

TDK Dolgozat

Fenyves Szabolcs

2024

Budapesti Corvinus Egyetem

A fizetős kasszák hatásának vizsgálata sorbanállási modellek segítségével

The analysis of the effect of extra fee checkouts with queuing models

Készítette: Fenyves Szabolcs

Gazdálkodási és menedzsment szak

2024

Harmadik évfolyam

Témavezető: Mágó Mánuel László

Kivonat

Dolgozatomban azt vizsgálom, hogy a boltokban az extra (feláras) kasszák jelenléte hogyan befolyásolja az emberek sorbanállási szokásait különböző helyzetekben. Ehhez a standard operációkutatásban használt sorbanállási modelleket kiegészítve készítek egy matematikai és közgazdasági modellt azért, hogy illeszkedjen az extra kasszához szükséges modell építéséhez. A modell segítségével arra a kérdésre keresem a választ, miszerint megéri-e ilyen kasszákat nyitni az egyes boltokban, illetve, hogy hogyan értelmezhető és kvantifikálható a megtakarított idő és a fizetett felár kapcsolata. A matematikai modellből először analitikus módszerrel felírom az egyes rendszerek egyes állapotaihoz tartozó egyenletrendszert, amelyet megoldok az állapotvalószínűségekre. Modellem matematikai zárásaként a szakirodalomban széles körben ismert és alkalmazott M/M/2 modellt írom fel és oldom meg a hozzá tartozó egyenletrendszert. A modell közgazdasági részeként a vásárlókhöz rendelek egy kétváltozós hasznossági függvényt, amely a rendszerben eltöltött időtől és a fogyasztói kosár árától függ, illetve az árhoz tartozik egy türelmetlenségi paraméter is. Az M/M/2 matematikai rendszerre alapozva egyedi, fogyasztó várakozástól függő rendszereket (például nullát vár, egyet vár) alkotok és írom fel a hozzájuk tartozó egyenletrendszert megoldással együtt. A boltokban két kassza működik, az egyik az „olcsó” kassza, amely a hagyományos felár nélküli, míg a másik a „drága” kassza, tehát amelyet csak a felár megfizetése esetén használhatunk. Emellett a vállalatok (boltok) szempontjából is megvizsgálom a kérdést, tehát felírom a vállalatok profitfüggvényét és összehasonlítom őket ordinális szempontból az egyes rendszereken belül és kívül egyaránt.

Tartalomjegyzék

I. Bevezetés	1
II. Módszertan	4
II.1. Sorbanállási elmélettel kapcsolatos alapfogalmak	5
II.2 A közgazdasági modell bevezetése és felépítése	15
III. Eredmények	35
III.1. A modell matematikai vizsgálata	35
III.2. A modell közgazdaságtani értelmezése	37
IV. Összefoglalás	51
Hivatkozások.....	54

Ábrajegyzék

1. ábra: M/M/2 modell, forrás: saját szerkesztés.....	13
2. ábra: nullát vár, forrás: saját szerkesztés	19
3. ábra: egyet vár, forrás: saját szerkesztés	23
4. ábra: kettőt vár, forrás: saját szerkesztés	28
5. ábra: hármát vár, forrás: saját szerkesztés	32

I. Bevezetés

Ennek a fejezetnek a célja, hogy bemutassam dolgozatom központi témáját, az egyes boltokban történő sorbanállás modellezését. Ezután megemlítem a kutatásom motivációjaként szolgáló ötleteket, jelenségeket, illetve szakirodalmakat. Végül pedig röviden összegzem dolgozatom eredményét.

Elsőként kezdjük tehát a sorbanállási modellek hátterével és az ebből származó motivációval. A való életben számos helyzetben kell sorokban állnunk és várakoznunk, amely rengeteg időnket felemésztetheti. Ebben az esetben azonban elgondolkodtató, hogy mennyit lennének hajlandóak pluszban fizetni azért, hogy a hosszú sorok elkerülésével időt spóroljunk meg. A két tényező közötti trade-off számos valós példával leírható. Ilyenek például az extra szolgáltatások az egyes reptereken, ahol elérhető például a „*Priority Boarding*” opció is, amely annyit takar, hogy egy bizonyos felárért cserébe külön sorban állhatunk az egyes kapunál a repülőre felszállás előtt, amelyet ráadásul előbb nyitnak meg, mint a normál beszállásra vonatkozó sort. Ezenkívül bármilyen olyan extra szolgáltatást ide sorolhatunk, ahol felár esetében valamilyen plusz előnyhöz vagy lehetőséghez jutunk. A reptéri példa kapcsán ilyen többek között az egyes repülőjáratokon a foglalható ülőhely, amely biztosítja, hogy az adott helyen ülhessünk a gépen. Illetve erre példa lehet az autópálya matrica is, amely segítségével gyorsabb, egyenletesebb és (általában) kisebb forgalmú utakat is igénybe vehetünk. Azonban általánosságban egy alapszabály közös ezekben a szolgáltatásokban: egy bizonyos mértékű felár ellenében tulajdonképpen „növelhetjük a hasznosságunkat”. Ez megnyilvánulhat abban, hogy időt takarítunk meg vagy kevésbé leszünk idegesek az adott helyzetben vagy akár abban, hogy a komfort érzetünket növeljük. Ezen motiváció mentén próbáltam modellezni a sorbanállási rendszereket középpontban a szupermarketek/élelmiszer boltok esetével. Az egyik fő kérdés a sorbanállás matematikai modellezése volt, amelynek alapját az operációkutatásban használt sorbanállási elmélet adta. Emellett a közgazdaságtani interpretáció is fontos volt számomra. hiszen a boltban vásárló ügyfelek fogyasztók, míg maga a bolt a vállalat és mindkét gazdasági szereplő a saját célfüggvényét szeretné maximalizálni.

Ebben a bekezdésben meg szeretném említeni a dolgozatom témájához kapcsolódó szakirodalmakat. Módszertanom nagyban támaszkodik Winston (2003) könyvre, amely segítségével be tudtam vezetni, illetve modellezni a sorbanállási modellek alapját képző

beérkezési, illetve kiszolgálási folyamatokat. Emellett a könyv segítségével a közgazdaságtani modellek „elődjét”, tehát az M/M/2 modellt és az ahhoz tartozó egyenletrendszert is fel tudtam írni és értelmezni. Ezenkívül Boah és szerzőtársai (2020) cikke is motivációként szolgált, amelyben a szerzők egy úgynevezett „*Multi Server Queuing Model*”, tehát egy több kiszolgálós sorbanállási modellt építenek fel, ahol a beérkezések Poisson eloszlást, míg a kiszolgálások exponenciális eloszlást követnek. Emellett további kiegészítést biztosított dolgozatomhoz Daniel (1995) cikke, amelyben a szerző a nagy csomóponttal rendelkező reptereken vizsgálja meg a torlódási árképzést és kapacitást sztochasztikus sorok segítségével. Ezenkívül Fomundam és Herrmann (2007) a sorbanállási modellek egy gyakori alkalmazását mutatja be az egészségügyi szférában, ahol gyakran találkozhatunk prioritásos modellekkel. A szerzők a felépített modell alapján kiszámolnak több mutatót, többek között a várakozási időt is. Ezenfelül Igwe és szerzőtársai (2014) dolgozatomhoz hasonlóan a szupermarketek esetében alkalmazza a sorbanállási modelleket egy esettanulmányon keresztül, ahol az M/M/1 modell is szóba kerül. Szintén szupermarketekkel foglalkozik Luczak és Mcdiarmid (2006) cikke is, amelyben a valószínűségszámítás eszközeivel vizsgálják a sorok maximális hosszát. Végül megemlíteném Priyangika és Cooray (2015) szerzeményét, amelyben szintén szupermarketek esetében próbálják megbecsülni a várakozási időt, illetve a sorok hosszát.

A szakirodalmak említése után szeretném újra összefoglalni dolgozatom eredményét. A matematikai, illetve közgazdaságtani módszerek és számítások alkalmazása után kaptunk tehát egy összetett modellt. A modell matematikai szemszögből azért kiemelkedő, mert az egyes rendszerek állapotaihoz tartozó egyenletrendszerek tetszőleges számra, illetve tetszőleges türelmi szintre felírhatók. Ennek segítségével a fogyasztók viselkedésének egy egészen széles spektrumát le tudjuk fedni. Továbbá matematikailag azért előnyös a modellünk, ugyanis a kapott egyenletrendszer csupán lineáris egyenletekből áll, illetve pont annyi lineárisan független egyenletünk van, mint amennyi változónk. Ennek eredményeképpen egyértelmű megoldásokat fogunk kapni az egyes állapotvalószínűségekre. Mindemellett közgazdaságtani szempontból is jelentős a kapott eredményünk, hiszen a mutatóink többségét meg tudtuk határozni pusztán néhány paraméter függvényében. Ez azért fontos, mert ezek a paraméterek változtathatók, amelyek segítségével eltérő fogyasztói, illetve vállalati döntési helyzeteket szimulálhatunk és a kapott számok alapján kiértékelhetjük többek között az adott paraméter fontosságát vagy hatását a modellben. Például a vállalat egyes rendszerekben kiszámolt profit értékeit összevethetjük egymással, ahogy azt én is megtettem. Emellett változtathatunk a türelmetlenségi paraméter, illetve a felár mellett a legalapvetőbb paramétereinken, nevezetesen

a beérkezési és kiszolgálási gyakoriságok értékein is. Ezzel megvizsgálhatjuk mind a szakirodalomban standard esetet, amikor a forgalmi gyakorisági együttható értéke egynél kisebb, illetve a nem standard esetet is, amikor ezen mutató egynél nagyobb.

Végül dolgozatomban felépítéséről írok néhány sort. Dolgozatomban négy fejezetből áll. A második fejezet taglalja a módszertant, amelyben megalapozom a modellek matematikai, illetve közgazdaságtani alapját, tehát felírom és megoldom az egyes modellekhez tartozó egyenletrendszert. A harmadik fejezetben a kapott modellt, mint eredmény vizsgálom meg először matematikai szempontból, majd kiértékelem közgazdaságtani aspektusból is. Végül a negyedik fejezetben újra kitérek a használt módszertan fontosságára, illetve az ebből eredő eredményekre is. Továbbá a negyedik fejezet zárásaként néhány, a dolgozattal kapcsolatos bővítési lehetőséget említek meg, amelyeket érdemes lehet egy következő kutatásban megvizsgálni.

II. Módszertan

Ennek a fejezetnek a célja, hogy ismertessem a dolgozatom alapjául szolgáló módszertant, illetve elméleti háttérét. A fejezet során először a sorbanállási modellt, mint operációkutatási modellt fogom bemutatni matematikai szempontból. A modellben említésre kerülnek majd olyan alapfogalmak, mint beérkezési- és kiszolgálási folyamat, illetve beérkezési- és kiszolgálási gyakoriság. Emellett az exponenciális eloszlást is kiemelem, amely ilyen modellek esetén egy kiváló kiindulási pont, hiszen számos előnyös tulajdonsággal rendelkezik, amelyek megkönnyítik egyrészt a modell felépítését és működését, illetve közérthetőségét és alkalmazhatóságát gyakorlati példákban. Az eloszlások kapcsán megemlítem az exponenciális eloszlás örökifjú/memória nélküli tulajdonságát és ennek fontosságát, illetve az Erlang eloszlást, mint az exponenciális eloszlás egyik gyakran használt alternatíváját. Továbbá a sorbanállási modellek kapcsán felsorolok néhány standard modellt, amely a későbbi modellek alapjaként szolgált kutatásom során. A szakirodalomban gyakran alkalmazott Kendall-Lee féle jelölésrendszer alapján ilyen modell például az $M/M/2/GD$ modell is, amely egyfajta „benchmark” modellként, tehát viszonyítási alapként szolgál dolgozatomban egyaránt. A modellek kapcsán megemlítem a ρ paraméter, tehát a forgalmi gyakoriság/intenzitás értékének fontosságát is. Ez a paraméter egy hányados, amely számlálójában a beérkezési gyakoriság, tehát a λ áll, míg a nevezőben a μ , tehát a kiszolgálási gyakoriság található. A modellben szerepet kap a prioritás is, azonban a megszokott értelmezéstől eltérő módon, amelyet a későbbiekben részletezek. Ezután eltérő esetek alapján különböző modelleket írok fel és ábrázolom rajtuk a beérkezéseket, illetve a kiszolgálásokat is. A felrajzolt modellek alapján felírom az úgynevezett áramlásegyensúlyi egyenleteket, amelyekből az egyes π_j értékeket, tehát az egyes állapotvalószínűségeket meghatározom a beérkezési és kiszolgálási gyakoriságok, tehát λ és μ függvényében, amely a modell matematikai részének végződését jelenti. Tehát a matematikai rész egy egyenletrendszer megoldásával zárul és ezt követi a közgazdaságtani rész. A közgazdaságtani interpretáció bizonyos esetekben megváltoztatja a standard sorbanállási modell módszertanát és megoldását is. Például lesz olyan eset, ahol az adott állapotba ugyan matematikai szempontból lehetséges eljutni, azonban a közgazdasági része a modellnek ezt nem teszi lehetővé. A modell megváltoztatásán kívül a kapott eredményeket felhasználok és próbálok modellezni mind a fogyasztók (vásárlók), mind a vállalat (bolt) szempontjából. A fogyasztók esetében egy kétváltozós hasznossági függvényt rendelek hozzájuk, amely az idő és az ár függvénye, illetve tartalmaz egy paramétert is, amely az idő és az extra költség közötti átváltást reprezentálja. Míg a vállalat esetében felírom a fogyasztói viselkedés alapján a vállalat

profitfüggvényét, amiből meghatározom bizonyos paraméterek mellett a bolt bevételeit. Miután felírtam mindkét gazdasági szereplő célfüggvényét, összevetem a kapott eredményeket a felírt modellekkel és megvizsgálom, hogy a szereplőknek melyik modell a kedvező, illetve látható lesz az egyes esetekben a várakozási idő és az extra költség közötti „*trade off*”, azaz átváltás. Ez alapján végül le tudom vonni a következtetéseket a modellben és modellezni a fogyasztók viselkedését, ha az adott rendszerbe lépnek be, illetve nagyságrendileg ki tudom számolni a vállalat profitját is az adott rendszer fennállása mellett.

II.1. Sorbanállási elmélettel kapcsolatos alapfogalmak

A való életben számos helyen kell sorban állnunk, azonban talán a leggyakoribb eset a boltokban való sorbanállás. Dolgozatomban a fő modell is egy olyan sorbanállási modell, amelyet egész jól interpretálhatunk egy bolti példával. Azonban előtte tekintsük át a sorbanállási elmélet alapjait. Elsőként, egy sorbanállási rendszer jellemzéséhez két dolog szükséges: egy bemeneti és egy kimeneti folyamat (Winston, 2003). Bemeneti folyamat például lehet az, amikor egy autószerelő műhelybe bevisznek egy autót javításra. Ennek kapcsán pedig a kimeneti folyamat lehet az, amikor megjavítják a behozott autót. Vizsgáljuk meg először a bemeneti folyamatot alaposabban. A bemeneti folyamatot gyakran hívjuk beérkezési folyamatnak is, a beérkezőket pedig ügyfeleknek. A beérkezési folyamatnál fontos megadni, hogy csak egyszeri vagy akár többszöri beérkezést is feltételezünk. Ha érkezik egy ügyfél, akinek nem sikerül belépnie a rendszerbe, akkor őt elveszett ügyfélnek nevezzük. Gyakori feltételezés az, hogy a beérkezési folyamat független a rendszerben lévő ügyfelek számától. Winston (2003) azonban említ két példát¹ arra az esetre, amikor ez a függetlenség nem feltétlenül teljesül. A beérkezési folyamat kapcsán érdemes tisztázni a két beérkezés között eltelt idő nagyságát. Ha a korábban említett függetlenség fennáll a rendszerben lévő ügyfelek száma és a modell között, akkor a két egymást követő beérkezés között eltelt időt megadhatjuk valamilyen valószínűség eloszlással is, amellyel a rendszert tudjuk jellemezni (Winston, 2003). Most pedig térjünk rá a rendszer másik fontos jellemzőjére, a kimeneti vagy más néven kiszolgálási folyamatokra. Ehhez a folyamathoz is gyakran hozzárendelünk egy valószínűség eloszlást, pontosabban a kiszolgálási idő eloszlását. A kiszolgálási idő kapcsán sokszor élünk azzal a feltételezéssel, hogy a kiszolgálási időt nem befolyásolja a rendszerben lévő ügyfelek száma. Tehát a bolti példánál maradva ezen feltételezés szerint a kasszás nem dolgozik gyorsabban 10 ügyfél esetén ahhoz képest, mintha csak ketten állnának az adott kasszánál. Továbbá a kiszolgálásokat illetően megkülönböztetünk soros és párhuzamos

¹ A konkrét példa megtalálható Winston könyvének 20.1 fejezetében.

kiszolgálóhelyeket. Például vannak olyan autószerelő műhelyek, ahol a „szezonok” előtt – tehát amikor sok ügyfél van – bizonyos alkalmazottak csak gumiabroncsokat szerelnek fel és le. Ez a párhuzamos kiszolgálás, mikor több kiszolgálóhely, azaz alkalmazott ugyanazt a típusú kiszolgálást végzi. Ezzel szemben a soros kiszolgálásnál úgynevezett „állomások” vagy „fázisok” vannak, amelyeken keresztül kell mennie az ügyfélnek, hogy a kiszolgálási folyamat végére érjen. Az autószerelő műhelyes példánál maradva; ha beérkezik egy autó, amit részlegesen vagy akár teljesen fel kell újítani (például egy baleset következményeként), akkor különböző egységekre szakosodott kollégák dolgoznak egymás után az adott autón. Például először egy karosszérialakatos kezd el rajta dolgozni, utána egy másik arra szakosodott kolléga összerakja a motor, majd egy másik kolléga a váltót szereli be és így tovább egészen addig, míg kész nem lesz az autó, azaz amíg a kiszolgálás be nem fejeződik.

A beérkezési és kiszolgálási folyamatok mellett a modell teljes jellemzéséhez meg kell adnunk a rendszer kiszolgálási szabályát és az ügyfelek várólistára kerülési módját (Winston, 2003). A kiszolgálási szabály segítségével meghatározhatjuk az ügyfelek kiszolgálási sorrendjét. Erre számos, a szakirodalomban elterjedt és rendszeresen használt megoldás létezik. Az egyik legismertebb és legegyszerűbb az FCFS (*First come first served*) módszer, amely tulajdonképpen az érkezési sorrendben történő kiszolgálást jelenti. Erre példa bármilyen olyan üzlet, ahová időpontfoglalás nélkül érkezünk. A következő ilyen szabály az LCFS (*Last come first served*), amely az előbbi szabály ellenkezője, tehát azt az ügyfelet szolgálják ki először, aki legutoljára érkezik be a rendszerbe. Például, ha a kiszolgálást megfeleltetjük annak, hogy a liftből kiszállunk, akkor ez egy LCFS szabály (Winston, 2003). Emellett létezik még olyan szabály is, ahol a beérkezőket teljesen véletlenszerű sorrendben szolgálják ki. Ez a SIRO (*Service in random order*) módszer. Erre jó példa lehet egy call center hívásátirányítási protokollja is, de supermarketekben a kasszáknál, illetve számítástechnikában a párhuzamos folyamatok elosztására is használják a processzorok magjai között. A SIRO módszer egyik jelentős előnye, amiért alkalmazzák az az, hogy a véletlen bevonásával biztosítják hosszú távon az egyenletes munkamegosztást/terhelést, tehát, a supermarketek esetében azt, hogy minden kassza egyenlő munkaterhelést kapjon, a processzorok esetében pedig azt, hogy a magok egyenlő mértékben legyenek hasznosítva/kihasználva. Végül pedig megemlíteném a prioritáson alapuló kiszolgálási szabályt, amelynek lényege, hogy a beérkező ügyfeleket kategóriákba rendezik, majd ezekhez a kategóriákhoz megadnak különböző prioritási szinteket (Winston, 2003). Például a kórházakban találkozhatunk ezzel a szabállyal a sürgősségi ellátás kapcsán,

ahol egy életveszélyes és sürgős eset felülírhat minden eddigi ügyfélre vonatkozó kiszolgálási sorrendet. A kiszolgálási szabály meghatározásán túl meg kell adnunk, hogy milyen módon rendeződnek sorba a beérkező ügyfelek. Például egy szupermarketben lehet több sor is és gyakori dilemma, hogy vajon melyiket válasszuk. Dolgozatomban a modellek abból a feltételezésből indulnak ki, hogy egy sor van, azonban két kassa és a rendszerbe beérkező ügyfélnek (fogyasztó/vásárló) azt kell eldöntenie, hogy melyik kasszához menjen, amely a modell közgazdaságtani tartalmát alapozza meg.

Most pedig vizsgáljuk meg, hogy miként tudjuk modellezni a beérkezési és kiszolgálási folyamatokat. Először vizsgáljuk meg a beérkezési folyamatokat. Ahogy korábban említettem, megengedhetünk egyszeri vagy többszöri beérkezéseket is. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy egy adott időpillanatban csak egyszeri beérkezéseket engedünk meg. Legyen t_i az az időpont, amikor i ügyfél beérkezik a rendszerbe. Ezentúl vezessük be a $T_i = t_{i+1} - t_i$ jelölést (természetesen $i \geq 1$). A T_i segítségével tehát meghatározhatjuk két egymást követő beérkezés között eltelt idő nagyságát, más szóval az i -edik intervallum hosszát (Winston, 2003). Mikor a beérkezéseket szeretnénk modellezni, akkor élhetünk azzal a feltevessel, hogy az egyes T_i értékek független, folytonos eloszlású valószínűségi változók. Legyen ezen változók eloszlása azonos egy A valószínűségi változó eloszlásával. A függetlenség annyit jelent, hogy az egyes beérkezéseket nem befolyásolják a korábbi beérkezések. Például egy bankba a nap során eddig beérkezett öt ügyfél és a függetlenség alapján az ötödik és hatodik ügyfél beérkezése között eltelt idő nem függ attól, hogy mennyi idő telt el például a második és harmadik ügyfél beérkezése között. Emellett a folytonosság is segít a valós példák modellezésében, hiszen gyakran előfordul, hogy a beérkezések között eltelt idő nem diszkrét valószínűségi változó, tehát nem 5 vagy 6 perc, hanem mondjuk 3,78 perc. Tehát van egy A valószínűségi változónk, amely független és folytonos, illetve eloszlása követi az egyes T_i -k eloszlását. Legyen A sűrűségfüggvénye $a(t)$. Tudjuk, hogy kis Δt -re a $P(t \leq A \leq t + \Delta t)$ valószínűség jól közelíthető a $\Delta t \cdot a(t)$ összefüggéssel. Ezen összefüggések, illetve az alapján, hogy negatív beérkezési idők nem léteznek felírhatjuk az alábbi összefüggéseket (Winston, 2003):

$$P(A \leq c) = \int_0^c a(t) dt \quad \text{illetve} \quad P(A > c) = \int_c^\infty a(t) dt.$$

A beérkezések között átlagosan eltelt időt, vagyis az átlagot jelölje $1/\lambda$, aminek a mértékegységét mérjük órában. Az $1/\lambda$ értéke könnyen kiszámolható $a(t)$ ismeretében az alábbi integrállal:

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\infty} t * a(t) dt.$$

Vegyük észre, hogy ez az összefüggés a várható érték elméleti definíciójából adódik, amelyet az alábbi képlettel írhatunk fel:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx .$$

A két képlet között csak annyi a különbség, hogy x helyett t változónk van, illetve a fenti esetben az integrál 0-tól indul, hiszen korábbi tárgyalásunk alapján negatív beérkezési idő nem lehetséges. Természetesen az nem véletlen, hogy a fentebb bevezetett átlagot a várható érték definíciójából kapjuk, hiszen a várható érték torzítatlan becslése az átlag. Ezek alapján a λ -t hívjuk beérkezési gyakoriságnak. Tehát meghatároztuk a beérkezési gyakoriságot, azonban nem állítottunk még semmi konkrétat az A valószínűségi változó és ezen keresztül $a(t)$ pontos eloszlásáról sem. A sorbanállási elméletben gyakran használatos az exponenciális eloszlás, amelyről később láthatjuk majd, hogy teljesíti mind a folytonosságot, mind a függetlenséget. Az exponenciális eloszlásnak van egy paramétere, legyen ez most λ (a beérkezési gyakorisággal megegyezően). Ekkor a sűrűségfüggvény az alábbi összefüggéssel írható fel:

$$a(t) = \lambda * e^{-\lambda * t}.$$

Ha visszahelyettesítünk a fentebb felírt várható értékes képletbe, akkor megkapjuk, hogy az átlagos beérkezési idő $1/\lambda$.

Ezután pedig térjünk rá, hogy miért is jelentős és széleskörűen alkalmazott az ilyen modelleknél az exponenciális eloszlás. Ehhez először használjunk fel egy tételt, amely az alábbi összefüggést állítja: Ha A valószínűségi változó exponenciális eloszlású, akkor tetszőleges nemnegatív t és h értékekre teljesül az alábbi összefüggés² (Winston, 2003):

$$P(A > t + h | A \geq t) = P(A > h)$$

Belátható, hogy más sűrűségfüggvény nem rendelkezik ezzel a bizonyos tulajdonsággal. Ezt a tulajdonságot örökifjú tulajdonságnak hívjuk. Emellett sokszor emlegetik memória nélküli vagy emlékezet nélküli eloszlásnak is. Ez a mi esetünkben a sorbanállási rendszerekre levetítve annyit jelent, hogy ha modellezni szeretnénk a következő beérkezésig eltelt idő eloszlását, akkor nem kell figyelembe vennünk, hogy mikor volt az előző beérkezés. Tehát

² A tétel bizonyítása megtalálható Winston művében is, illetve számos valószínűségszámítási jegyzetben is fellelhető.

bármelyik T_i érték meghatározásához nincs szükségünk a korábbi T_i értékekre. Ez az állítás felel meg a fentebb tárgyalt függetlenségnek, a folytonosság pedig az exponenciális eloszlásból adódik. Egyszóval a korábban tárgyalt két feltételt a beérkezési gyakoriságot illetően kielégíti az exponenciális eloszlás használata. Az exponenciális eloszlás és a Poisson eloszlás kapcsolatát is szokás a sorbanállási modellezés kapcsán³ megvizsgálni, azonban én most ettől eltekintek, hiszen nem ez a dolgozatom fő célja. Emellett, ha az exponenciális eloszlás nem tűnik megfelelőnek a modellezés során⁴, akkor használható Erlang eloszlás is, amelynek két paraméter van: R arányparaméter és k alakparaméter (Winston, 2003).

Most pedig vizsgáljuk meg a kiszolgálási folyamatok modellezését. A beérkezési folyamatokhoz hasonlóan itt is tételezzük fel, hogy a kiszolgálási idők folytonos, független valószínűségi változók, amelyek eloszlása jellemezhető az S valószínűségi változóval. Ekkor legyen $s(t)$ az S változó sűrűségfüggvénye. Ezek alapján a fenti összefüggésekkel analóg módon felírható az alábbi egyenlet (Winston, 2003):

$$\frac{1}{\mu} = \int_0^{\infty} t * s(t) dt.$$

Továbbra is legyen $1/\mu$ mértékegysége órában mérve. Ha $1/\mu$ a kiszolgálással eltöltött órák száma, akkor μ az óránként beérkező ügyfelek számát jelenti. Ez alapján tehát a μ -t kiszolgálási gyakoriságnak nevezzük. Például $\mu = 3$ esetén a kiszolgálóhely átlagosan 3 ügyfelet tudna kiszolgálni óránként, ami egy ügyfélre vonatkoztatva $1/3$ óra. Ezenkívül fontos megválasztanunk, hogy a kiszolgálásokat hogyan modellezzük. Itt is használhatunk valamilyen valószínűség eloszlást a jellemzésre, például hasonlóan a beérkezési folyamatokhoz az exponenciális eloszlást. A korábbiakban tárgyalt örökifjú tulajdonsága miatt a kiszolgálás modellezését is nagyban megkönnyíti az exponenciális eloszlás⁵. Ennek eredményeképp a függetlenség itt is kihasználható, ahogy korábban is tettük. Ez a kiszolgálásokat tekintve annyit jelent, hogy megadhatjuk egy adott ügyfél kiszolgálásáig hátralévő idő eloszlását a kiszolgálás pontos kezdetének ismerete nélkül. Ha exponenciális eloszlást tételezünk fel, akkor a kiszolgálási idők sűrűségfüggvénye az alábbi alakban írható fel:

³ Lásd például Winston (2003) 20.2 alfejezetét.

⁴ Az exponenciális eloszlás helyettesítésével kapcsolatban lásd Winston (2003) 20.12 alfejezetét.

⁵ Az egyszerűség szemléltetésével kapcsolatban lásd Winston (2003) 20.2 alfejezet/4. ábrához tartozó példát.

$$s(t) = \mu * e^{-\mu * t}.$$

A fentebb tárgyalt módszerekkel analóg módon belátható, hogy ennek a várható értéke, tehát egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje $1/\mu$ lesz (Winston, 2003).

Ezen alapismeretek tudatában térjünk át a sorbanállási modellek jelölésrendszerére. A leggyakrabban használt jelölésrendszer a Kendall-Lee jelölésrendszer. A sorbanállási modellek jellemzése 6 tényezőt foglal magában és az alábbi formában írható fel:

$$1/2/3/4/5/6.$$

Az első jellemzővel adhatjuk meg a beérkezési idők eloszlását. Ezekre az alábbi rövidítéseket használhatjuk (Winston, 2003).

M = Független, azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók;

D = Független és determinisztikus változók;

E_k = Független, azonos Erlang eloszlású változók, ahol a k jelöli az Erlang eloszlás alakparaméterét;

GI = Független, azonos eloszlású változók valamelyik általános eloszlásból.

A második tényező a kiszolgálási idők jellemzésére szolgál. Az egyes alternatívák jelölése megegyezik a beérkezési folyamatokéval. Például itt is az M jelöli a független, azonos exponenciális eloszlású változókat.

A harmadik paraméter a párhuzamos kiszolgálóhelyek számát írja le. Tehát például, ha ennek a paraméternek az értéke 2, akkor két kassza végzi párhuzamosan ugyanazt a tevékenységet, azaz ketten szolgálnak ki egyszerre egy boltban.

A negyedik szám a kiszolgálási szabályt írja le. A fentebb tárgyalt szokásos kiszolgálási szabályok (például FCFS, LCFS és SIRO) itt is használhatók, illetve ezenkívül gyakran használatos a GD (*General queue discipline*) szabály is, amely egy általános kiszolgálást tükröz, ahol nincsenek rögzített, egyértelmű szabályok a kiszolgálást illetően. Ilyen eltérésekkel sokszor találkozhatunk a való életben is. Például bizonyos boltokban meg van adva, hogy egy kasszásnak mikor/mennyi ember után kell bezárnia a kasszát. A bezárás természetesen azt jelenti, hogy aki akkor érkezik a kasszához, annak már másikhöz kell állnia. Azonban bizonyos

esetekben a kasszás még megengedi, hogy az adott ember még felpakoljon a szalagra és őt még kiszolgálja, mint utolsó ügyfelet.

Az ötödik jellemző segítségével megadhatjuk a rendszerben tartózkodó ügyfelek maximális számát, ideértve a várakozó és éppen kiszolgálás alatt álló ügyfeleket is.

Az utolsó paraméterrel pedig leírhatjuk az azon alapsokaság nagyságát, amelyben az ügyfelek benne vannak, tehát amelyből beérkezhetnek a rendszerbe. Ha nagyságrendileg eltér a harmadik és a hatodik jellemző értéke, tehát a párhuzamos kiszolgálóhelyek száma és az alapsokaság nagysága, akkor az utóbbi paraméter értékét végtelenként adjuk meg. Továbbá gyakori konvenció az is, hogy az utolsó három jellemzőt a $GD/\infty/\infty$ jelöléssel használjuk és emiatt sokszor el is hagyjuk bizonyos modellek jelölésekor, például $M/M/1$. A jelölésrendszer könnyebb értelmezhetőségének érdekében nézzünk egy példát a jelölésekre. Vegyük az $M/M/2/GD/\infty/\infty$ modellt, amelyre a most tárgyaltak alapján csak $M/M/2$ modellként hivatkozunk. Ez a modell tehát exponenciális eloszlást feltételez mind a beérkezési, mind a kiszolgálási idők esetében, illetve két párhuzamos kiszolgálóhely található a rendszerben. Emellett az általános kiszolgálási szabállyal jellemezhető a modell.

Most pedig a születési-halálozási folyamatokat szeretném bemutatni, amelyek a későbbi modellek egyenleteinek felírását alapozzák meg. Tekintsünk egy sorbanállási rendszert. Egy ilyen rendszert jellemezhetünk egy adott t időpontbeli állapotával, amely a t időpontban a rendszerben jelen lévő ügyfelek számát adja meg (Winston, 2003). Vezessük be a $P_{ij}(t)$ jelölést, amely egy valószínűség lesz. Ez a valószínűség azt az eseményt adja meg, ahol a t időpontban j ügyfél van a rendszerben, ha feltesszük, hogy a 0 időpontban i ügyfél volt a rendszerben. Megállapítható, hogy ez a valószínűség hasonló módon értelmezhető, mind a Markov-láncok⁶ esetében a $P_{ij}(n)$ valószínűség, amely egy n -lépéses átmenetvalószínűség. Ez azt a valószínűséget jellemzi, amikor n lépés után a Markov-lánc a j állapotban lesz, azzal a feltételezéssel, hogy az i állapotból indult. A Markov-láncok esetében ez a valószínűség gyakran közelít egy π_j határértékhez. Ezt a valószínűséget a j állapot stacionárius valószínűségének nevezzük. (Winston, 2003). Emellett egy folyamat akkor stacionárius, ha az átmenetvalószínűségek időben állandóak (Szász, 2018). A későbbi modellekben látni fogjuk majd, hogy az egyes állapotvalószínűségek hosszú távon konvergálnak majd bizonyos értékekhez, tehát lesz egy valószínűség eloszlás, amellyel megadhatjuk ezeket az

⁶ A Markov-láncokat lásd bővebben Winston (2003) 17. fejezetében vagy Szász János: Numerikus Pénzügyek II. 15.2 alfejezetében.

állapotvalószínűségeket. Ezt stacioner valószínűség eloszlásnak nevezzük. Rövid távon azonban az egyes állapotvalószínűségeket nagyban meghatározza, hogy hol voltunk előtte (Száz, 2018). Ez a mi esetünkben annyit jelent, hogy alacsony t értékek esetén (például $t=3$ vagy $t=5$ időpontokban) a $P_{ij}(t)$ valószínűség értéke akár nagyon eltérő értékeket is felvehet. Például, ha $i=30$, azaz 30 ügyfél volt kezdetben (0 időpontban) a rendszerben és $j=2$, tehát 2 ügyfél van a rendszerben, akkor ez kis t értékek esetén szignifikánsan eltérő lesz attól az esettől, amikor változatlan j érték mellett az i értékét például 3-ra állítanám be. Mindazonáltal hosszú távon (tehát magas t értékekre) a két valószínűség, tehát a $P_{30,1}(t)$ és a $P_{3,1}(t)$ egészen közel áll a π_j határértékhez. Ezen fogalmak ismeretében tehát megismerkedhetünk a születési-halálozási folyamatok definíciójával. Ezek olyan folytonos idejű sztochasztikus folyamatok, amelyek esetén az adott rendszer tetszőleges időben vett j állapota nemnegatív egész szám (Winston, 2003). Más megközelítésből, a születési-kihalási folyamatok olyan folytonos Markov-láncok, ahol az A átmenet-intenzitások mátrix tridiagonális (Száz, 2018). Továbbá, ha a szokásos jelöléssel élünk és egy t időpontban a rendszer j állapotban van, akkor néhány szabályt/törvényszerűséget állapíthatunk meg a születési-halálozási folyamatokkal kapcsolatban⁷ (például: születési gyakoriság).

Most, hogy megismertük alaposan a születési-halálozási folyamatokat, meghatározhatjuk a hozzájuk tartozó stacionárius valószínűségeket egyenletek segítségével. Ezen egyenletek felírása sem egyszerű, de megoldható. Az egyenletek felírását nem részletezném, ugyanis ez a módszertani rész kívül esik a dolgozatom fókuszán⁸. Ehelyett érdekesebb az, amit az egyenletek felírása után láthatunk. Van egy végtelen sok differenciálegyenletből álló rendszerünk, amelynek elméletileg van megoldása. Mindazonáltal felhasználható egy összefüggés, amely lényegesen leegyszerűsíti az egyenleteket. Ez az összefüggés a Markov-láncokkal kapcsolatban korábban tárgyalt stacionárius valószínűségekhez köthető. Ahogy fentebb is írtam, a π_j stacionárius valószínűség egy határérték, amelyet közelít a $P_{ij}(t)$ valószínűség t növelése esetén. Ez alapján felírható az alábbi összefüggés (Winston, 2003):

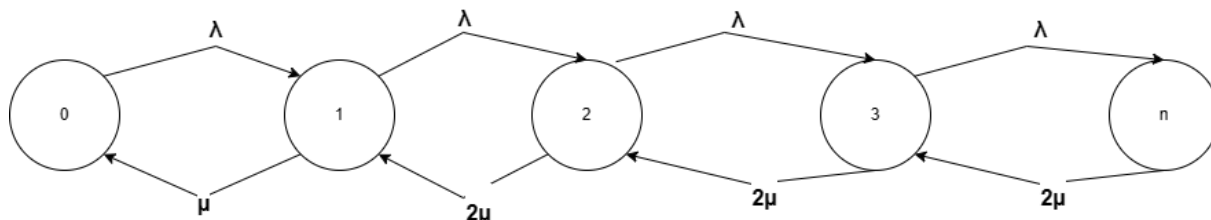
$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \pi_j$$

⁷ Bővebben lásd Winston (2003) 20.3 alfejezetében.

⁸ A pontos egyenletek felírása és a hozzájuk tartozó indoklás megtalálható Winston (2003) 20.3 alfejezetében.

Ennek felhasználásával a differenciálegyenletek helyett lineáris egyenletrendszereket kapunk. Tehát az eredményünk egy végtelen sok lineáris egyenletből álló egyenletrendszer. Ez jelentősen egyszerűbbé és könnyebben megoldhatóvá teszi a modellünk egyenleteit. A modellek egyenleteinek felírásakor gyakran hivatkozunk az egyenletekre úgy, mint áramlásegyensúlyi vagy áramlás-megmaradási egyenletek. Az ilyen egyenletek kulcsfontosságú jellemzője, hogy ha fennáll a stacionárius eset, akkor az adott állapotba történő beérkezések gyakoriságának egyenlőnek kell lennie a kiszolgálási gyakoriságokkal (Winston, 2003). Ez nagyon jól interpretálható a fizikában gyakran használatos Kirchhoff I. törvénnyel, amely azt mondja ki, hogy egy csomópontba bemenő áram(ok) nagysága megegyezik a csomópontból kimenő áram(ok) nagyságával. A sorbanállási rendszerek áramlásegyensúlyi egyenleteinek felírásakor is pontosan ez történik. A bemenő gyakoriságoknak meg kell egyeznie a kimenő gyakoriságokkal. Ez a kulcsa a modell egyenletek felírásának.

Nézzünk most az egyenletek felírására egy példát. Vegyük az M/M/2 modellt, amely a legközelebb áll a dolgozatomban használt közgazdasági modellekhez. Ennél a modellnél ugye feltételeztük, hogy mind a beérkezési és mind a kiszolgálási folyamatok exponenciális eloszlást követnek, illetve, hogy 2 párhuzamos kiszolgálóhely van a rendszerben. A rendszer szemléltetésére az 1. ábra szolgál:



1. ábra: M/M/2 modell, forrás: saját szerkesztés

Az egyes pontok/körök jelképezik az ügyfelek számát a rendszerben. Az egyes vonalakon láthatóak a beérkezések (λ) és a kiszolgálások (μ). Az ábra segítségével felírhatjuk a modell egyenleteit a már ismert szabály alapján: A bemenő gyakoriságoknak meg kell egyeznie a kimenő gyakoriságokkal. Itt megjegyezném, hogy az ábrát csak a $j=3$ állapotig készítettem el részletesen, az utána lévő n jelölés jelképezi azt, hogy tetszőleges nagyságú állapotig felírhatjuk a modell alapján az egyenleteket. A modell egyenletei tehát $j=3$ állapotra:

$$0: \quad \pi_0 * \lambda = \pi_1 * \mu$$

$$1: \quad \pi_1 * \lambda + \pi_1 * \mu = \pi_0 * \lambda + \pi_2 * 2\mu$$

$$2: \quad \pi_2 * \lambda + \pi_2 * 2\mu = \pi_1 * \lambda + \pi_3 * 2\mu$$

$$3: \quad \pi_3 * 2\mu = \pi_2 * \lambda$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Az utolsó egyenletre azért van szükségünk, hogy normalizáljunk, így a valószínűségek 1-re összegződnek. Tehát megkaptuk a csupán lineáris egyenletekből álló egyenletrendszerünket. Ezt kell megoldanunk az állapotvalószínűségek szerint, azaz az egyes π_j valószínűségek szerint λ és μ paraméterekre, tehát, hogy az egyes állapotvalószínűségek csak λ és μ paraméterek értékétől függjenek. Mivel 4 lineárisan független egyenletünk van és 4 ismeretlenünk, tehát ennek az egyenletnek egyértelmű megoldása kell, hogy legyen. A megoldás itt látható⁹:

$$\pi_0 = \frac{4\mu^3}{\lambda^3 + 2\lambda^2\mu + 4\lambda\mu^2 + 4\mu^3}$$

$$\pi_1 = \frac{4\lambda\mu^2}{\lambda^3 + 2\lambda^2\mu + 4\lambda\mu^2 + 4\mu^3}$$

$$\pi_2 = \frac{2\lambda^2\mu}{\lambda^3 + 2\lambda^2\mu + 4\lambda\mu^2 + 4\mu^3}$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda^3}{\lambda^3 + 2\lambda^2\mu + 4\lambda\mu^2 + 4\mu^3}$$

Most, hogy megkaptuk az egyes állapotvalószínűségeket λ és μ függvényében, be tudunk helyettesíteni konkrét értékekre és megvizsgálni az eredményt. Gyakori kérdés a sorbanállási rendszerek kapcsán, hogy miként válasszuk meg λ és μ értékeket, illetve kettejük viszonyát. A két paraméter kapcsolatának jellemzésére szolgál az úgynevezett forgalmi gyakoriság, amely a λ/μ hányadosként írható fel és ρ -val jelöljük (Winston, 2003). Számos esetben standard eljárás a sorbanállási modellek kapcsán, hogy a forgalmi gyakoriságot, mint együttthatók egynél kisebbnek válasszuk, tehát amikor a beérkezési gyakoriság kisebb, mint a kiszolgálási gyakoriság. Például a $\lambda=8$ és a $\mu=15$ esetben azt mondhatjuk, hogy óránként átlagosan 8 ügyfél érkezik a rendszerbe és átlagosan 15 ügyfelet tudnak kiszolgálni. Erre azért lehet szükség, hogy a rendszer ne tudjon „elszállni”, azaz a sor ne tudjon felgyülemelni. Ugyanis, ha több ügyfél érkezik, mint amennyit ki tud szolgálni az

⁹ Az egyenletrendszerek megoldásához segítségül vettem a WolframAlpha Mathematica programnyelvet.

adott rendszer, akkor folyamatosan lesznek várakozó ügyfelek, hiszen mindig marad olyan ügyfél, akire nem jut idő. Például, ha megcseréljük az előző példában szereplő értékeket, tehát $\lambda=15$ és $\mu=8$, akkor az azt jelenti, hogy óránként 15 ügyfél érkezik a rendszerbe, viszont csak 8 ügyfelet tudnak átlagosan óránként kiszolgálni, ezért 7 ügyfél vagy tovább várakozik vagy elmegy, tehát elveszett ügyfél lesz belőle. Ez azt jelenti, hogy minden egyes eltelt órával 7-tel több olyan ügyfele lesz az adott rendszernek, akiket nem tudnak kiszolgálni, ezért a rendszer elszáll. Ezért használjuk gyakran a forgalmi együttthatót úgy, hogy 1-nél kisebbre választjuk az értékét. Egyébként ez a kérdés csak a „végtelen típusú” rendszerek esetében áll fenn, hiszen ott biztosítva van az ügyfelek folyamatos és korlátlan érkezése, illetve az ilyen esetekben nem telik meg a bolt, tehát hiába érkezne be $n+1$ -edik ügyfél a boltba, emiatt nem lenne izgalmas ezt modellezni. Azonban, ha úgynevezett véges erőforrású modellünk van, akkor a rendszerünk nem tud elszállni, hiszen nem fog korlátlan számú ügyfél érkezni. Erre jó példa a Covid időszak alatti vásárlás bizonyos boltokban, ahol egészségügyi előírások miatt a bolt alapterületét figyelembe véve kiszámolták, hogy maximum hány vásárló tartózkodhat az üzletben. Tehát hiába lett volna több érkező ügyfél és lassabb kasszások, a sor nem tudott felgyülemelni és ezáltal a rendszer elszállni, hiszen egyszerűen nem engedtek be annyi vásárlót a boltba. Más szóval az alapsokaság, ahonnan az ügyfelek érkeztek véges volt és nem végtelen. Ezáltal mindegy ilyen esetekben, hogy a forgalmi gyakorisága vagy kihasználtsági együtttható, azaz a ρ értékét 1-nél nagyobbobbnak vagy kisebbnek választom meg. A mi esetünkben is észrevehetjük, hogy a modellt felírhattuk volna n ügyfél esetére is, azonban az egyszerűség kedvéért, illetve a forgalmi gyakorisági együtttható értékének bemutatása végett 3 ügyfélre is elegendő volt felírni.

II.2 A közgazdasági modell bevezetése és felépítése

Eddig bevezettük a sorbanállási modellel kapcsolatos fontos alapfogalmakat, ezáltal megalapoztuk a modellem matematikai hátterét. Most nézzük meg a modell közgazdaságtani részét is. A modellem matematikai alapja tehát az M/M/2 modell, amelyen a közgazdaságtani interpretáció miatt kisebb módosításokat hajtok végre. A kiinduló ötlet továbbra is az, hogy két kiszolgálóhely, azaz két kassza van, amelyekhez egy közös sorból érkezhetnek a vásárlók. Tegyük fel, hogy van egy olyan szupermarket, ahol az egyik kassza fizetős, tehát, ha ott fizetek akkor a vásárlásom egy $(1+\alpha)$ szorzóval többbe kerül Természetesen α esetében kizárólag pozitív szám megengedett. Tehát kialakul egy „olcsó” és egy „drága” kassza, ahol a drága kassza a többletfizetős kassza. A két kassza esetén gyakran feltételezzük, hogy egyforma sebességgel szolgálnak ki, itt mi is élünk ezzel a feltevessel. Ez a feltételezés nem feltétlenül reális minden helyzetben és nem mindig állja meg a helyét a gyakorlatban, azonban nagyban

megkönnyíti a számításokat és a modell egészének értelmezhetőségét, ha egy közös μ értékkel tudunk számolni. Ebben az esetben a „prioritást” az olcsó kassza élvezi nyilvánvalóan, hiszen, ha például nincs ott senki, akkor a vásárlók először oda fognak beállni. Ilyen fizetős kasszákra lehet példa a check-in folyamatok a repülőtereken. Például bizonyos utazási irodák kínálnak fel úgynevezett „*Check-in no problem*” extra opciókat is minimális pénzért, amelyért cserébe ők átvállalják az utasfelvétel folyamatát a légitársaság oldalán, illetve elküldik előre e-mailben a beszállókártyát. Ez egyrészt a pénz és a kényelem közötti *trade-off*, azaz átváltás kapcsolatát is bemutatja, illetve a sorbanállástól is tehermentesít minket, hiszen például, ha leterhelt a légitársaság weboldala - hiszen más is ekkor végzi a *check-in* folyamatot - akkor a weboldal betöltésére várakozva is „sorban állunk” és nem biztos, hogy előbb sorra kerülünk, ha régebb óta várunk, hiszen weboldalaknál akár a korábban említett SIRO módszer is lehet a kiszolgálási szabály, tehát a „sorbanállás” hossza ismeretlen számunkra. Fontos kérdés az, hogy a vásárlók mennyire türelmetlenek és a türelmetlenségük miatt mekkora összeggel hajlandóak többet fizetni pusztán azért, hogy előbb végezzenek. Mint számos közgazdaságtani modellben, itt is két szereplőnk van: a fogyasztók, tehát a vásárlók, illetve a vállalat, tehát a bolt. Mindkét szereplő optimalizálási problémáját fel fogom írni és megoldani őket. Először kezdjük a fogyasztókkal, tehát a vásárlókkal. A továbbiakban feltesszük, hogy minden vásárló azonos típusú, tehát ugyan lesznek különböző rendszerek, ahol majd a vásárlók többet vagy kevesebbet hajlandóak várni, azonban az egyes rendszerekben a vásárlók ugyanúgy fognak viselkedni. A vásárlók esetében természetesen használunk egy hasznossági függvényt, amely az alábbi alakot ölti:

$$U(t, p) = \frac{1}{t} - P * \tau .$$

A hasznossági függvényben a t jelenti az eltöltött időt, amely magában foglalja a várakozással és a kiszolgálással töltött időt egyaránt. Továbbá a P jelenti a vásárláskor fizetendő árat, illetve a τ jelképezi az átváltást az idő és az extra költség, tehát egyfajta „türelmetlenségi paraméter”. Ezzel a paraméterrel kapcsolatban ki kell hangsúlyozni, hogy ez egyfajta „tulajdonság/adottság” a fogyasztók esetében, amellyel ők rendelkeznek. Például vegyünk a klasszikus Cobb-Douglas hasznossági függvényt, amelynek kitevőjében ϕ , illetve $(1 - \phi)$ szerepel. A standard jelölés ebben az esetben α lenne, azonban, hogy ne keverjük össze a későbbi α mutatóval, ezért itt ϕ -vel jelöltem a Cobb-Douglas hasznossági függvényt. Tehát a fogyasztó hasznossági függvényében szereplő τ paraméter ugyan olyan adottság, mint a Cobb-Douglas függvényben a ϕ paraméter értéke. Visszatérve a fogyasztó eredeti hasznossági

függvényére, a függvényen látható a fordított arányú kapcsolat az idő és a hasznosság között, amely nyilvánvaló, hiszen minél kevesebb időt szeretnénk eltölteni sorbanállással. Az árat illetően a negatív kapcsolat is könnyen értelmezhető. Vegyük észre, hogy hasznossági függvényünk *kvázilináris* szerű alakot ölt. Ha beírjuk a költségvetési korlátot a hasznossági függvénybe, akkor eltűnik az úgynevezett „*numeraire*” és a fentebb látott célfüggvényt kapjuk. Továbbá kiemelném a hasznossági függvénnyel kapcsolatban, hogy minden fogyasztó azonos fogyasztói „kosarat” vesz meg, amely 1-be kerül az olcsó kasszánál, illetve $(1+\alpha)$ ára van a drága kasszánál. Tehát ennek a kosárnak az ára szerepel a hasznossági függvényben. Ezenkívül a fogyasztók esetében különböző eseteket fogok felvázolni és azokra felírni a modelleket. Ezek az esetek a türelmetlenségtől fognak függeni, tehát, hogy mennyit lesz hajlandó várni az adott típusú fogyasztó. A hasznosság maximalizálása miatt természetesen ez úgy fog kinézni, hogy a fogyasztó addig vár és választja majd az olcsóbb kasszát, ameddig a türelme engedi.

A fogyasztók után térjünk át a vállalat, tehát a bolt problémájának tárgyalására. A szokásos mikroökonómiai feltevés alapján itt is elmondhatjuk, hogy a vállalat profitmaximalizálásra törekszik. Végző soron a vállalat feladata lesz majd, hogy meghatározza az α értékét, tehát a „*markup*”, azaz a felár költségét a fizetős kasszák esetében. A korábbi feltételezés, miszerint homogén a fogyasztók csoportja, tehát az egyes rendszereken belül ugyanúgy viselkednek, ezért ugyanannyira is türelmetlenek jelentősen leegyszerűsíti a vállalat helyzetét is, hiszen nem szükséges differenciálnia a fogyasztókat. A vállalat profitfüggvénye az alábbi formában írható fel:

$$B = L_o * 1 + L_d * (1 + \alpha).$$

Az egyszerűség kedvéért a profitot a szokásos π helyett B-vel jelöltem, hogy ne legyen összetéveszthető az állapotvalószínűség jelölésével. A profit képlet kapcsán megemlíteném, hogy az egyes árak azért alakultak így, mert feltettük, hogy az olcsó helyen 1 egység az ár, míg a drága kasszánál $(1+\alpha)$. Ez a profit a bolt időegységenkénti bevétele. Az α a korábban említett extra költség, az L_o és az L_d pedig rendre az olcsó és a drága kasszánál kiszolgálás alatt lévő átlagos ügyfelek száma. Az L_o és L_d összege adja L_s -t, amely a kiszolgálással átlagosan töltött idő. L a rendszerben lévő ügyfelek átlagos száma, amely az alábbi összefüggés alapján számolható ki (Winston, 2003):

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} j * \pi_j .$$

L felbontható L_q és L_s összegére, tehát a rendszerben lévő ügyfelek átlagos száma megegyezik a rendszerben várakozó és kiszolgálás alatt álló ügyfelek átlagos számával, ami logikus is, hiszen amíg a rendszerben vagyunk csak két dolog történhet velünk: vagy várakozunk, hogy sorra kerüljünk vagy már sorra kerültünk és éppen kiszolgálnak minket. L ismeretében felírhatjuk az úgynevezett Little-formulát is, amelyet az alábbi egyenlet definiál:

$$L = \lambda * W .$$

L jelentését ismerjük, λ pedig továbbra is a beérkező ügyfelek átlagos száma, W pedig a rendszerben az ügyfél által eltöltött idő, amely L -hez hasonló módon szintén felbontható W_q és W_s összegére, amelyek rendre a várakozással és a kiszolgálással eltöltött időt jelentik a rendszerben az ügyfél által. Természetesen az előbb említett formula kiterjeszthető L egyes komponenseire az alábbi tétel segítségével (Winston, 2003):

Ha feltesszük, hogy léteznek stacionárius valószínűségek, akkor tetszőleges sorbanállási rendszerre felírhatók az alábbi egyenletek:

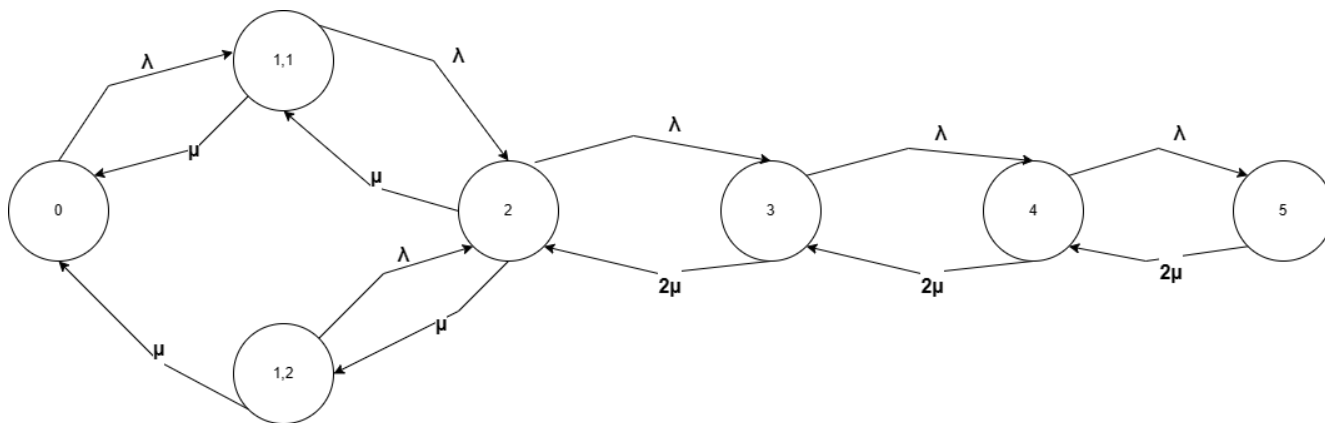
$$L = \lambda * W$$

$$L_q = \lambda * W_q$$

$$L_s = \lambda * W_s .$$

Számunkra tulajdonképpen L_s lesz fontos, ami a rendszerben átlagosan kiszolgálás alatt álló ügyfelek száma. Vegyük észre, hogy L_s értéke L_o és L_d összegével lesz egyenlő, hiszen a kiszolgálás természetesen csak a kiszolgálóhelyeken, tehát a kasszáknál történhet, amely a mi esetünkben a két kassza, tehát az olcsó és a drága kassza. A bolt bevételéhez még annyit fűznék hozzá, hogy az időegységenkénti bevétel, amely eltér az egyes L mutatók értelmezésétől, hiszen azok mind átlagos (például várakozási vagy kiszolgálási) idők.

A matematikai és közgazdaságtani alapfogalmak ismerete alapján nézzük tehát az első modellünket. Itt a fő feltételezésünk az, hogy a fogyasztó *nem hajlandó várni* egyetlen egy embert sem, tehát, ha bárki is előtte van a sorban vagy épp kiszolgálás alatt, akkor ő a drága kasszát szeretné választani, hiszen nagyon türelmetlen. A modellt a 2. ábra szemlélteti:



2. ábra: nullát vár, forrás: saját szerkesztés

Az ábrán található jelölések megegyeznek a korábban felírt és bemutatott M/M/2 modellnél használt jelölésekkel. Vegyük észre, hogy ez a modell majdnem ugyanaz, mint az M/M/2 modell! Csupán annyi a különbség, hogy a $j=1$ állapotban „ketté ágazik” a rendszerem. Az 1,1 állapot azt jelenti, hogy egy ügyfél van a rendszerben, aki az olcsó kasszájánál van, míg az 1,2 azt jelképezi, amikor ez az egy ügyfél a drága kasszájánál van. Emellett az is látható, hogy a matematikai alapú M/M/2 modellhez képest nem engedtünk meg beérkezést a 0 állapotból az 1,2 állapotba. Ennek oka a közgazdaságtani interpretációban keresendő. Ugyanis, ha úgy érkezünk be a rendszerbe, hogy rajtunk kívül 0 ügyfél van bent, tehát mi vagyunk egyedül a boltban, akkor egyértelműen az olcsó kasszához megyünk. Az áramlásegyensúlyi egyenletek felírásakor továbbra is arra törekszünk, hogy a bemeneti gyakoriságok megegyezzenek a kimeneti gyakoriságokkal. Ez alapján az egyenletrendszer a $j=3$ állapotig:

$$0: \quad \pi_0 * \lambda = \pi_{1,1} * \mu + \pi_{1,2} * \mu$$

$$1,1: \quad \pi_{1,1} * \lambda + \pi_{1,1} * \mu = \pi_0 * \lambda + \pi_2 * \mu$$

$$1,2: \quad \pi_{1,2} * \lambda + \pi_{1,2} * \mu = \pi_2 * \mu$$

$$2: \quad \pi_2 * \lambda + \pi_2 * \mu + \pi_2 * \mu = \pi_{1,1} * \lambda + \pi_{1,2} * \lambda + \pi_3 * 2\mu$$

$$3: \quad \pi_3 * 2\mu = \pi_2 * \lambda$$

$$\pi_0 + \pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_2 + \pi_3 = 1 .$$

Mivel ugyanannyi lineárisan független egyenletünk van, mint ismeretlenünk, ezért ennek az egyenletrendszernek is egyértelmű megoldása van:

$$\pi_0 = \frac{4\mu^3}{\lambda^3 + 2\lambda^2\mu + 4\lambda\mu^2 + 4\mu^3}$$

$$\pi_{1,1} = \frac{2\lambda\mu^2(\lambda + 2\mu)}{\lambda^4 + 3\lambda^3\mu + 6\lambda^2\mu^2 + 8\lambda\mu^3 + 4\mu^4}$$

$$\pi_{1,2} = \frac{2\lambda^2\mu^2}{\lambda^4 + 3\lambda^3\mu + 6\lambda^2\mu^2 + 8\lambda\mu^3 + 4\mu^4}$$

$$\pi_2 = \frac{2\lambda^2\mu}{\lambda^3 + 2\lambda^2\mu + 4\lambda\mu^2 + 4\mu^3}$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda^3}{\lambda^3 + 2\lambda^2\mu + 4\lambda\mu^2 + 4\mu^3} .$$

Összehasonlításképp, látszik, hogy csupán egy beérkezést elhagyva az M/M/2 modellhez képest az egyes állapotvalószínűségek megoldásai egy fokkal már bonyolultabb alakban írhatók fel.

Továbbá a modellt felírhatjuk a $j=4$ állapotot is beleértve a szokásos eljárással, akkor az egyenletrendszerünk az alábbiak szerint módosul:

$$0: \quad \pi_0 \cdot \lambda = \pi_{1,1} \cdot \mu + \pi_{1,2} \cdot \mu$$

$$1,1: \quad \pi_{1,1} \cdot \lambda + \pi_{1,1} \cdot \mu = \pi_0 \cdot \lambda + \pi_2 \cdot \mu$$

$$1,2: \quad \pi_{1,2} \cdot \lambda + \pi_{1,2} \cdot \mu = \pi_2 \cdot \mu$$

$$2: \quad \pi_2 \cdot \lambda + \pi_2 \cdot \mu + \pi_2 \cdot \mu = \pi_{1,1} \cdot \lambda + \pi_{1,2} \cdot \lambda + \pi_3 \cdot 2\mu$$

$$3: \quad \pi_3 \cdot 2\mu + \pi_3 \cdot \lambda = \pi_2 \cdot \lambda + \pi_4 \cdot 2\mu$$

$$4: \quad \pi_3 \cdot \lambda = \pi_4 \cdot 2\mu$$

$$\pi_0 + \pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 .$$

Az előző egyenletrendszerhez képest az ilyen típusú rendszereknél mindig változik az előző modellben az utolsó pontra felírt egyenlet (3.), illetve lesz egy plusz egyenlet (4.), hiszen a következő állapotában írjuk fel a rendszert. Emellett természetesen a normalizálást jelképező összegző egyenletbe is bekerül a plusz egy állapotvalószínűség. Az egyenletrendszer megoldásai:

$$\pi_0 = \frac{8\mu^4}{\lambda^4 + 2\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 8\lambda\mu^3 + 8\mu^4}$$

$$\pi_{1,1} = \frac{4\lambda\mu^3(\lambda + 2\mu)}{\lambda^5 + 3\lambda^4\mu + 6\lambda^3\mu^2 + 12\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 8\mu^5}$$

$$\pi_{1,2} = \frac{4\lambda^2\mu^3}{\lambda^5 + 3\lambda^4\mu + 6\lambda^3\mu^2 + 12\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 8\mu^5}$$

$$\pi_2 = \frac{4\lambda^2\mu^2}{\lambda^4 + 2\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 8\lambda\mu^3 + 8\mu^4}$$

$$\pi_3 = \frac{2\lambda^3\mu}{\lambda^4 + 2\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 8\lambda\mu^3 + 8\mu^4}$$

$$\pi_4 = \frac{\lambda^4}{\lambda^4 + 2\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 8\lambda\mu^3 + 8\mu^4} .$$

A két modell egyenleteit összevetve algebrai szempontból annyi nyilvánvalóan látszik, hogy az egyenletek számának növelésével a megoldásokban szereplő polinomok fokszáma is nő. Az eddigiekkel analóg módon felírhatjuk az egyenleteket a $j=5$ állapotra is, tehát amikor 5 ügyfél van a rendszerben. Az egyenletek:

$$0: \quad \pi_0 * \lambda = \pi_{1,1} * \mu + \pi_{1,2} * \mu$$

$$1,1: \quad \pi_{1,1} * \lambda + \pi_{1,1} * \mu = \pi_0 * \lambda + \pi_2 * \mu$$

$$1,2: \quad \pi_{1,2} * \lambda + \pi_{1,2} * \mu = \pi_2 * \mu$$

$$2: \quad \pi_2 * \lambda + \pi_2 * \mu + \pi_2 * \mu = \pi_{1,1} * \lambda + \pi_{1,2} * \lambda + \pi_3 * 2\mu$$

$$3: \quad \pi_3 * 2\mu + \pi_3 * \lambda = \pi_2 * \lambda + \pi_4 * 2\mu$$

$$4: \quad \pi_3 * \lambda + \pi_5 * 2\mu = \pi_4 * 2\mu + \pi_4 * \lambda$$

$$5: \quad \pi_5 * 2\mu = \pi_4 * \lambda$$

$$\pi_0 + \pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 .$$

Az eddigi megszokott módon az egyenleteink száma is eggyel nőtt. A j állapotok számát elméletileg bármennyig lehet növelni, hiszen a kapott egyenletrendszer mindig egyértelmű és ezáltal megoldható lesz. Az egyenletrendszer megoldásai tehát:

$$\pi_0 = \frac{16\mu^5}{\lambda^5 + 2\lambda^4\mu + 4\lambda^3\mu^2 + 8\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 16\mu^5}$$

$$\pi_{1,1} = \frac{8\lambda\mu^4(\lambda + 2\mu)}{\lambda^6 + 3\lambda^5\mu + 6\lambda^4\mu^2 + 12\lambda^3\mu^3 + 24\lambda^2\mu^4 + 32\lambda\mu^5 + 16\mu^6}$$

$$\pi_{1,2} = \frac{8\lambda^2\mu^4}{\lambda^6 + 3\lambda^5\mu + 6\lambda^4\mu^2 + 12\lambda^3\mu^3 + 24\lambda^2\mu^4 + 32\lambda\mu^5 + 16\mu^6}$$

$$\pi_2 = \frac{8\lambda^2\mu^3}{\lambda^5 + 2\lambda^4\mu + 4\lambda^3\mu^2 + 8\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 16\mu^5}$$

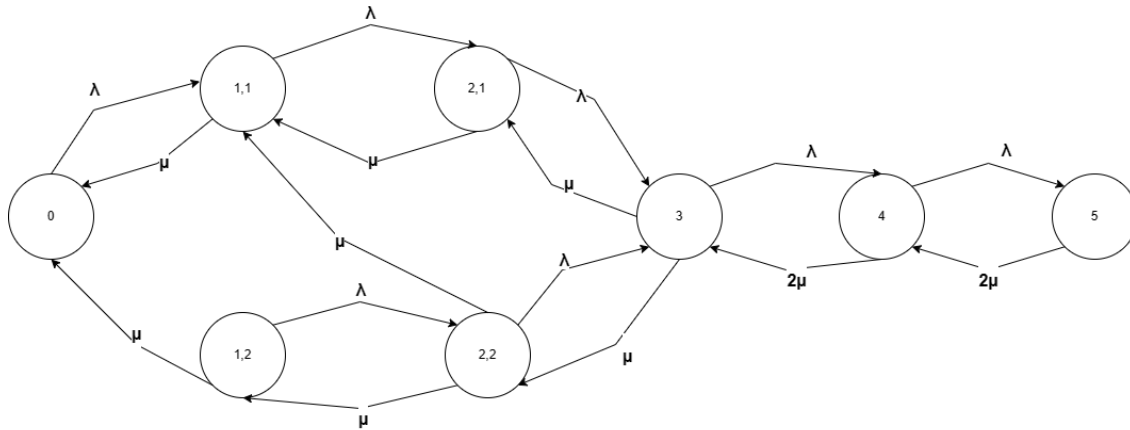
$$\pi_3 = \frac{4\lambda^3\mu^2}{\lambda^5 + 2\lambda^4\mu + 4\lambda^3\mu^2 + 8\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 16\mu^5}$$

$$\pi_4 = \frac{2\lambda^4\mu}{\lambda^5 + 2\lambda^4\mu + 4\lambda^3\mu^2 + 8\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 16\mu^5}$$

$$\pi_5 = \frac{\lambda^5}{\lambda^5 + 2\lambda^4\mu + 4\lambda^3\mu^2 + 8\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 16\mu^5} \cdot$$

Ezen gondolatmenet mentén haladva tetszőleges számú állapotra és ezáltal tetszőleges számú egyenletből álló egyenletrendszerre megoldhatók a modell egyenletei, amely a korábban említett lineárisan független egyenletek, illetve változók számának köszönhető, tehát nevezetesen annak, hogy ugyanannyi lineárisan független egyenletünk van, mint ismeretlenünk, ezért mindig egyértelmű megoldást fogunk kapni.

Ezután térjünk rá egy másik esetre, amikor feltesszük, hogy az adott rendszerbe beérkező ügyfél *egy ügyfelet hajlandó várni*. Ez annyiban bonyolítja meg az előző modellhez képest a mostanit, hogy a két párhuzamos kasszás kiszolgálás eggyel tovább „tolódik”, hiszen az adott ügyfél türelmesebb, ezáltal, ha egy ember áll előtte, akkor nem választja egyből a feláras kasszát, hanem kivárja a sorát az olcsó kasszánál. A modell grafikus megoldását a 3. ábra mutatja be:



3. ábra: egyet vár, forrás: saját szerkesztés

A jelölések megegyeznek az eddig tárgyalt modellekével. Az ábrán megfigyelhetjük, hogy a $j=2$ állapotot két külön eset is leírja. Egyrészt a 2,1 eset, amely azt jelenti, hogy 2 ügyfél van a rendszerben és közülük egy az olcsó kasszájánál van, a másik pedig várakozik. Másrészt a 2,2 eset is lehetséges, itt az történik, hogy mind az olcsó mind a drága kasszájánál van 1-1 ember, aki éppen kiszolgálás alatt áll és senki sem várakozik. Figyeljük meg továbbá, hogy a 2,2 esetből visszajuthatunk az 1,1 esetbe, tehát oda, ahol 1 ügyfél van az olcsó kasszájánál. Ez nyilván úgy történhet meg, hogy a drága kasszájánál hamarabb fejeződik be az ügyfél kiszolgálása és ezután már csak az olcsó kasszájánál marad egy ügyfél. Az előző modellhez hasonlóan a párhuzamos kasszák utáni esetben (jelen esetben a 3. kasszától) már nincs „megbontva”, tehát onnantól minden ugyanúgy működik, ezért az ilyen modellek kapcsán mindig a modell első néhány állapotának modellezése az izgalmas kérdés. Ezenkívül vegyük észre, hogy minden állapotból az előző állapotba két kiszolgálás történik, azonban az első két állapotig még két „ágra” van bontva a modell, azonban utána a negyedik állapottól ezt nagyon jól reprezentálja az alsó ág, ahol 2μ szerepel. Most pedig nézzük meg erre a modellre a $j=3$ állapotig felírt egyenletrendszer:

$$0: \quad \pi_0 * \lambda = \pi_{1,1} * \mu + \pi_{1,2} * \mu$$

$$1,1: \quad \pi_{1,1} * \lambda + \pi_{1,1} * \mu = \pi_0 * \lambda + \pi_{2,2} * \mu + \pi_{2,1} * \mu$$

$$1,2: \quad \pi_{1,2} * \lambda + \pi_{1,2} * \mu = \pi_{2,2} * \mu$$

$$2,1: \quad \pi_{2,1} * \lambda + \pi_{2,1} * \mu = \pi_{1,1} * \lambda + \pi_3 * \mu$$

$$2,2: \quad \pi_{2,2} * \lambda + \pi_{2,2} * \mu + \pi_{2,2} * \mu = \pi_{1,2} * \lambda + \pi_3 * \mu$$

$$3: \quad \pi_3 * \mu + \pi_3 * \mu = \pi_{2,1} * \lambda + \pi_{2,2} * \lambda$$

$$\pi_0 + \pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_{2,1} + \pi_{2,2} + \pi_3 = 1 .$$

A normalizálás miatt szükséges utolsó egyenlet továbbra is az egyenletrendszer része, amely így az eddigiekkel konzisztensen a lineárisan független egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával, tehát egyértelmű megoldást fogunk kapni. A megoldások tehát:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\mu^3(3\lambda^2 + 5\lambda\mu + 4\mu^2)}{\lambda^5 + 4\lambda^4\mu + 9\lambda^3\mu^2 + 12\lambda^2\mu^3 + 9\lambda\mu^4 + 4\mu^5} \\ \pi_{1,1} &= \frac{\lambda\mu^2(2\lambda^2 + 5\lambda\mu + 4\mu^2)}{\lambda^5 + 4\lambda^4\mu + 9\lambda^3\mu^2 + 12\lambda^2\mu^3 + 9\lambda\mu^4 + 4\mu^5} \\ \pi_{1,2} &= \frac{\lambda^3\mu^2}{\lambda^5 + 4\lambda^4\mu + 9\lambda^3\mu^2 + 12\lambda^2\mu^3 + 9\lambda\mu^4 + 4\mu^5} \\ \pi_{2,1} &= \frac{\lambda^2\mu(\lambda^2 + 3\lambda\mu + 4\mu^2)}{\lambda^5 + 4\lambda^4\mu + 9\lambda^3\mu^2 + 12\lambda^2\mu^3 + 9\lambda\mu^4 + 4\mu^5} \\ \pi_{2,2} &= \frac{\lambda^3\mu(\lambda + \mu)}{\lambda^5 + 4\lambda^4\mu + 9\lambda^3\mu^2 + 12\lambda^2\mu^3 + 9\lambda\mu^4 + 4\mu^5} \\ \pi_3 &= \frac{\lambda^3(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}{\lambda^5 + 4\lambda^4\mu + 9\lambda^3\mu^2 + 12\lambda^2\mu^3 + 9\lambda\mu^4 + 4\mu^5} .\end{aligned}$$

Ami első körben nyilvánvalóan látszik az az, hogy az egyes állapotvalószínűségek tört alakban történő felírása esetén a nevezőjük azonos és csak a számlálójukban különböznek egymástól. Ezt a gondolatmenetet folytatva bővíthetjük az egyenletrendszerünket, ha eggyel további, tehát a $j=4$ állapotra írjuk fel a lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}0: \quad & \pi_0 * \lambda = \pi_{1,1} * \mu + \pi_{1,2} * \mu \\ 1,1: \quad & \pi_{1,1} * \lambda + \pi_{1,1} * \mu = \pi_0 * \lambda + \pi_{2,2} * \mu + \pi_{2,1} * \mu \\ 1,2: \quad & \pi_{1,2} * \lambda + \pi_{1,2} * \mu = \pi_{2,2} * \mu \\ 2,1: \quad & \pi_{2,1} * \lambda + \pi_{2,1} * \mu = \pi_{1,1} * \lambda + \pi_3 * \mu \\ 2,2: \quad & \pi_{2,2} * \lambda + \pi_{2,2} * \mu + \pi_{2,2} * \mu = \pi_{1,2} * \lambda + \pi_3 * \mu \\ 3: \quad & \pi_3 * \mu + \pi_3 * \mu + \pi_3 * \lambda = \pi_{2,1} * \lambda + \pi_{2,2} * \lambda + \pi_4 * 2\mu \\ 4: \quad & \pi_3 * \lambda = \pi_4 * 2\mu\end{aligned}$$

$$\pi_0 + \pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_{2,1} + \pi_{2,2} + \pi_3 + \pi_4 = 1 .$$

Jelen esetben 7 lineárisan független egyenletünk van, amelyek 7 különböző változót tartalmaznak, így μ és λ függvényében továbbra is konkrét megoldásokat kapunk. Ezenkívül látható, hogy az ilyen típusú modellek esetében addig izgalmas és érdekes a rendszer vizsgálata, amíg a két kassza „külön ágon működik”, tehát ameddig még hajlandó várni az adott ügyfél a róla állított feltételezés alapján. Ez a korábbi rendszerben, ahol nem volt hajlandó várni az ügyfél a $j=2$ állapotig volt így, jelen esetben ez eggyel jobbra tolódik, hiszen egy ügyfelet még hajlandó megvárni az éppen a rendszerbe beérkező ügyfél. Látható, hogy ezután már úgymond nem tesz annyit hozzá plusz egy állapot vizsgálata a közgazdaságtani részhez. Matematikailag persze ez plusz egy lineáris egyenlet, azonban a modell szempontjából ez röviden annyit takar, hogy van egy plusz beérkezés λ gyakorisággal, illetve egy kiszolgálás 2μ gyakorisággal, tehát pontosabban egy-egy kiszolgálás μ gyakorisággal, mivel megengedtük még egy addicionális állapotig működni a rendszert. A korábbiakhoz hasonlóan itt is azt várjuk, hogy a polinomokat tartalmazó megoldásokban a foksám (konkrétan a nevező foksáma) eggyel növekedjen, hiszen eggyel több egyenletünk van. A megoldások itt láthatók:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{2\mu^4(3\lambda^2 + 5\lambda\mu + 4\mu^2)}{\lambda^6 + 4\lambda^5\mu + 10\lambda^4\mu^2 + 18\lambda^3\mu^3 + 24\lambda^2\mu^4 + 18\lambda\mu^5 + 8\mu^6} \\ \pi_{1,1} &= \frac{2\lambda\mu^3(2\lambda^2 + 5\lambda\mu + 4\mu^2)}{\lambda^6 + 4\lambda^5\mu + 10\lambda^4\mu^2 + 18\lambda^3\mu^3 + 24\lambda^2\mu^4 + 18\lambda\mu^5 + 8\mu^6} \\ \pi_{1,2} &= \frac{2\lambda^3\mu^3}{\lambda^6 + 4\lambda^5\mu + 10\lambda^4\mu^2 + 18\lambda^3\mu^3 + 24\lambda^2\mu^4 + 18\lambda\mu^5 + 8\mu^6} \\ \pi_{2,1} &= \frac{2\lambda^2\mu^2(\lambda^2 + 3\lambda\mu + 4\mu^2)}{\lambda^6 + 4\lambda^5\mu + 10\lambda^4\mu^2 + 18\lambda^3\mu^3 + 24\lambda^2\mu^4 + 18\lambda\mu^5 + 8\mu^6} \\ \pi_{2,2} &= \frac{2\lambda^3\mu^2(\lambda + \mu)}{\lambda^6 + 4\lambda^5\mu + 10\lambda^4\mu^2 + 18\lambda^3\mu^3 + 24\lambda^2\mu^4 + 18\lambda\mu^5 + 8\mu^6} \\ \pi_3 &= \frac{2\lambda^3\mu(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}{\lambda^6 + 4\lambda^5\mu + 10\lambda^4\mu^2 + 18\lambda^3\mu^3 + 24\lambda^2\mu^4 + 18\lambda\mu^5 + 8\mu^6} \\ \pi_4 &= \frac{\lambda^4(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}{\lambda^6 + 4\lambda^5\mu + 10\lambda^4\mu^2 + 18\lambda^3\mu^3 + 24\lambda^2\mu^4 + 18\lambda\mu^5 + 8\mu^6} .\end{aligned}$$

A megoldások a várakozások szerint alakultak, ugyanis a nevező továbbra is közös minden tört esetében, illetve az ott található polinom foksáma is megnőtt eggyel. Természetesen tovább bővíthetjük a modellt még további esetekre is, azonban én a $j=5$ állapotig írom fel csupán őket, mivel láthattuk, hogy a matematikai részt leszámítva nem ad hozzá akkora pluszt a modellhez,

ha a $j=5$ vagy a $j=25$ állapotra írom fel az egyenleteket. Az 5 ügyfelet tartalmazó rendszer esetében így alakul tehát az egyenletrendszer:

$$0: \quad \pi_0 * \lambda = \pi_{1,1} * \mu + \pi_{1,2} * \mu$$

$$1,1: \quad \pi_{1,1} * \lambda + \pi_{1,1} * \mu = \pi_0 * \lambda + \pi_{2,2} * \mu + \pi_{2,1} * \mu$$

$$1,2: \quad \pi_{1,2} * \lambda + \pi_{1,2} * \mu = \pi_{2,2} * \mu$$

$$2,1: \quad \pi_{2,1} * \lambda + \pi_{2,1} * \mu = \pi_{1,1} * \lambda + \pi_3 * \mu$$

$$2,2: \quad \pi_{2,2} * \lambda + \pi_{2,2} * \mu + \pi_{2,2} * \mu = \pi_{1,2} * \lambda + \pi_3 * \mu$$

$$3: \quad \pi_3 * \mu + \pi_3 * \mu + \pi_3 * \lambda = \pi_{2,1} * \lambda + \pi_{2,2} * \lambda + \pi_4 * 2\mu$$

$$4: \quad \pi_3 * \lambda + \pi_5 * 2\mu = \pi_4 * \lambda + \pi_4 * 2\mu$$

$$5: \quad \pi_5 * 2\mu = \pi_4 * \lambda$$

$$\pi_0 + \pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_{2,1} + \pi_{2,2} + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \quad .$$

Az egyenleteink száma továbbra is eggyel nőtt, így a megoldásokban szintén a nevező fokszámának emelkedését várjuk. Itt is kiemelném ennek a módszernek két nagy előnyét. Egyrészt tetszőleges számú állapotra fel lehet írni az egyenletrendszert, amely a fentebb tárgyalt határértékes definíciónak köszönhetően differenciálegyenletek helyett csak egyszerű, lineáris egyenleteket tartalmaz, amelyek felírása és betáplálása egy számítógépes szoftverbe csak idő és befektetett munka kérdése, tehát elméletileg tetszőleges számú egyenletet tartalmazó egyenletrendszert is megoldhatnánk egy szoftver segítségével. Végtelen egyenletig akkor mehetnénk el a számítási igények figyelembevételén kívül, ha analitikusan felírhatók és ezáltal reprodukálhatók lennének az egyenletek. A másik nagy előnye az ilyen típusú egyenletrendszereknek pedig pont a linearitásból fakadó egyértelműség. Hiszen láhattuk, hogy minden esetben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen, ezáltal λ és μ paraméterek függvényében mindig meghatározhatók az egyes állapotvalószínűségek egyértelműen. Illetve az állapotok számával növelésével történő rendszer reprodukálhatósága mellett szól még az az érv is, hogy bizonyos állapot után úgymond marginális a változás mértéke, hiszen a korábban, illetve később tárgyalt rendszereknél belátható, hogy az extra állapotnövelés csupán plusz egy beérkezést (λ), illetve két kiszolgálást (2μ) módosít a rendszeren és ezáltal az egyenleteken is. Tegyük fel, hogy egy olyan rendszerben vagyunk, ahol a beérkező ügyfél s ügyfelet hajlandó várni mielőtt sorra kerül (természetesen s nemnegatív egész szám). Ekkor az érdekes része a modellnek $j=s+2$ állapotig tart, hiszen utána a fentebb említett egy beérkezéssel, illetve egy-

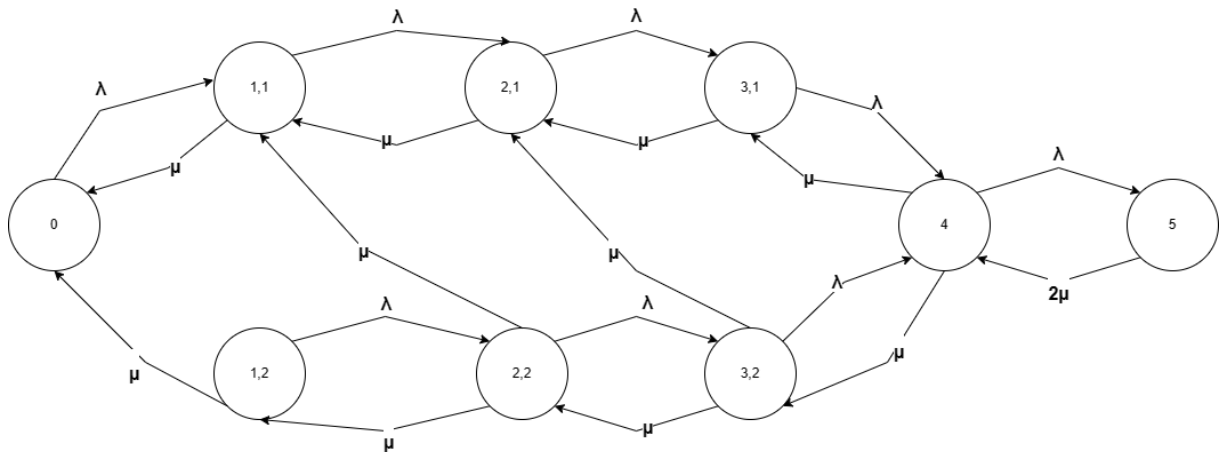
egy kiszolgálással bővül pusztán a rendszer. Például nézzük meg a legelső rendszert, ahol nem volt hajlandó várni egyetlen egy embert sem az éppen beérkező ügyfél, tehát $s=0$. Ekkor a $j=2$ állapotig volt izgalmas megvizsgálni a modellt, utána jött a szokásos metodológia. A mostani esetben ($s=1$) pedig a $j=3$ állapotig volt eltérő a rendszer viselkedése.

Az öt állapotig felírt egyenletrendszer megoldásai itt láthatók:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{4\mu^5(3\lambda^2 + 5\lambda\mu + 4\mu^2)}{\lambda^7 + 4\lambda^6\mu + 10\lambda^5\mu^2 + 20\lambda^4\mu^3 + 36\lambda^3\mu^4 + 48\lambda^2\mu^5 + 36\lambda\mu^6 + 16\mu^7} \\ \pi_{1,1} &= \frac{4\lambda\mu^4(2\lambda^2 + 5\lambda\mu + 4\mu^2)}{\lambda^7 + 4\lambda^6\mu + 10\lambda^5\mu^2 + 20\lambda^4\mu^3 + 36\lambda^3\mu^4 + 48\lambda^2\mu^5 + 36\lambda\mu^6 + 16\mu^7} \\ \pi_{1,2} &= \frac{4\lambda^3\mu^4}{\lambda^7 + 4\lambda^6\mu + 10\lambda^5\mu^2 + 20\lambda^4\mu^3 + 36\lambda^3\mu^4 + 48\lambda^2\mu^5 + 36\lambda\mu^6 + 16\mu^7} \\ \pi_{2,1} &= \frac{4\lambda^2\mu^3(\lambda^2 + 3\lambda\mu + 4\mu^2)}{\lambda^7 + 4\lambda^6\mu + 10\lambda^5\mu^2 + 20\lambda^4\mu^3 + 36\lambda^3\mu^4 + 48\lambda^2\mu^5 + 36\lambda\mu^6 + 16\mu^7} \\ \pi_{2,2} &= \frac{4\lambda^3\mu^3(\lambda + \mu)}{\lambda^7 + 4\lambda^6\mu + 10\lambda^5\mu^2 + 20\lambda^4\mu^3 + 36\lambda^3\mu^4 + 48\lambda^2\mu^5 + 36\lambda\mu^6 + 16\mu^7} \\ \pi_3 &= \frac{4\lambda^3\mu^2(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}{\lambda^7 + 4\lambda^6\mu + 10\lambda^5\mu^2 + 20\lambda^4\mu^3 + 36\lambda^3\mu^4 + 48\lambda^2\mu^5 + 36\lambda\mu^6 + 16\mu^7} \\ \pi_4 &= \frac{2\lambda^4\mu(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}{\lambda^7 + 4\lambda^6\mu + 10\lambda^5\mu^2 + 20\lambda^4\mu^3 + 36\lambda^3\mu^4 + 48\lambda^2\mu^5 + 36\lambda\mu^6 + 16\mu^7} \\ \pi_5 &= \frac{\lambda^5(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}{\lambda^7 + 4\lambda^6\mu + 10\lambda^5\mu^2 + 20\lambda^4\mu^3 + 36\lambda^3\mu^4 + 48\lambda^2\mu^5 + 36\lambda\mu^6 + 16\mu^7} .\end{aligned}$$

A számításaink szerint alakult jelen esetben is a nevező. Egyrészt az egyes megoldásoknál az azonossága, másrészt a fokszámának növekedése is egyértelműen látszik. Elméletileg az egyes rendszerek között a különböző állapotokra felírt modellek megoldásait is össze lehetne hasonlítani. Tehát például a $j=4$ és a $j=5$ állapotokra kapott megoldásokat algebrailag össze lehet hasonlítani és valamilyen szabályszerűséget vagy esetleg közös szorzót találni, amivel a $j+1$ állapot adott állapotvalószínűsége szorozódik az előző j állapothoz képest. Emellett az egyenletek felírása ugyan nem bonyolult, azonban mechanikus munkát igényel és erre lehetne valamilyen féle szabályt alkotni, amellyel kvázi rekurzív módon lehetne felírni az egyenleteket, azonban dolgozatomban fő fókusza nem a matematikai modell továbbfejlesztése, ezért ezt meghagyom említés szintjén, illetve bővítési lehetőségként.

Ahogy az állapotok számát tudjuk gyarapítani, úgy az ügyfél várakozási hajlandóságát is tudjuk fokozni. Nézzük meg a következő esetet, amikor az újonnan beérkező ügyfél már *hajlandó két ügyfelet is kivárni* előtte. Ez az előzőhöz hasonlóan azt eredményezi, hogy eggyel tovább tolódik a kiszolgálás, illetve a sor nagysága is nő eggyel, hiszen ebben a rendszerben a vásárló még türelmesebb, mint korábban, ezért hajlandó két embert is kivárni ahelyett, hogy egyből vagy egy ember után már a fizetős kasszához menne. A modelt szemléltető 4. ábra itt látható:



4. ábra: kettőt vár; forrás: saját szerkesztés

Itt is megfigyelhetjük, hogy a szokásos kiszolgálások mellett megjelenik a 3,2 állapotból egy nyíl a 2,1 irányba. A 3,2 eset azt jelenti, hogy 3 ügyfél van a rendszerben, közülük egy-egy az olcsó és drága kasszánál, illetve egy várakozik. Mivel ebben a rendszerben két embert is hajlandó várni a fogyasztó, ezért az ügyfél várakozni fog. Tehát egy ügyfél az olcsó kasszánál van, egy a drágánál, illetve egy várakozik az olcsó kasszára. Ha a 2,1 állapotba kerülünk vissza innen, akkor történt egy kiszolgálás. A 2,1 állapot azt jelenti, hogy két ügyfél van a rendszerben, abból mindkettő az olcsó kasszánál. Tehát a 3,2 állapotból úgy jutunk vissza a 2,1 állapotba, hogyha a drága kasszánál történő kiszolgálás fejeződik be először. Hasonlóan a 2,2 állapotból úgy jutunk el az 1,1 állapotba, ha a drága kasszánál fejeződik be először a kiszolgálás. Mivel legalább kettő ügyfelet hajlandó várni az éppen beérkező ügyfél, ezért a rendszert minimum a $j=4$ állapotra érdemes felírni. Letesztelhető, hogy mi történik, ha kevesebb ügyféllel rendelkező állapotra (például $j=3$) próbáljuk meg felírni az egyenletrendszert. Ilyen esetekben általában az állapotvalószínűségek közül néhány értéke 0. Írjuk fel ezután az egyenletrendszert először a $j=4$ állapotra:

$$0: \quad \pi_0 * \lambda = \pi_{1,1} * \mu + \pi_{1,2} * \mu$$

$$1,1: \quad \pi_{1,1}^*\lambda + \pi_{1,1}^*\mu = \pi_0^*\lambda + \pi_{2,2}^*\mu + \pi_{2,1}^*\mu$$

$$1,2: \quad \pi_{1,2}^*\lambda + \pi_{1,2}^*\mu = \pi_{2,2}^*\mu$$

$$2,1: \quad \pi_{2,1}^*\lambda + \pi_{2,1}^*\mu = \pi_{1,1}^*\lambda + \pi_{3,1}^*\mu + \pi_{3,2}^*\mu$$

$$2,2: \quad \pi_{2,2}^*\lambda + \pi_{2,2}^*\mu + \pi_{2,2}^*\mu = \pi_{1,2}^*\lambda + \pi_{3,2}^*\mu$$

$$3,1: \quad \pi_{3,1}^*\lambda + \pi_{3,1}^*\mu = \pi_{2,1}^*\lambda + \pi_4^*\mu$$

$$3,2: \quad \pi_{3,2}^*\lambda + \pi_{3,2}^*\mu + \pi_{3,2}^*\mu = \pi_{2,2}^*\lambda + \pi_4^*\mu$$

$$4: \quad \pi_4^*\mu + \pi_4^*\mu = \pi_{3,1}^*\lambda + \pi_{3,2}^*\lambda$$

$$\pi_0 + \pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_{2,1} + \pi_{2,2} + \pi_{3,1} + \pi_{3,2} + \pi_4 = 1 \quad .$$

Az extra várakozási hajlandóság miatt látható, hogy a 3 állapotból az előzőhöz képest kialakult egy 3,1 és 3,2 állapot. Észrevehető, hogy az egyenletek struktúrája azonos, sőt az első néhány egyenlet vagy teljesen azonos az előző rendszerekkel, vagy csak minimális eltérés mutatkozik közöttük. Továbbra is n ismeretlen és n lineárisan független egyenlet alkotja az egyenletrendszert, amely a szokásos módon egyértelmű megoldást ad a beérkezési és kiszolgálási gyakoriság, tehát λ és μ függvényében. Az egyenletrendszer megoldásai:

$$\pi_0 = \frac{\mu^4(4\lambda^3 + 9\lambda^2\mu + 12\lambda\mu^2 + 8\mu^3)}{\lambda^7 + 5\lambda^6\mu + 14\lambda^5\mu^2 + 26\lambda^4\mu^3 + 33\lambda^3\mu^4 + 29\lambda^2\mu^5 + 20\lambda\mu^6 + 8\mu^7}$$

$$\pi_{1,1} = \frac{\lambda\mu^3(3\lambda^3 + 9\lambda^2\mu + 12\lambda\mu^2 + 8\mu^3)}{\lambda^7 + 5\lambda^6\mu + 14\lambda^5\mu^2 + 26\lambda^4\mu^3 + 33\lambda^3\mu^4 + 29\lambda^2\mu^5 + 20\lambda\mu^6 + 8\mu^7}$$

$$\pi_{1,2} = \frac{\lambda^4\mu^3}{\lambda^7 + 5\lambda^6\mu + 14\lambda^5\mu^2 + 26\lambda^4\mu^3 + 33\lambda^3\mu^4 + 29\lambda^2\mu^5 + 20\lambda\mu^6 + 8\mu^7}$$

$$\pi_{2,1} = \frac{\lambda^2\mu^2(2\lambda^3 + 7\lambda^2\mu + 12\lambda\mu^2 + 8\mu^3)}{\lambda^7 + 5\lambda^6\mu + 14\lambda^5\mu^2 + 26\lambda^4\mu^3 + 33\lambda^3\mu^4 + 29\lambda^2\mu^5 + 20\lambda\mu^6 + 8\mu^7}$$

$$\pi_{2,2} = \frac{\lambda^4\mu^2}{\lambda^6 + 4\lambda^5\mu + 10\lambda^4\mu^2 + 16\lambda^3\mu^3 + 17\lambda^2\mu^4 + 12\lambda\mu^5 + 8\mu^6}$$

$$\pi_{3,1} = \frac{\lambda^3\mu(\lambda^3 + 4\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 8\mu^3)}{\lambda^7 + 5\lambda^6\mu + 14\lambda^5\mu^2 + 26\lambda^4\mu^3 + 33\lambda^3\mu^4 + 29\lambda^2\mu^5 + 20\lambda\mu^6 + 8\mu^7}$$

$$\pi_{3,2} = \frac{\lambda^4\mu(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}{\lambda^7 + 5\lambda^6\mu + 14\lambda^5\mu^2 + 26\lambda^4\mu^3 + 33\lambda^3\mu^4 + 29\lambda^2\mu^5 + 20\lambda\mu^6 + 8\mu^7}$$

$$\pi_4 = \frac{\lambda^4(\lambda^3 + 3\lambda^2\mu + 5\lambda\mu^2 + 4\mu^3)}{\lambda^7 + 5\lambda^6\mu + 14\lambda^5\mu^2 + 26\lambda^4\mu^3 + 33\lambda^3\mu^4 + 29\lambda^2\mu^5 + 20\lambda\mu^6 + 8\mu^7}.$$

Az előző rendszer $j=4$ állapotához képest eggyel több egyenletünk van, hiszen a $j=3$ állapotból 3,1 és 3,2 lett, ami miatt a már korábban sokszor említett polinom fokszám emelkedés is megjelenik. Ahogy egyre több várakozást engedünk meg, illetve egyre több állapotra írjuk fel a rendszert, úgy „bonyolódnak” az egyes törtek értékei, de a hosszabb egyenletek felírása és betáplálása ellenére továbbra is elérjük a fő célunkat: Kifejezni az egyes állapotvalószínűségeket a két paraméter, a beérkezési és a kiszolgálási gyakoriság függvényében. Emellett a nevezők továbbra is megegyeznek. Úgy látszik, hogy az eddigi modellekben a nevezők mind azonosak egy adott egyenletrendszerhez tartozó megoldásokat tekintve, kivéve a legelső esetet, amikor nagyon türelmetlen a fogyasztó és nem hajlandó egy ügyfél kiszolgálását sem megvárni. Azonban onnantól kezdve úgy tűnik, hogy mind az egy ügyfelet, mind a két ügyfelet váró modellben egy adott állapoton belül a nevezők egyeznek. Erre további példát fog nyújtani majd ennek a rendszernek a $j=5$ állapotra felírt esete, illetve a következő rendszer is, amelyben már három ügyfelet is hajlandó lesz megvárni a beérkező fogyasztó. Írjuk fel tehát a következő egyenletrendszert, amely az öt ügyfelet tartalmazó rendszerhez tartozik:

$$\begin{aligned} 0: \quad & \pi_0 * \lambda = \pi_{1,1} * \mu + \pi_{1,2} * \mu \\ 1,1: \quad & \pi_{1,1} * \lambda + \pi_{1,1} * \mu = \pi_0 * \lambda + \pi_{2,2} * \mu + \pi_{2,1} * \mu \\ 1,2: \quad & \pi_{1,2} * \lambda + \pi_{1,2} * \mu = \pi_{2,2} * \mu \\ 2,1: \quad & \pi_{2,1} * \lambda + \pi_{2,1} * \mu = \pi_{1,1} * \lambda + \pi_{3,1} * \mu + \pi_{3,2} * \mu \\ 2,2: \quad & \pi_{2,2} * \lambda + \pi_{2,2} * \mu + \pi_{2,2} * \mu = \pi_{1,2} * \lambda + \pi_{3,2} * \mu \\ 3,1: \quad & \pi_{3,1} * \lambda + \pi_{3,1} * \mu = \pi_{2,1} * \lambda + \pi_4 * \mu \\ 3,2: \quad & \pi_{3,2} * \lambda + \pi_{3,2} * \mu + \pi_{3,2} * \mu = \pi_{2,2} * \lambda + \pi_4 * \mu \\ 4: \quad & \pi_4 * \mu + \pi_4 * \mu + \pi_4 * \lambda = \pi_{3,1} * \lambda + \pi_{3,2} * \lambda + \pi_5 * 2\mu \\ 5: \quad & \pi_4 * \lambda = \pi_5 * 2\mu \end{aligned}$$

$$\pi_0 + \pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_{2,1} + \pi_{2,2} + \pi_{3,1} + \pi_{3,2} + \pi_4 + \pi_5 = 1.$$

Továbbra is egy egyenlettel bővült az egyenletrendszerünk. Ez a plusz egyenlet egyértelműen megadható az eddig látottak alapján is. Ha megfigyeljük, akkor az utolsó (új)

egyenletben mindig az előző állapotból (jelen esetben $j=4$) jön egy beérkezés (λ) és az adott állapotból (most $j=5$) érkezik egy-egy kiszolgálás (2μ). Az egyenletek tárgyalása kapcsán érdemes kitérni a forgalmi gyakorisági együttható (ρ) értékére is, amely egy pozitív szám. Ahogy fentebb is említettem, számos esetben választják meg ezt a paramétert 1-nél kisebbnek, hogy az adott rendszer „ne szálljon el”, tehát ne történjen az, hogy több ember érkezik be átlagosan óránként, mint amennyit ki tudnak szolgálni, mert ekkor felgyülemlik a sor. Ez a mi esetünkben egyelőre nem okoz gondot, hiszen a rendszer közgazdaságtani részének szemléltetése miatt csak bizonyos állapotig (általában $j=5$) írjuk fel a modelleket, amely miatt nem lehetséges az ügyfelek „kumulálódása”, hiszen szimplán nem fog tudni beérkezni az ügyfél a rendszer korlátossága miatt. Azonban korábban hosszasan írtam arról, hogy gyakorlatilag akármeddig felírhatjuk az állapotot időtől és energiától függően, hiszen egy bizonyos pont után a bekezdés elején leírt módszer alapján az összes egyenlet kvázi rekurzív módon megadható. Emiatt a hosszabb rendszerek esetében érdemes lehet a forgalmi gyakoriság értékét 1-nél kisebbre állítani. Mindazonáltal a mi modellünk azért előnyös, hiszen az összes állapotvalószínűség csak λ és μ függvénye, tehát e két változtatható paraméter segítségével különböző eseteket vizsgálhatunk meg, például a $\rho > 1$ esetet is. Most nézzük a $j=5$ állapotú rendszer megoldásait:

$$\pi_0 = \frac{2\mu^5(4\lambda^3 + 9\lambda^2\mu + 12\lambda\mu^2 + 8\mu^3)}{\lambda^8 + 5\lambda^7\mu + 15\lambda^6\mu^2 + 32\lambda^5\mu^3 + 52\lambda^4\mu^4 + 66\lambda^3\mu^5 + 58\lambda^2\mu^6 + 40\lambda\mu^7 + 16\mu^8}$$

$$\pi_{1,1} = \frac{2\lambda\mu^4(3\lambda^3 + 9\lambda^2\mu + 12\lambda\mu^2 + 8\mu^3)}{\lambda^8 + 5\lambda^7\mu + 15\lambda^6\mu^2 + 32\lambda^5\mu^3 + 52\lambda^4\mu^4 + 66\lambda^3\mu^5 + 58\lambda^2\mu^6 + 40\lambda\mu^7 + 16\mu^8}$$

$$\pi_{1,2} = \frac{2\lambda^4\mu^4}{\lambda^8 + 5\lambda^7\mu + 15\lambda^6\mu^2 + 32\lambda^5\mu^3 + 52\lambda^4\mu^4 + 66\lambda^3\mu^5 + 58\lambda^2\mu^6 + 40\lambda\mu^7 + 16\mu^8}$$

$$\pi_{2,1} = \frac{2\lambda^2\mu^3(2\lambda^3 + 7\lambda^2\mu + 12\lambda\mu^2 + 8\mu^3)}{\lambda^8 + 5\lambda^7\mu + 15\lambda^6\mu^2 + 32\lambda^5\mu^3 + 52\lambda^4\mu^4 + 66\lambda^3\mu^5 + 58\lambda^2\mu^6 + 40\lambda\mu^7 + 16\mu^8}$$

$$\pi_{2,2} = \frac{2\lambda^4\mu^3(\lambda + \mu)}{\lambda^8 + 5\lambda^7\mu + 15\lambda^6\mu^2 + 32\lambda^5\mu^3 + 52\lambda^4\mu^4 + 66\lambda^3\mu^5 + 58\lambda^2\mu^6 + 40\lambda\mu^7 + 16\mu^8}$$

$$\pi_{3,1} = \frac{2\lambda^3\mu^2(\lambda^3 + 4\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 8\mu^3)}{\lambda^8 + 5\lambda^7\mu + 15\lambda^6\mu^2 + 32\lambda^5\mu^3 + 52\lambda^4\mu^4 + 66\lambda^3\mu^5 + 58\lambda^2\mu^6 + 40\lambda\mu^7 + 16\mu^8}$$

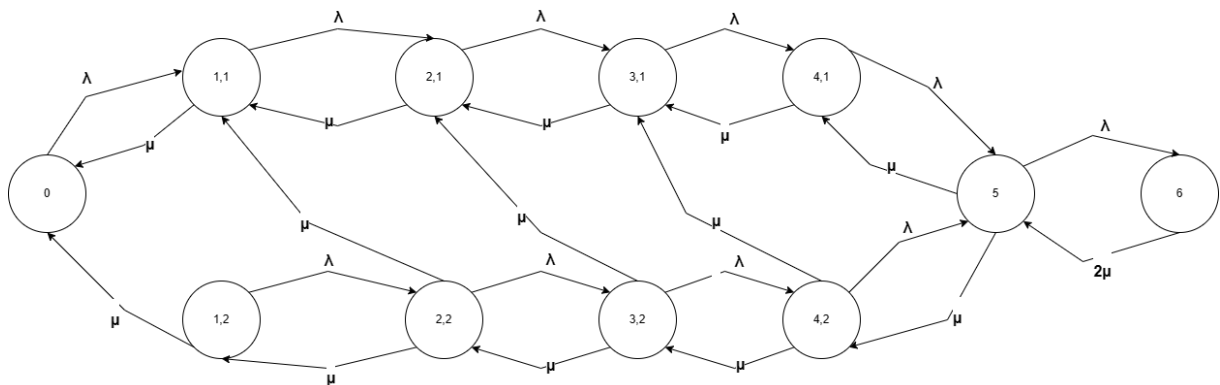
$$\pi_{3,2} = \frac{2\lambda^4\mu^2(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)}{\lambda^8 + 5\lambda^7\mu + 15\lambda^6\mu^2 + 32\lambda^5\mu^3 + 52\lambda^4\mu^4 + 66\lambda^3\mu^5 + 58\lambda^2\mu^6 + 40\lambda\mu^7 + 16\mu^8}$$

$$\pi_4 = \frac{2\lambda^4\mu(\lambda^3 + 3\lambda^2\mu + 5\lambda\mu^2 + 4\mu^3)}{\lambda^8 + 5\lambda^7\mu + 15\lambda^6\mu^2 + 32\lambda^5\mu^3 + 52\lambda^4\mu^4 + 66\lambda^3\mu^5 + 58\lambda^2\mu^6 + 40\lambda\mu^7 + 16\mu^8}$$

$$\pi_5 = \frac{\lambda^5(\lambda^3 + 3\lambda^2\mu + 5\lambda\mu^2 + 4\mu^3)}{\lambda^8 + 5\lambda^7\mu + 15\lambda^6\mu^2 + 32\lambda^5\mu^3 + 52\lambda^4\mu^4 + 66\lambda^3\mu^5 + 58\lambda^2\mu^6 + 40\lambda\mu^7 + 16\mu^8} \cdot$$

A foksám emelkedése, illetve a nevezők egyezősége továbbra is fennáll. Utóbbi úgy látszik, hogy egy fix jellemzője/tulajdonsága az ilyen modelleknek.

Végül pedig a fejezet zárásaként vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a beérkező ügyfél *hajlandó három embert is megvárni*. Ez természetesen eggyel tovább tolja a modellünket, illetve a modellt „leghamarabb”, azaz a legkisebb számú állapotra a $j=5$ esetben tudjuk felírni, amely egyáltalán nem gond, ugyanis egyrészt idáig érdekes kérdés megvizsgálni a modellt, másrészt a modell további része a korábban tárgyalt rekurzív módon adja magát. A modellt szemléltető 5. ábra itt található:



5. ábra: *hármát vár*, forrás: saját szerkesztés

A jelölések az eddigiekhez hasonlóan értelmezendők. Nézzük meg azonban a $j=4$ állapot szétválását a 4,1 és 4,2 esetre. Ez nyilván azért történt, mert eggyel több várakozást feltételezünk, mint az előző modellben. Nézzük meg például a 4,2 esetből történő kiszolgálást, amely után visszajutunk a 3,1 állapotba. A 4,2 állapotban négy ügyfél van a rendszerben, ebből egy a fizetős kasszánál, három pedig az olcsó kasszánál és ebből a háromból nyilván egy kiszolgálás alatt áll, a maradék kettő pedig várakozik. Ezután megtörténik a kiszolgálás a drága kasszánál (ezt jelképezi a nyíl és rajta a μ), így már csak három ember lehet a modellben, akik mind az olcsó kasszánál vannak. A korábbiakban tárgyalt szabály itt is érvényes, miszerint $3+2$, tehát minimum a $j=5$ állapotra lehet felírni a modellt, hiszen matematikailag és

közgazdaságtanilag is így van értelme. Matematikai szempontból azért, mert ennél kevesebb pontra nem lennének konkrét megoldások (például bizonyos állapotvalószínűségek 0 értékűek lennének), közgazdaságtani szempontból pedig azért, mert feltettük, hogy három ügyfelet még hajlandó megvárni a beérkező fogyasztó. Illetve logikailag sem láthatjuk értelmét, hiszen felírhatjuk ugyan kevesebb állapotra is, tehát „elvághatjuk” a rendszert, azonban akkor nem tudna annyit várni, mert nem fordulhat elő az a bizonyos eset, mert hamarabb érünk a rendszer „végéhez”. Nézzük meg tehát ezt a rendszert a $j=5$ állapotra. Az egyenletrendszer az alábbiak szerint alakul:

$$0: \quad \pi_0 * \lambda = \pi_{1,1} * \mu + \pi_{1,2} * \mu$$

$$1,1: \quad \pi_{1,1} * \lambda + \pi_{1,1} * \mu = \pi_0 * \lambda + \pi_{2,2} * \mu + \pi_{2,1} * \mu$$

$$1,2: \quad \pi_{1,2} * \lambda + \pi_{1,2} * \mu = \pi_{2,2} * \mu$$

$$2,1: \quad \pi_{2,1} * \lambda + \pi_{2,1} * \mu = \pi_{1,1} * \lambda + \pi_{3,1} * \mu + \pi_{3,2} * \mu$$

$$2,2: \quad \pi_{2,2} * \lambda + \pi_{2,2} * \mu + \pi_{2,2} * \mu = \pi_{1,2} * \lambda + \pi_{3,2} * \mu$$

$$3,1: \quad \pi_{3,1} * \lambda + \pi_{3,1} * \mu = \pi_{2,1} * \lambda + \pi_{4,1} * \mu + \pi_{4,2} * \mu$$

$$3,2: \quad \pi_{3,2} * \lambda + \pi_{3,2} * \mu + \pi_{3,2} * \mu = \pi_{2,2} * \lambda + \pi_{4,2} * \mu$$

$$4,1: \quad \pi_{4,1} * \mu + \pi_{4,1} * \lambda = \pi_{3,1} * \lambda + \pi_5 * \mu$$

$$4,2: \quad \pi_{4,2} * \lambda + \pi_{4,2} * \mu + \pi_{4,2} * \mu = \pi_{3,2} * \lambda + \pi_5 * \mu$$

$$5: \quad \pi_5 * \mu + \pi_5 * \mu = \pi_{4,1} * \lambda + \pi_{4,2} * \lambda$$

$$\pi_0 + \pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_{2,1} + \pi_{2,2} + \pi_{3,1} + \pi_{3,2} + \pi_{4,1} + \pi_{4,2} + \pi_5 = 1 \quad .$$

Ez az egyenletrendszer már jelentősen hosszabb és bonyolultabb összehasonlítva mondjuk akár a kiinduló M/M/2 modellel vagy a „nullát várós” modellből a $j=3$ állapotra felírt esettel, de a lényeg továbbra is az, hogy a két paraméter függvényében egyértelmű megoldásokat kapunk majd az állapotvalószínűségekre, illetve, hogy az egyenletrendszer a nagyságától függetlenül továbbra is lineáris és emiatt könnyebben átlátható. Ez már tehát egy 11 egyenletből álló lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldása itt található:

$$\pi_0 = \frac{\mu^5(5\lambda^4 + 14\lambda^3\mu + 25\lambda^2\mu^2 + 28\lambda\mu^3 + 16\mu^4)}{\lambda^9 + 6\lambda^8\mu + 20\lambda^7\mu^2 + 45\lambda^6\mu^3 + 73\lambda^5\mu^4 + 88\lambda^4\mu^5 + 83\lambda^3\mu^6 + 69\lambda^2\mu^7 + 44\lambda\mu^8 + 16\mu^9}$$

$$\pi_{1,1} = \frac{\lambda\mu^4(4\lambda^4 + 14\lambda^3\mu + 25\lambda^2\mu^2 + 28\lambda\mu^3 + 16\mu^4)}{\lambda^9 + 6\lambda^8\mu + 20\lambda^7\mu^2 + 45\lambda^6\mu^3 + 73\lambda^5\mu^4 + 88\lambda^4\mu^5 + 83\lambda^3\mu^6 + 69\lambda^2\mu^7 + 44\lambda\mu^8 + 16\mu^9}$$

$$\pi_{1,2} = \frac{\lambda^5 \mu^4}{\lambda^9 + 6\lambda^8 \mu + 20\lambda^7 \mu^2 + 45\lambda^6 \mu^3 + 73\lambda^5 \mu^4 + 88\lambda^4 \mu^5 + 83\lambda^3 \mu^6 + 69\lambda^2 \mu^7 + 44\lambda \mu^8 + 16\mu^9}$$

$$\pi_{2,1} = \frac{\lambda^2 \mu^3 (3\lambda^4 + 12\lambda^3 \mu + 25\lambda^2 \mu^2 + 28\lambda \mu^3 + 16\mu^4)}{\lambda^9 + 6\lambda^8 \mu + 20\lambda^7 \mu^2 + 45\lambda^6 \mu^3 + 73\lambda^5 \mu^4 + 88\lambda^4 \mu^5 + 83\lambda^3 \mu^6 + 69\lambda^2 \mu^7 + 44\lambda \mu^8 + 16\mu^9}$$

$$\pi_{2,2} = \frac{\lambda^5 \mu^3 (\lambda + \mu)}{\lambda^9 + 6\lambda^8 \mu + 20\lambda^7 \mu^2 + 45\lambda^6 \mu^3 + 73\lambda^5 \mu^4 + 88\lambda^4 \mu^5 + 83\lambda^3 \mu^6 + 69\lambda^2 \mu^7 + 44\lambda \mu^8 + 16\mu^9}$$

$$\pi_{3,1} = \frac{\lambda^3 \mu^2 (2\lambda^4 + 9\lambda^3 \mu + 21\lambda^2 \mu^2 + 28\lambda \mu^3 + 16\mu^4)}{\lambda^9 + 6\lambda^8 \mu + 20\lambda^7 \mu^2 + 45\lambda^6 \mu^3 + 73\lambda^5 \mu^4 + 88\lambda^4 \mu^5 + 83\lambda^3 \mu^6 + 69\lambda^2 \mu^7 + 44\lambda \mu^8 + 16\mu^9}$$

$$\pi_{3,2} = \frac{\lambda^5 \mu^2 (\lambda^2 + 2\lambda \mu + 2\mu^2)}{\lambda^9 + 6\lambda^8 \mu + 20\lambda^7 \mu^2 + 45\lambda^6 \mu^3 + 73\lambda^5 \mu^4 + 88\lambda^4 \mu^5 + 83\lambda^3 \mu^6 + 69\lambda^2 \mu^7 + 44\lambda \mu^8 + 16\mu^9}$$

$$\pi_{4,1} = \frac{\lambda^4 \mu (\lambda^4 + 5\lambda^3 \mu + 13\lambda^2 \mu^2 + 20\lambda \mu^3 + 16\mu^4)}{\lambda^9 + 6\lambda^8 \mu + 20\lambda^7 \mu^2 + 45\lambda^6 \mu^3 + 73\lambda^5 \mu^4 + 88\lambda^4 \mu^5 + 83\lambda^3 \mu^6 + 69\lambda^2 \mu^7 + 44\lambda \mu^8 + 16\mu^9}$$

$$\pi_{4,2} = \frac{\lambda^5 \mu (\lambda^3 + 3\lambda^2 \mu + 5\lambda \mu^2 + 4\mu^3)}{\lambda^9 + 6\lambda^8 \mu + 20\lambda^7 \mu^2 + 45\lambda^6 \mu^3 + 73\lambda^5 \mu^4 + 88\lambda^4 \mu^5 + 83\lambda^3 \mu^6 + 69\lambda^2 \mu^7 + 44\lambda \mu^8 + 16\mu^9}$$

$$\pi_5 = \frac{\lambda^5 (\lambda^4 + 4\lambda^3 \mu + 9\lambda^2 \mu^2 + 12\lambda \mu^3 + 8\mu^4)}{\lambda^9 + 6\lambda^8 \mu + 20\lambda^7 \mu^2 + 45\lambda^6 \mu^3 + 73\lambda^5 \mu^4 + 88\lambda^4 \mu^5 + 83\lambda^3 \mu^6 + 69\lambda^2 \mu^7 + 44\lambda \mu^8 + 16\mu^9}$$

Látható, hogy ebben az esetben az egyes állapotvalószínűségekre kapott megoldások tört alakban felírva már elég magas fokú polinomokat tartalmaznak, de ez a lényegen nem változtat, tehát ezen eredmények továbbra is egyértelműek a két paraméter függvényében, amelyek változtathatók is akár, illetve a modell tetszőleges nagyságúra bővíthető (ekkor már ρ figyelembevételével természetesen), hiszen mindig ilyen típusú lineáris egyenletrendszert kapunk, ha felírjuk az egyes állapotokra vonatkozó egyenleteket.

III. Eredmények

Ebben a fejezetben szeretném összefoglalni a fentebb részletesen taglalt módszertan alkalmazásából származó eredményeimet. Elsőként kezdjük magukkal az egyes rendszerekkel, illetve a hozzájuk tartozó modellekkel, amelyek mind matematikai, mind közgazdaságtani szempontból konkrét eredménynek számítanak. Első eredményem tehát a modellem matematikai része, amely során kitérek az alkalmazott módszertan fontosságára, illetve a kapott eredményre matematikai szempontból. Ez magában foglalja a rendszer felírását, illetve a felírt egyenletrendszer megoldhatóságát is, illetve a kapott eredmény reprodukálhatóságát és alkalmazhatóságát. Ezenfelül dolgozatom második eredménye az alkotott modellem közgazdaságtani értelmezése, amely során megvizsgálom és értelmezem a kapott eredményeket. Ez tartalmazza a hasznossági függvénybe való behelyettesítést, illetve az egyes rendszerekben felírt profitok kiszámolását, majd összehasonlítását.

III.1. A modell matematikai vizsgálata

A kutatásom első és egyik legfontosabb eredménye tehát a matematikai és közgazdaságtani alapú rendszerek és a hozzájuk tartozó modellek. Ahogy korábban láthattuk, kaptunk több eltérő várakozási szinthez társított rendszert, amelyeken belül több különböző állapotra is felírtunk modelleket. Ezek a modellek egy új megközelítésből vizsgálják a klasszikus sorbanállási modelleket, amelyhez hozzátartoznak az egyes rendszerek közgazdaságtani jelentőségei is. Kaptunk tehát egy komplex matematikai-közgazdaságtani modellt, amely változtatható paraméterű. Ennek köszönhetően több eltérő esetet is tudunk vele szemléltetni. Például újra kihangsúlyoznám a forgalmi gyakorisági együttható jelenlegi flexibilitását, amely a modell véges erőforrásának köszönhető. Ez számunkra azért előnyös, mert a standard, szakirodalomban széleskörűen alkalmazott módszertant (mely szerint ez az együttható mindig kisebb, mint egy) felülmúlja a modellünk, hiszen ugyanúgy tudjuk ezt a $\rho < 1$ szabályt mi is alkalmazni a modellünkre gond nélkül, azonban emellett a többi, nem standard esetet (pl.: $\rho > 1$) is képes kezelni a modellünk. Ez a flexibilitás azért hasznos számunkra, mert mindkét eltérő esetet tudjuk modellezni, ezáltal egy pontosabb és realisabb képet adhatunk a való életben végbemenő sorbanállási rendszerekre épülő helyzetekről. Nézzünk mindkét esetre egy-egy példát.

A standard eset az, amikor a forgalmi gyakorisági együttható értéke kisebb, mint egy. Ez az együttható, ahogy korábban is említettem a rendszer átlagos leterheltségét vagy kihasználtságát jellemzi. Ha ez az együttható kisebb, mint egy az azt jelenti, hogy a rendszer kapacitása nagyobb, mint a terheltsége, ezért a rendszer „elbírja” az átlagosan beérkező

ügyfelek fogadását és kiszolgálását egyaránt. Például tegyük fel, hogy egy fodrászatban két fodrász dolgozik ugyanolyan sebességgel és óránként együtt átlagosan négy ügyfélnek tudják levágni a haját, tehát „kiszolgálni” őket, azonban óránként átlagosan csak három ügyfél érkezik, mert mondjuk hétköznap van és ez egy „lazább” nap. Ez számokkal kifejezve azt jelenti, hogy $\lambda=3$ és $\mu=4$, tehát $\rho=3/4$. Ebben az esetben dolgozhatnak akármeddig a fodrászok, hiszen a rendszer nem tud elszállni, mert több ügyfelet tudnak átlagosan kiszolgálni, mint amennyi beérkezik. Ezzel ellentétben a másik eset, amikor a kihasználtsági együttható értéke nagyobb, mint egy okozhatja az adott rendszer „elszállását” hosszú távon, hiszen nagyobb a rendszer leterheltsége, mint a kapacitása. Nézzünk erre is egy hétköznapi példát. Tegyük fel, hogy van egy megbízható és jól dolgozó autószerelő, aki nagyon népszerű és így állandóan rengeteg autó érkezik hozzá. A példa egyszerűségéért tekintsünk el a különböző típusú és nehézségű kocsik javítási idejétől. Mondjuk ez a szerelő naponta átlagosan négy autót tud megszerelni, azonban valamilyen okból fogva (például a főnöke vállalja el a sok megbízást a szerelő tudta nélkül) naponta átlagosan hat autó érkezik a műhelybe, tehát $\lambda=6$, $\mu=4$ és $\rho=6/4=1,5$. Tehát másfélszer annyi autó érkezik a szerelőhöz, mint amennyit meg tud csinálni. Ez azt jelenti, hogy két héten belül tornyosulni fognak az autók a műhelyben, de még az utcán is, tehát a rendszer „elszáll”. Azonban ez a nagy mértékű elszállítás azért történhetett meg, mert hagytuk a rendszernek egyrészt azzal, hogy a forgalmi gyakorisági együttható értéke több lett, mint egy, illetve hosszabb távon, azaz nagyobb számú állapotra írtuk fel a rendszert (két hét munkanapot tekintve 10 nap, tehát a $j=10$ állapotban is megvizsgáltuk a rendszert). De nézzük meg a fenti példáinkat, ahol én legtöbbször a $j=5$ állapotig bezárólag írtam fel az egyenletet pont azért, hogy a $\rho>1$ esetben se szálljon el a rendszer. Erre példa lehet egy fogorvos rendelője, ahol szintén több páciens van, mint amennyit óránként el tud látni. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy például aki 13:00-ra érkezett időponttal egy 20 perces beavatkozásra az akár 15:00-kor is végezhet, hiszen akkora csúszásban van az orvos, hogy elkezdett a rendszer feltorlódni. Azonban ez a torlódás véges, hiszen időpont szerint a fogorvos csak mondjuk 17:00-ig fogad betegeket, tehát háromórás csúszással is végez 20:00-ra. Itt a végzés azt jelenti, hogy minden aznapi beteg el van látva. Vegyük észre, hogy a korábban taglalt tény, miszerint nem engedjük a rendszert hosszú távon folyamatosan működni, tehát csak kis számú állapotra írjuk fel az egyenleteket a példában úgy valósul meg, hogy a fogorvos csak 17:00-ig ad időpontot, tehát véges számú páciens fogad.

A modellt illetően érdemes kitérni a modellt jellemző egyenletrendszer tulajdonságaira. Ahogy korábban is írtam, a határértékes definíció bevezetésének köszönhetően

differentiálegyenletek helyett egyszerű, lineáris egyenleteket kapunk, ha felírjuk a modell összefüggéseit. A modell egyik nagy előnye, hogy egyrésztől tetszőleges számú állapotra felírható, tehát $j=10$, $j=100$, illetve $j=1000$ állapotra is felírhatók az egyenletek. Sőt elméletileg megszámlálhatóan végtelen darab egyenletből álló egyenletrendszert is fel tudunk írni. Másrésztől tetszőleges számú fogyasztói várakozást feltételezve írhatók fel az egyenletek. Én a rendszerek szemléltetése miatt felírtam 0,1,2 és 3 várakozást feltételezve a fogyasztó részéről, de ez a szám is természetesen fokozható tetszőleges mértékben. Itt azonban megemlíteném, hogyha tovább növeljük a várakozások és ezáltal az állapotok számát, akkor hosszú távon figyelniünk kell a ρ értékére is, hiszen nagyobb egyenletrendszerek esetén már elszállhat a rendszer, ha egynél nagyobbra választjuk meg az együttható értékét. Azonban még ekkor is elmondhatjuk, hogy egy szinte végtelenségig szimulálható és felírható lineáris egyenletrendszert kaptunk, amely a standard esetre ($\rho < 1$) továbbra is bármilyen gond nélkül alkalmazható és értelmezhető. Tehát az egyenletrendszerünket n darab lineáris egyenlet alkotja. Fontos kiemelni, hogy minden esetben ugyanannyi lineárisan független egyenletünk van, mint ismeretlenünk. Ennek köszönhetően fel tudtuk írni a fenti összes modell esetében az egyes állapotvalószínűségeket kizárólag λ és μ függvényében. Ez azért kiemelkedő, hiszen λ és μ változtatásával különböző szituációkat szimulálhatunk és vizsgálhatjuk meg az egyes rendszerek stacionárius állapotvalószínűségeit adott λ és μ értékek mellett. Továbbá az egyenletrendszer reprodukálhatósága mellett szól a korábbiakban felfedezett egyfajta rekurzivitás is. Ugyanis észrevehetőek bizonyos szabályszerűségek a modellekben, amelyek segítségével, ha nem is teljesen rekurzív módon, de néhány szabályt észben tartva könnyedén felírhatjuk a modellek egyenletét és közben ezek az észrevételek egyfajta ellenőrzési segítségként is szolgálhatnak. A modellünk tehát alkalmas különböző tulajdonságú sorbanállási rendszerek jellemzésére és ezáltal a hozzájuk tartozó egyenletrendszer felírására és egyértelmű megoldására.

III.2. A modell közgazdaságtani értelmezése

Ezután nézzük meg az egyes modellek eredményeit közgazdaságtani szempontból is, beleértve a fogyasztót és a vállalatot is. Dolgozatom második eredménye tehát a modellem közgazdaságtani kiértékelése. Először kezdjük a fogyasztókkal. Ebben az esetben az egyes rendszerek egyes állapotait fogom megvizsgálni a fogyasztó hasznossági függvényébe történő behelyettesítéssel. Emlékeztetőül, a fogyasztó hasznossági függvénye az alábbi alakot ölti:

$$U(t, p) = \frac{1}{t} - P * \tau .$$

Ebbe a hasznossági függvénybe szeretnénk behelyettesíteni a t és P változók helyére. A t , tehát az eltöltött idő a kiszolgálás függvényében adható meg. Itt azt kell kiszámolnunk, hogy a fogyasztó az adott rendszer adott állapotában mennyi időt tölt a rendszerben beleértve az ő kiszolgálását is. Például, ha üres rendszerbe ($j=0$ állapot) érkezik be az ügyfél, akkor a t értéke $1/\mu$, ugyanis ebben az esetben nem kell megvárnia senkit és csak az ő kiszolgálása lesz az eltöltött idő. Ezután vizsgáljuk meg az árat is, tehát P értékét. Az ár a korábbi feltevés alapján az olcsó kasszánál egységnyi, a drága kasszánál pedig bővel egy $(1+\alpha)$ szorzóval. Emellett természetesen ott van még a τ paraméter értéke, de azt egyelőre a számítások erejéig hagyjuk meg ilyen formában. Miután behelyettesítettünk a hasznossági függvényekbe mind az olcsó kasszát, mind a drága kasszát feltételezve kiszámolhatjuk az egyes α értékeket a kiszolgálás függvényében. Minden egyes állapotban megállapítjuk továbbá, hogy a fogyasztónak melyik kassza választása a preferált és ennek megfelelően írjuk fel az egyenlőtlenségeket. Tehát arra az oldalra „mutat” a reláció, amelyik kassza preferált. Az M/M/2 esetben nincsen nem beszélhetünk olcsó és drága kasszákról, tehát abban a modellben nincs értelme megvizsgálni az megspórolt idő és a felár közötti *trade-off* viszonyát, mert nincs feláras kassza. Kezdjük tehát a legelső esettel, ahol a fogyasztó nem hajlandó várni egyetlen egy ügyfelet sem. Az egyenletek az alábbiak szerint alakultak:

$$0: \quad \mu - 1 * \tau > \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Láthatjuk, hogy ebben az egyenletben μ egyből kiesik, így értelmes megoldást nem kapunk. Ez nem meglepő, ugyanis ebben az esetben a fogyasztó egyértelműen tud dönteni a két eset között. Vagy elmegy várakozás nélkül a felár nélküli kasszához és egyből kiszolgálják, vagy elmegy egyből a feláras kasszához és ott is egyből kiszolgálják. Tehát ugyanannyi idő alatt végezne mindkét kassza esetében, ezért nyilvánvalóan az olcsó kasszához fog menni. Itt látható már az egyenlőtlenség felírásakor is a *trade-off* hiánya.

Nézzük meg a következő, tehát az 1,1 állapot esetét, ahol már látszódnia fog a két tényező közötti átváltás:

$$1,1: \quad \frac{\mu}{2} - 1 * \tau < \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Ebben az egyenletben a reláció jel már a drága felé mutat, hiszen a fogyasztó azzal a helyzettel szembesül a belépéskor, hogy 1 ember van az olcsó kasszánál, viszont a drágánál senki. Mivel

a fogyasztó ebben a rendszerben nagyon türelmetlen, tehát 0 ügyfelet hajlandó megvárni, ezért a feláras kasszát választja. Az egyenletet α -ra rendezve kapjuk:

$$\alpha < \frac{\mu}{2 * \tau} .$$

Ezenkívül nézzük meg az 1,2 esetet is, tehát amikor 1 ügyfél van a rendszerben, aki a drága kasszájánál van. Az egyenlet az alábbi formában írható fel:

$$1,2: \quad \mu - 1 * \tau < \frac{\mu}{2} - (1 + \alpha) * \tau .$$

Ezt az egyenletet ugyan megoldhatjuk, de szinte felesleges. Ugyanis itt is látszik az, hogy az olcsó kassa üres, míg a drága kasszájánál állnak. Tehát a fogyasztó vagy egyből elmegy az olcsó kasszához, ami üres, vagy elmegy a fizetős kasszához, ahol vannak előtte, tehát várnia kellene, amit viszont nem hajlandó ebben a rendszerben. Ezért tehát egyértelműen az olcsó kasszához fog menni.

Ezután vizsgáljuk meg a 2-es állapotot. Ebben az esetben tehát már 2 ügyfél van a rendszerben, mielőtt beérkezünk. Ez csak úgy lehetséges, hogy mindkét kasszájánál 1-1 ügyfél van, hiszen az első beérkező ügyfél beáll az olcsó kasszához, a második nagyon türelmetlen, így a drága kasszát választja. Ekkor tehát bárhova is állunk mindenképpen kellene egyet várnunk, azonban ezt ebben a rendszerben nem tehetjük meg. Az egyenlet felírásakor továbbá kiesne a kiszolgálási együttható is, amelyre viszont szükségünk van. Tehát ebben az állapotban és innen kezdve már nem értelmes megvizsgálni a rendszer adta *trade-off* viszonyokat.

Összefoglalva tehát a „nullás rendszer” számításait azt kaptuk, hogy

$$\alpha < \frac{\mu}{2 * \tau} .$$

Emellett általánosságban két állítást mondhatunk el erről és a további rendszerekről. Egyrészt azt, hogy *minden rendszer esetében csak addig érdemes megvizsgálni az egyes átváltásokat, amíg a rendszert „két ágra bontható”, tehát amíg külön modellezzük az olcsó és a drága kasszát.* Utána már láthatjuk, hogy a későbbi állapotok nem következnek be, hiszen egyszerűen a fogyasztó nem hajlandó annyi ügyfelet kivárni maga előtt a rendszerben. Ezenkívül azt is kijelenthetjük, hogy a rendszerek esetében *a „k,2” (például 1,2; 2,2; 3,2) állapotokra nincs értelme felírni az egyenlőtlenséget, hiszen egyszerűen nincsen trade-off a megtakarított idő és a felár között.* Ezt már most beláttuk, azonban a soron következő

rendszerek esetében is látni fogjuk, hogy nem lesz értelme felírni az összefüggést, amelyet majd ezen állítás alapján röviden indokolni fogok.

Ezt követően vizsgáljuk meg következő rendszerünket, amelyben a beérkező ügyfél már hajlandó egyet várni. Ekkor az alábbi egyenlőtlenségeket tudjuk felírni:

$$0: \quad \mu - 1 * \tau > \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Ha összehasonlítjuk a kapott egyenlőtlenséget az előző rendszer azonos pontjában felírt összefüggéssel, akkor láthatjuk, hogy ugyanazt kaptuk, hiszen attól mert egy bizonyos mértékkel türelmesebb a fogyasztó nem fog módosulni a kezdeti rendszer állapota. Azonban, ha a következő állapotra írjuk fel az egyenlőtlenséget, akkor már értelmezhető eredményt kapunk:

$$1,1: \quad \frac{\mu}{2} - 1 * \tau > \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Vegyük észre, hogy ez tulajdonképpen megegyezik az előző rendszer ezen állapothoz tartozó egyenlőtlenséggel azzal a különbséggel, hogy a reláció megfordult. Ugyanis ebben a rendszerben már hajlandó várni egy ügyfelet a beérkező fogyasztó, tehát, ha áll egy ember az olcsó kasszánál, akkor nem rohan el egyből a feláras kasszához, hanem türelmének köszönhetően kivárja. Ennek megfelelően a rendezett összefüggés is így alakult:

$$\alpha > \frac{\mu}{2 * \tau} .$$

A következő állapot az 1,2 állapot lenne, azonban a fentebb taglaltak miatt ezt az állapotot nem érdemes megvizsgálni, ugyanis láthattuk, hogy nincsen *trade-off* a két változó között. Azonban a 2,1 állapot már egy izgalmasabb kérdés, amelynél egyértelműen lesz átváltás, tehát fel kell írunk az összefüggést a két kasszához:

$$2,1: \quad \frac{\mu}{3} - 1 * \tau < \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Itt már szépen látszik a két kassa közötti különbség. Azért kellett felírni a $\mu/3$ törtet, mert az olcsó kassa esetében a saját kiszolgálását is beleértve hármat kellett volna várnia az ügyfélnek, mert ebben az esetben mindkét ügyfél az olcsó kasszánál van, hiszen a második ügyfél is beáll oda a türelmének köszönhetően. Tehát vagy vár kettőt extra költség nélkül, vagy egyből beáll a feláras kasszához. Mivel türelme nem teszi lehetővé a fogyasztónak ezt a mértékű várakozást, ezért a drága kasszához fog beállni, tehát a reláció is ennek megfelelően a drága kassa felé mutat. Az egyenlőtlenség megoldása α -ra rendezve:

$$\alpha < \frac{2 * \mu}{3 * \tau} .$$

Ezzel a megoldással tulajdonképpen a rendszer végéhez is értünk, ugyanis a 2,2 esetet úgyszintén nem fontos megvizsgálni, hiszen ebben a rendszerben ugyanannyit kellene várnia a beérkező ügyfélnek mind a normál, mind a feláras kasszára, amelyből nyilván az előbbit választja, tehát nincs jelen *trade-off* a rendszerben. Ezenfelül a 3 állapotra sem érdemes felírni a rendszert, ugyanis ebben az állapotban 2 ügyfél tartózkodik az olcsó kasszánál, illetve egy a drága kasszánál. Ekkor vagy kivár két ügyfelet (amelyet türelmetlensége nem enged) vagy beáll a drága kasszához. Azonban a rendszer feltevése miatt csak a drága kasszához mehet, hiszen kettőt már nem hajlandó várni. Tehát itt sincs igazi „dilemma” a két alternatívát illetően. Más szóval mondva nem hezitál a fogyasztó a döntését illetően, mert nincs, ami okot adna neki erre. Ebben az esetben tehát az alábbi relációval összegezhetjük a rendszert:

$$\frac{\mu}{2 * \tau} < \alpha < \frac{2 * \mu}{3 * \tau} .$$

Most pedig értékeljük ki következő rendszerünket, amelyben a fogyasztó már hajlandó kettőt várni. Ebben az esetben a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$0: \quad \mu - 1 * \tau > \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Megfigyelhetjük, hogy a legelső egyenletünk teljesen megegyezik az előző rendszerben lévővel, illetve a legelső rendszerben lévőből is csak a reláció iránya különbözteti meg. Nézzük meg ezután az 1,1 állapotra az összefüggést:

$$1,1: \quad \frac{\mu}{2} - 1 * \tau > \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Ez is teljes mértékben azonos az előzőkkel, hiszen a türelmetlenség megváltozása csak egy bizonyos (későbbi) pont után változtatja meg az összefüggéseket. Az 1,2 állapotra a fentebb részletesen tárgyalt okok miatt nincs értelme felírni az összefüggést, ezért a következő ilyen állapotunk a 2,1 eset, amely esetében az alábbi formában írható fel az egyenlőtlenség:

$$2,1: \quad \frac{\mu}{3} - 1 * \tau > \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Itt jön el az első változás az előző rendszerhez képest, ahol az egyenletek továbbra is megegyeznek, azonban a reláció megfordul az „extra embernyi” türelemnek köszönhetően, hiszen jelen esetben a rendszerbe beérkező ügyfél hajlandó megvárni az előtte lévő 2 ügyfelet

az olcsó kasszánál, tehát nem fog elmenni a drágához. Ekkor a fentebb leírt eredményt kapjuk átrendezve, azonban fordított relációs jellel:

$$\alpha > \frac{2 * \mu}{3 * \tau} .$$

A 2,2 rendszer érthető okokból történő kihagyása után nézzük meg a 3,1 állapotot. Ez még nem szerepelt az előző esetben, tehát azt sejtethetjük, hogy itt is kapni fogunk egy értelmes és használható eredményt. Az átváltások közötti összefüggés az alábbi alakot ölti:

$$\frac{\mu}{4} - 1 * \tau < \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Ebben az esetben már észrevehető, hogy van értelme elgondolkoznia a fogyasztónak a két kassza között, ugyanis az olcsó esetében 3 ügyfél van előtte, míg az üres kasszánál nincs senki, mert az ügyfél előtt beérkező még éppen a türelmének „határán” volt, tehát ő még hajlandó kivárni az előtte sorban álló két ügyfelet. Mivel az olcsó kasszánál lévő várakozás meghaladja a türelmi szintjét, ezért a drága kasszához áll be, amelyet a relációs jel állása is tükröz. α -ra megoldva és átrendezve az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\alpha < \frac{3 * \mu}{4 * \tau} .$$

Ezzel a rendszer megoldásait le is zárhatjuk, ugyanis a 3,2 és 4 állapotok ilyen szempontból nem értelmesek, hiszen előbbi esetében szóba sem jön a két tényező közötti átváltás, utóbbi esetében pedig egyértelműen a drága kasszához megy, mert az olcsónál három ügyfelet kellene megvárni, amelyet türelmetlensége miatt nem tehet meg. Úgy néz ki, hogy az ilyen összefüggések felírásakor mindig csak egy újabb tagot kell teljesen felírni. Általánosságban azt mondhatjuk tehát, hogy az ilyen rendszerekben az első néhány megoldás azonos lesz, illetve az utolsó előtti (az előző állapot utolsó összefüggése) értelmes állapot esetében megfordul a reláció, illetve az utolsó egyenlőtlenség lesz teljesen új.

Végül a fogyasztók részének lezárásaként nézzük meg az utolsó és egyben „legbővebb” rendszerünket, ahol feltesszük, hogy a fogyasztó hajlandó három ügyfelet is megvárni. Előzetesen azt mondhatjuk tehát, hogy a fentebb megállapított összefüggések alapján a 0; 1,1 és 2,1 állapotokra biztosan, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk (még relációban is), viszont a 3,1 állapot esetében meg fog fordulni a reláció, illetve lesz egy teljesen új állapot, a 4,1 állapot. Emellett természetesen az 1,2; 2,2; 3,2; 4,2 és 5 állapotokra a fentiek alapján nem lesz értelme felírni az egyenlőtlenségeket. Nézzük meg tehát a fontosabb állapotok összefüggéseit:

$$0: \quad \mu - 1 * \tau > \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

$$1,1: \quad \frac{\mu}{2} - 1 * \tau > \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

$$2,1: \quad \frac{\mu}{3} - 1 * \tau > \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Az eddigi egyenletek továbbra is ugyanazok, ezért ezek megoldásait nem írom le külön. Mindazonáltal a korábban említett 3,1 állapotnál azt vártuk, hogy megfordul az egyenlőtlenség iránya a türelem mértéke miatt, tehát újra az olcsó kassza lesz a preferált. Az alábbi egyenlet ezt alátámasztja:

$$\frac{\mu}{4} - 1 * \tau > \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Valóban igazolódott sejtésünk, ennek megfelelően a megoldás:

$$\alpha > \frac{3 * \mu}{4 * \tau} .$$

Végül nézzük meg a 4,1 állapotot is. Ebben az esetben mind a négy ügyfél az olcsó kasszánál tartózkodik, hiszen a negyedik ügyfél még hajlandó annyit várni, hiszen előtte épphogy hárman vannak. Ezzel szembeülve az újonnan beérkező ügyfél az éppen üresen álló drága kasszát választja, ennek megfelelően alakul természetesen a reláció is, amely az alábbi egyenlőtlenségben tükröződik is:

$$\frac{\mu}{5} - 1 * \tau > \mu - (1 + \alpha) * \tau .$$

Ez alapján rendezve az összefüggést az alábbi eredményt kapjuk:

$$\alpha < \frac{3 * \mu}{4 * \tau} .$$

Összességében tehát megállapíthatjuk, hogy az egyes rendszerek az egyes α „fordulópontok” mentén válnak el. A fentebb kiszámolt összefüggések alapján az egyes rendszereket az alábbi relációkkal tudjuk jellemezni. Rögzítsük τ értékét egyelőre egységre, hogy könnyebben átláthatók legyenek a „határok”. Az eredmény:

nullát vár, ha $0 < \alpha < \frac{\mu}{2}$;

egyet vár, ha $\frac{\mu}{2} < \alpha < \frac{2\mu}{3}$;

kettőt vár, ha $\frac{2\mu}{3} < \alpha < \frac{3\mu}{4}$;

hármát vár, ha $\frac{3\mu}{4} < \alpha < \frac{4\mu}{5}$.

A fogyasztók után térjünk át a vállalat helyzetére. A vállalat szemszögéből a fő kérdés az α értékének megválasztása az egyes fogyasztói típusok ismeretében. Ahogyan azt korábban is említettem a vállalat a profitmaximalizálásra törekszik, tehát igyekszik a lehető legmagasabbra megválasztani α értékét. A későbbiekben láthatjuk majd, hogy ez valóban így fog történni. Azonban a legmagasabb α kiválasztása még nem minden a bolt esetében. Ha a bolt ismeri az egyes fogyasztói típusokat, akkor meg tudja határozni az egyes profitokat a különböző rendszerekben és összevetni őket egymással ordinális értelemben. A következő lépés tehát ez lesz. Emlékeztetőként a vállalat profitját az alábbi egyenlet felírásával határoztuk meg:

$$B = L_o * 1 + L_d * (1 + \alpha) .$$

Ez alapján elmondhatjuk, hogy a vállalat profitja csak L_o , L_d és α értékektől függ. Most az lesz a feladatunk, hogy kifejezzük L_o és L_d változókat az egyes állapotvalószínűségek és ezáltal kizárólag a beérkezési és kiszolgálási gyakoriságok függvényében. Ehhez először írjuk fel őket az egyes állapotvalószínűségek függvényében. Azt továbbra is feltesszük, hogy L_o és L_d összege L_s -t, tehát a kiszolgálás alatt lévő ügyfelek átlagos számát adja eredményül. Ennek ismeretében írjuk fel az egyes rendszerek kapcsán a két változót az állapotvalószínűségek függvényeként. Ehhez annyit kell tennünk, hogy tulajdonképpen azokat az állapotvalószínűségeket adjuk össze, amelyekben az olcsó/drága kassza „érintett volt”, tehát amelyik állapotokban volt ügyfél az olcsó/drága kasszánál. Itt megjegyezném, hogy minden rendszerben a $j=5$ állapotra írtam fel a két értéket, hogy összevethetőek legyenek. Nézzünk erre egy példát. Az első rendszerünkben, ahol nem hajlandó várni egyetlen egy ügyfelet sem az alábbiak szerint alakult a két változó:

$$L_o = P_{1,1} + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 ;$$

$$L_d = P_{1,2} + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 .$$

Észrevehető, hogy mindkét esetben azok az állapotvalószínűségek kerültek szummázásra, amelyeknél az egyes kasszák „használva voltak”. A különbség a két változó között az első tagban látszik igazán, hiszen ott „ágazik ketté” a modell. Emellett emlékezzünk arra, hogy a módszertanban részletesen leírt egyenletrendszerek azért voltak előnyösek

számunkra, mert az egyes állapotvalószínűségeket egyértelműen fel tudtuk írni λ és μ függvényében. Ezt fogjuk itt is kihasználni. Tehát következő lépésünk az lesz, hogy behelyettesítünk az egyes állapotvalószínűségek helyére, ezáltal megkapjuk L_o és L_d változókat λ és μ függvényében. A fenti eredményeket használva tehát az alábbiak szerint alakult a két változó értéke:

$$L_o: \frac{\lambda(\lambda^5 + 3\lambda^4\mu + 6\lambda^3\mu^2 + 12\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 16\mu^5)}{(\lambda + \mu)(\lambda^5 + 2\lambda^4\mu + 4\lambda^3\mu^2 + 8\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 16\mu^5)},$$

$$L_d: \frac{\lambda^2(\lambda^4 + 3\lambda^3\mu + 6\lambda^2\mu^2 + 12\lambda\mu^3 + 16\mu^4)}{(\lambda + \mu)(\lambda^5 + 2\lambda^4\mu + 4\lambda^3\mu^2 + 8\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 16\mu^5)}.$$

Láthatjuk, hogy az egyre nagyobb állapotokra felírt egyenletek miatt már egész bonyolult formában kaptuk meg a két változót. Azonban célunkat elértük: felírtuk egy formulával, tehát egy zárt alakban a két változót csak úgy, hogy csak és kizárólag λ és μ paraméterektől függjenek. Ezután meghatározhatjuk L_s értékét, amelyből adódik majd a vállalat profitja is. Ha fentebb felírt profit formulában kibontjuk a zárójelet, akkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$B = L_o + L_d + L_d * \alpha = L_s + L_d * \alpha.$$

Ez alapján tehát már csak L_s értékére van szükségünk, amely a most kiszámolt két változó összegeként adódik és az alábbi zárt alakban írható fel:

$$L_s: \frac{2\lambda(\lambda^4 + 2\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 8\lambda\mu^3 + 8\mu^4)}{\lambda^5 + 2\lambda^4\mu + 4\lambda^3\mu^2 + 8\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 16\mu^5}.$$

Mivel a két változó, amelynek összegeként felírtuk ezt a változót sem volt egyszerűbb alakban, ezért L_s is csak ehhez hasonló alakban írható fel. Viszont továbbra is csak a beérkezési és kiszolgálási gyakoriság függvényeként határoztuk meg az egyes L értékeket. Ezután már könnyen felírhatjuk a vállalat profitját a fenti képlet segítségével, amelyre eredményül az alábbiakat kapjuk:

$$B: \frac{\lambda((2+\alpha)\lambda^5 + 3(2+\alpha)\lambda^4\mu + 6(2+\alpha)\lambda^3\mu^2 + 12(2+\alpha)\lambda^2\mu^3 + 16(2+\alpha)\lambda\mu^4 + 16\mu^5)}{(\lambda + \mu)(\lambda^5 + 2\lambda^4\mu + 4\lambda^3\mu^2 + 8\lambda^2\mu^3 + 16\lambda\mu^4 + 16\mu^5)}.$$

Látható, hogy elég bonyolult és kézzel nehezen kezelhető összefüggést kaptunk, azonban számítógépes szoftverek segítségével még mindig használható ez a zárt alakban felírt képlet. Azonban a fentebb leírtakat sikeresen teljesítettük. Tehát *felírtuk a vállalat profitját az adott rendszer egy adott állapotáig csak és kizárólag λ , μ és α függvényében*. Ez azért jelentős, ugyanis λ és μ paraméterek változtathatók, illetve α is egy bizonyos skálán az adott rendszertől

függően. Tehát meg tudjuk vizsgálni a vállalat profitját különböző paraméterek változtatása után a rendszeren belül, illetve a rendszeren kívül is, tehát összehasonlítva a többi rendszerrel. Mielőtt ezt megtennénk, két fontos dolgot emelnék ki általánosságban a profittal kapcsolatban. Egyrésztől ahogyan azt láthattuk, a profit függ α értékétől is, amely csak bizonyos korlátok között mozoghat a fentebb kiszámoltak alapján. Nézzük például a vállalat döntését a „nullás” rendszerben. Ebben az esetben azt kaptuk fentebb eredményül, hogy α értéke a 0 és $\mu/2$ határok között mozog. Mivel a vállalat profitmaximalizálásra törekszik, ezért az elérhető α értékek közül mindig a lehető legmagasabbat, tehát az intervallum tetejét fogja választani. Ugyanis választhatna kevesebbet, de annak nem lenne értelme, hiszen a vállalat az adott rendszerrel szembesülve ismeri a fogyasztókat és ha lehetséges akkor miért ne választaná a legmagasabb felárat? Ez az eset hasonlít az üzemanyag piacra számos országban. Számos autó tulajdonos panaszkodik az üzemanyag árakra és sokszor emlegetik a „lélektani határ” kifejezést, azonban az üzemanyag árak növekedése ellenére sincs kevesebb autó az utakon. Tehát, ha ugyanannyi ember tankol a kutakon az árváltozások után, tehát a magasabb ár sem retenti el az embereket, akkor miért ne emelnének az árakon a kutak tulajdonosai? Itt is ez a helyzet a fogyasztók és a vállalat kapcsán. A vállalat látja a fogyasztókat és ezáltal tudja az egyes α intervallumokat, akkor nyilván a lehető legmagasabbat fogja választani. A másik dolog, amelyet rögzítenünk kell az a profit, mint szám/érték típusa. Dolgozatomban kizárólag ordinális skálán mérem a profitok mértékét, amely azt jelenti, hogy csak egymáshoz képest számítanak az egyes értékek, amelyek segítségével egyfajta sorrendiséget tudok felállítani. Tehát csak az számít, hogy az egyik profit nagyobb a másikinál, azonban az nem, hogy konkrétan mennyivel, tehát ordinális hasznosságot mérünk kardinális helyett.

Ezután tehát vizsgáljuk meg az egyes rendszerek profitját. Kezdjük az M/M/2 modell esetével, ahol nincs feláras kassza, tehát α értéke nulla. Ebben az esetben csak L_s értékére van szükségünk a profit meghatározásához, amely definíció szerint az alábbi zárt képlettel írható fel:

$$B: \quad \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \cdot$$

Nézzük meg a profitot mondjuk a $\lambda=5$ és a $\mu=10$ számpárookra. Behelyettesítve az alábbi értéket kapjuk a profitra:

$$B = \frac{5^2}{10 * (10 - 5)} = \frac{25}{50} = 0.5 .$$

Ezután nézzük meg a „nullás” rendszert, tehát amikor nem hajlandó egyetlen egy embert sem várni a beérkező fogyasztó. Az egyetlen dolgunk tehát, hogy a fentebb felírt profit képletbe behelyettesítsünk. Egyetlen kérdés maradt a két paraméteren kívül, amely az α megválasztását takarja. A korábban leírtak alapján ezen a tartományon a maximális α érték 0.5, tehát helyettesítsünk be azzal. A számok beírása után az alábbi eredményt kaptuk:

$$B = 1.2477$$

Látható, hogy ez az érték magasabb, mint az M/M/2 modell esetében. Azonban emlékezzünk vissza arra, hogy α értéke azért lehetett $\mu/2$, mert τ , tehát a türelmetlenségi paraméter értékét egységre rögzítettük az elején. Mivel μ értékét első körben 10-re állítottuk be, ezért egységni τ mellett α értéke 5 lesz ebben az esetben. Viszont, ha azt szeretnénk, hogy rögzített $\mu=10$ érték mellett pontosan $1/2$ legyen a felár, akkor a türelmetlenségi paraméter értékét 10-re kell beállítani. Tehát $1/2$ -es α érték mellett a vállalat profitja: 0.574248 . Ez szintén nagyobb, mint az M/M/2 modell esetében. Ezenkívül vegyük észre, hogy α és τ inverz kapcsolatban állnak, tehát τ növelésével α csökken és fordítva. Kiszámolható, hogy csak nagyon minimális, szinte nullához közeli α -ra lesz a profit kisebb, mint az M/M/2 modell esetében, amely nem meglepő, hiszen az M/M/2 modellben nincsen feláras kassza, tehát α értéke egyszerűen nulla. Ezenkívül természetesen szinte végtelen számosságú kombinációt kipróbálhatunk az (α, τ) számpár változtatásával.

Következő modellünk az a rendszer volt, ahol hajlandó volt egyet várni a beérkező fogyasztó. A fentebb taglaltak alapján ugyanúgy kiszámolható a profit λ , μ és α függvényében, amelybe behelyettesítve megkapjuk a profitunkat. Nézzük először itt is azt az esetet, ahol α értéke konkrétan az adott rendszer maximuma, tehát $2/3$. Ez rögzített μ érték mellett szintén a $\tau=10$ esetben valósul meg. Ekkor a vállalat profitja:

$$B = 0.542285$$

Ez az érték kisebb, mint az előző modellben kapott érték (0.574248). Emellett egy érdekes kérdés lehet azt megvizsgálni, hogy azonos α mellett milyen viszonyban áll a két profit. Rögzített μ mellett természetesen csak τ változtatásával tudunk ugyanakkora felár szorzót kihozni. Ez nagyjából 13,3 körül van, amely mellett α értéke nagyjából $1/2$. Ekkor a vállalat

profitja: 0.531478. Ez nyilván kisebb, mint a fent látható 0.57 körüli profit. Ez logikus is, hiszen már egy fokkal türelmesebb rendszerben vagyunk, mint korábban (nullát vár helyett egyet vár). Tehát a türelmi szint növekedésével egyre kevésbé értékeli nagyra a felárat a fogyasztók, amely a vállalatok profitjában is tükröződik. A rendszer számításainak zárásaként nézzük meg azt az esetet, ahol továbbra is rögzített μ érték, illetve egységnyi τ értékeket feltételezünk. Alfa értéke ekkor kerekítve 6,67. Ilyen paraméterek mellett a vállalat profitja: 0.931615. Ez a szám kisebb, mint a nullás rendszerben kapott profit (1.2477). Ezt okozza a korábban említett trade-off. Ugyanis a profit szempontjából nem nőtt akkorát a felár költsége azonos türelmetlenségi paramétert feltételezve, hogy nagyobb legyen a profit. Ez érthető is, hiszen két különböző rendszerben vagyunk, tehát az azonos türelmetlenségi paraméter feltételezése nem jó kiinduló pont. Ezzel szemben, ha azonos alfa értékeket nézünk a két rendszer esetében, akkor látható, hogy ez csak τ növelésével jöhetett létre, tehát eltérő türelmetlenségi paraméter mellett. Nagyobb profit úgy érhető el ezen állítások alapján, hogyha növeljük a felár mértékét, amely rögzített kiszolgálási gyakoriság mellett csak a türelmetlenségi paraméter csökkenésével érhető el. Például a szokásos $\mu=10$ esetből kiindulva, ha τ értékét $1/2$ -re választjuk meg, akkor alfa értéke körülbelül 13,33. Így a vállalat profitja: 1.364204. Ezzel tulajdonképpen rávilágítottunk a megspórolt idő, illetve a felár közötti kapcsolatra. Minél türelmetlenebb valaki, annál többet ér meg neki az, ha időt takaríthat meg.

Következő rendszerünk az, amikor a beérkező ügyfél már hajlandó két ügyfelet is megvárni maga előtt. Általánosságban elmondhatjuk, hogy a türelem növekedésével a fogyasztók számára egyre kevésbé vonzó a fizetős kassza. Vizsgáljuk meg itt is a szokásos eseteket. Nézzük meg először azt, amikor τ értéke egységnyi. Ebben az esetben $\mu=10$ mellett α értéke 7,5. Ekkor a vállalat profitja:

$$B = 0.7199 .$$

Ha összevetjük ezeket az eredményeket az előző olyan esetekkel, ahol τ értékét szintén egységnyinek tekintettük, akkor a három modell közül eddig ez a legalacsonyabb. Tehát úgy néz ki, hogy egységnyi τ és rögzített μ érték mellett a türelmi szint növelésével (tehát ahogy haladunk előre a modellekkel) egyre alacsonyabb lesz a vállalat profitja. Emellett nézzük meg rögzített μ mellett a vállalat profitját akkor, ha alfa értéke pont az intervallum tetején van, tehát mikor a $3/4$ értéket veszi fel. Ekkor τ értéke az eddigiekhez hasonlóan megegyezik μ -vel, azaz 10-zel. Ekkor a profit: 0,520356. Végül megnézhetünk egy nagyon alacsony τ értéket is rögzített μ mellett természetesen. Legyen például τ értéke 0,3, ekkor α értéke 25. A vállalat

profitja pedig 1.237422. Ezzel újfent beláttuk kutatásom egyik fő mondanivalóját: *Nagyobb türelmi szint mellett, tehát türelmesebb fogyasztók esetén egyre kisebb mértékben honorálják a fogyasztók a drága kasszát, illetve az ehhez tartozó felárat.* Ez ugyan egy nyilvánvaló, de fontos állítás a modellek kapcsán, ugyanis láthatjuk, hogy az egyes számítási eredmények és a hozzájuk fűzött magyarázatok nem mondanak ellent a klasszikus matematikai és közgazdaságtani feltételezéseinknek.

Végezetül számoljuk az egyes profitokat az utolsó modellünkre, amelyben a fogyasztó hajlandó három ügyfelet is várni. Itt is vizsgáljunk meg különböző eseteket. Kezdjük azzal, amikor τ értéke egységnyi. Ekkor α értéke 8, amely alapján a vállalat profitja:

$$B = 0.597208 .$$

Észrevehető, hogy ilyen alacsony τ mellett a vállalat profitja az előző rendszerben lévőhöz képest alacsonyabb. Ez annak köszönhető, hogy a két felár majdnem ugyanannyi. Tehát mintha azonos felár mellett hasonlítanánk össze két eltérő türelmi szinttel rendelkező rendszert, amely természetesen eltérő eredményre vezet. Egyébként, ha konkrétan összehasonlítanánk az egyes L_d értékeket, akkor látnánk, hogy L_d értéke a türelmi szint növelésével egyre csökken, hiszen egyre kisebb valószínűséggel választják a fogyasztók a feláras kasszát, mert türelmük megengedi, hogy az olcsó kasszához álljanak. Ennek következtében a profit függvény második tagja, tehát az $\alpha \cdot L_d$ tag folyamatosan csökkeni fog. Ezért majdnem azonos α értékek mellett az egyes rendszerekben realizált profit is rendre csökkeni fog. Ezzel magyarázható tehát a két profit közötti különbség. Ezután folytassuk azzal az esettel, amikor τ értéke 10. Ebben az esetben α értéke 0,8. A vállalat profitja: 0.506538. Ez az érték már közelít az M/M/2 modellben felírt értékhez, amelynél épphogy nagyobb. Azért konvergál az egyik érték a másikhoz, mert az M/M/2 modellben nincsen olcsó, illetve drága kassza, hiszen nincsen felár. Azonban, ha megnézzük a most felírt rendszerünket, akkor láthatjuk, hogy α értéke $4/5$, amely rendkívül közel áll a nullához olyan értelemben, hogy α értéke lehet akár 20 vagy 30 is. Például a következő és egyben utolsó esetben, amikor τ értéke rendkívül alacsony, például $1/5$, akkor a felár értéke 40. A profit ebben az esetben 1.000184.

Eredményem zárásaként az egyes számításokat összefoglalva elkészítettem az 1. táblázatot. A táblázat soraiban a várakozások számát adtam meg, tehát, hogy mennyi ügyfelet hajlandó várni a beérkező ügyfél, míg az oszlopokban az egyes τ (és ezáltal α) értékeket. A táblázat itt látható:

$l=5, m=10$	$\tau = 1$	$\tau = 10$	$\tau = 0,2$
0	1,24775	0,57425	4,24111
1	0,93161	0,54228	2,66197
2	0,71995	0,52036	1,60704
3	0,59721	0,50654	1,00018

1. táblázat: Összefoglaló eredmények

Azt egyértelműen megállapíthatjuk, hogy τ csökkenésével és ezáltal α emelkedésével természetesen nő a vállalat profitja minden rendszerben, illetve fordított esetben csökken. Emellett az is észrevehető, hogy azonos τ értékek mellett hiába növekszik a rendszerekben történő előrehaladás során a felár, a profit minden esetben csökken. Ez a korábban leírtak alapján indokolható, miszerint a türelmi szint növekedésével a fizetős kasszák használatának valószínűsége egyre csökken, hiszen a fogyasztó addig kitart az olcsó kassza mellett, amíg ezt türelme engedi. Márpedig ahogy egyre több várakozást engedünk meg, annál jobban fogja engedni a fogyasztónak a türelme a várakozást.

Összegezve a leírtakat elmondhatjuk tehát, hogy *kaptunk egy komplex matematikai alapokon nyugvó közgazdaságtani feltételezésekkel kiegészített modellt*, amelynek változtatható input paramétereivel különböző szituációkat vizsgálhatunk, illetve szimulálhatunk. Továbbá az egyes rendszerek flexibilitását is megemlíthetjük mind matematikai, mind közgazdaságtani szempontból, amelynek köszönhetően több szélsőséges esetet is megvizsgálhatunk.

IV. Összefoglalás

Ennek a fejezetnek a célja, hogy röviden ismertessem kutatásom eredményét. Elsőként kitérek az alkalmazott módszertan fontosságára újfent, majd az erre épülő eredményeket prezentálom újra röviden. Az eredményt két egységre bontom: matematikai, illetve közgazdaságtani eredmények. Végül néhány bővítési lehetőséget említek meg, amelyek alkalmazása egy következő kutatás témái lehetnek.

Először tehát kezdjük a módszertannal. Dolgozatom során a fizetős kasszák hatását vizsgáltam a boltokra fókuszálva, amelynek matematikai alapját az operációkutatásban elterjedt sorbanállási modellek adták. A sorbanállási modell kapcsán bevezettem és használtam a beérkezési, illetve kiszolgálási gyakoriság fogalmakat, amelyek az ilyen modellek alapját képezik. Ezután a két folyamat modellezését taglaltam, amely során kitértem az exponenciális eloszlás alkalmazásának előnyeire, hiszen én is azon feltételezésre alapoztam a modelleket, hogy mind a beérkezési, mind a kiszolgálási gyakoriságok exponenciális eloszlást követnek. Néhány matematikai bizonyítást, illetve levezetést követően megállapítottam, hogy λ és μ paraméterek valóban használhatók a két folyamat modellezésére. Ezután a Kendall-Lee jelölésrendszer alapján bevezettem néhány tipikus jelölést, amelyekkel én is illettem az egyes rendszereket. Ezután a következő lépés az egyes rendszerek egyenletekkel történő jellemzése volt. Az áramlásegyensúlyi egyenletekre alapozva felírtam az egyes rendszerekhez tartozó egyenletrendszereket és közben felhasználtam egy határértéken alapuló összefüggést, melynek köszönhetően a differenciál egyenletek helyett egyszerű lineáris egyenletek álltak rendelkezésemre. Az áramlásegyensúlyi egyenletek lényege egy kulcsfontosságú szabályon alapszik: A bemeneti valószínűségeknek meg kell egyeznie a kimeneti valószínűségekkel. Ezt a szabályt figyelembe véve felírtam az egyes rendszerek egyes állapotában lévő állapotvalószínűségekhez tartozó egyenleteket. Az egyenletrendszert tehát az egyes állapotvalószínűségekre kell megoldani λ és μ függvényében. A módszertan matematikai részének zárásaként a szakirodalomban gyakran használt M/M/2 modellre írtam fel és oldottam meg az egyenletrendszert az egyes állapotvalószínűségekre. Ezután kibővítettem a modellt közgazdaságtani szereplőkkel, nevezetesen fogyasztókkal, illetve egy vállalattal, amely során mindkét szereplővel kapcsolatban bizonyos feltevésekkel éltem. A rendszer kapcsán azt tettem fel, hogy két kassza van, amelyhez egy sorból állhatnak a beérkező ügyfelek, azonban az egyik kassza feláras kassza, tehát a vásárlás végösszegének bizonyos százalékát extra költségként ki kell fizetnie az ott fizető fogyasztónak. Ezáltal tehát kialakult egy olcsó, illetve egy drága kassza, amelyek kapcsán azt tesszük fel, hogy az olcsó kasszánál a kosár ára 1-gyel, míg a drága

kasszánál $(1+\alpha)$ tényezővel szorzódik. A fogyasztók rendelkeznek továbbá egy kétváltozós hasznossági függvénnyel, amely az eltöltött idő, illetve a fizetett ár függvénye, illetve az ár szorzódik egy további paraméterrel (τ), amely az átváltást jelképezi a megtakarított idő, illetve az ár között. A vállalat pedig a profitfüggvényét igyekszik maximalizálni, amely az olcsó és drága kasszáknál kiszolgálás alatt lévő átlagos ügyfelek száma, illetve α függvénye. A bolt mindig a lehető legnagyobb α érték választására törekszik a profitmaximalizálás érdekében. Következő lépésként különböző rendszereket írtam fel, amelyben feltettem, hogy az egyes ügyfelek mennyit hajlandóak várni maguk előtt a sorban és ennek megfelelően írtam fel és oldottam meg az egyenleteket.

Az egyenletek megoldását felhasználtam arra, hogy a vállalat különböző profitjait felírjam kizárólag λ , μ és α függvényében. Ezzel párhuzamosan kiértékeltem az egyes rendszereket a fogyasztók szempontjából is, amely az egyes α értékek kifejezését jelentette μ és τ függvényeként. A két szereplő kiértékelésének kombinációja adta dolgozatom eredményét. Kiszámoltam rögzített μ és τ , tehát különböző α értékek mellett a vállalat (bolt) egyes profitjait és elemeztem a kapott helyzetet. Azt kaptam eredményül egyrészt, hogy α növekedésével a vállalat profitja is természetesen nőtt, hiszen a profit függvény második tagja emiatt nagyobb súlyt kapott. Ezenkívül azt az összefüggést is sikerült igazolnom, miszerint az egyre magasabb türelmi szinttel rendelkező fogyasztók (vásárlók) egyre kisebb mértékben értékelik a felárat. Ez matematikailag a fizetős kasszákat preferáló állapotokhoz tartozó állapotvalószínűségek csökkenésében mutatkozik meg. Ezenkívül természetesen számos egyéb konklúzió levonható a profitokkal kapcsolatban. Ezenfelül dolgozatom következő és talán legfontosabb eredménye maga a kapott modell komplexitása. Rendelkezésünkre áll egy közgazdaságtani modell, amelyben az egyes bemeneti értékek változtathatók. A változó paraméterek segítségével eltérő élethelyzeteket is szimulálhatunk, olyanokat is például, amelyek néha szembemennek a standard közgazdaságtani vagy operációkutatási feltevésekkel. Én például csak adott μ értékre néztem meg a profitokat, azonban ez a paraméter a türelmetlenségi paraméter, illetve a beérkezési gyakoriság paraméterekhez hasonlóan változtatható és megvizsgálható például a $\rho > 1$ eset is, amely a szakirodalomban nem standard eljárás.

Végül néhány bővítési lehetőségről szeretnék írni a dolgozatomat illetően. Elsőként a modell matematikai részét lehet taglalom. Ahogy korábban említettem, az egyenletekben felfedezhető egyfajta rekurzivitás, amely segítségével a további állapotokra felírt egyenletrendszer könnyebben meghatározható. A kapott eredményeket tovább vizsgálva akár analitikusan, tehát zárt alakban is megadhatók lehetnének az egyes egyenletek, azonban, ha

csak néhány szabályszerűséget veszünk észre, már az is jelentősen megkönnyíti az egyenletrendszer. Emellett láthattuk, hogy tetszőleges számú állapotra tetszőleges számú várakozást feltételezve írhatjuk fel az egyenletrendszer, amelyet érdemes lenne nagyobb számú állapotra is felírni. Ezen kívül vissza lehetne menni a modell kiindulásához és megvizsgálni, hogy valóban megfelelő-e az exponenciális eloszlás használata, vagy helyette például valamilyen fázisszámú Erlang-eloszlást lehetne használni. Ezután nézzük meg a közgazdaságtani részt is. A fogyasztók hasznossági függvényét lehetne tovább fejleszteni és pontosítani, hogy jobban leírja a jelenséget, illetve más értelmezéseket is lehetne találni benne. Végül a modell eredményeit emelném ki. Én csak néhány bizonyos paraméter értékét rögzítve számoltam ki a különböző profitokat, azonban például egy új hasznossági függvény segítségével érdemes lenne szélesebb spektrumban vizsgálni a profitokat az egyes paramétereket illetően. Emellett τ és α kapcsolatát is alaposabban lehetne taglalni és magyarázni, illetve a profit kapcsán lehetne indokolni a kapott profitot a két paraméter segítségével.

Hivatkozások

Boah KD (2020) Mathematical Analysis of the Operating Characteristics of a Barbering Shop in Kumasi Using Queuing Theory. *Applied Mathematics* 2020, 10(1): 7-11 DOI: 10.5923/j.am.20201001.02

Daniel IJ (1995) Congestion Pricing and Capacity of Large Hub Airports: A Bottleneck Model with Stochastic Queues. *Econometrica*, Mar., 1995, Vol. 63, No. 2 (Mar., 1995), pp. 327-370

Fomundam F, Herrmann J (2007) A Survey of Queuing Theory Applications in Healthcare. ISR Technical Report 2007-24

Igwe A, Onwumere J.U.J, Egbo PO (2014) Efficient Queue Management in Supermarkets: A Case Study of Makurdi Town, Nigeria. *European Journal of Business and Management* ISSN 2222-1905 (Paper) ISSN 2222-2839 (Online) Vol.6, No.39, 2014

Luczak JM, Mcdiarmid C (2006) On the maximum queue length in the supermarket model. *The Annals of Probability* 2006, Vol. 34, No. 2, 493–527 DOI: 10.1214/009117905000000710 © Institute of Mathematical Statistics, 2006

Priyangika JSKC, Cooray TMJA (2015) Analysis of the Sales Checkout Operation in Supermarket Using Queuing Theory. *Proceedings of 8th International Research Conference, KDU*, Published November 2015