

Egalitarian acyclic orientations Magyar nyelvű összefoglalás

A dolgozatban irányítatlan gráfok egalitárius aciklikus irányításaival foglalkoztunk, azaz egy gráf minden élét szeretnénk úgy megirányítani, hogy a befokok minél „egyenletesebbek” legyenek és aciklikus gráfot kapjunk. A dolgozatban a következő feladatokkal foglalkoztunk:

Feladat (dec-min aciklikus irányítás). *Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Keressünk egy aciklikus irányítást, amelyre a befokok monoton csökkenően rendezett sorozata lexicografikusan minimális.*

Feladat (inc-max aciklikus irányítás). *Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Keressünk egy aciklikus irányítást, amelyre a befokok monoton növekvően rendezett sorozata lexicografikusan maximális.*

Feladat ($\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ aciklikus irányítás). *Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és egy $\varphi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét szigorúan konvex függvény (azaz $\varphi(z+2) + \varphi(z) > 2\varphi(z+1)$ teljesül minden $z \in \mathbb{Z}_+$ esetén). Keressünk egy aciklikus irányítást, amelyre $\sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ minimális, ahol $\varrho(v)$ jelöli a v csúcs befokát.*

Ezeket a feladatokat az aciklikusság megkövetelése nélkül korábban is vizsgálták. Frank és Murota igazolta, hogy a dec-min, inc-max és $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ (nem feltétlenül aciklikus) irányítási feladatokra az optimális irányítások egybeesnek (tetszőleges φ szigorúan konvex függvény esetén) [5], valamint Borradaile és társai korábbi munkájából következik, hogy polinom időben kereshető egy optimális irányítás [3].

Bevezettünk egy további aciklikus irányítási feladatot, melyben az irányítás egyenletessége egyszerre függ a csúcsok be- és kifokától szemben az előbbi feladatokkal, amelyek a befok vektorra összpontosítanak. Hasonló aciklikus irányítási feladatokkal foglalkoznak a [2, 6] cikkekben.

Feladat ($\max \sum_{v \in V} \varrho(v)\delta(v)$ aciklikus irányítás). *Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Keressünk egy aciklikus irányítást, amelyre $\sum_{v \in V} \varrho(v)\delta(v)$ maximális, ahol $\varrho(v)$ és $\delta(v)$ jelöli a v csúcs be- és kifokát.*

Fontos megjegyezni, hogy az előbbi aciklikus irányítási feladatok ekvivalensen megfogalmazhatóak csúcssorbarendezési feladatként. Aciklikus irányítás helyett csúcssorrendet keresünk és a feladatok definíciójában a befokokat *bal-fokokra* és a kifokokat *jobb-fokokra* cseréljük, ahol a bal- illetve jobb-fokok az egyes csúcsokból balra, illetve jobbra induló élek számát jelölik. Könnyen látható, hogy egy csúcssorrend akkor és csak akkor optimális a kapott sorbarendezési feladatra, ha az éleket a sorrend szerint balról jobbra irányítva kapott irányítás optimális az eredeti aciklikus irányítási feladatra. A dolgozatban gyakran a feladatok csúcssorbarendezési verzióival dolgoztunk. A következő két bekezdésben először mutatunk egy gyakorlati alkalmazást az aciklikus irányítási feladatokra, majd egy matematikai motivációt.

Routing protokoll Routing protokolloknál adott egy hálózat kapacitásokkal, valamint csomagok kezdő és célpontokkal. Célunk a csomagok útjainak meghatározása. Egy általános lépésben a hálózat minden csúcsa továbbítja az aktuálisan nála lévő csomagot a csomag útjának következő állomására, ha az nem telített. Azonban, ha néhány csomag egy irányított kör mentén várakozik, melynek minden csúcsa telített, akkor a folyamat elakadhat. Ismert, hogy az úgynevezett *Up-down routing protokollt* alkalmazva az elakadás elkerülhető [10, 11, 13]: Vegyük a hálózatnak egy aciklikus irányítását és tiltsuk meg a csomagok útjaiban az azonos csúcsba belépő élpárok által alkotott 2-hosszú részutak használatát. A protokollt egy dec-min aciklikus irányítással alkalmazva minimalizálni tudjuk az egy csúcsra eső maximális tiltott részutak számát, egy $\min \sum_{v \in V} \varrho^2(v)$ irányítással pedig az összes tiltott részút számát minimalizálhatjuk.

Irányítások befok vektorainak politópja $\mathbb{R}^V$ -ben Nem feltétlenül aciklikus irányítások esetén a dec-min, inc-max és $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ irányítási feladatok ekvivalensek azzal, hogy az irányítások befok vektorainak politópjában keressünk egy optimális egész pontot a megfelelő célfüggvényre.

Beláttuk, hogy tetszőleges $G = (V, E)$ gráfra az aciklikus irányítások befok vektorai pontosan a befok vektorok politópjának a csúcsai, tehát az aciklikussági feltétel geometriailag azt jelenti, hogy az adott célfüggvényt a befokok politópjának csúcsain szeretnénk minimalizálni, a politóp összes egész pontja helyett. Ez egy matematikai motivációt ad a feladatok aciklikus irányításokra való megszorítására. Fontos megjegyezni, hogy az általunk vizsgált dec-min, inc-max és $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ feladatok esetén a célfüggvények nem lineárisak, így gyakran a politóp relatív belsejében helyezkednek el az optimális megoldások, szemben a lineáris programozási feladatokkal, melyeknél tetszőleges célfüggvény esetén létezik optimális csúcsa a politópnak.

Megadtuk egy poliéder leírását, melynek tengelymenti vetületeként megkapjuk a befok vektorok politópját. A leírásból következik, hogy tetszőleges $\text{lineáris } \varphi_v : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények esetén polinom időben tudunk a $\sum_{v \in V} \varphi_v(\varrho(v))$ célfüggvényt minimalizáló aciklikus irányítást keresni lineáris programozási módszerekkel. Erre a feladatra adtunk egy lineáris programozást nem használó módszert, amellyel $O(|V| \log |V|)$ időben kereshetünk egy optimális megoldást. Továbbá az általunk leírt poliédert felhasználva alkalmazható Meyer [9] cikkben mutatott módszere a $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ (nem feltétlenül aciklikus) irányítási feladat azon általánosítása, melyben minden $v \in V$ csúcsra adott egy $\varphi_v : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét konvex függvény és a $\sum_{v \in V} \varphi_v(\varrho(v))$ célfüggvényt minimalizáló (nem feltétlenül aciklikus) irányítást keresünk. Ugyanezen feladatra adtunk egy másik megoldási módszert a minimális költségű folyam feladatra való visszavezetéssel. Azonban alábbi eredményeinkből következik, hogy a Meyer által vizsgált feladat NP-nehézzé válik, ha a poliéder csúcsain szeretnénk optimalizálni az egész pontjai helyett.

Maximális súlyozott befok minimalizálása Ahhoz, hogy egy dec-min irányítást keressünk, az első lépés, hogy minimalizáljuk a maximális befokot. Ismert, hogy polinom időben kereshető egy olyan irányítás amely minimalizálja a maximális befokot, mind aciklikus [7, 8], mind tetszőleges irányítások esetén [1, 4, 12]. Aciklikus irányítások esetén az algoritmust általánosítottuk arra a feladatra amikor adott egy $w : E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ élsúlyozás és a maximális súlyozott befokot minimalizáló aciklikus irányítást keresünk. A módosított algoritmus az aciklikus irányítás topologikus sorrendjét keresi meg úgy, hogy minden lépésben (amíg van csúcsa a gráfnak) egy minimális súlyozott fokú csúcsot rögzít az utolsó szabad helyre, és törli a csúcsot a gráfból. Nem feltétlenül aciklikus irányítások esetén azonban az [1] cikkben belátták, hogy a maximális súlyozott befok minimalizálása már NP-nehéz feladat. Tehát a többi általunk vizsgált feladattal szemben itt nem az aciklikussági feltétel teszi NP-nehézzé a feladatot, hanem annak elhagyása.

Dec-min, inc-max aciklikus irányítások és kapcsolódó feladatok A bevezetésben már említettük, hogy az aciklikusság megkövetelése nélkül a dec-min, inc-max és $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ irányítások egybeesnek [5]. Azonban számítógéppel találtunk egy 9 csúcsú példát, melyre az optimális dec-min és inc-max aciklikus irányítások különböznek egymástól — ez a legkisebb ilyen egyszerű gráf.

Részletesen foglalkozunk a dec-min és inc-max aciklikus irányítási feladatok nehézségével. Egy irányítást k -korlátosnak nevezünk, ha minden csúcs befoka legfeljebb k . A feladatok nehézségét vizsgáltuk k -korlátos aciklikus irányítások esetén, illetve befok korlát nélkül is: Borradaile és társai belátták, hogy NP-nehéz feladat egy dec-min k -korlátos aciklikus irányítást keresni minden $k \geq 5$ páratlan paraméter esetén, illetve a befok korlát nélküli esetben [3]. Erősítve ezt az eredményt beláttuk a dec-min és inc-max k -korlátos feladatok nehézségét minden $k \geq 3$ paraméter esetén. Mindkét nehézségi bizonyításban a minimális lefoglaló csúcshalmaz feladatot vezettük vissza 3-reguláris gráfok esetén. A $k = 2$ korlátos esetben beláttuk, hogy a dec-min és inc-max aciklikus irányítási feladatokra az optimális irányítások egybeesnek, azonban a feladatok nehézsége nyitott kérdés maradt. Továbbá bizonyítottuk a (k korlát nélküli) inc-max aciklikus irányítási feladat nehézségét egy speciális MAX-SAT feladat visszavezetésével. A visszavezetésből egyben következik, hogy nem tudjuk egy konstans küszöbnél jobban közelíteni egy inc-max aciklikus irányításban a rendezett befok vektor maximális hosszú szigorúan növekvő kezdőszelvényének hosszát.

A dec-min és inc-max (aciklikus) irányítási feladatokhoz hasonlóan bevezettük az inc-min és dec-max (aciklikus) irányítási feladatokat, melyekben a célunk a növekvően rendezett befokokat lexicografikusan minimalizálni, illetve a csökkenően rendezett befokokat lexicografikusan maximalizálni. Beláttuk a maximális méretű független csúcshalmaz feladat visszavezetésével 3-reguláris gráfok esetén, hogy ezen feladatok mind aciklikus, mind tetszőleges irányítások esetén NP-nehezek (3-reguláris gráfok esetén is).

$\sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ minimalizáló aciklikus irányítások A $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ aciklikus irányítási feladat általánosítja a dec-min és inc-max aciklikus irányítási feladatokat, mivel a $\varphi(z) = |V|^z$ illetve $\varphi(z) = |V|^{-z}$ függvények választása esetén visszakapjuk az utóbbi feladatokat. Tehát abból, hogy a dec-min és inc-max aciklikus irányítási feladatok különböznek egymástól következik, hogy különböző φ szigorúan konvex függvények esetén különböző aciklikus irányítások lehetnek optimálisak.

Természetes kérdés tehát különböző φ szigorúan konvex függvények esetén a $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ aciklikus irányítási feladat nehézsége. A dolgozat egyik fő eredményeként megmutattuk, hogy *tetszőleges* φ szigorúan konvex függvények esetén NP-nehéz az előbbi feladat, amennyiben párhuzamos éleket is megengedünk. A nehézségi bizonyítás során a feladat természetes sorbarendezi verziójával dolgoztunk, amelyet a bevezetés végén definiáltunk. Elsőként azon általánosabb eset nehézségét bizonyítottuk, amikor

a multigráf tartalmazhat hurokéleket is. Fontos megjegyezni, hogy ebben az esetben nem beszélhetünk aciklikus irányításokról, azonban a természetes sorbarendezi verziója a feladatnak továbbra is értelmezhető. A halmazfedés feladatot vezettük vissza egy olyan gráfcsaládot konstruálva, amelyre különböző φ szigorúan konvex függvények esetén egybeesnek az optimális megoldások. A következő lépésben elimináltuk a hurokéleket a gráfból. Azonban azon általánosabb feladról, amelyben minden v csúcsra különböző $\varphi_v : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények adottak és a $\sum_{v \in V} \varphi_v(\varrho(v))$ célfüggvényt szeretnénk minimalizálni beláttuk, hogy polinom időben megoldható, ha a φ_v függvények lineárisak és aciklikus irányítást keresünk; illetve ha szigorúan konvexek de nem feltétlenül aciklikus irányítást keresünk. Ebből következik, hogy a $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ feladatra adott nehézségi eredményben a φ függvény szigorú konvexitása, illetve az irányítás aciklikussága nem elhagyható feltételek.

A $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ aciklikus irányítási feladatra tehát nem várható polinomiális futásidejű algoritmus, azonban adtunk egy $O(2^{|V|} \text{poly}(|V|, |E|))$ futásidejű egzakt dinamikus programot arra az általánosabb $\min \sum_{v \in V} \varphi_v(\varrho(v))$ aciklikus irányítási feladatra, amelyben minden v csúcsra különböző φ_v függvények adottak, feltéve, hogy a φ_v függvények polinom időben kiértékelhetők. Ez lényegesen jobb, mint a természetes $O(|V|! \text{poly}(|V|, |E|))$ lépésszámú algoritmus, amely végigpróbálja az összes topologikus sorrendet.

Külön foglalkoztunk azon speciális esettel, amikor $\varphi(z) = z^2$, azaz a befokok négyzetösszegét minimalizáló aciklikus irányítást keresünk. Erre a speciális esetre motivációt ad a korábban részletezett Up-down routing protokoll. Először beláttuk a feladat nehézségét egyszerű gráfok esetén. Ehhez felhasználtuk az előző bekezdésben említett hurokéles sorbarendezi feladat NP-nehézségét, illetve adtunk egy olyan részgráfot a hurokélek eliminálására, amely nem tartalmaz párhuzamos éleket. Továbbá foglalkoztunk a feladat approximálhatóságával. Vizsgáltuk a maximális befokot minimalizáló aciklikus irányításra vonatkozó mohó algoritmus approximációs hányadosát. Ezen algoritmus minden lépésben (amíg van csúcsa a gráfnak) rögzít egy maximális fokú csúcsot az utolsó szabad helyre és törli a gráfból, majd a sorrend szerint balról jobbra irányítja az éleket. Fontos megjegyezni, hogy az algoritmus különböző aciklikus irányításokat eredményezhet attól függően, hogy melyik minimális befokú csúcsot választjuk. Beláttuk, hogy az algoritmus $\min\{4H_n, \bar{d}_{\min}\}$ -közelítő, ahol H_n az n -edik harmonikus szám és $\bar{d}_{\min}$ jelöli a legnagyobb befokot a kapott aciklikus irányításban. Azonban nyitott kérdés maradt, hogy létezik-e konstans közelítő algoritmus a feladatra. A legrosszabb általunk talált végtelen gráfsorozatra a vizsgált mohó algoritmus legrosszabb futása $\frac{9}{7}$ -közelítő. Számítógépes tesztekkel igazoltuk, hogy legfeljebb 12 csúcsú egyszerű gráfokra a talált végtelen gráfsorozat megfelelő csúcsszámú tagjához tartozó approximációs hányados a legrosszabb.

$\sum_{v \in V} \varrho(v)\delta(v)$ maximalizáló aciklikus irányítások Defináltuk a $\max \sum_{v \in V} \varrho(v)\delta(v)$ aciklikus irányítási feladatot, amely lényegesen más megközelítésből definiálja az irányítások egyenletességét: az a célunk, hogy az egyes csúcsokra körülbelül ugyanannyi legyen a befelé és kifelé irányított élek száma. Tehát az irányítás egyenletessége egyszerre függ a csúcsok be- és kifokától, szemben a dec-min, inc-max és $\min \sum_{v \in V} \varphi(\varrho(v))$ aciklikus irányítási feladatokkal.

A [2, 6] cikkekben foglalkoztak egy hasonló feladattal, melyben a $\max |\varrho(v) - \delta(v)|$ értéket minimalizáló aciklikus irányítást kerestek. Egy irányítást *teljesen kiegyensúlyozottnak* neveznek, ha minden csúcsra $|\varrho(v) - \delta(v)| \leq 1$ teljesül. Könnyen látható, hogy az aciklikusság megkövetelése nélkül a teljesen kiegyensúlyozott irányítások éppen az Euler és majdnem Euler irányítások, tehát minden gráfnak létezik teljesen kiegyensúlyozott (nem feltétlenül aciklikus) irányítása. Azonban a [6] cikkben bebizonyították, hogy NP-teljes feladat eldönteni, hogy egy gráfnak létezik-e teljesen kiegyensúlyozott aciklikus irányítása, akkor a $\max \sum_{v \in V} \varrho(v)\delta(v)$ aciklikus irányítási feladatra is pontosan ezen irányítások optimálisak, tehát a feladat NP-nehéz már legfeljebb 4 fokú gráfok esetén is. Azonban legfeljebb 3-fokú gráfokra a [2] cikkben adtak egy polinomiális algoritmust teljesen kiegyensúlyozott aciklikus irányítás keresésére, amelyet általánosítottunk az általunk vizsgált $\max \sum_{v \in V} \varrho(v)\delta(v)$ aciklikus irányítási feladatra (legfeljebb 3 fokú gráfok esetén).

Továbbá beláttuk, hogy egy véletlen csúcssorrend szerint az éleket balról jobbra irányítva egy várhatóan 3-közelítő megoldást kapunk a feladatra mind egyszerű gráfok, mind multigráfok esetén. Az algoritmust feltételes várhatóértékek felhasználásával de-randomizáltuk, melyek kiszámítására egyszerű gráfok esetén egy zárt képletet adtunk, multigráfok esetén pedig egy polinomiális futásidejű dinamikus programot.

Hivatkozások

- [1] Y. Asahiro, E. Miyano, H. Ono, and K. Zenmyo. Graph orientation algorithms to minimize the maximum outdegree. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 18(02):197–215, 2007.
- [2] T. Biedl, T. Chan, Y. Ganjali, M. T. Hajiaghayi, and D. R. Wood. Balanced vertex-orderings of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 148(1):27–48, 2005.
- [3] G. Borradaile, J. Iglesias, T. Migler, A. Ochoa, G. Wilfong, and L. Zhang. Egalitarian graph orientations. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 21(4):687–708, 2017.
- [4] H. de Fraysseix and P. O. de Mendez. Regular orientations, arboricity, and augmentation. In *Graph Drawing*, pages 111–118. Springer, 1995.
- [5] A. Frank and K. Murota. Decreasing minimization on M-convex sets: background and structures. *Mathematical Programming*, 195(1-2):977–1025, 2022.
- [6] J. Kára, J. Kratochvíl, and D. R. Wood. On the complexity of the balanced vertex ordering problem. In *International Computing and Combinatorics Conference*, pages 849–858. Springer, 2005.
- [7] D. R. Lick and A. T. White. k-degenerate graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 22(5):1082–1096, 1970.
- [8] D. W. Matula and L. L. Beck. Smallest-last ordering and clustering and graph coloring algorithms. *Journal of the ACM (JACM)*, 30(3):417–427, 1983.
- [9] R. R. Meyer. A class of nonlinear integer programs solvable by a single linear program. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 15(6):935–946, 1977.
- [10] J. C. Sancho, A. Robles, and J. Duato. A new methodology to compute deadlock-free routing tables for irregular networks. In *International Workshop on Communication, Architecture, and Applications for Network-Based Parallel Computing*, pages 45–60. Springer, 2000.
- [11] M. D. Schroeder, A. D. Birrell, M. Burrows, H. Murray, R. M. Needham, T. L. Rodeheffer, E. H. Satterthwaite, and C. P. Thacker. Autonet: A high-speed, self-configuring local area network using point-to-point links. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 9(8):1318–1335, 1991.
- [12] V. Venkateswaran. Minimizing maximum indegree. *Discrete Applied Mathematics*, 143(1-3):374–378, 2004.
- [13] V. W. Wittorff. Implementation of constraints to ensure deadlock avoidance in networks, May 12 2009. US Patent 7,532,584.