_L} R_\sigma$$

operátort, ami egy projektor, azaz érvényes rá a (2.45) összefüggés, vagyis önadjungált és idempotens. Először bizonyítsuk be, hogy az operátor önadjungált, a P operátor (5.10) definíciója alapján, és használjuk ki a permutációoperátor (5.8) tulajdonságát, illetve azt, hogy a permutációk csoportot alkotnak, azaz, hogy minden elemnek van inverze. Tehát

$$(5.11) \quad P^\dagger = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_L} R_\sigma^\dagger = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_L} R_{\sigma^{-1}} = \frac{1}{n!} \sum_{\tau^{-1} \in S_L} R_\tau = P.$$

Most bizonyítsuk azt, hogy az operátor idempotens! Itt is használjuk a P operátor (5.10) alakját, illetve használjuk ki a permutációoperátor (5.6) tulajdonságát, illetve azt, hogy a permutációk csoportot alkotnak, azaz a szorzásra zártak. Tehát

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_L} R_\sigma \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_L} R_\tau = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in S_L} \sum_{\tau \in S_L} R_\sigma R_\tau = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in S_L} \sum_{\tau \in S_L} R_{\sigma\tau=\omega} = \\
 (5.12) \quad &= \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in S_L} \sum_{\sigma^{-1}\omega \in S_L} R_\omega = \frac{1}{(n!)^2} n! \sum_{\omega \in \sigma(S_L)} R_\omega = \frac{1}{n!} \sum_{\omega \in S_L} R_\omega = P.
 \end{aligned}$$

Az előbb bevezetett P projektor segítségével definiálhatjuk a rendszer Hilbert-terének szimmetrikus részét, ami a P projektor képtere, azaz

$$(5.13) \quad \text{Ran}(P) =: \mathcal{H}_L^{\text{Symm}} \subseteq \mathcal{H}_L.$$

Könnyen belátható, hogy olyan vektorok találhatók a szimmetrikus Hilbert-altérben, amelyekre hattatva bármelyik permutációoperátort, önmagát kapjuk vissza, azaz

$$(5.14) \quad \mathcal{H}_L^{\text{Symm}} = \{|\psi\rangle \in \mathcal{H}_L \mid R_\sigma |\psi\rangle = |\psi\rangle, \forall \sigma \in S_L\}.$$

5.2. Elemi szimmetrikus állapotok, 2 dimenziós (qubit) eset. Az alábbi fejezetben legyen az összes részrendszer dimenziója $d_a = 2$. A rendszer $\mathcal{H}_L$ Hilbert-terén bevezethetjük az úgynevezett Dicke-állapotokat úgy, hogy a k indexű, $|D_k\rangle$ Dicke-állapot úgy áll elő, hogy vesszük a

$$(5.15) \quad |D_k^0\rangle = \bigotimes_{a \in [n-k]} |\phi_{a,1}\rangle \otimes \bigotimes_{b \in L \setminus [n-k]} |\phi_{b,2}\rangle$$

állapot összes permutációjának az összegét, majd ezt normáljuk. Egy ilyen állapotvektor szimmetrikus, és tekinthető egy n fotonos rendszer elsőkvantált (részecske-képbeli) állapotának, ahol

k foton gerjesztett, $n - k$ foton pedig alapállapotú módusban van. A továbbiakban a bázisvektorokra használjuk a

$$(5.16) \quad |\phi_{a,i}\rangle = |i\rangle$$

egyszerűsített jelölést, illetve a bázisvektorok tenzorszorzatát jelöljük a

$$(5.17) \quad |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle = |i_1 i_2\rangle$$

módon. Ekkor $|D_k^0\rangle = |\underbrace{11\dots 1}_{n-k} \underbrace{22\dots 2}_k\rangle$, ami alapján a k indexű Dicke-állapot

$$(5.18) \quad |D_k\rangle = \frac{1}{\tilde{N}_k} \left(|\underbrace{11\dots 1}_{n-k} \underbrace{22\dots 2}_k\rangle + \text{„összes permutáció”} \right) = \frac{1}{\tilde{N}_k} |\tilde{D}_k\rangle.$$

Az $\tilde{N}_k$ normálási tényezőt úgy lehet kiszámolni, hogy vesszük a

$$(5.19) \quad |\tilde{D}_k\rangle = \left(|\underbrace{11\dots 1}_{n-k} \underbrace{22\dots 2}_k\rangle + \text{„összes permutáció”} \right)$$

vektort, és ennek kiszámoljuk a normáját, azaz

$$(5.20) \quad \tilde{N}_k = \sqrt{\langle \tilde{D}_k | \tilde{D}_k \rangle}.$$

Ennek kiszámolásához vegyük észre, hogy az összegzés tagjai ortonormáltak, mivel ha egy tagot önmagával szorzunk, akkor az $\langle 1|1\rangle$ és $\langle 2|2\rangle$ számok szorzata lesz az eredmény, ami (4.2) miatt 1 lesz. Illetve ha két különböző tagot szorzunk, akkor az $\langle 1|1\rangle$ és $\langle 2|2\rangle$ tagokon kívül a szorzatban megjelennek a $\langle 2|1\rangle$ és $\langle 1|2\rangle$ tagok is, amiknek az értéke (4.2) szerint 0, így az eredmény is 0 lesz. Tehát a $\langle \tilde{D}_k | \tilde{D}_k \rangle$ skaláris szorzat értéke megegyezik az összegezendő tagok számával, ami pedig annak a száma, hogy hányféleképpen lehet sorba rakni k darab 2-est, és $n - k$ darab 1-est, aminek az értéke az $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ binomiális együttható. Tehát

$$(5.21) \quad \tilde{N}_k = \sqrt{\binom{n}{k}} = \binom{n}{k}^{\frac{1}{2}}.$$

Ez alapján a k indexű Dicke-állapot:

$$(5.22) \quad \dots$$

Ezek az állapotok ortonormáltak, azaz

$$(5.23) \quad \langle D_k | D_l \rangle = \delta_{kl}.$$

A normáltság konstrukció alapján fennáll, tehát már csak az ortogonalitás kell. Ehhez járjunk el úgy, mint az $\tilde{N}_k$ kiszámolásánál, és számoljuk ki a $\langle D_k | D_l \rangle$ szorzatot abban az esetben, amikor $k \neq l$. Korábban láttuk, hogy a Dicke-állapotok (5.22) alakjában szereplő tagok skalárszorzata csak akkor nem nulla, ha ezek teljesen megegyeznek. Viszont ha két nem egyenlő indexű állapotot szorzunk össze, akkor azokban az állapotokban nem lesznek megegyező tagok, mivel a $|D_k\rangle$ tagjaiban k darab $|2\rangle$ vektor van, a $|D_l\rangle$ tagjaiban l darab $|2\rangle$ van, tehát ennek a szorzatnak az értéke nulla, $\langle D_k | D_l \rangle = 0$, ha $k \neq l$, azaz a különböző indexű Dicke-állapotok ortogonálisak.

A Dicke-állapotokra szeretnénk egy könnyebben használható, zárt képletet kapni (5.22) helyett, amiben nem szerepel „szöveg”. Ehhez az (5.2) permutációoperátorokat fogjuk használni, mivel sejthető, hogy ezeknek segítségével is előállíthatóak Dicke-állapotok, mivel az eredeti definícióban a (5.15) vektor permutációit adtuk össze. Ezt az alakot készítsük el úgy, hogy vegyük

a (5.15) vektort, ami k darab $|2\rangle$ és $n - k$ darab $|1\rangle$ vektor tenzorszorzataként áll elő, majd ezt szorozzuk meg minden R_σ $\sigma \in S_L$ operátorral, és ezeket adjuk össze, majd normáljuk. Azaz

$$(5.24) \quad |D_k\rangle = \frac{1}{\tilde{N}_k} \sum_{\sigma \in S_L} R_\sigma |\underbrace{11\dots 1}_{n-k} \underbrace{22\dots 2}_k\rangle = \frac{1}{\tilde{N}_k} \sum_{\sigma \in S_L} R_\sigma |D_k^0\rangle.$$

Az $\tilde{N}_k$ normálási tényező reciprokát úgy kaphatjuk meg, hogy vesszük az előbb kiszámolt (5.21) $\tilde{N}_k$ normálási tényező reciprokát, majd ezt megszorozzuk $\frac{\binom{n}{k}}{|S_L|}$ -el, mert vannak olyan permutációk, amikkel ha megszorozzuk a $|\underbrace{11\dots 1}_{n-k} \underbrace{22\dots 2}_k\rangle$ vektort, ugyanazt kapjuk eredményül, ezért a tagok számát el kell osztani a permutációk számával, ami $|S_L| = n!$. Ezek alapján

$$(5.25) \quad \frac{1}{\tilde{N}_k} = \frac{1}{\tilde{N}_k} \frac{\binom{n}{k}}{n!} = \binom{n}{k}^{-\frac{1}{2}} \frac{\binom{n}{k}}{n!} = \binom{n}{k}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{n!}.$$

Ezt a bizonyítást az általános dimenzióban pontosabban, csoportelméleti módszerekkel is el fogjuk végezni. Az (5.21) összefüggést visszaírva a (5.24) kifejezésbe megkapjuk a k indexű, $|D_k\rangle$ Dicke-állapot permutációoperátorokkal felírt

$$(5.26) \quad |D_k\rangle = \binom{n}{k}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_L} R_\sigma |\underbrace{11\dots 1}_{n-k} \underbrace{22\dots 2}_k\rangle$$

alakját. Ebben a felírásban felismerhetjük a korábban bevezetett (5.10) P projektort, aminek segítségével kompaktabb alakot kaphatunk

$$(5.27) \quad |D_k\rangle = \binom{n}{k}^{\frac{1}{2}} P |\underbrace{11\dots 1}_{n-k} \underbrace{22\dots 2}_k\rangle = \binom{n}{k}^{\frac{1}{2}} P |D_k^0\rangle.$$

Ebből látszik, hogy egy $|D_k\rangle$ Dicke-állapotot megkaphatunk úgy, hogy a P projektort haddatjuk egy olyan vektorra, ami előáll k darab $|2\rangle$ és $n - k$ darab $|1\rangle$ vektor tenzorszorzataként, ami (4.4) alapján egy bázisvektor az összetett rendszer $\mathcal{H}_L$ Hilbert-terén. Tehát ha egy bázisvektorra haddatjuk a P projektort, akkor normálástól eltekintve egy Dicke-állapotot kapunk. Másrészt minden Dicke-állapotot meg lehet így kapni. Mivel a P képtere a $\mathcal{H}_L^{\text{Symm}}$ tér, ezért a Dicke-állapotok kifeszítik a P projektor képterét. Mivel a $|D_k\rangle$ Dicke-állapotok ortonormáltak, tehát lineárisan függetlenek, ezért bázist alkotnak a P projektor képterén, ami (5.13) szerint a szimmetrikus Hilbert-tér. Ez alapján a $\mathcal{H}_L^{\text{Symm}}$ dimenziója megegyezik a Dicke-állapotok számával, azaz

$$(5.28) \quad \dim(\mathcal{H}_L^{\text{Symm}}) = n + 1.$$

A továbbiakban használjuk a Dicke-állapotok több dimenziós esetben is használandó multiindexes jelölését. Ennek a segítségével az eddig k indexel jelölt $|D_k\rangle$ állapotot a $\mathbf{k}$ multiindexel, más néven *gerjesztési vektorral* vagy *betöltési szám vektorral* $|D_{\mathbf{k}}\rangle$ módon jelöljük, ahol a 2 dimenziós esetben multiindex

$$(5.29) \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}_0^2$$

alakú, az első, k_1 komponense azt adja meg, hogy a Dicke-állapot (5.22) alakjában az egyes tagokban hányszor szerepel a $|1\rangle$ vektor, vagyis $k_1 = n - k$, a második, k_2 komponense pedig azt adja meg, hogy hányszor szerepel a tagokban a $|2\rangle$ vektor, vagyis $k_2 = k$. Ezek alapján a $\mathbf{k}$ multiindex komponenseinek összege megegyezik az elemi részrendszerek számával, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 = n$. Később látjuk majd, hogy 2 dimenzió esetén akkor jobb a multiindexes jelölés az eredeti, indexes jelölésnél, ha a részrendszerek száma nem állandó. A Dicke-állapotok eredeti definíciójában

szereplő (5.15) vektor alakja a multiindexel $|\underbrace{11\dots 1}_{k_1}\underbrace{22\dots 2}_{k_2}\rangle$ lesz. Az eddigi eredményeinket úgy kaphatjuk meg multiindexes formában, hogy a (5.15) vektor multiindexes alakját használjuk, illetve a különböző normálási tagokban k helyett k_2 -t használunk, hiszen az új jelölésben ez adja meg a (5.15) vektorban szereplő $|2\rangle$ vektorok számát, azaz átveszi az eredeti jelölésben használt k index szerepét. Ezek mellett kihasználhatjuk, hogy $\binom{n}{k_2} = \frac{n!}{k_2!(n-k_2)!} = \binom{n}{k_1}$.

A Dicke-állapotok eredeti definíciója alapján sejthető, hogy egy $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ multiindexű, n elemi részrendszerből álló Dicke-állapot felépíthető kevesebb elemi részrendszerből álló Dicke-állapotokból tenzorszorzat segítségével. Először tekintsük azt az esetet, amikor $n-1$ elemi részrendszerből álló állapotokból akarjuk felépíteni az n elemi részrendszerből állót. Ezt természetesen úgy lehet megtenni, hogy egy (k_1, k_2-1) multiindexű Dicke-állapothoz hozzáteszünk egy $|2\rangle$ vektort, illetve úgy, hogy egy (k_1-1, k_2) multiindexű Dicke-állapothoz hozzáteszünk egy $|1\rangle$ vektort, majd ezeket normáljuk. Ezek alapján

$$(5.30) \quad |\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle = |1\rangle \otimes |\tilde{D}_{(k_1-1, k_2)}\rangle + |2\rangle \otimes |\tilde{D}_{(k_1, k_2-1)}\rangle.$$

Ez az összefüggés tényleg helyes, amit úgy láthatunk be, hogy az összeg két tagjában láthatóan nincsenek ugyanolyan tagok, és összesen

$$(5.31) \quad \begin{aligned} \binom{n-1}{k_2} + \binom{n-1}{k_1} &= \frac{(n-1)!}{k_2!(k_1-1)!} + \frac{(n-1)!}{k_1!(k_2-1)!} = \\ &= (n-1)! \left(\frac{1}{(n-k_1)!(k_1-1)!} + \frac{1}{k_1!(n-k_1-1)!} \right) = \\ &= (n-1)! \left(\frac{k_1}{(n-k_1)!k_1!} + \frac{n-k_1}{k_1!(n-k_1)!} \right) = \frac{n!}{k_1!k_2!} = \binom{n}{k_2} \end{aligned}$$

olyan tagot tartalmaz, ami a $|\underbrace{11\dots 1}_{k_1}\underbrace{22\dots 2}_{k_2}\rangle$ vektor különböző permutációi, azaz tényleg a $|D_{\mathbf{k}}\rangle$

Dicke-állapotot kaptuk meg. Később az általános dimenziós esetben ennél általánosabb bizonyítást fogunk adni.

Ha felhasználjuk, az 1 elemi részrendszerből álló Dicke-állapotok $|1\rangle = |D_{(1,0)}\rangle = |\tilde{D}_{(1,0)}\rangle$ és $|2\rangle = |D_{(0,1)}\rangle = |\tilde{D}_{(0,1)}\rangle$ alakját, akkor azt kapjuk, hogy

$$(5.32) \quad |\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle = |\tilde{D}_{(1,0)}\rangle \otimes |\tilde{D}_{(k_1-1, k_2)}\rangle + |\tilde{D}_{(0,1)}\rangle \otimes |\tilde{D}_{(k_1, k_2-1)}\rangle.$$

Tehát tulajdonképpen egy n elemi részrendszerből álló Dicke-állapotot felosztottuk 1, illetve $n-1$ elemi részrendszerekből álló Dicke-állapotokra. Ehhez hasonlóan felbonthatunk egy n elemi részrendszerből álló Dicke-állapotot m , illetve $n-m$ elemi részrendszerből álló Dicke-állapotokra. Ezt úgy tehetjük meg, hogy veszünk egy m elemi részrendszerből álló Dicke-állapotot, amiben $l_2 \leq k_2$ darab $|2\rangle$ vektor van, majd megszorozzuk egy $n-m$ elemi részrendszerből álló Dicke-állapottal, amiben $k_2 - l_2$ darab $|2\rangle$ vektor van, azaz

$$(5.33) \quad |\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{\substack{\min\{m, k_2\} \\ \max\{0, k_2-(n-m)\}}} |\tilde{D}_{(m-l_2, l_2)}\rangle \otimes |\tilde{D}_{(k_1-m+l_2, k_2-l_2)}\rangle,$$

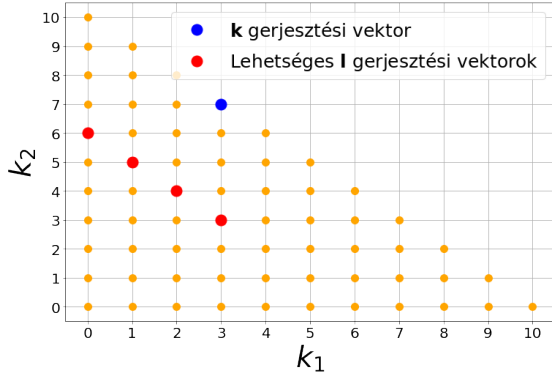
Ha az m elemi részrendszerből álló Dicke-állapotra is használjuk a multiindexet, $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$ multiindexel, ahol $l_1 + l_2 = m$, akkor a képlet a nagyon kényelmes

$$(5.34) \quad |\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{\substack{\mathbf{l}=(0,0) \\ l_1+l_2=m}}^{\mathbf{k}} |\tilde{D}_{\mathbf{l}}\rangle \otimes |\tilde{D}_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}\rangle$$

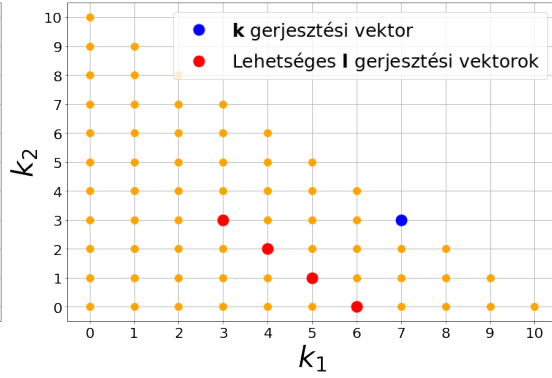
vagy normálással a

$$(5.35) \quad |D_{\mathbf{k}}\rangle = \binom{n}{k_2}^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\mathbf{l}=(0,0) \\ l_1+l_2=m}}^{\mathbf{k}} \binom{m}{l_2}^{\frac{1}{2}} |D_{\mathbf{l}}\rangle \otimes \binom{m-m}{k_2-l_2}^{\frac{1}{2}} |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}\rangle$$

alakot veszi fel, ahol a szumma határait úgy kell érteni, hogy az olyan $\mathbf{l}$ multiindexekre összegzünk, ahol a komponensek összege m , azaz $\sum_i l_i = m$, illetve minden komponense kisebb, mint a $\mathbf{k}$ megfelelő komponense, $l_i \leq k_i$. Ezekre a lehetséges $\mathbf{l}$ gerjesztési vektorokra látunk példákat a 3. és a 4. ábrán. Azt, hogy (5.35) tényleg egy Dicke-állapot, később, az általános dimenziós esetben fogjuk bizonyítani.



3. ÁBRA. Az (5.35) képletben szereplő lehetséges $\mathbf{l}$ gerjesztési vektorok $\mathbf{k} = (3, 7)$ gerjesztési vektor és $m = 6$ esetén



4. ÁBRA. Az (5.35) képletben szereplő lehetséges $\mathbf{l}$ gerjesztési vektorok $\mathbf{k} = (7, 3)$ gerjesztési vektor és $m = 6$ esetén

5.3. Elemi szimmetrikus állapotok, általános dimenziós (qudit) eset. A Dicke-állapotokat általánosíthatjuk tetszőleges d diemenziós elemi részrendszerekre a korábban is látott multiindexelés segítségével. Ekkor az (5.15) megfelelője tetszőleges d dimenziós elemi részrendszerek esetén $|D_{\mathbf{k}}^0\rangle = |\underbrace{11\dots 1}_{k_1} \underbrace{22\dots 2}_{k_2} \dots \underbrace{dd\dots d}_{k_d}\rangle$. Ennek a segítségével az (5.19) megfelelője

$$(5.36) \quad |\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle = \left(|\underbrace{11\dots 1}_{k_1} \underbrace{22\dots 2}_{k_2} \dots \underbrace{dd\dots d}_{k_d}\rangle + \text{„összes permutáció”} \right)$$

lesz, ahol a $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$ multiindex k_i komponense megadja, hogy a permutálandó vektorban hányszor szerepel az $|i\rangle$ bázisvektor, illetve komponenseinek összege megadja az elemi részrendszerek számát, $|\mathbf{k}| = \sum_i k_i = n$. A normálási tényező kiszámolása teljesen analóg a 2 dimenziós, (5.21) kiszámolásával, tehát a $\langle D_{\mathbf{k}} | D_{\mathbf{k}} \rangle$ szorzat értéke megegyezik a (5.36) képletben szereplő tagok számával, ami pedig annak a száma, hogy hányféleképpen lehet sorba rakni k_1 darab 1-est, k_2 darab 2-est stb., azaz, amit a multinomiális együttható ad meg

$$(5.37) \quad \tilde{N}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\langle D_{\mathbf{k}} | D_{\mathbf{k}} \rangle} = \sqrt{\frac{(\sum_i k_i)!}{\prod_i k_i!}} = \sqrt{\frac{n!}{\prod_i k_i!}} = \binom{n}{\mathbf{k}}^{\frac{1}{2}}.$$

Ez alapján a $\mathbf{k}$ indexű, $|D_{\mathbf{k}}\rangle$ Dicke-állapot előáll a

$$(5.38) \quad |D_{\mathbf{k}}\rangle = \binom{n}{\mathbf{k}}^{-\frac{1}{2}} \left(|\underbrace{11\dots 1}_{k_1} \underbrace{22\dots 2}_{k_2} \dots \underbrace{dd\dots d}_{k_d} \rangle + \text{„összes permutáció”} \right)$$

alakban, ami a (5.22) képlet megfelelője több dimenziós elemi részrendszerek esetén. Ezek az állapotok is ortonormáltak, azaz $\langle D_{\mathbf{k}} | D_{\mathbf{l}} \rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}$, amit a qubit esethez hasonlóan lehet belátni. A qudit Dicke-állapotok előállítására is találhatunk zárt képletet a permutációoperátorok segítségével a

$$(5.39) \quad |D_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\tilde{N}_{\mathbf{k}}} \sum_{\sigma \in S_L} R_{\sigma} |\underbrace{11\dots 1}_{k_1} \underbrace{22\dots 2}_{k_2} \dots \underbrace{dd\dots d}_{k_d} \rangle = \frac{1}{\tilde{N}_{\mathbf{k}}} |\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle$$

módon. Az $\tilde{N}_{\mathbf{k}}$ normálási tényező kiszámításához írjuk át a $|\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle$ vektort a

$$(5.40) \quad |\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{\sigma \in S_L} R_{\sigma} |D_{\mathbf{k}}^0\rangle = \sum_{C \in S_L/S_{L,\mathbf{k}}} \sum_{\sigma \in C} R_{\sigma} |D_{\mathbf{k}}^0\rangle$$

módon, ahol $S_{L,\mathbf{k}}$ a $|D_{\mathbf{k}}^0\rangle$ vektor *stabilizátora*, azaz olyan $\omega \in S_L$ permutációk halmaza, amelyekre $R_{\omega} |D_{\mathbf{k}}^0\rangle = |D_{\mathbf{k}}^0\rangle$. Tehát az ω -k olyan permutációk, amelyek felbonthatók olyan permutációk szorzatára, ahol az egyes permutációk csak azokat az indexeket permutálják, ahol a $|D_{\mathbf{k}}^0\rangle$ vektorban ugyanolyan komponensek vannak. Vagyis

$$(5.41) \quad S_{L,\mathbf{k}} = \{ \omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_d \mid \omega_1 \in S_{\{1,2,\dots,k_1\}}, \omega_2 \in S_{\{k_1+1,k_1+2,\dots,k_2\}}, \dots, \omega_d \in S_{\{k_{d-1}+1,k_{d-1}+2,\dots,k_d\}} \}.$$

Ez alapján ki lehet számolni a stabilizátor nagyságát,

$$(5.42) \quad |S_{L,\mathbf{k}}| = \prod_{i=1}^d k_i!.$$

$S_L/S_{L,\mathbf{k}}$ a *stabilizátor szerinti baloldali mellékosztályok halmaza*, azaz

$$(5.43) \quad S_L/S_{L,\mathbf{k}} = \{ \tau S_{L,\mathbf{k}} \mid \tau \in S_L \}.$$

(Megjegyezzük, hogy G/N -nek az N normális részcsoporth általi faktorcsoporthot szokták jelölni, de általánosabban a $G/H, H \setminus G$ a bal/jobboldali mellékosztályokra is használatos jelölés.) Nyilvánvaló, hogy két mellékosztály vagy megegyezik egymással, vagy diszjunktak, és az elemszámuk megegyezik. Két mellékosztály akkor egyezik meg, ha a (5.43) definícióban szereplő τ és τ' permutációk ugyanazt az eredményt adják, ha hattatjuk őket $|D_{\mathbf{k}}^0\rangle$ -ra. Tehát a mellékosztályok tulajdonképpen *ekvivalenciaosztályok*. Ezek alapján az (5.40) összefüggést tovább írva

$$(5.44) \quad \begin{aligned} |\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle &= \sum_{C \in S_L/S_{L,\mathbf{k}}} \sum_{\tau\omega \in C} R_{\tau\omega} |D_{\mathbf{k}}^0\rangle = \sum_{C \in S_L/S_{L,\mathbf{k}}} \sum_{\tau\omega \in C} R_{\tau} R_{\omega} |D_{\mathbf{k}}^0\rangle = \\ &= \sum_{C \in S_L/S_{L,\mathbf{k}}} \sum_{\tau\omega \in C} R_{\tau} |D_{\mathbf{k}}^0\rangle = |S_{L,\mathbf{k}}| \sum_{C \in S_L/S_{L,\mathbf{k}}} R_{\tau(C)} |D_{\mathbf{k}}^0\rangle = |S_{L,\mathbf{k}}| \cdot |\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle. \end{aligned}$$

Ahol $\tau(C)$ kiválaszt egy tetszőleges elemet a C mellékosztályból. Itt kihasználtuk, hogy $\omega \in S_{L,\mathbf{k}}$, és azt, hogy minden $\tau \in C$ ugyanúgy hat $|D_{\mathbf{k}}^0\rangle$ -n. Tehát (5.44)-ban az utolsó összegzésben a $|D_{\mathbf{k}}^0\rangle$ vektor összes különböző permutációját adjuk össze, ami (5.36) alapján pont $|\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle$. Ez alapján $\tilde{N}_{\mathbf{k}}$ kiszámolható,

$$(5.45) \quad \tilde{N}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\langle \tilde{D}_{\mathbf{k}} | \tilde{D}_{\mathbf{k}} \rangle} = |S_{L,\mathbf{k}}| \sqrt{\langle \tilde{D}_{\mathbf{k}} | \tilde{D}_{\mathbf{k}} \rangle} = |S_{L,\mathbf{k}}| \tilde{N}_{\mathbf{k}} = n! \binom{n}{\mathbf{k}}^{-\frac{1}{2}}.$$

Tehát

$$(5.46) \quad |D_{\mathbf{k}}\rangle = \binom{n}{\mathbf{k}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_L} R_{\sigma} |D_{\mathbf{k}}^0\rangle.$$

Megjegyezzük, hogy az $\tilde{N}_{\mathbf{k}}$ értéke kiszámítható csoportelméleti módszerekkel is, hiszen $\tilde{N}_{\mathbf{k}}^2$ értéke megegyezik a $|D_{\mathbf{k}}^0\rangle$ pályájának elemszámával, azaz azoknak a vektoroknak a számával, amit kaphatunk, ha a $|D_{\mathbf{k}}^0\rangle$ vektorra hattatunk egy $\sigma \in S_L$ permutációt. Ennek az értéke pedig az *pálya-stabilizátor tétel* alapján

$$(5.47) \quad \tilde{N}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{|S_L|}{|S_{L,\mathbf{k}}|}} = \sqrt{\frac{n!}{\prod_{i=1}^d k_i!}} = \binom{n}{\mathbf{k}}^{\frac{1}{2}}.$$

Az (5.46) képletben is felismerhetjük az (5.10) P projektort, aminek segítségével megkaphatjuk az (5.27) összefüggés tetszőleges dimenziós alakját a

$$(5.48) \quad |D_{\mathbf{k}}\rangle = \binom{n}{\mathbf{k}}^{\frac{1}{2}} P |D_{\mathbf{k}}^0\rangle$$

módon.

A két dimenziós esethez hasonló megfontolásokkal azt kapjuk, hogy a $|D_{\mathbf{k}}\rangle$ vektorok bázist alkotnak a P projektor képterén, a szimmetrikus Hilbert-téren, ami alapján tetszőleges d dimenzió esetén a $\mathcal{H}_L^{\text{Symm}}$ dimenziója megegyezik a lehetséges $\mathbf{k}$ multiindexek számával, ami megegyezik annak a számával, hogy hány különböző $|D_{\mathbf{k}}^0\rangle$ -t lehet felírni, vagyis, hogy n darab pont közé hányféleképpen lehet elhelyezni $d-1$ darab vonalat (stars and bars problem). Ezek alapján a szimmetrikus Hilbert-tér dimenziója tetszőleges d dimenzió esetén

$$(5.49) \quad \dim(\mathcal{H}_L^{\text{Symm}}) = \binom{n+d-1}{d-1}.$$

Ez $d=2$ esetén visszaadja a két dimenzióra kapott eredményt (5.28), mivel

$$(5.50) \quad \binom{n+2-1}{2-1} = \binom{n+1}{1} = n+1.$$

A qudit Dicke-állapotok is felbonthatók kevesebb elemi részrendszerből álló Dicke-állapotok tenzorsszorzataiként a

$$(5.51) \quad |\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{\mathbf{l} \in I_{m,\mathbf{k}}^d} |\tilde{D}_{\mathbf{l}}\rangle \otimes |\tilde{D}_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}\rangle,$$

vagyis normálással a

$$(5.52) \quad |D_{\mathbf{k}}\rangle = \binom{n}{\mathbf{k}}^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{\mathbf{l} \in I_{m,\mathbf{k}}^d} \binom{m}{\mathbf{l}}^{\frac{1}{2}} |D_{\mathbf{l}}\rangle \otimes \binom{n-m}{\mathbf{k}-\mathbf{l}}^{\frac{1}{2}} |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}\rangle \right]$$

módon, ahol bevezettük az $I_{m,\mathbf{k}}^d$ multiindexhalmazt, ami az olyan d dimenzióhoz tartozó, m elemi részrendszer leíró multiindexeket tartalmazza, amelyek elemenként nem nagyobbak a $\mathbf{k}$ multiindexnél, azaz

$$(5.53) \quad I_{m,\mathbf{k}}^d = \left\{ \mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^d \mid \sum_i l_i = m, l_i \leq k_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, d\} \right\}.$$

Qudit esetben az $I_{m,\mathbf{k}}^d$ halmazt meghatározni nehéz, hiszen a $d=2$ qubit esetről sem voltak rögzítettek az összegzés határai. Ezt a halmazt úgy lehet elképzelni, hogy az $\mathbb{N}_0^d$ -on belüli $\mathbf{l} \leq \mathbf{k}$ hipertéglatestnek az $|\mathbf{l}| = m$ hipersíkkal való metszetét paraméterezzük fel, ami zárt alakban nem lehetséges $d \geq 2$ esetén.

Azt, hogy (5.52) tényleg egy Dicke-állapot, úgy lehet belátni, hogy ha veszünk egy tetszőleges $\mathbf{k} = \mathbf{l} + (\mathbf{k} - \mathbf{l})$ multiindexet, akkor a $\sum_{\mathbf{l}} |\tilde{D}_{\mathbf{l}}\rangle \otimes |\tilde{D}_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}\rangle$ összeg minden tagja szerepelni fog $|\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle$ (5.19) definíció szerinti felírásában. Emellett, ha veszünk egy, a $|\tilde{D}_{\mathbf{k}}\rangle$ (5.19) definíció szerinti felírásában előforduló $|i_1 \dots i_m i_{m+1}, \dots, i_n\rangle = |i_1 \dots i_m\rangle \otimes |i_{m+1} \dots i_n\rangle$ tagot, és bevezetjük az $l_j = |\{a \mid i_a = j, 1 \leq a \leq m\}|$ és $k_j - l_j = |\{a \mid i_a = j, m < a \leq n\}|$ jelölést, illetve a $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d)$ és $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_d)$ multiindexeket, akkor azt kapjuk, hogy az összes ilyen tag előállítható $|\tilde{D}_{\mathbf{l}}\rangle \otimes |\tilde{D}_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}\rangle$ módon.

6. DICKE-ÁLLAPOTOK KORRELÁCIÓJA ÉS ÖSSZEFONÓDÁSA

Ebben a fejezetben a $|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|$ tiszta állapotok korrelációját, illetve összefonódását fogjuk vizsgálni különböző esetekben. Ehhez vegyük észre, hogy az (5.52) képlet tulajdonképpen a $|D_{\mathbf{k}}\rangle$ Dicke-állapot Schmidt dekompozíciója $\{|D_{\mathbf{l}}\rangle\}$ és $\{|D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}\rangle\}$ Schmidt-bázisokkal a

$$(6.1) \quad |D_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{\mathbf{l} \in I_{m,\mathbf{k}}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{l}}^{\mathbf{k}}} |D_{\mathbf{l}}\rangle \otimes |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}\rangle$$

alakban, ahol a Schmidt együtthatók értéke

$$(6.2) \quad \eta_{\mathbf{l}}^{\mathbf{k}} = \frac{\binom{m}{\mathbf{l}} \binom{n-m}{\mathbf{k}-\mathbf{l}}}{\binom{n}{\mathbf{k}}} = \eta_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}^{\mathbf{k}}.$$

A (6.1) Schmidt-dekompozíció, és (4.72) alapján egy $X|\overline{X}$ bipartícióra, ahol $|X| = m$ a $|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|$ állapot korrelációja

$$(6.3) \quad I_{X|\overline{X}}(|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|) = -2 \sum_{\mathbf{l} \in I_{m,\mathbf{k}}^d} \frac{\binom{m}{\mathbf{l}} \binom{n-m}{\mathbf{k}-\mathbf{l}}}{\binom{n}{\mathbf{k}}} \ln \left(\frac{\binom{m}{\mathbf{l}} \binom{n-m}{\mathbf{k}-\mathbf{l}}}{\binom{n}{\mathbf{k}}} \right).$$

Kiszámolhatjuk a $|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|$ állapot $I_{\xi}(|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|)$ korrelációját (4.65) alapján egy tetszőleges $\xi \in \Pi(L)$ partícióra, kihasználva, hogy $S(|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|) = 0$, mivel tiszta állapotról van szó. Bevezetve a $S_X(|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|) = S(\text{Tr}_{\overline{X}} |D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|)$ jelölést, azt kapjuk, hogy $I_{\xi}(|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|) = \sum_{X \in \xi} S_X(|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|)$. Ha $|X_i| = m_i$, akkor azt kapjuk, hogy

$$(6.4) \quad I_{\xi}(|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|) = - \sum_i \left(\sum_{\mathbf{l} \in I_{m_i,\mathbf{k}}^d} \frac{\binom{m_i}{\mathbf{l}} \binom{n-m_i}{\mathbf{k}-\mathbf{l}}}{\binom{n}{\mathbf{k}}} \ln \left(\frac{\binom{m_i}{\mathbf{l}} \binom{n-m_i}{\mathbf{k}-\mathbf{l}}}{\binom{n}{\mathbf{k}}} \right) \right),$$

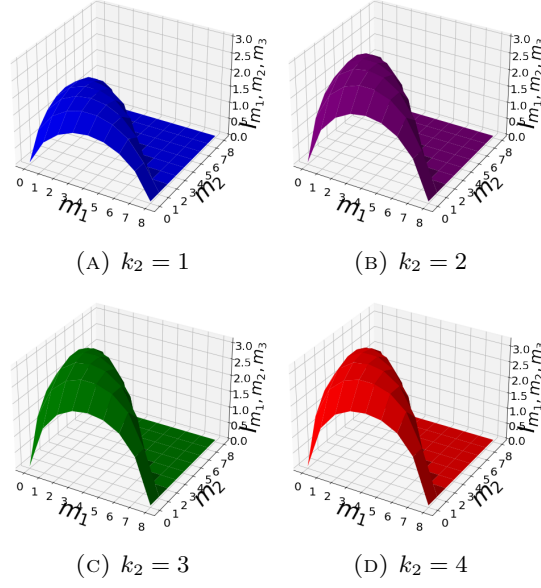
ami a $\xi = X|\overline{X}$ bipartícióra visszaadja a (6.3) képletet. Ilyen korrelációkra láthatunk példát az 5. és a 6. ábrán.

Ezek, és (4.73) alapján egy $X|\overline{X}$ bipartícióra, ahol $|X| = m$ a $|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|$ állapot összefonódása

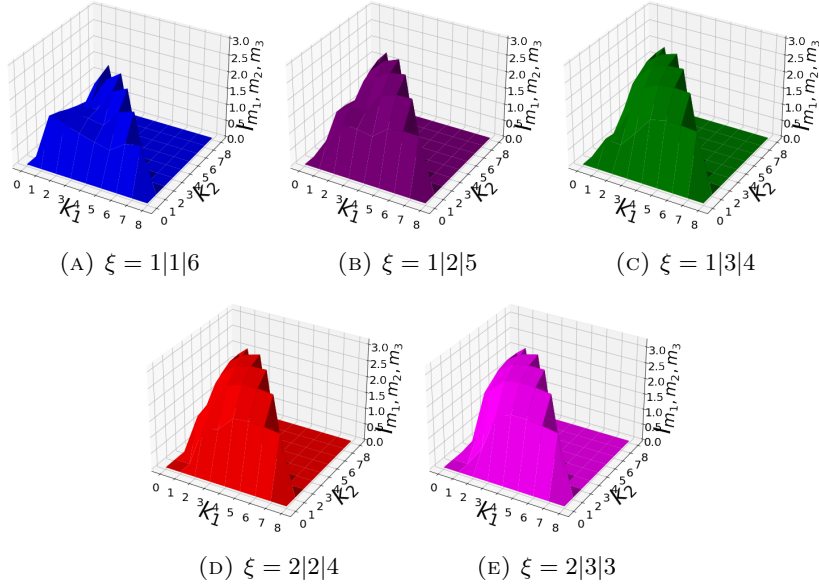
$$(6.5) \quad E_{X|\overline{X}}(|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|) = \frac{1}{2} I_{X|\overline{X}}(|D_{\mathbf{k}}\rangle\langle D_{\mathbf{k}}|) = - \sum_{\mathbf{l} \in I_{m,\mathbf{k}}^d} \frac{\binom{m}{\mathbf{l}} \binom{n-m}{\mathbf{k}-\mathbf{l}}}{\binom{n}{\mathbf{k}}} \ln \left(\frac{\binom{m}{\mathbf{l}} \binom{n-m}{\mathbf{k}-\mathbf{l}}}{\binom{n}{\mathbf{k}}} \right).$$

Az összefonódást sajnos csak bipartíciókra tudjuk kiszámolni, aminek az oka az, hogy a (4.68) összefonódás relatív entrópiájában szereplő minimalizálást a (4.65) korreláció relatív entrópiájával ellentétben nem tudtuk zárt alakban megadni. Az összefonódásról láthatók információk a 7., 8., 9., 10. és 11. ábrán.

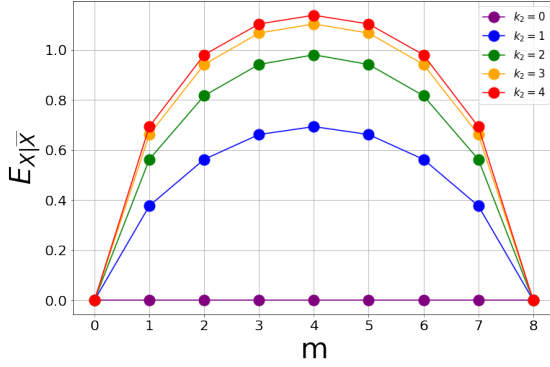
A korrelációt és összefonódást mérő ábráktól le lehet olvasni, például, hogy a korreláció és az összefonódás erősebb, ha egyenletesebb felosztásra vonatkoznak, illetve akkor is, ha egyenletesebb a gerjesztés, vagyis a különböző gerjesztések száma hasonló. Másrészt az is látszik, hogy a korreláció és az összefonódás invariáns a k_1, k_2 cserére, illetve az $m, n-m$ cserére; ahol az előbbi annak a megnyilvánulása, hogy a k_i, k_j csere megfelel az $|i\rangle, |j\rangle$ cserének, ami egy lokális unitér transzformáció, amire a korreláció és az összefonódás invariáns; az utóbbi pedig magának a Dicke állapotoknak a szimmetriájából, ami a fenti (6.5) képletben is megnyilvánul.



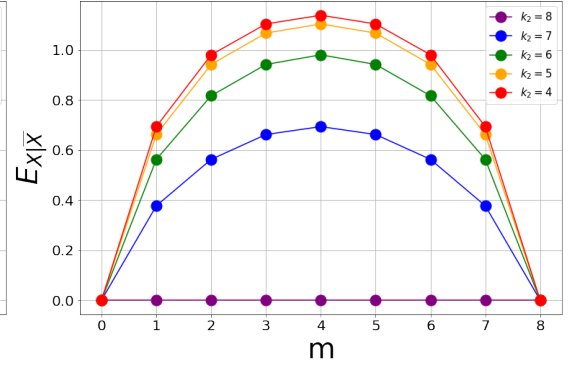
5. ÁBRA. Az $n = 8$ elemi részrendszerből álló $|D_{(k_1, k_2)}\rangle$ qubit Dicke-állapotok korrelációja egy $\xi = X_1|X_2|X_3$ partícióra, ahol $|X_i| = m_i$, különböző k_2 értékek esetén.



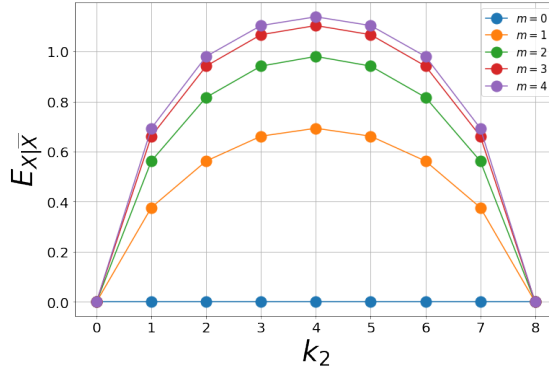
6. ÁBRA. A maximum $n = 8$ elemi részrendszerből álló $|D_{(k_1, k_2)}\rangle$ qubit Dicke-állapotok korrelációja különböző partíciókra, ahol $|X_i| = m_i$, a k_1 és k_2 értékek függvényében.



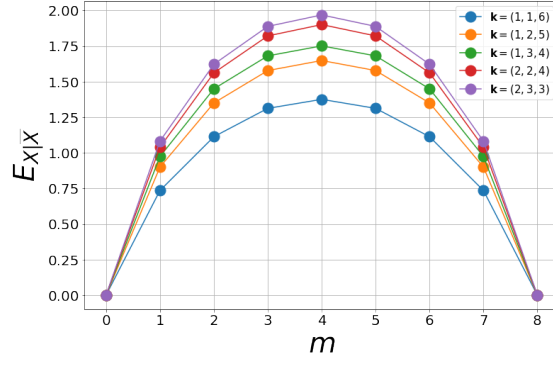
7. ÁBRA. Az $n = 8$ elemi részrendszerből álló $|D_{(k_1, k_2)}\rangle$ qubit Dicke-állapotok összefonódása, egy $X|\bar{X}, |X| = m$ bipartícióra, ahol, különböző $0 \leq k_2 \leq 4$ értékek esetén.



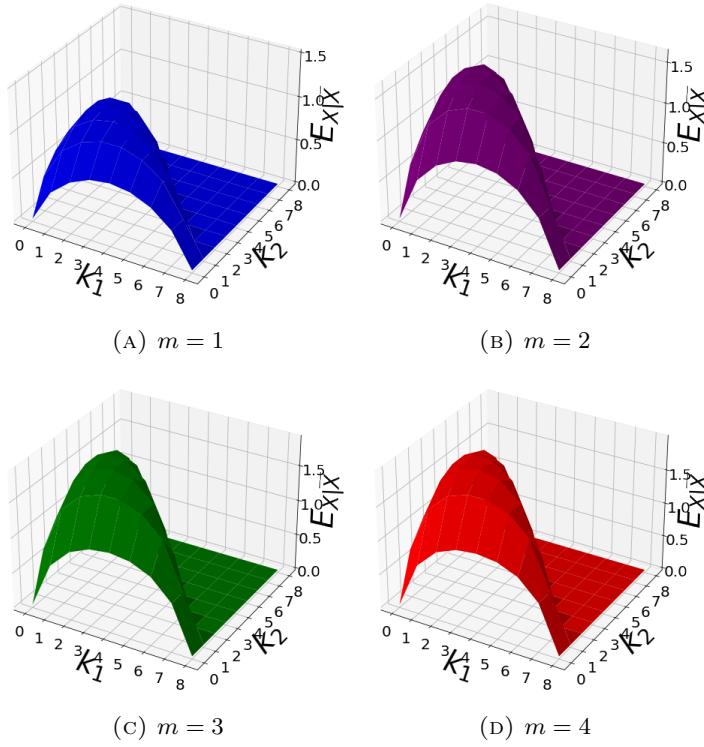
8. ÁBRA. Az $n = 8$ elemi részrendszerből álló $|D_{(k_1, k_2)}\rangle$ qubit Dicke-állapotok összefonódása, egy $X|\bar{X}, |X| = m$ bipartícióra, ahol, különböző $4 \leq k_2 \leq 8$ értékek esetén.



9. ÁBRA. Az $n = 8$ elemi részrendszerből álló $|D_{(k_1, k_2)}\rangle$ qubit Dicke-állapotok összefonódása, különböző $X|\bar{X}, 0 \leq |X| = m \leq 4$ bipartíciókra, k_2 függvényében.



10. ÁBRA. Az $n = 8$ darab, $d = 3$ dimenziós elemi részrendszerekből álló $|D_{(k_1, k_2, k_3)}\rangle$ Dicke-állapotok összefonódása, egy $X|\bar{X}, |X| = m$ bipartícióra, különböző $\mathbf{k}$ betöltési szám vektorok esetén.



11. ÁBRA. A maximum $n = 8$ darab, $d = 3$ dimenziós elemi részrendszerekből álló $|D_{(k_1, k_2, k_3)}\rangle$ Dicke-állapotok összefonódása, különböző $X|\bar{X}, |X| = m$ bipartíciókra, a $\mathbf{k}$ betöltési szám vektor k_1 és k_2 komponenseinek függvényében.

7. DICKE-ÁLLAPOTOK MÁTRIXSZORZAT ALAKJA.

Ha fel akarjuk írni egy tetszőleges $|D_{\mathbf{k}}\rangle$ Dicke-állapot (4.25) MPS alakját, akkor könnyű dolgunk van, mivel az állapot (4.15) Schmidt-dekompozíciójában szereplő Schmidt-vektorok (5.52) alapján szintén Dicke-állapotok, illetve a $\mathcal{H}_a$ elemi részrendszerek bázisvektorai és a mátrixszorzat-állapot felírása során (4.18)-ben előkerülő $|\tau\rangle$ vektorok is Dicke-állapotok. Először vegyük a $|D_{\mathbf{k}}\rangle$ vektor (5.35) Schmidt-dekompozícióját egy $\{1\}|\{2, 3, \dots, n\}$ felbontásra nézve

$$(7.1) \quad |D_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{\mathbf{l}_1 \in I_{1,\mathbf{k}}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{l}_1}^{\mathbf{k}}} |D_{\mathbf{l}_1}\rangle \otimes |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}\rangle = \sum_{i_1} \sum_{\mathbf{l}_1 \in I_{1,\mathbf{k}}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{l}_1}^{\mathbf{k}}} \langle i_1 | D_{\mathbf{l}_1} \rangle |i_1\rangle \otimes |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}\rangle.$$

Vezessünk be egy $\mathbf{m}$ leképezést az

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{m} : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}_0^d \\ i &\longmapsto \mathbf{m}(i) : (\mathbf{m}(i))_j = \delta_{ij} \end{aligned}$$

módon, azaz az i számhoz egy olyan multiindexet rendel, aminek az i . eleme 1, a többi 0. Ez alapján a (7.1)-ben megjelenő skalárszorzat értéke $\langle i_1 | D_{\mathbf{l}_1} \rangle = \delta_{(\mathbf{m}(i_1), \mathbf{l}_1)}$, mivel $|i_1\rangle = |D_{\mathbf{m}(i_1)}\rangle$ is egy Dicke-állapot, és ezek az állapotok ortonormáltak. Ezt visszaírva (7.1)-be, azt kapjuk, hogy

$$(7.3) \quad |D_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{i_1} \sum_{\mathbf{l}_1 \in I_{1,\mathbf{k}}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{l}_1}^{\mathbf{k}}} \delta_{(\mathbf{m}(i_1), \mathbf{l}_1)} |i_1\rangle \otimes |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}\rangle,$$

ami alapján

$$(7.4) \quad \Gamma_{\mathbf{l}_1}^{(1)i_1} = \delta_{(\mathbf{m}(i_1), \mathbf{l}_1)}.$$

Most végezzük el a $|D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}\rangle$ vektor Schmidt-dekompozícióját $m = 1$ -re, a

$$(7.5) \quad |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}\rangle = \sum_{\mathbf{t} \in I_{1,\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{t}}^{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}} |D_{\mathbf{t}}\rangle \otimes |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1-\mathbf{t}}\rangle = \sum_{i_2} \sum_{\mathbf{t} \in I_{1,\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{t}}^{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}} \langle i_2 | D_{\mathbf{t}} \rangle |i_2\rangle \otimes |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1-\mathbf{t}}\rangle$$

módon, ahol a skalárszorzat értéke $\langle i_2 | D_{\mathbf{t}} \rangle = \delta_{(\mathbf{m}(i_2), \mathbf{t})}$. Írjuk fel a $|D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1-\mathbf{t}}\rangle$ vektort a

$$(7.6) \quad |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1-\mathbf{t}}\rangle = \sum_{\mathbf{l}_2 \in I_{2,\mathbf{k}}^d} \langle D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_2} | D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1-\mathbf{t}} \rangle |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_2}\rangle = \sum_{\mathbf{l}_2 \in I_{2,\mathbf{k}}^d} \delta_{(\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_1+\mathbf{t})} |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_2}\rangle$$

módon, ahol kihasználtuk, hogy a Dicke-állapotok bázist alkotnak. Ezt visszaírva (7.5)-be azt kapjuk, hogy

$$(7.7) \quad |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}\rangle = \sum_{i_2} \sum_{\mathbf{t} \in I_{1,\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}^d} \sum_{\mathbf{l}_2 \in I_{2,\mathbf{k}}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{t}}^{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}} \delta_{(\mathbf{m}(i_2), \mathbf{t})} \delta_{(\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_1+\mathbf{t})} |i_2\rangle \otimes |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_2}\rangle.$$

Elvégezve a $\mathbf{t}$ -re való összegzést,

$$(7.8) \quad |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}\rangle = \sum_{i_2} \sum_{\mathbf{l}_2 \in I_{2,\mathbf{k}}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{l}_2-\mathbf{l}_1}^{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}} \delta_{(\mathbf{m}(i_2), \mathbf{l}_2-\mathbf{l}_1)} |i_2\rangle \otimes |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_2}\rangle.$$

Ezt visszaírva (7.3)-ba, azt kapjuk, hogy

$$(7.9) \quad |D_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{i_1, i_2} \sum_{\mathbf{l}_1 \in I_{1,\mathbf{k}}^d} \sum_{\mathbf{l}_2 \in I_{2,\mathbf{k}}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{l}_1}^{\mathbf{k}}} \delta_{(\mathbf{m}(i_1), \mathbf{l}_1)} \sqrt{\eta_{\mathbf{l}_2-\mathbf{l}_1}^{\mathbf{k}-\mathbf{l}_1}} \delta_{(\mathbf{m}(i_2), \mathbf{l}_2-\mathbf{l}_1)} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes |D_{\mathbf{k}-\mathbf{l}_2}\rangle.$$

Ez alapján

$$(7.10) \quad \Gamma_{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2}^{(2)i_2} = \frac{\sqrt{\eta_{\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1}^{\mathbf{k} - \mathbf{l}_1}}}{\sqrt{\eta_{\mathbf{l}_2}^{\mathbf{k}}}} \delta_{(\mathbf{m}(i_2), \mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1)}.$$

Most tegyük fel, hogy az előzőekhez hasonló lépéseket már a -szor megtettük. Ekkor a $|D_{\mathbf{k} - \mathbf{l}_a}\rangle$ vektort kell felbontanunk. A (7.5)-hez hasonlóan írjuk fel a vektor Schmidt-dekompozícióját $m = 1$ -re, a

$$(7.11) \quad |D_{\mathbf{k} - \mathbf{l}_a}\rangle = \sum_{\mathbf{t} \in I_{1, \mathbf{k} - \mathbf{l}_a}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{t}}^{\mathbf{k} - \mathbf{l}_a}} |D_{\mathbf{t}}\rangle \otimes |D_{\mathbf{k} - \mathbf{l}_a - \mathbf{t}}\rangle = \sum_{i_{a+1}} \sum_{\mathbf{t} \in I_{1, \mathbf{k} - \mathbf{l}_a}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{t}}^{\mathbf{k} - \mathbf{l}_a}} \langle i_{a+1} | D_{\mathbf{t}} \rangle |i_{a+1}\rangle \otimes |D_{\mathbf{k} - \mathbf{l}_a - \mathbf{t}}\rangle$$

alakban, ahol a skalárszorzat értéke $\langle i_{a+1} | D_{\mathbf{t}} \rangle = \delta_{(\mathbf{m}(i_{a+1}), \mathbf{t})}$. (7.6)-hoz hasonlóan írjuk fel a $|D_{\mathbf{k} - \mathbf{l}_a - \mathbf{t}}\rangle$ vektort a

$$(7.12) \quad \sum_{\mathbf{l}_{a+1} \in I_{a+1, \mathbf{k}}^d} \langle D_{\mathbf{k} - \mathbf{l}_{a+1}} | D_{\mathbf{k} - \mathbf{l}_a - \mathbf{t}} \rangle |D_{\mathbf{k} - \mathbf{l}_{a+1}}\rangle = \sum_{\mathbf{l}_{a+1} \in I_{a+1, \mathbf{k}}^d} \delta_{(\mathbf{l}_{a+1}, \mathbf{l}_a + \mathbf{t})} |D_{\mathbf{k} - \mathbf{l}_{a+1}}\rangle$$

módon. Ezt visszaírva (7.11)-be és a $\mathbf{t}$ -re való összegzést elvégezve azt kapjuk, hogy

$$(7.13) \quad |D_{\mathbf{k} - \mathbf{l}_a}\rangle = \sum_{i_{a+1}} \sum_{\mathbf{l}_{a+1} \in I_{a+1, \mathbf{k}}^d} \sqrt{\eta_{\mathbf{l}_{a+1} - \mathbf{l}_a}^{\mathbf{k} - \mathbf{l}_a}} \delta_{(\mathbf{m}(i_{a+1}), \mathbf{l}_{a+1} - \mathbf{l}_a)} |i_{a+1}\rangle \otimes |D_{\mathbf{k} - \mathbf{l}_{a+1}}\rangle,$$

ami alapján

$$(7.14) \quad \Gamma_{\mathbf{l}_a, \mathbf{l}_{a+1}}^{(a+1)i_{a+1}} = \frac{\sqrt{\eta_{\mathbf{l}_{a+1} - \mathbf{l}_a}^{\mathbf{k} - \mathbf{l}_a}}}{\sqrt{\eta_{\mathbf{l}_{a+1}}^{\mathbf{k}}}} \delta_{(\mathbf{m}(i_{a+1}), \mathbf{l}_{a+1} - \mathbf{l}_a)}.$$

Ezt az alakot kissé egyszerűbbé tehetjük, ha észrevesszük, hogy $\mathbf{l}_{a+1} - \mathbf{l}_a = \mathbf{m}(i_{a+1})$ egyszeres gerjesztési index, és az ilyenekre a Schmidt-együtthatót könnyen kiszámíthatjuk zárt alakban. Tetszőleges $\mathbf{k}'$ és egyszeres $\mathbf{l}' = \mathbf{m}(j)$ indexekre (ha $k'_j > 0$) számoljuk ki

$$(7.15) \quad \eta_{\mathbf{l}'}^{\mathbf{k}'} = \frac{\binom{1}{\mathbf{l}'} \binom{|\mathbf{k}'| - 1}{|\mathbf{k}'| - \mathbf{l}'}}{\binom{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}'|}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^d (\mathbf{k}' - \mathbf{l}')_i!} = \frac{|\mathbf{k}'|! / |\mathbf{k}'|}{(\prod_{i=1}^d k'_i!)/k'_j} = \frac{k'_j}{|\mathbf{k}'|}.$$

Ezzel

$$(7.16) \quad \Gamma_{\mathbf{l}_a, \mathbf{l}_{a+1}}^{(a+1)i_{a+1}} = \frac{\sqrt{(\mathbf{k} - \mathbf{l}_a)_{i_{a+1}}}}{\sqrt{(n - a) \eta_{\mathbf{l}_{a+1}}^{\mathbf{k}}}} \delta_{(\mathbf{m}(i_{a+1}), \mathbf{l}_{a+1} - \mathbf{l}_a)}.$$

Vegyük észre, hogy a Dicke-állapotok (4.28) jobbkanonikus MPS alakjában szereplő B mátrixok egyszerűbb alakot vesznek fel a Γ mátrixoknál, és pedig

$$(7.17) \quad B_{\mathbf{l}_{a-1}, \mathbf{l}_a}^{(a)i_a} = \sqrt{\eta_{\mathbf{l}_a - \mathbf{l}_{a-1}}^{\mathbf{k} - \mathbf{l}_{a-1}}} \delta_{(\mathbf{m}(i_a), \mathbf{l}_a - \mathbf{l}_{a-1})} = \sqrt{\frac{(\mathbf{k})_{i_a} - (\mathbf{l}_{a-1})_{i_a}}{n - a + 1}} \delta_{(\mathbf{m}(i_a), \mathbf{l}_a - \mathbf{l}_{a-1})},$$

A (7.17)-ban látható B mátrixokkal a $|D_{\mathbf{k}}\rangle$ vektor jobbkanonikus MPS alakja

$$(7.18) \quad |D_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sum_{\mathbf{l}_1 \in I_{1, \mathbf{k}}^d} \sum_{\mathbf{l}_2 \in I_{2, \mathbf{k}}^d} \dots \sum_{\mathbf{l}_{n-1} \in I_{n-1, \mathbf{k}}^d} B_{\mathbf{l}_1}^{(1)i_1} B_{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2}^{(2)i_2} B_{\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3}^{(3)i_3} \dots B_{\mathbf{l}_{n-2}, \mathbf{l}_{n-1}}^{(n-1)i_{n-1}} B_{\mathbf{l}_{n-1}}^{(n)i_n} \bigotimes_{a=1}^n |i_a\rangle.$$

8. ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozatban megvizsgáltuk a qudit Dicke-állapotok sokrész korrelációjának és összefonódásának különféle aspektusait. Ehhez áttekintettük az elméleti alapokat a véges dimenziós Hilbert-tér formalizmussal kezdve, majd megnéztük, hogy ezek segítségével hogyan lehet leírni a kvantumrendszereket. Ezek után átvettük a diszkrét véges összetett rendszerek tulajdonságait, többek közt a sokrész korrelációt és összefonódást, és azok mérőszámait. Ezekkel az eszközökkel kiszámítottuk a qudit Dicke-állapotok sokrész korrelációját, összefonódását és mátrixszorzat alakját.

A Dicke-állapotok azért szolgálnak nagyon jó példaként a sokrész összefonódáshoz, mert ezek egyszerű, szimmetrikus szerkezetű, kevés paraméterrel leírható állapotok, amelyekre könnyen lehet zárt alakban számolni. Ez az állapotok (6.1) Schmidt-dekompozícióján, vagy (7.17)-(7.18) mátrixszorzat alakján is jól látszik. Mátrix-szorzat alakot zárt alakban, analitikusan kiszámítani nagyon nehéz, kevés példa létezik rá az irodalomban. Megjegyezzük, hogy ezek az eredmények az összegzési határok miatt kissé implicitiek általános quditekre, de qubitekre ennél is könnyebben kezelhető, explicit formulákká válnak. Mindemellett ezek az állapotok fizikailag is relevánsak, a qubit esetben a $k_2 = 1$, egyszeres gerjesztésű Dicke-állapotok a kvantumoptikai Dicke-modellben explicite előjönnek.

A (6.1) Schmidt-dekompozíció segítségével felírtuk a Dicke-állapotok korrelációját a (6.4) képletben tetszőleges felosztásra nézve, illetve összefonódásukat bipartíciókra a (6.5) képletben. Ezeket ábráztuk konkrét esetekben, és láthattuk, hogy a korreláció és az összefonódás erősebb, ha egyenletesebb felosztásra vonatkoznak, illetve akkor is, ha egyenletesebb a gerjesztés, vagyis a különböző gerjesztések száma hasonló. Másrészt azt is láttuk, hogy a korreláció és az összefonódás invariáns a gerjesztések cseréjére (átcímkezésére, ami a lokális unitér invariancia következménye), illetve a részrendszer méretek cseréjére (ami az állapot szimmetriájának következménye).

A Dicke állapotok azért is fontosak, mert általában az ilyen jellegű állapotokbeli összefonódástól azt várjuk, hogy az nem „törékeny”, vagyis nem tűnik el, ha elveszítünk részrendszereket, hanem a megmaradt részrendszerek is összefonóttak maradnak. Ezeknek a részrendszereknek az állapota persze kevert, így összefonódásukat nem tudjuk még tanulmányozni, ez terveink szerint további kutatásaink tárgyát képezi majd.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Szalay Szilárdnak a rengeteg segítségért, tanácsért, amelyek hozzájárultak ezen dolgozat létrejöttéhez. Külön szeretném megköszönni a Wigner Fizikai Kutatóközpontnak, a Wigner Gyakornoki Program keretein belüli támogatást a 2023-as év tavaszi és őszi, illetve a 2024-es év tavaszi és őszi féléve során.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski, *Geometry of quantum states: An introduction to quantum entanglement*, Cambridge University Press, 2006.
- [2] Cédric Bény and Florian Richter, *Algebraic approach to quantum theory: a finite-dimensional guide*, arXiv [quant-ph] (2015), 1505.03106, available at <http://arxiv.org/pdf/1505.03106>.
- [3] Brian A. Davey and Hilary A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, second, Cambridge University Press, 2002.
- [4] Kavan Modi, Tomasz Paterek, Wonmin Son, Vlatko Vedral, and Mark Williamson, *Unified view of quantum and classical correlations*, Phys. Rev. Lett. **104** (2010Feb), 080501.
- [5] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, 1st ed., Cambridge University Press, 2000.
- [6] Dénes Petz, *Bevezetés a lineáris analízisbe és alkalmazásaiba*, A szerző weblapjáról, 2012.
- [7] Ulrich Schollwöck, *The density-matrix renormalization group in the age of matrix product states*, Annals of Physics **326** (2011), no. 1, 96–192. January 2011 Special Issue.

- [8] Szilárd Szalay, *Multipartite entanglement measures*, Phys. Rev. A **92** (2015Oct), 042329.
- [9] Szilárd Szalay, Gergely Barcza, Tibor Szilvási, Libor Veis, and Őrs Legeza, *The correlation theory of the chemical bond*, Scientific Reports **7** (2017May), 2237.
- [10] Vlatko Vedral and Martin B. Plenio, *Entanglement measures and purification procedures*, Phys. Rev. A **57** (1998Mar), 1619–1633.
- [11] Guifré Vidal, *Efficient classical simulation of slightly entangled quantum computations*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003Oct), 147902.