

Egalitarian acyclic orientations Saját eredmények

A dolgozatban irányítatlan gráfok egalitárius aciklikus irányításaival foglalkoztunk, azaz egy $G = (V, E)$ gráf minden élét szeretnénk úgy megirányítani, hogy a befokok minél „egyenletesebbek” legyenek és aciklikus gráfot kapjunk. Például a *dec-min* esetben a célunk egy olyan aciklikus irányítást találni, amelyben a befokok monoton csökkenően rendezett sorozata lexikografikusan minimális. Hasonlóan az *inc-max* esetben a befokok monoton növekvően rendezett sorozatának kell lexikografikusan maximálisnak lennie. Ismert, hogy az aciklikusság megkövetelése nélkül ilyen irányítások hatékonyan kereshetők, és egybeesnek a $\sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ összeget minimalizáló irányításokkal tetszőleges diszkrét szigorúan konvex $\varphi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén. Azonban megmutattuk, hogy az aciklikusság megkövetelésével az előbbi feladatok már különböznek egymástól, sőt különböző φ függvények esetén az optimális irányítások már nem feltétlenül esnek egybe. A dolgozat egyik fő eredményeként beláttuk, hogy a $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ aciklikus irányítási feladat NP-nehéz minden diszkrét szigorúan konvex φ függvény esetén (feltéve, hogy párhuzamos éleket is megengedünk). Azonban arra az általánosabb feladatra, amelyben minden v csúcsra adott egy $\varphi_v : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét szigorúan konvex függvény és a $\sum_{v \in V} \varphi_v(\varrho(v))$ célfüggvényt minimalizáló aciklikus irányítást keresünk adtunk egy $O(2^{|V|} \text{poly}(|V|, |E|))$ futásidejű egzakt algoritmust feltéve, hogy a φ_v függvények polinom időben kiértékelhetők.

Külön foglalkoztunk azzal a speciális esettel, amikor a befokok négyzetösszegét minimalizáló aciklikus irányítást keresünk. Erről a feladatról beláttuk, hogy NP-nehéz már egyszerű gráfok esetén is. Vizsgáltunk egy mohó algoritmust a feladatra, amelyről két különböző (nem konstans) approximációs hányadost bizonyítottunk. Azonban a legrosszabb általunk talált végtelen gráfsorozatra az algoritmus $\frac{9}{7}$ -közelítő. Számítógéppel igazoltuk, hogy legfeljebb 12 csúcsú egyszerű gráfokra a végtelen gráfsorozat megfelelő csúcsszámú tagjához tartozó approximációs hányados a legrosszabb.

Nem feltétlenül aciklikus irányítások esetén a *dec-min*, *inc-max* és $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ irányítási feladatok ekvivalensek azzal, hogy az irányítások befok vektorainak $\mathbb{R}^V$ -beli politópjában keresünk egy optimális egész pontot a megfelelő célfüggvényre. Megadtuk egy poliéder leírását, melynek tengelymenti vetületeként megkapjuk a befok vektorok politópját. Erre egy a szakirodalomban fellelhető módszert alkalmazva megoldható $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ (nem feltétlenül aciklikus) irányítási feladat azon általánosítása, melyben minden $v \in V$ csúcsra adott egy $\varphi_v : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét konvex függvény és a $\sum_{v \in V} \varphi_v(\varrho(v))$ célfüggvényt minimalizáló (nem feltétlenül aciklikus) irányítást keresünk. Ugyanezen feladatra adtunk egy másik megoldási módszert a minimális költségű folyam feladatra való visszavezetéssel. Beláttuk, hogy tetszőleges $G = (V, E)$ gráfra az aciklikus irányítások befok vektorai pontosan a befok vektorok politópjának a csúcspontjai. Tehát tetszőleges lineáris $\varphi_v : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények esetén a $\sum_{v \in V} \varphi_v(\varrho(v))$ célfüggvényt minimalizáló aciklikus irányítást is tudunk keresni, lineáris programozási módszerekkel. Erre a feladatra adtunk egy lineáris programozást nem használó $O(|V| \log |V|)$ futásidejű algoritmust.

Ismert, hogy NP-nehéz feladat egy *dec-min* k -korlátos aciklikus irányítást keresni minden $k \geq 5$ páratlan paraméter esetén, illetve a befok korlát nélküli esetben (ahol egy irányítás k -korlátos, ha minden befok legfeljebb k). Erősítve ezt az eredményt beláttuk a *dec-min* és *inc-max* k -korlátos aciklikus irányítási feladatok nehézségét minden $k \geq 3$ paraméter esetén, illetve a (k korlát nélküli) *inc-max* aciklikus irányítási feladat nehézségét is. A $k = 2$ korlátos esetben megmutattuk, hogy a *dec-min* és *inc-max* aciklikus irányítási feladatok egybeesnek, azonban a nehézség nyitott kérdés maradt. A *dec-min* és *inc-max* (aciklikus) irányítási feladatokkal analógan bevezettük az *inc-min* és *dec-max* (aciklikus) irányítási feladatokat, és beláttuk, hogy ezen feladatok mind aciklikus, mind tetszőleges irányítások esetén NP-nehezek.

Ismert, hogy polinom időben kereshető egy olyan irányítás, amely minimalizálja a maximális befokot, mind aciklikus, mind tetszőleges irányításokra, azonban a maximális súlyozott befok minimalizálása már NP-nehéz feladat nem feltétlenül aciklikus irányítások esetén. Ezzel szemben megmutattuk, hogy polinom időben kereshető egy a maximális súlyozott befokot minimalizáló aciklikus irányítás. Tehát az eddigi feladatokkal ellentétben itt épp az aciklikussági feltétel miatt válik megoldhatóvá a feladat.

Definiáltuk a $\max \sum_{v \in V} \varphi(v) \delta(v)$ aciklikus irányítási feladatot, amelyben az irányítás „egyenletessége” egyszerre függ a csúcspontok be- és kifokától, szemben az eddigi feladatokkal. Beláttuk, hogy a $\max \sum_{v \in V} \varphi(v) \delta(v)$ aciklikus irányítási feladat NP-nehéz, már legfeljebb 4 fokú gráfok esetén is, azonban legfeljebb 3 fokú gráfok esetén polinom időben megoldható. Továbbá megmutattuk, hogy egy véletlen csúcssorrend szerint az éleket balról jobbra irányítva egy várhatóan 3-közelítő megoldást kapunk mind egyszerű, mind multigráfok esetén. Az algoritmust feltételes várhatóértékek felhasználásával de-randomizáltuk.