



SAPIENTIA
ERDÉLYI MAGYAR
TUDOMÁNYEGYETEM

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

**KOSZINUSZ HAJTÓPÁR
KAPCSOLÓDÁSÁNAK VIZSGÁLATA
AUTODESK-INVENTOR
KÖRNYEZETBEN**

Szerző:

Gál Károly-István

Fejlett mechatronikai rendszerek Msc.,
II. évf.

Konzulens:

dr. Máté Márton

egyetemi docens

SAPIENTIA ERDÉLYI MAGYAR TUDOMÁNYEGYETEM

**KOSZINUSZ HAJTÓPÁR KAPCSOLÓDÁSÁNAK
VIZSGÁLATA AUTODESK-INVENTOR KÖRNYEZETBEN**

**STUDY OF COSINE DRIVE PAIR COUPLING IN AN AUTODESK-
INVENTOR ENVIRONMENT**

Gál Károly-István

Konzulens:

Dr. Máté Márton

Kézirat lezárva: 2024 április 4.

Abstract

Cosine gears represent a special type of gear drive where the theoretical rack which generates the tooth profile is defined by the cosine function. Contact and bending stresses arising on a cosine gear tooth root fillet are lower compared to an involute gear. The relative slip coefficient is smaller too. The main advantage of the cosine drive pair consists in its visible higher rigidity of the tooth: this can reduce flank wear and increase gear life, especially in high load and high-speed applications. In contrast to involute profile gears, cosine gears do not show undercut at low tooth numbers.

In my thesis, I have investigated the aforementioned cosine gears regarding the computing of the reciprocate meshing tooth profiles and the contact between the flanks, both in case of elementary and profile shifted gear pairs. Using the Mathcad environment, the mathematical model of the reciprocate meshing of the gears is written up. This differs from the already well-known involute gears especially in the form of the contact line. The study CAD environment propose to simulate the meshing phenomenon between the cutting rack and the machined wheel. This requires a simultaneous rolling-subtracting which is not possible in the Autodesk-Inventor environment. As a consequence, a much more practical solution was adopted, which uses the Autodesk-Autocad environment. Using the Autolisp programming interface, I conceived a program which simulates the simultaneous rolling and subtracting operation. Using the program I created different gear solid models which were then tested in the Autodesk Inventor environment.

Kivonat

A koszinusz fogaskerek a fogaskerékajtások egyik speciális típusát képviselik, ahol a fogak profilját generáló elméleti léce a koszinusz függvényrel írjuk le. Az [1-2] alapján a koszinuszos fogaskerékajtás kisebb csúszási együtthatóval rendelkezik, továbbá a terhelés alkalmával ébredő érintkezési, továbbá hajlítási feszültségei csökkennek az evolvens fogaskerékhez viszonyítva. A koszinusz hajtópár fő előnye a fogtő láthatóan nagyobb merevségében rejlik: ez csökkentheti a fogaskerek kopását és növelheti az élettartamukat, különösen nagy terhelésű és nagy sebességű alkalmazásokban. Az evolvens profilú fogaskerekkel szemben a koszinusz fogaskerek esetében kis fogszám esetén nem jelenik meg alámetszés.

Dolgozatomban a már említett koszinusz fogaskerek, profiljának kialakítását, a kialakított kerek kapcsolódását, valamint a profileltolás nélküli, illetve a profileltolásos koszinusz fogaskerékpárok vizsgálatát végeztem. Mathcad környezetben felírtam a fogaskerek sajátos kapcsolódásának matematikai modelljét, amely eltér a már jól ismert evolvens fogaskerekétől. Mivel az Autodesk-Inventor környezetben nem lehet egyidejű legördülő-kivonó szimulációt végezni, a legkézenfekvőbb megoldás mellett döntöttem, amely ez esetben az Autodesk-Autocad volt. Az Autodesk-Autocad saját programozási felületét, az Autolispet felhasználva egy olyan programot írtam [4],[6-7], amely egy egyidejű legördülő-kivonó műveletet valósít meg. Létrehoztam különböző a fogaskerékpármodelleket Autodesk Autocad környezetben, majd ezeken vizsgálatokat végeztem Autodesk Inventor környezetben.

Tartalomjegyzék

1	Bevezető	1
2	A koszinusz profilú gyártóléc kialakítása.....	3
3	Koszinusz fogaskerékpár generálása és az egyetlen szerszámmal történő fogazat- kialakítás	6
4	Profileltolás alkalmazása	11
5	Működés szimuláció	16
5.1	Összehasonlító vizsgálatok és ellenőrzések	18
5.2	Matematikai modell grafikus ellenőrzése.....	19
5.3	A fogsám hatása a koszinusz profil alakjára.....	20
5.4	Evolvens és koszinusz profilok összehasonlítása.....	20
5.5	Profileltolt (kompenzált) koszinusz illetve evolvens kerek kivonásos módszerrel történő képzése	22
6	Következtetések.....	25
7	Irodalomjegyzék	25

Ábrajegyzék

1. ábra. Szabványos alapprofil.....	3
2. ábra. A két egybevágó lefejtő léccel való gyártás.....	4
3. ábra. Fogaskerékpár generálása.....	6
4. ábra. Ugyanazon léccel való gyártás.....	7
5. ábra. Kapcsolódás két különálló léccel.....	8
6. ábra. Koszinusz fogárok profilok.....	10
7. ábra. A jobb és a bal fogoldal kapcsolódási vonala.....	11
8. ábra. Negatív illetve pozitív profileltolások koszinusz fogazat esetén	13
9. ábra. Profileltolás során keletkező kapcsolódási vonalak.....	14
10. ábra. Sebességek profileltolás esetén.....	15
11. ábra. Lefejtő léccel koszinusz profilja.....	16
12. ábra. Lefejtő léccel háromdimenziós modell.....	17
13. ábra. Legörülő-kivonó művelet.....	18
14. ábra. AutoCad-ben generált fogfelült szemléltetés.....	19
15. ábra. Matematikai modell helyességének vizsgálata.....	19
16. ábra. Fogszám hatása.....	20
17. ábra. Koszinuszprofil (kék),és evolvensprofil (fekete) és evolvens fogláb görbe (piros).....	21
18. ábra. Z=19 eset (bal); Z=27 eset (jobb).....	21
19. ábra. Z=19, $\xi=+0.4$ eset (bal), illetve Z=27, $\xi=-0.4$ eset (jobb) Koszinusz fogazatok.....	23
20. ábra. Z=19, $\xi=+0.4$ eset (bal), illetve Z=27 $\xi=-0.4$ eset (jobb) Evolvens fogazatok.....	23
21. ábra. Profileltolt fogaskerékprofilok.....	24
22. ábra. Z=10 fog; Koszinusz profil (bal) Z=10 fog; Evolvens profil (jobb).....	24

1 Bevezető

Gépszerkesztők és gépgyártók körében jól ismert tény, hogy a fogaskerekek kis tömegű és helyigényű mechanikai elemek, amelyek nagy nyomaték-átviteli képességgel rendelkeznek. A múltban az erőgépek megjelenését tették lehetővé, napjainkban nélkülözhetetlenek és nagy valószínűséggel a jövőben is pótolhatatlan elemei lesznek a gépgyártás világának. A fogaskerekek a fog alakját tekintve lehetnek ciklois, köríves, pálcás illetve evolvens kialakításúak, ez utóbbi a legelterjedtebb és leggyakrabban előforduló fogazattípus. Az evolvens fogaskerekek számos előnnyel bírnak más fogazatú kerekhez képest. Ezen közül kiemelt fontosságú az egyszerű gyártás, valamint az áttételi arány tengelytávától való függetlensége. Ugyanakkor az evolvens fogaskereknek számos hátránya van, ezek közé tartozik a kis fogszámoknál megjelenő alámetszés, a korlátozott minimális fogszám, az interferenciára való hajlam, valamint a korlátozott teherbíró képesség [2].

A ciklois profilú fogaskerekek gyakorlati alkalmazása ma már visszaszorult, csak az óraiparban, továbbá különleges szivattyúknál alkalmazzák. A ciklois profilnak számos előnye van, ezek közé tartozik a fogprofilok közötti tökéletes, csúszásmentes legördülés, ennél fogva a kopás kis mértékű, így nem igényel feltétlenül kenést, ezen kívül a kapcsolószám nagyobb, mint az evolvens, pálcás, esetleg körív fogazatok esetén.

A pálcás kialakítású fogazat a legrégebbi fogazattípusnak számít. Ez a fogazattípus ismét virágkorát éli, bolygóművekben, óraművekben, továbbá emelő szerkezetekben használják. A pálcás kialakítású fogazatoknál a fogak helyett kör keresztmetszetű pálcákkal létrehozott csillagkerék, valamint egy ezzel kapcsolódó ciklois profilú fogaskerék alkotja.

Lehetőségünk van körív profilú fogaskerekek kialakítására, ezen típusú fogazatok felhasználási területei igen változatosak: cementmalmok, kompresszorok, emelőgépek, valamint más, kemény dinamikai terhelés alatt dolgozó erőgépek. Az USA fogaskerék-iparában széles körben alkalmaznak körívprofilokat, amik, a felhasználók tapasztalata alapján, legmegfelelőbb formát jelentik a műanyag fogaskerekek esetében.

Erőátvitel tekintetében ezek előnyösek, nagy szilárdság jellemzi őket és jó kenés mellett kifejezetten jól működnek, az áttétel hatásfoka felülmúlja a nem köszörült evolvens profilú fogaskerekét [3].

A fogaskerékgyártás elvi alapfelosztásban, kétféleképpen történhet: generálással vagy másolással. Annak ellenére, hogy a lapkagyártó cégek a másolás reneszánszát

emlegetik, az utóbbira nem fogunk kitérni, mivel – meggyőződésem szerint – jelenlegi műszaki világunkban a nagy teherbírású fogaskerekeket kizárólag generálás útján szabad előállítani. Jelen dolgozatban kizárólag a hengeres fogaskerekre térek ki. A generálás során a szerszám és a fogaskerék technológiai hajtást képez.

A hengeres fogaskerek lefejtő gyártása a Maag, Pfauter és a Fellows eljárások alapján történik. A Maag módszer esetében a fogaskereket fésűskéssel gyártjuk, míg a Pfauter eljárás csigamaróval valósítja meg a fogazást. Ez esetben a matematikai leíró modell lehet a fogasléc vagy a hiperboloid hajtás – a fogazó iskolák egyszerűsítő hipotézisei valamelyikének elfogadása nyomán. A Fellows eljárásban a megmunkálandó fogaskereket fogaskerék-értékű szerszámmal, vagyis metszőkerékkel hajtják össze.

A napjainkban rendelkezésre álló modern és igen pontos numerikusan vezérelt gépek segítségével olyan fogaskerék profilok alakíthatók ki, amelyek mint mechanikai, mint kapcsolódási szempontból felülmúlhatják a már ismert és használt fogaskerekeket.

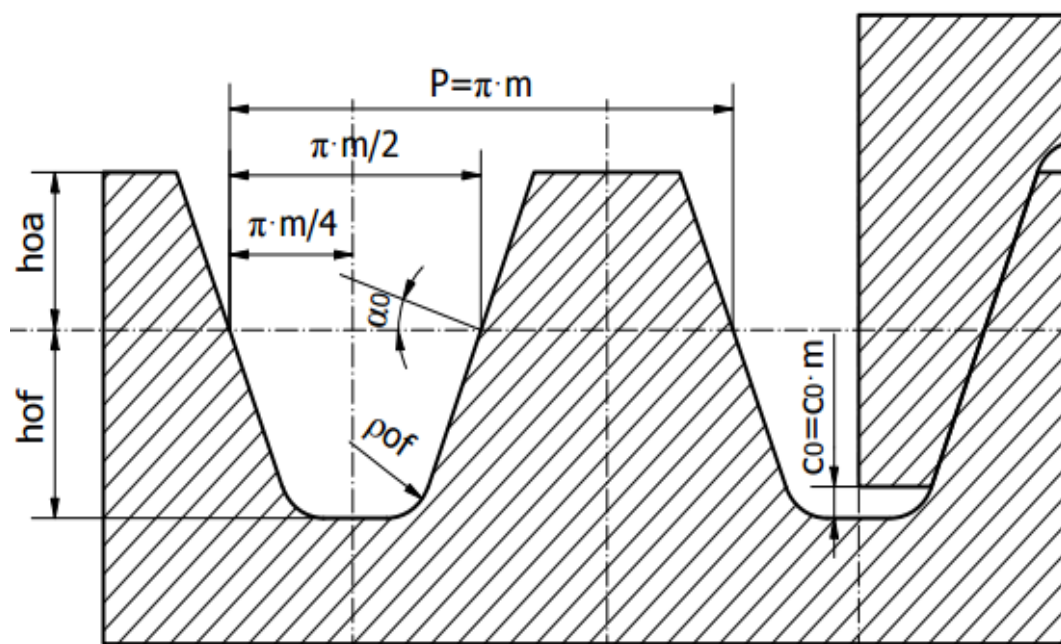
Jelen kutatásomban az evolvens fogaskerek korlátait szem előtt tartva egy olyan, az evolvens profiltól eltérő koszinusz profilú fogaskereket hoztam létre, amely az evolvens fogaskerek hiányosságait hivatott kijavítani. Tehát egy olyan profilú fogaskereket, illetve fogaskerékpárt hoztunk létre, amelynél javul a terhelhetőség, az interferenciára való hajlam eltűnik, ami gyakorlatilag azt is jelenti, hogy az evolvens kerekre jellemző $Z=17$ minimális fogszámhatár alatt is lehet fogazni..

Kutatóm első lépéseként létrehoztam a koszinusz profilú gyártólécet, majd bebizonyítottam, hogy a Litvin által kijelentett „sablon–ellensablon”- elv érvényes, így az egyetlen szerszámmal való koszinusz fogaskerékpár képzése lehetséges. A profilok kialakítását követően Mathcad és Autodesk-Inventor környezetben vizsgáltam a kapcsolódást, a profileltolásnak a kapcsolódásra, illetve ennek a profil alakjára gyakorolt hatását, valamint összehasonlító vizsgálatokat végeztünk a koszinusz és evolvens profilú fogaskerek között.

2 A koszinusz profilú gyártóléc kialakítása

Jelen kutatásban a koszinusz fogaskerek kialakítását gyártó léccel fogom megvalósítani, mivel e szerszám profilját lehet a legkönnyebben meghatározni.

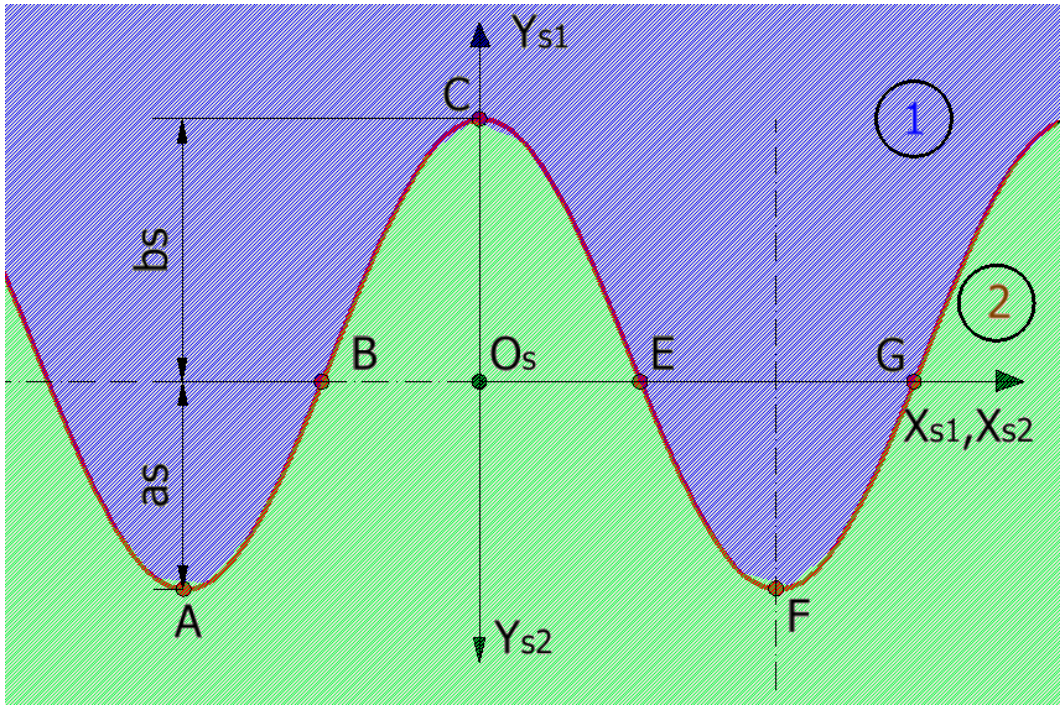
A szabványos, nemzetközileg elfogadott gyártóléc alapprofil a ISO 53:1998 (*Cylindrical gears for general and heavy engineering-Standard basic rack tooth profile*)-ban előírt alapprofil, amelyet az **1.ábrán** szemléltetek [5].



1. ábra. Szabványos alapprofil

Az általánosíthatóság érdekében az alapprofilt egységnyi m (modulra) határozzuk meg. A fent említett ISO szabványnak megfelelően a szabványos alapprofil-szög értéke $\alpha = 20^\circ$, amely egyben a léccé szögét jelenti. A fogtő szilárdságának növelése érdekében, az előírt foglábgyöngy sugár értéke legyen $\rho_{0f} = 0,38 m$ [2-3]. Emellett számos nemzetközileg elfogadott szabvány-alapprofil, illetve evolvens generáló alapprofil létezik, de jelen dolgozatban ezekre nem térek ki.

A következőkben szemléltetem az általunk létrehozott koszinusz profilt, amely a 2. ábrán látható.



2. ábra. A két egybevágó lefejtő lécs profilja

A koszinusz profilú lécs profil-egyenletét az $O_{Si}X_{Si}Y_{Si}$ koordináta-rendszerekben írjuk fel, ahol $i \in \overline{1,2}$. Az 1-es lécs (kék), illetve a 2-es (zöld) színezésű koszinusz-profilú lécs, rendre, a hajtás 1-es, illetve 2-es kerekét fejtik le. A közös profiljuk az $ABCEFG$ pirossal jelölt koszinuszgörbe, melynek egyenlete, az 1-es koordináta-rendszerben [2]

$$y_{s1}(x) = a \cos(bx_{s1}), \quad (1)$$

$$\text{ahol } a = a_s = b_s = (h_0^* + c_0^*)m, \quad h_0^* = 1, \quad c_0^* = 0,25$$

Az (1) képletben szereplő további mennyiségek értelme a következő:

- a -fog teljes fogmagassága;
- a_s -fogfej-magasság;
- b_s -fogláb-magasság;
- h_0^* -fajlagos fejhézag;
- c_0^* -fajlagos lábhézag.

Koszinusz-görbe alkalmazásakor figyelembe kell venni a lécs osztását ($p = \pi m$), amihez a függvény periódusát kell igazítani. A periodicitás betartására felírható, hogy:

$$y_{s1}(x) = y_{s1}(x_{s1} + p) \Rightarrow a \cos bx_{s1} = a \cos b(x_{s1} + p) \quad (2)$$

A (2) egyenletet átrendezve és szorzattá alakítva, ez a következő alakot ölti:

$$\sin\left(bx_{s1} + \frac{pb}{2}\right) \sin \frac{bp}{2} = 0 \quad (3)$$

Ahhoz, hogy az egyenlőség mindig fennálljon, az alábbi feltételnek teljesülnie kell:

$$\sin \frac{bp}{2} = 0 \quad (4)$$

A (4) kanonikus trigonometriai egyenlet megoldása:

$$\frac{pb}{2} = (-1)^k \arcsin 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

ahonnan

$$b = \frac{2k\pi}{p} = \frac{2k\pi}{\pi m} = \frac{2k}{m} \quad (6)$$

Mivel a legközelebbi ismétlődés $k = 1$ -re következik be, a (6) sajátosításából kapjuk, hogy

$$b = \frac{2}{m} \quad (7)$$

A koszinusz profilú lécs kapcsolószöge ugyan változó, viszont az evolvenst generáló szabványos, $\alpha_0 = 20^\circ$ -os profilszögű léccel való összehasonlítás kedvéért, ezt az osztóvonalon definiáljuk. Az 1. ábra alapján, a kapcsolószög a profilnak osztóvonal pontjában húzott érintő, és az x_{s1} tengely pozitív iránya által bezárt szög pótszöge. A derivált függvény geometriai értelmezésével [2]

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha_c = \frac{d y_{s1}}{d x_{s1}} \Big|_{(x_{s1} = -\frac{\pi m}{4})} = -ba \sin bx_{s1} \quad (8)$$

A számítások elvégzése után kapjuk, hogy

$$\alpha_c = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(-2.5) \approx 21^\circ 48' \quad (9)$$

Az 1-es kereket generáló lécs fogárkának szimmetriatengelye az y_{s1} tengely, amint az a **2.ábrán** is látható. Így az 1-es lécs profilegyenlete a következő:

$$y_{s1}(x_{s1}) = a \cos\left(\frac{2}{m}x_{s1}\right) \quad (10)$$

A 2-es kerék generáló léce az y_{s2} tengelyhez képest fogra szimmetrikus. Feltételezzük, hogy sablon-ellensablon elv érvényesül a két lécs esetében, vagyis az s_2 -t az s_1 -ből származtatjuk úgy, hogy az x tengely körül elforgatjuk 180° -kal a profilt. Így a 2-es lécs profilegyenlete a következő lesz [2]:

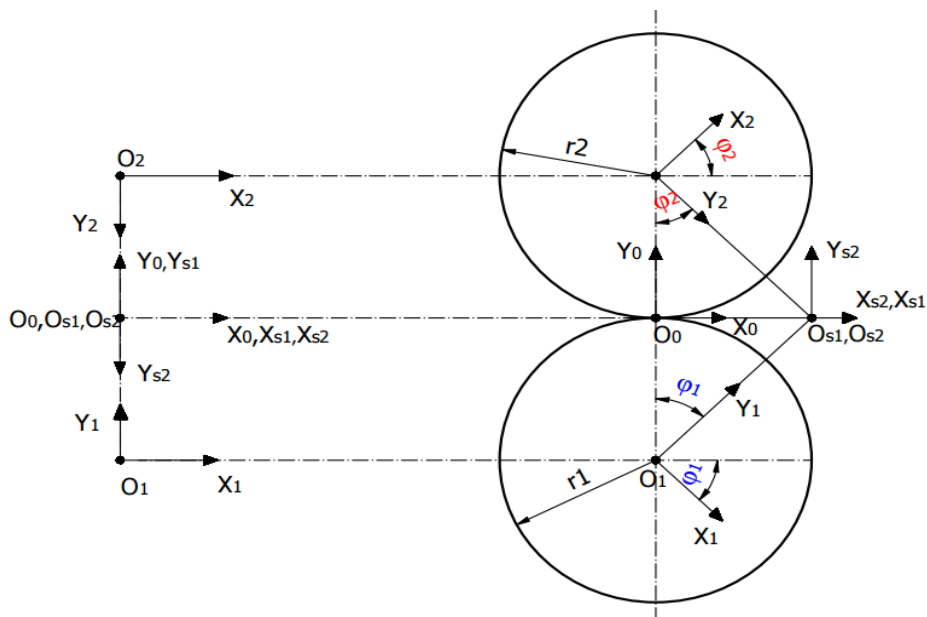
$$y_{s2}(x_{s2}) = -a \cos\left(\frac{2}{m}x_{s2}\right) \quad (11)$$

Ha a (11) egyenletben az abszcisszát egy fél osztással eltoljuk, azaz $x_{s2}^* = x_{s2} + \frac{\pi m}{2}$ akkor $y_{s2} = -a \cos\left(\frac{2}{m}x_{s2}^*\right) = -a \cos\frac{2}{m}\left(x_{s2} + \frac{\pi m}{2}\right) = a \cos\left(\frac{2}{m}x_{s2}\right) = -a \cos\left(\frac{2}{m}x_{s2}\right)$, tehát az eredeti profilt kaptuk vissza, ezzel bizonyítva, hogy a sablon-ellensablon elve érvényesül [2].

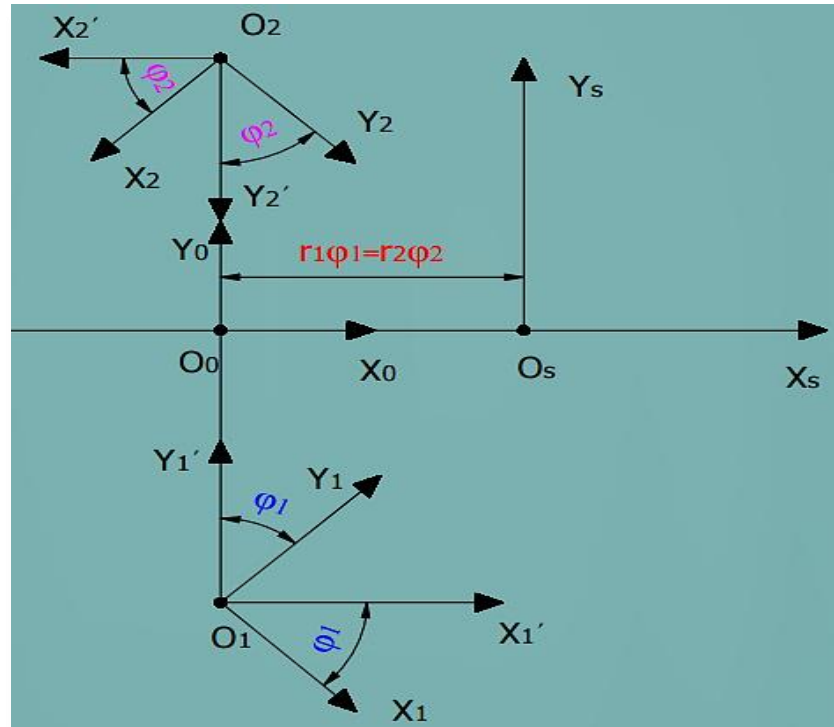
3 Koszinusz fogaskerékpár generálása és az egyetlen szerszámmal történő fogazat-kialakítás

A generálás szemléltetésének céljából a 3.ábrán illusztráltuk a kezdeti kiinduló, illetve egy, a kezdeti pozíciótól már eltérő helyzetű fogaskerékpárt, valamint feltüntettük az ezekhez tartozó koordináta-rendszereket, annak érdekében, hogy a rendszerek közötti transzformációs mátrixokat fel tudjuk írni. A lécek eltolt rendszere és a fogaskereknek az eltolással összefüggő, elforgatott rendszerei közötti transzformációs mátrixok azonos szerkezetűek [2].

Mivel előzőleg bebizonyítottuk, hogy a sablon-ellensablon koszinuszprofil esetében érvényes, így az egyetlen szerszámmal történő megmunkálás is lehetséges, ugyanakkor szem előtt kell tartani azt a tényt, hogy ez csakis $\Sigma\xi = 0$ profileltolás-összeg érték mellett lehetséges, vagyis kizárólag kompenzált fogazatot valósíthatunk meg. Ebből eredően a lefejtő-léc egyenlete azonos a (10) léc egyenlettel [6].



3. ábra. Fogaskerékpár generálása



4. ábra. Ugyanazon léccel való gyártás

Megjegyzendő, hogy a 4. ábrán illusztrált két kerék koordináta rendszerét egymáshoz képest ellentétes irányban választottuk meg, ez a könnyebb számítást teszi lehetővé, mivel így egyik esetben sem kapunk negatív előjelű kifejezést. Amint az belátható, az O_0O_s elmozdulásnak megfelelő koordináta-rendszert minden esetben az elfordulási szög és az adott kerék sugarának szorzatával tudjuk meghatározni.

A következőkben szemléltetjük a burkoláshoz felhasznált transzformációs egyenletek mátrixos alakját:

$$\mathbf{M}_{1s} = \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{0s} \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_{2s} = \mathbf{M}_{20} \mathbf{M}_{0s} \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_{10}(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & -r_1 \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & r_1 \cos \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{M}_{20}(\varphi_1) = \begin{bmatrix} -\cos i_{21}\varphi_1 & -\sin i_{21}\varphi_1 & 0 & -r_2 \sin i_{21}\varphi_1 \\ \sin i_{21}\varphi_1 & -\cos i_{21}\varphi_1 & 0 & r_2 \cos i_{21}\varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_{Os}(\varphi_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r_1 \varphi_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_{1s}(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & r_1 \varphi_1 \cos \varphi_1 - r_1 \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & r_1 \varphi_1 \sin \varphi_1 + r_1 \cos \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

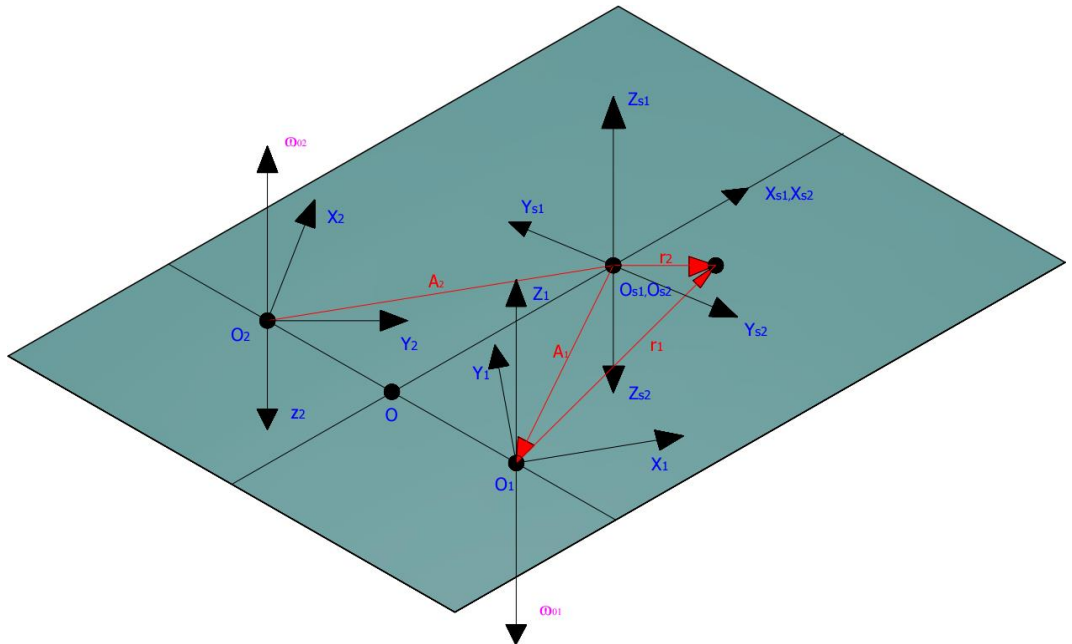
$$\mathbf{M}_{2s}(\varphi_1) = \begin{bmatrix} -\cos i_{21} \varphi_1 & -\sin i_{21} \varphi_1 & 0 & -r_2 i_{21} \varphi_1 \cos i_{21} \varphi_1 + r_2 \sin i_{21} \varphi_1 \\ \sin i_{21} \varphi_1 & -\cos i_{21} \varphi_1 & 0 & r_2 i_{21} \varphi_1 \sin i_{21} \varphi_1 + r_2 \cos i_{21} \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

A szögsebességek és ezek ekvipolens eltolását meghatározó helyvektorok a következő formában írhatók fel:

$$\boldsymbol{\omega}_{O1s}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{1s} = \begin{bmatrix} -r_1 \varphi_1 \\ -r_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{O2s}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_{21} \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{2s} = \begin{bmatrix} -r_2 \varphi_2 \\ r_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

A kapcsolódási egyenleteket két különálló, de egybevágó lefejtő léccel kapcsolódó, 1-es és 2-es kerékre írjuk fel. A relatív sebességek a **5. ábrán** feltüntetett helyvektorokból és szögsebességekből következnek [2],[9].



5. ábra. Kapcsolódás két különálló léccel

Az 5.ábrát figyelembe véve a relatív sebességek kifejezései a következőképpen alakulnak:

$$\mathbf{v}_{s1}^{(1,s1)} = \mathbf{v}_{s1}^{(1)} - \mathbf{v}_{s1}^{(s1)} = \boldsymbol{\omega}_{o1}^{(1)} \times \mathbf{r}_{s1} + \mathbf{A}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{o1}^{(1)} - \omega_1 r_1 \mathbf{i}_{s1} \quad (21)$$

$$\mathbf{v}_{s2}^{(2,s2)} = \mathbf{v}_{s2}^{(2)} - \mathbf{v}_{s2}^{(s2)} = \boldsymbol{\omega}_{o2}^{(2)} \times \mathbf{r}_{s2} + \mathbf{A}_2 \times \boldsymbol{\omega}_{o2}^{(2)} - \omega_2 r_2 \mathbf{i}_{s2} \quad (22)$$

A szögsebességek és ezek ekvipolens eltolását meghatározó oszlopvektorok (19), illetve (20) kifejezéseit behelyettesítve a (20) illetve (21) kifejezésekbe, megkapjuk a sebességvektorok oszlopait:

$$\underline{\mathbf{v}}_s^{(s1)} = \begin{bmatrix} -y_s \\ x_s - r_1 \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\underline{\mathbf{v}}_s^{(s2)} = \begin{bmatrix} y_s \\ x_s + r_2 \varphi_2 i_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Mindkét profil egyszerre kapcsol, tehát ha a kapcsolódási pont az M pont, akkor $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$, ugyanabban az időben, mindkét lécz-kerék kapcsolás számára[2].

A kapcsolódási egyenletek vektoriális alakja [10]

$$\mathbf{v}_s^{(s1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)} = 0 \quad (25)$$

$$\mathbf{v}_s^{(s2)} \cdot \mathbf{n}^{(2)} = 0 \quad (26)$$

A következőkben a koszinusz-profil normálvektorát az u paraméter segítségével írjuk fel:

$$\underline{\mathbf{n}}(u) = \begin{bmatrix} \frac{2a}{m} \sin \frac{2}{m} u \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Az 1-es kerékre érvényes (25) kapcsolódási egyenletbe helyettesítve a hozzá tartozó (23) sebességvektort és a (27) kifejezésű normálvektort, a következő egyenlethez jutunk:

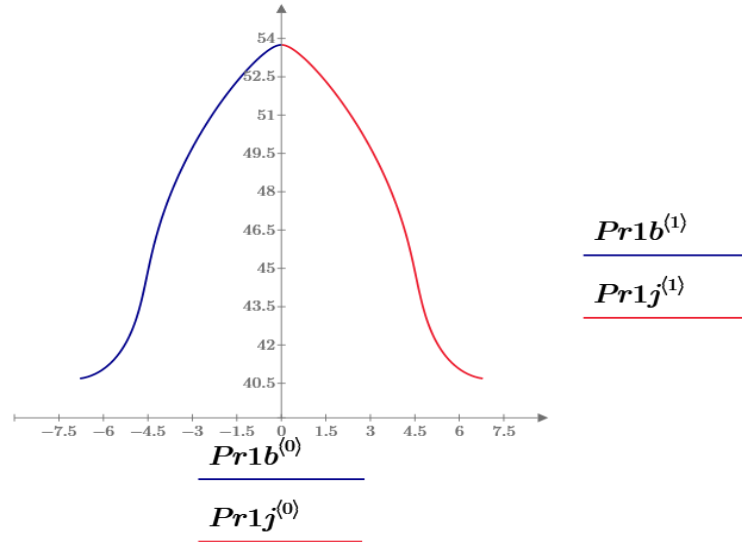
$$\varphi_1(u) = \frac{2}{mz_1} \left(x_s - y_s \frac{2a}{m} \sin \frac{2}{m} u \right) \quad (28)$$

Hasonlóképpen járunk el a második kapcsolódási egyenlettel is, azaz a (24) és (27) kifejezéseket helyettesítjük a (26) egyenletbe, így a következő függvényhez jutunk:

$$\varphi_2(u) = \frac{2(-1)}{mz_2} \left(u - \frac{a^2}{m} \sin \frac{4}{m} u \right) \quad (29)$$

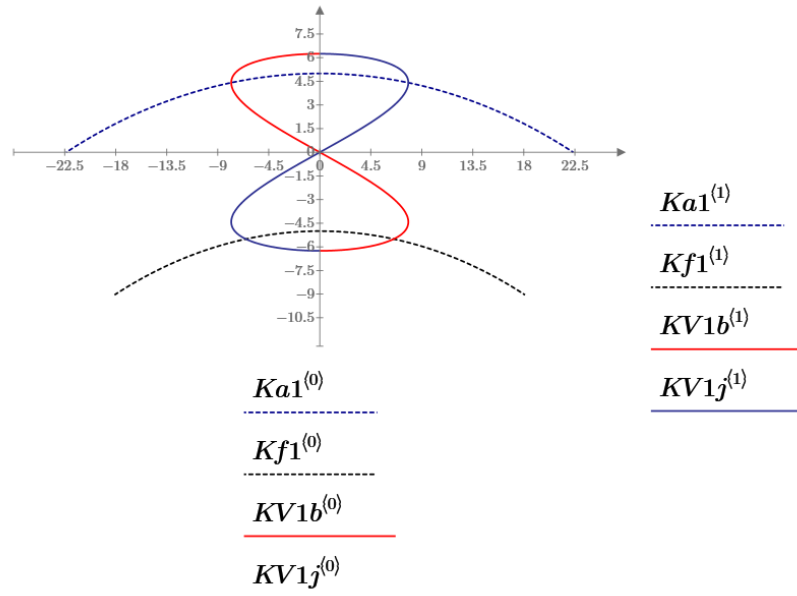
A kapott egyenleteket **Mathcad** környezetbe illesztve, létrehoztuk a bal (piros), illetve jobb (kék) fogárok-profilokat, amelyeket a **6. ábrán** szemléltetünk [2].

Ugyanakkor, a kapcsolódási egyenletekből származó (28) és (29) függvényeket felhasználva **Mathcad** környezetben, a (14) és (15) mátrixok inverzeit felhasználva, átírjuk a kapcsolódási pontokat az álló koordináta-rendszerbe, és ezáltal létrehozuk a bal és a jobb fogoldalak teljes elméleti kapcsolódási vonalait.



6. ábra. Koszinusz fogárok profilok

Azért nevezem e görbéket teljes elméleti kapcsolódási vonalnak, mivel, amint az a **6. ábrán** is látható, a fogfej nincs lecsapva, tehát lábhézag nélkül történik az elméleti kapcsolódás. Megjegyezzük, hogy amennyiben egy ekvivalens evolvens fogazatú hajtópárnak megfelelő fejhézaggal ellátott koszinusz-hajtópárt hozunk létre, akkor a kapcsolóvonalak **7. ábrán** szemléltetett terjedelméből csak a fej-és belső kör közötti részek lesznek aktívak:



7. ábra. A jobb és a bal fogoldal kapcsolódási vonala

4 Profileltolás alkalmazása

Evolvens fogaskerek esetén a hajtópár háromféleképpen valósítható meg: elemi fogazással, kompenzált fogazással, illetve általános fogazással [3].

Elemi fogazat esetében nincs profileltolás, így a szerszám-osztóvonal érinti lefejtéskor az osztóköröket. Ennek megfelelően az osztókörök az osztóvonalon gördülnek le, tehát az osztókörök egybeesnek a gördülőkörökkel.

Az evolvens elemi fogazatnak kevés előnye, illetve számos hátránya van, melyek közül az alábbiakat említjük meg:

- számítási és gyártási egyszerűség (másolással gyárthatók);
- ezzel a legegyszerűbb a soros kerek készítése;
- mivel a modul és a fogsám segítségével fejezzük ki a tengelytávot, a tengelytáv megválasztása korlátozva van;
- evolvens kerek esetén a legkisebb fogsám $Z=17$;
- fogtőszilárdsági szempontból nem jelenti az optimális megoldást.

Ha szerszámot a kiskeréken adott távolságra kihúzzuk és a nagykeréken ugyanakkora távolsággal betoljuk, akkor kompenzált fogazatról beszélünk [11]. Az elemi fogazathoz képest, a profileltolásnak köszönhetően, a szerszámközépvonal a kiskerek osztókörének

érintőjétől kifelé $+m\xi$ távolságnyra, illetve a nagykerék esetében az osztókör érintőjétől befelé $-m\xi$ távolságnyra helyezkedik el. Az így kialakított fogaskerékpár esetében a kiskeréken a fogak vastagabbak lesznek, ami maga után vonja a teherbírás növekedését, ezzel ellentétben a nagykeréken a fogak elvékonyodnak, ami a teherbírás csökkenését vonja maga után.

Mivel a fogak alakja változik, így felírható a nagy-, illetve kiskerék fogvastagsága az osztókörön:

Kiskerék esetén:

Kiskerék esetén: (30)

$$s_1 = m \left(\frac{\pi}{m} + 2\xi_1 \operatorname{tg}\alpha_0 \right)$$

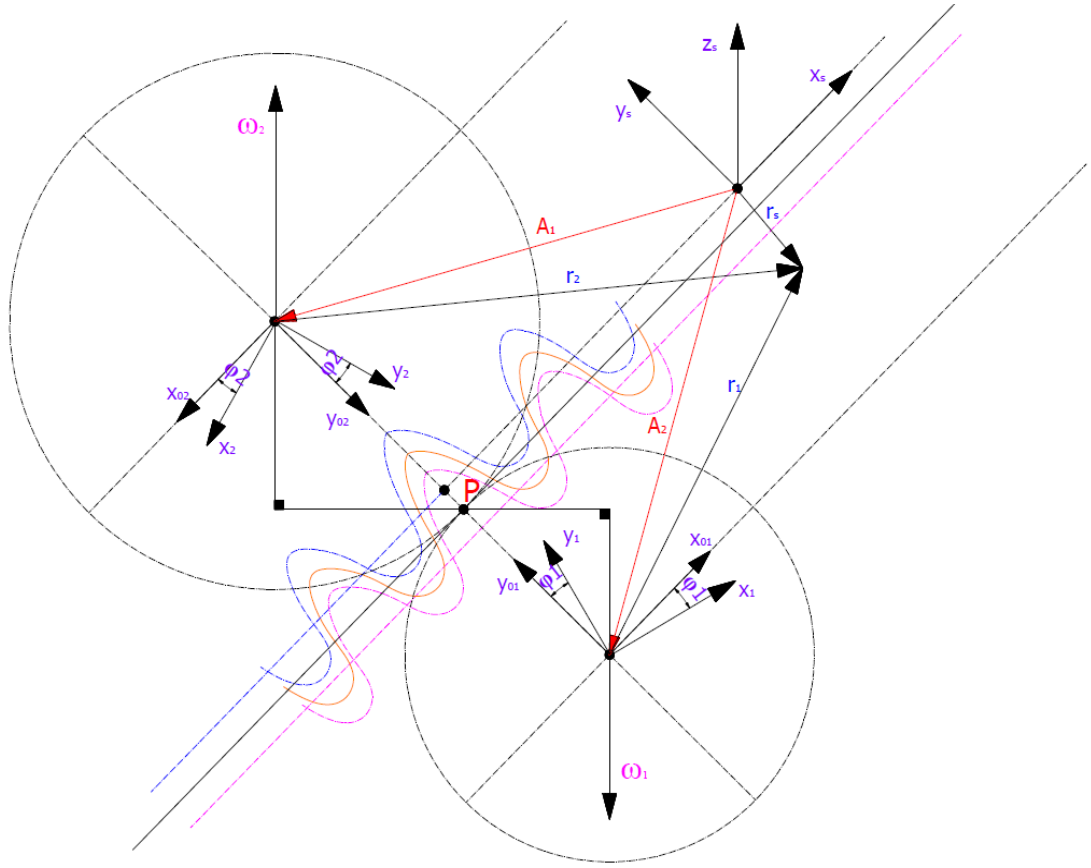
Nagykerék esetén:

$$s_2 = m \left(\frac{\pi}{m} - 2\xi_1 \operatorname{tg}\alpha_0 \right) \quad (31)$$

A kompenzált fogazatnak számos előnye van, melyek közül a legjelentősebbek [11]:

- a fogak vékonyodása következtében csökken a teherbírás, de ez bizonyos áttételtől fölfelé nem számít, mert növekvő fogszám esetében a fogtőszilárdság a görbületek változása miatt növekszik;
- amennyiben egy adott fogaskerékpár kiskereke beleesik az alámetszési tartományba, akkor kompenzáció alkalmazásával, a tengelytáv és a fogszámok megtartása mellett az adott fogaskerékpárnál elkerülhető az alámetszés.

A következőkben a koszinusz fogaskerek esetében kompenzált fogazást alkalmazunk. A pozitív, illetve negatív profileltolásokat a **8.ábrán** szemléltetjük.



8. ábra. Negatív illetve pozitív profileltolások koszinusz fogazat esetén

Profileltolás esetén a rendszerek közötti transzformációs mátrixok, a 3. ábrát figyelembe véve, a következő alakban írhatók fel:

$$\underline{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{0s1} \underline{\mathbf{r}}_{s1} \quad (32)$$

$$\mathbf{M}_{1s1} = \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{0s1} \quad (33)$$

$$\underline{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{M}_{20} \mathbf{M}_{0s2} \underline{\mathbf{r}}_{s2} \quad (34)$$

$$\mathbf{M}_{2s2} = \mathbf{M}_{20} \mathbf{M}_{0s2} \quad (35)$$

A burkoláshoz felhasznált transzformációs egyenletek mátrixos alakjai hasonlóak az elemi fogazat képzésénél használt formákhoz, csak a transláció oszlopba kerülnek be a profileltolások. Ezen mátrixok kifejtett alakjától jelen közleményben eltekintünk.

A szögsebességek és ezek ekvipolens eltolását meghatározó helyvektorok, kompenzált fogazás esetében, a következők lesznek:

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}_{01s}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \underline{\mathbf{A}}_{1s} = \begin{bmatrix} -(r_1 + \xi s m) \varphi_1 \\ -(r_1 + \xi s m) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (36)$$

$$\underline{\omega}_{02s}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_{21} \end{bmatrix}; \underline{A}_{2s} = \begin{bmatrix} -(r_2 + \xi_s m)\varphi_2 \\ r_2 + \xi_s m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

A normál vektor alakja változatlan, tehát a (27) oszlopmátrixot alkalmazzuk.

A számítások elvégzése után a sebességvektorok oszlopai következők lesznek:

$$\underline{v}_s^{(s1)} = \begin{bmatrix} -(y_s + \xi_s m) \\ x_s + r_1 \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

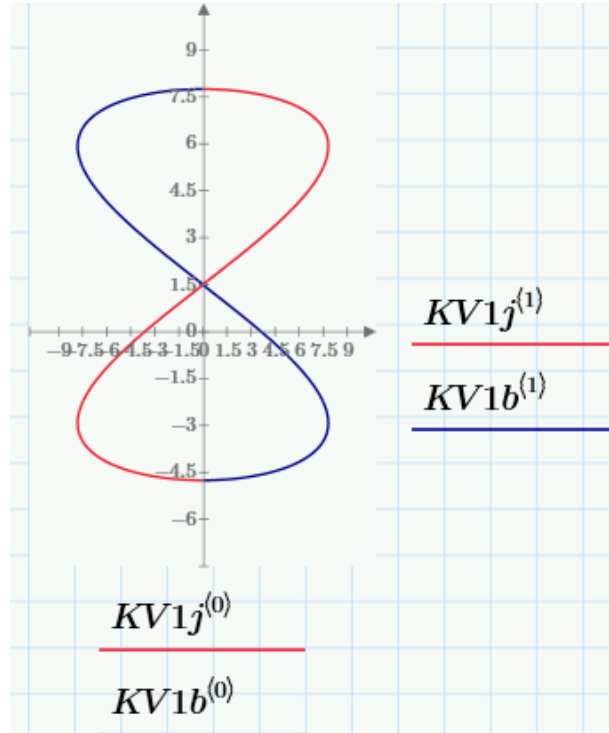
$$\underline{v}_s^{(s2)} = \begin{bmatrix} i_{21}(y_s + \xi_s m) \\ -i_{21}(x_s + r_2 \varphi_2 + \xi_s m) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

A (27), (38) és (39) (25) és (26) egyenletekbe való helyettesítésével a kapcsolódási egyenletek megoldásai a következők lesznek:

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{mz_1} \left(u - \left(\frac{a^2}{m} \sin\left(\frac{4u}{m}\right) + \xi_s \frac{m2a}{m} \sin\left(\frac{2u}{m}\right) \right) \right) \quad (40)$$

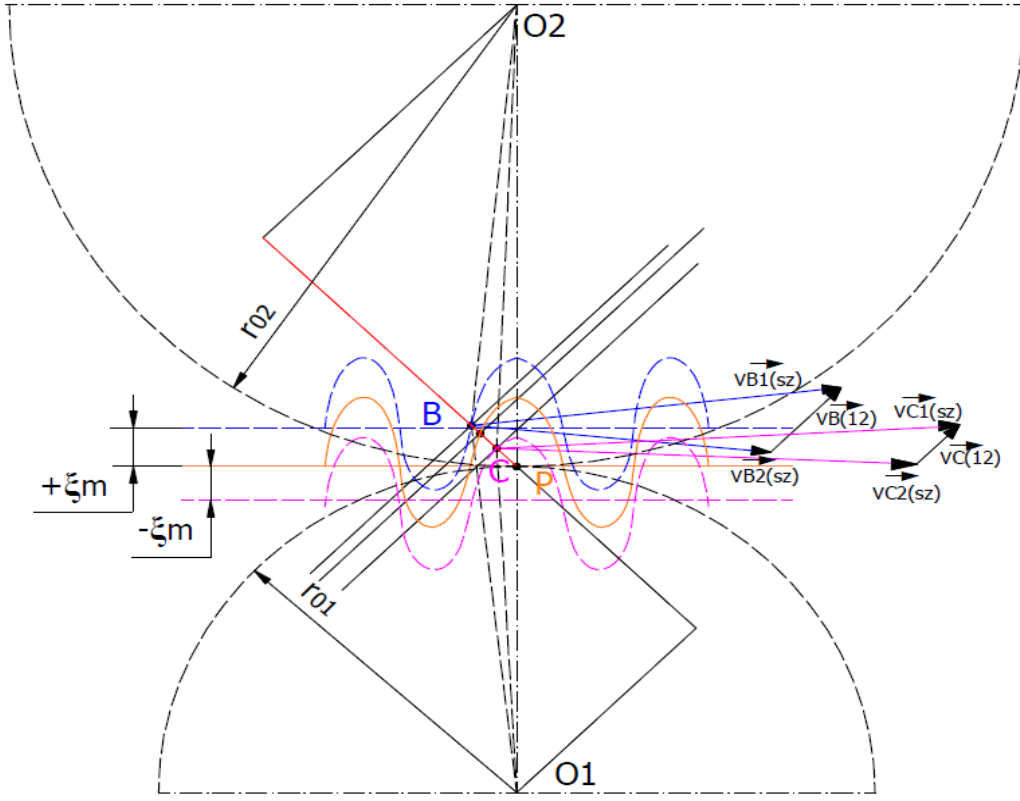
$$\varphi_2(u) = i_{21} \left(\arccos\left(\frac{2}{m}\right) u + \xi_s m \right) + \frac{2a}{m} \sin\left(\frac{2u}{m}\right) + \left(-i_{21} \left(u + \frac{1}{mz_2} \right) \right) \quad (41)$$

A profileltolás esetén létrejövő a kapcsolódási vonalakat a 9. ábrán szemléltetjük.



9. Profileltolás során keletkező kapcsolódási vonalak

A pozitív illetve negatív profileltolások esetén kapcsolódáskor a 10. ábrán feltüntetett sebességek jelennek meg:



10. ábra. Sebességek profileltolás esetén

A 10. ábrán feltüntetett sebességek közül jelen esetben csak a pozitív profileltolási esetet tárgyaljuk. A

$$\underline{v}_{B1_{sz}} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) x_s - \cos(\varphi_1) y_s + r_{02}(\cos(\varphi_1) + \varphi_1 \cdot \sin(\varphi_1)) \\ \cos(\varphi_1) x_s + \sin(\varphi_1) y_s - r_{02}(\sin(\varphi_1) + \varphi_1 \cdot \cos(\varphi_1)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Ahol:

$\underline{v}_{B1_{sz}}$ – az egyes kerékhez tartozó szállító sebesség

$$\underline{v}_{B2_{sz}} = \begin{bmatrix} (x_s \cos \varphi_1 - y_s \sin \varphi_1 - r_{01}(\sin \varphi_1 - \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1)) - A \cdot \sin \varphi_1 \\ (x_s \sin \varphi_1 + y_s \cos \varphi_1 + r_{01}(\cos \varphi_1 + \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1)) - A \cdot \cos \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Ahol:

$\underline{v}_{B2_{sz}}$ – a kettes kerékhez tartozó szállító sebesség

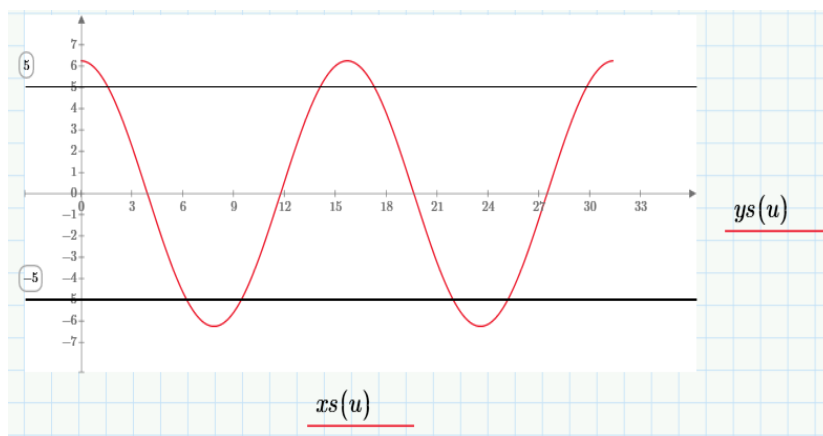
5 Működés szimuláció

Annak érdekében, hogy szimulációt végezzünk, szükséges a lefejtő lécs háromdimenziós modelljének elkészítése.

A kiinduló adatok a következők:

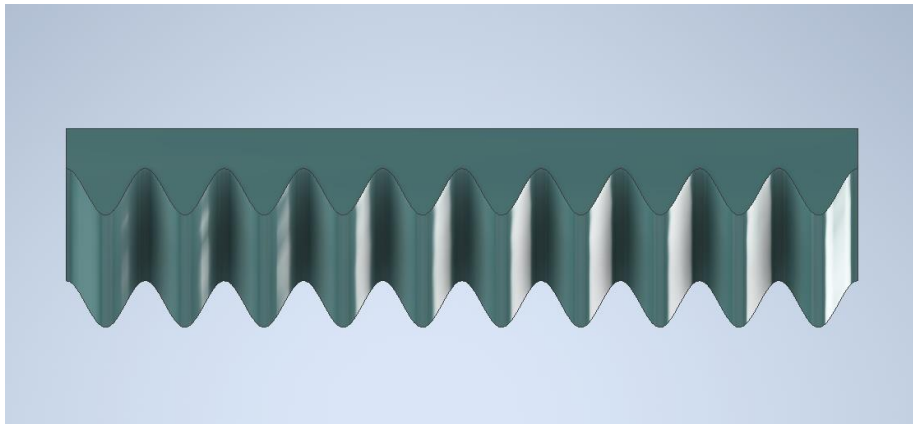
- modul: $m = 5 \text{ mm}$
- fajlagos fogfejmagasság: $h_0 = 1$
- fajlagos foghézag: $c_0 = 0.25$
- kiskerék fogszáma: $z_1 = 19$
- nagykerék fogszáma: $z_2 = 27$
- a generáló lécs fogfej és foglábmagassága: $a = (h_0 + c_0) \cdot m = 6.25 \text{ [mm]}$
- osztás-meghatározó tényező: $b = \frac{2}{m} = \frac{2}{5}$

A meglévő egyenleteket és a kiinduló adatokat Mathcad-környezetbe implementálva létrehoztuk a lefejtő lécs koszinusz profilját.



11. ábra. Lefejtő lécs koszinusz profilja

A 11.ábrán szemléltetett profil profilpontjait egy Excel táblázatba elmentettük, majd ezen pontok X illetve Y koordinátáit Autodesk-Inventor környezetbe implementálva létrehoztuk a lefejtő lécs testmodelljét.



12. ábra. Lefejtő lécs háromdimenziós modell

Ahhoz hogy a gyártási szimulációt el tudjuk végezni, szükséges ismerni a fogaskerek geometriai alapadatait.

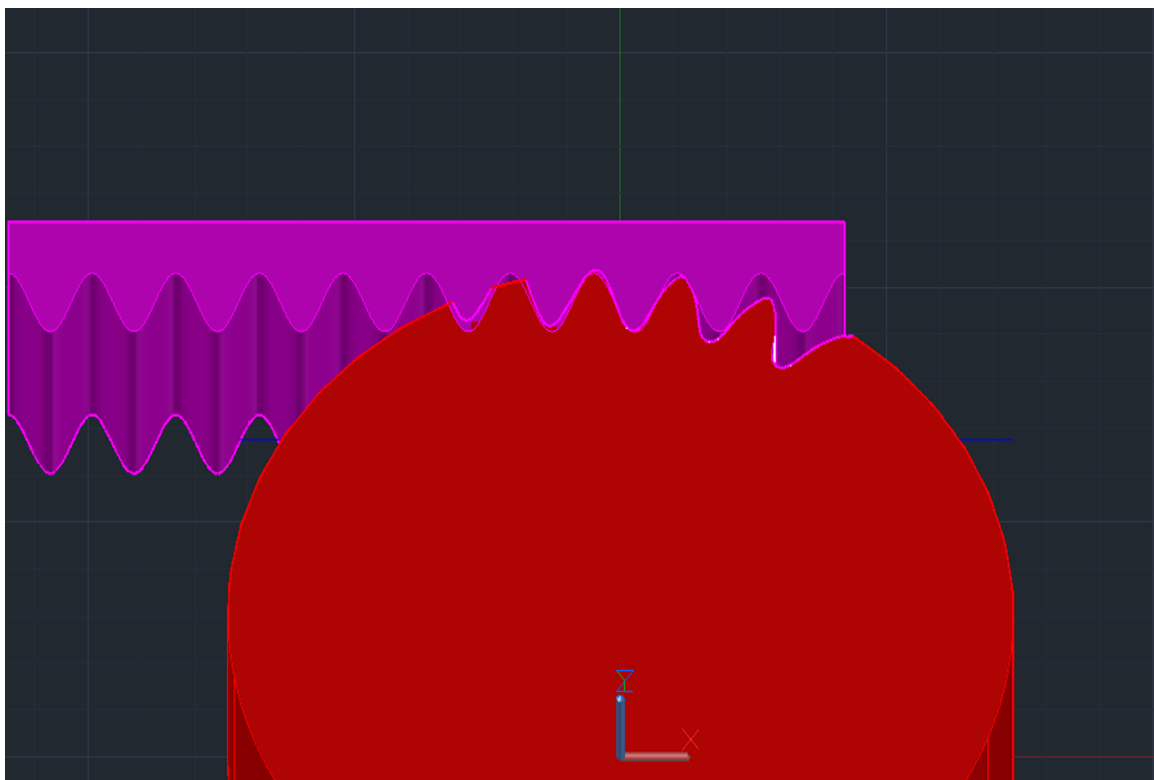
Kiinduló adatok:

Geometriai alapadatok:

- kiskerék osztókör-sugár: $r1 = 0.5 \cdot m \cdot z1$
- nagykerék osztókör-sugár: $r2 = 0.5 \cdot m \cdot z2$
- tengelytáv: $A = z1 + z2$
- áttételi arány: $i21 = \frac{z1}{z2}$

Amint azt már korábban is említettük gyártási szimulációkat az Autodesk AutoCad környezetben végeztük, mivel az Autodesk-Inventor nem tud egyidejű legördülő-kivonó szimulációt végezni. Az AutoCad saját programozási felületét az Autolispet felhasználva egy olyan [4],[6-7] programot írtunk, amely egy egyidejű legördülést és kivonást valósít meg.

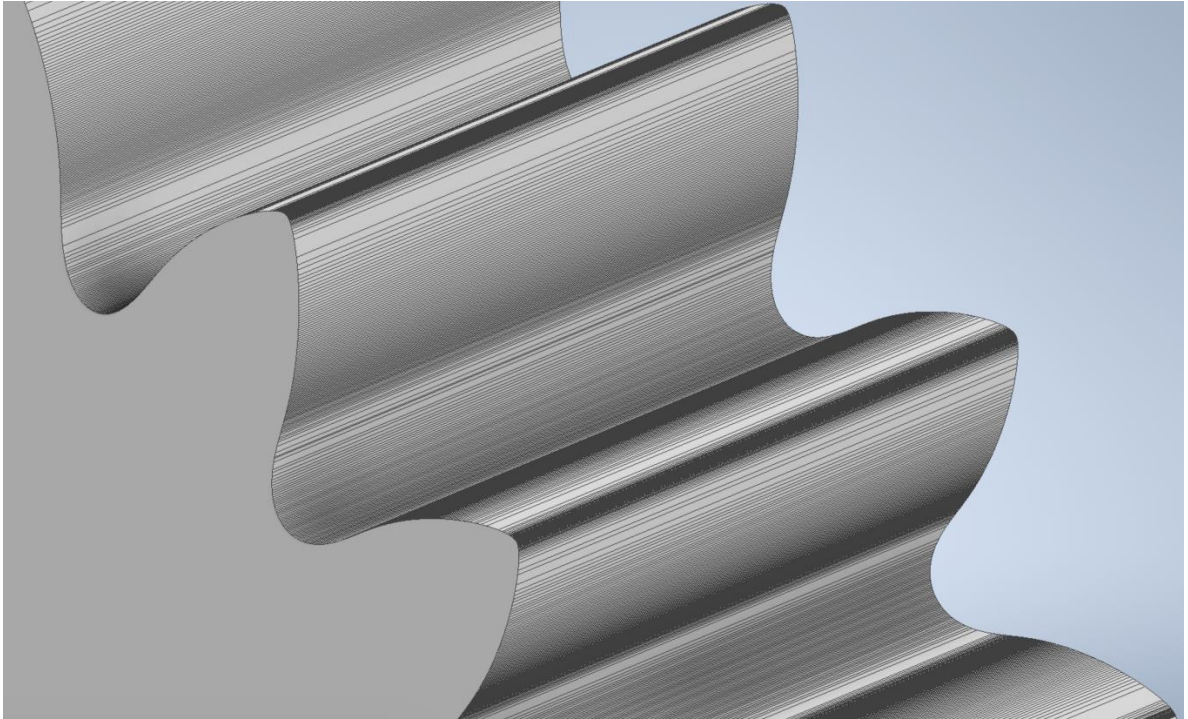
Az Autolisp program úgy van megírva, hogy futtatásakor előre bevitt modellekkel dolgozzon, ezért az Autocad-környezetbe előre bevittük a lefejtő lécs, illetve az előgyártmány modelljeit. Következő lépésekben elvégeztük a gyártási szimulációkat és létre hoztunk egy koszinusz, illetve egy evolvens fogazatú hajtópárt. A legördülő-kivonó műveletet a 13. ábrán szemléltetjük.



13. ábra. Legörülő-kivonó művelet

5.1 Összehasonlító vizsgálatok és ellenőrzések

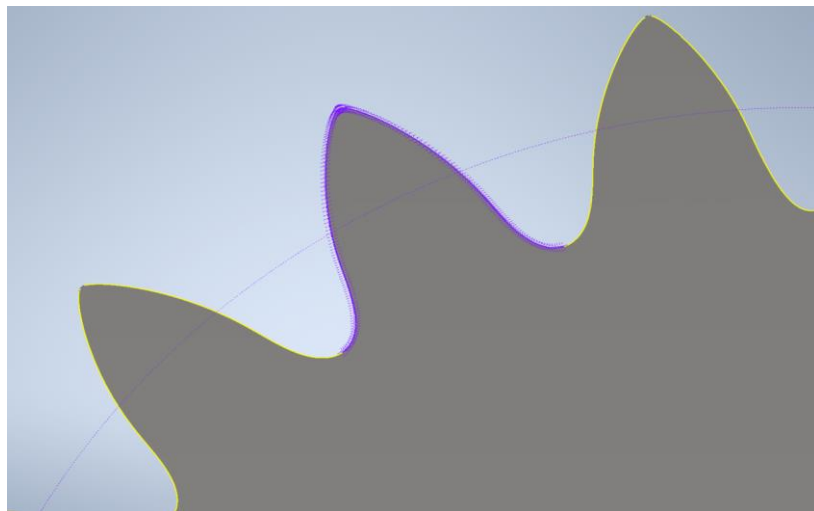
A lefejtő lécs segítségével generált fogaskerékpáron végeztünk vizsgálatokat. A vizsgálatokhoz szükséges volt elkészítenünk két, a koszinusz profilú kerekével azonos kiinduló adatokkal rendelkező evolvens profilú fogaskereket. Annak érdekében, hogy megfelelő méréseket végezzünk, mind a négy esetben a profileltolás értéke $\xi=0$ –ra volt állítva. Annak érdekében, hogy a koszinusz lécprofilt minél pontosabban közelítsük, az Autodesk-Inventor által megengedett maximális 500 pontot vettük fel, majd ezeket Spline-görbékkel kötöttük össze. A kapott profilból létrehozott léccel az Autolisp környezet segítségével generáltuk a $z2=27$, illetve $z1=19$ fogú koszinusz fogaskerekeket. A kivonásos-gördülési módszer alkalmazásakor a megadott lépték értéke csupán **0,2** mm volt, mivel ez a módszer igen nagy hardver igényű (lépésenkénti kivonás és felületképzés komplex művelet). A 14. ábrán megfigyelhetők a gyártó lécs által generált egyenes nyomvonalak a fog felületén [2],[4].



14. ábra. AutoCad-ben generált fogfelült szemléltetés

5.2 Matematikai modell grafikus ellenőrzése

Első lépésként vizsgáltuk, hogy a matematikai modell milyen mértékben egyezik a gyártásszimuláció során generált fogaskerek fogprofiljával.



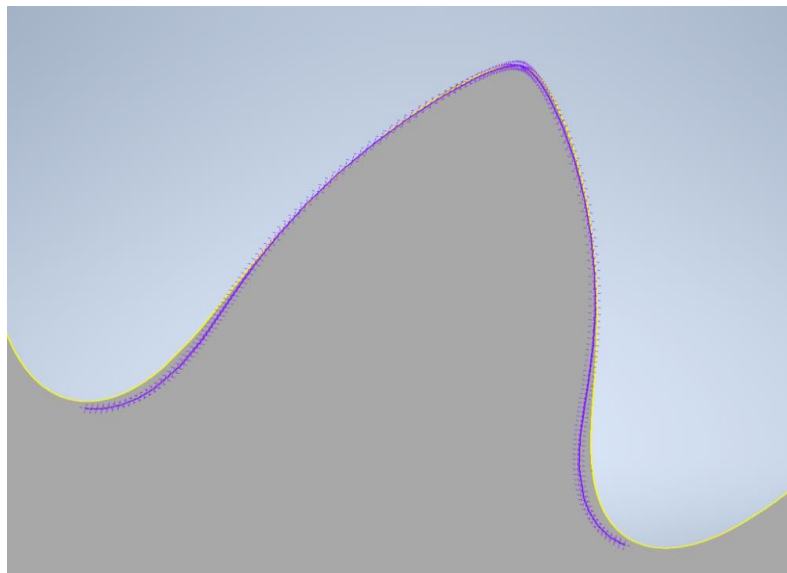
15. ábra. Matematikai modell helyességének vizsgálata

Amint azt a 15. ábra is szemlélteti, a Mathcad környezetben generált koszinusz profilt tökéletesen illesztettük a gyártásszimuláció során létrehozott fogaskerék profilvetületéhez.

Tehát a matematikai modell helyes.

5.3 A fogszám hatása a koszinusz profil alakjára

Az evolvens profilú fogaskerek esetében megfigyelhető, hogy a fogaskerék fogszámának változása, hatással van az evolvens profil alakjára, az alapkör-sugár változása miatt. Ez a koszinusz fogazat esetében is igaz, amint az a 16. ábrán szemléltetünk.



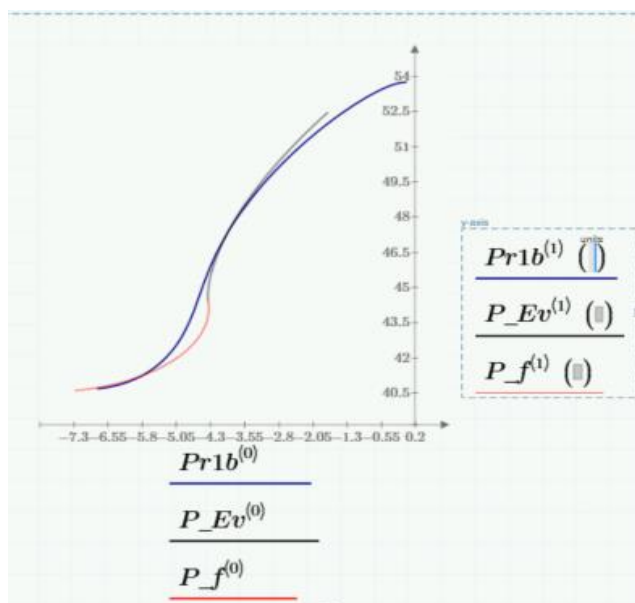
16. ábra. Fogszám hatás

A 16. ábrán a $Z=27$ fogszámú (sárga) illetve $Z=19$ fogszámú (lila) fogaskerek profiljai láthatók. Ha az osztókörtől a fejkör irányába haladunk, azt tapasztaljuk, hogy a kisebb fogszámú kerék fogát közrezáró profilok hamarabb összetartanak, ebből eredően nagyobb a fogkihegyesedés veszélye. Ugyanakkor, ha az osztókörtől a lábkör irányába haladunk, akkor a profilok ismét záró tendenciát mutatnak, tehát a fogláb görbe íve meredekebb, ami maga után vonja a fogtő gyengülését. [2].

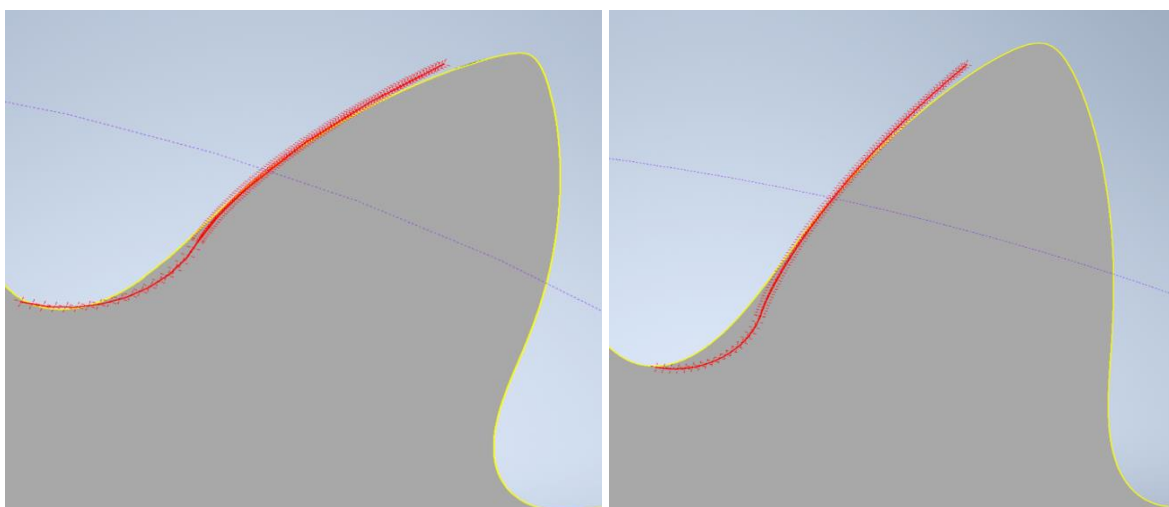
5.4 Evolvens és koszinusz profilok összehasonlítása

Ahhoz, hogy a két profilt összehasonlítsuk, szükségünk volt két evolvens fogazatú kerékre. Az evolvens fogaskerek profilját csak úgy, mint a koszinusz profilokat, Mathcad környezetben generáltuk. A profilokat két görbéből építettük fel: egy fogláb görbéből, és egy evolvens szakaszból. Ezen profilok lekerekítetlen fej-élű lefejtő léccel voltak generálva. A helyes összehasonlítás érdekében az osztókört nevezzük ki vonatkoztatási elemnek. Ezért Mathcad környezetben úgy ábrázoltuk az összehasonlításra kijelölt profilokat, hogy az osztóköri pontjuk egybeessen. E célból kiszámítottam a két fogazat osztóköri pontjának polárszögét, majd az evolvens profil és a koszinusz profil osztóköri pontjai polárszögkülönbségével elforgattam az előbbi hordozó koordináta-rendszerét. Így esik a két pont egybe. A számításokra, jelen közleményben nem fogok kitérni.

Grafikus vizsgálatokat is végeztem a profilok összehasonlításához. Mindkét esetben az evolvens profilhoz tartozó foglábgörbe gyengébb fogtövet eredményez, amely – feltételezhetően – csökkenti a fogaskerekék élettartamát [2].



17. ábra. Koszinuszprofil (kék),és evolvensprofil (fekete) és evolvens foglábgörbe (piros)



18. ábra. $Z=19$ eset (bal); $Z=27$ eset (jobb)

Ha az osztókör, és a fejkör közötti szakaszt vizsgáljuk, mindkét esetben a koszinusz profil összezár az evolvenshez mérten, amely – feltételezésünk szerint – hamarabb bekövetkező fogkihegyesedést eredményezhet.

5.5 Profileltolt (kompenzált) koszinusz illetve evolvens kerek kivonásos módszerrel történő képzése

Akárcsak az előbbiekből, az Autodesk-Inventor által megengedett maximum 500 pontot importáltuk, majd ezekre Spline-görbét illesztettünk. A kapott profilból létrehozott léccel az Autolisp programozási környezet segítségével, 3 különböző fogszámú koszinusz- illetve evolvens fogaskereket generáltuk. Azért hozunk létre 3 különböző fogszámú evolvens illetve koszinusz kereket, mert a $Z=10$ esetben az alámetszést kívánjuk vizsgálni. A gyártásszimulációk elvégzésekor a megfelelő pontosság elérésének érdekében, a lécet illetve az előgyártmányt 0.2 milliméterenként léptettük [2].

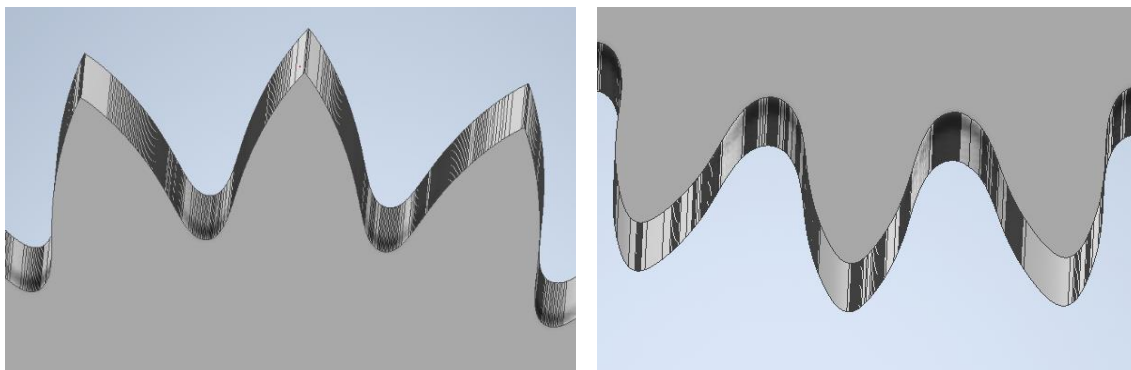
Annak érdekében, hogy a vizsgált evolvens illetve koszinusz fogaskerékpárok összehasonlítása az ipari gyakorlathoz köthető legyen, a szakirodalomban fellelhető evolvens fogaskerekre érvényes profileltolási értékeket alkalmaztuk [11].

A generálás során alkalmazott eltolási értékekre az 1. táblázatban összegeztük

1. táblázat: Profileltolások összegzése

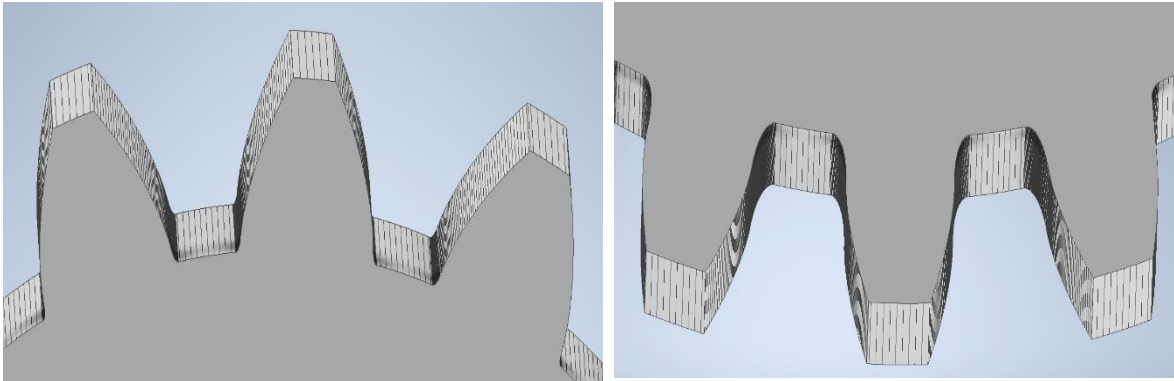
Z	- ξ	- ξ	+ ξ	+ ξ
10	-0.4	-0.2	0.2	0.4
19	-0.4	-0.2	0.2	0.4
27	0.4	-0.2	0.2	0.4

Az 1. táblázatban feltüntetett profileltolási értékekre létrehoztuk a fogaskereket, viszont jelenleg csakis a $+\xi=0.4$ illetve $-\xi=-0.4$ eseteket fogjuk feltüntetni a 19. illetve 20. ábrákon.



19. ábra. $Z=19$, $\xi=+0.4$ eset (bal), illetve $Z=27$, $\xi=-0.4$ eset (jobb)

Koszinusz fogazatok



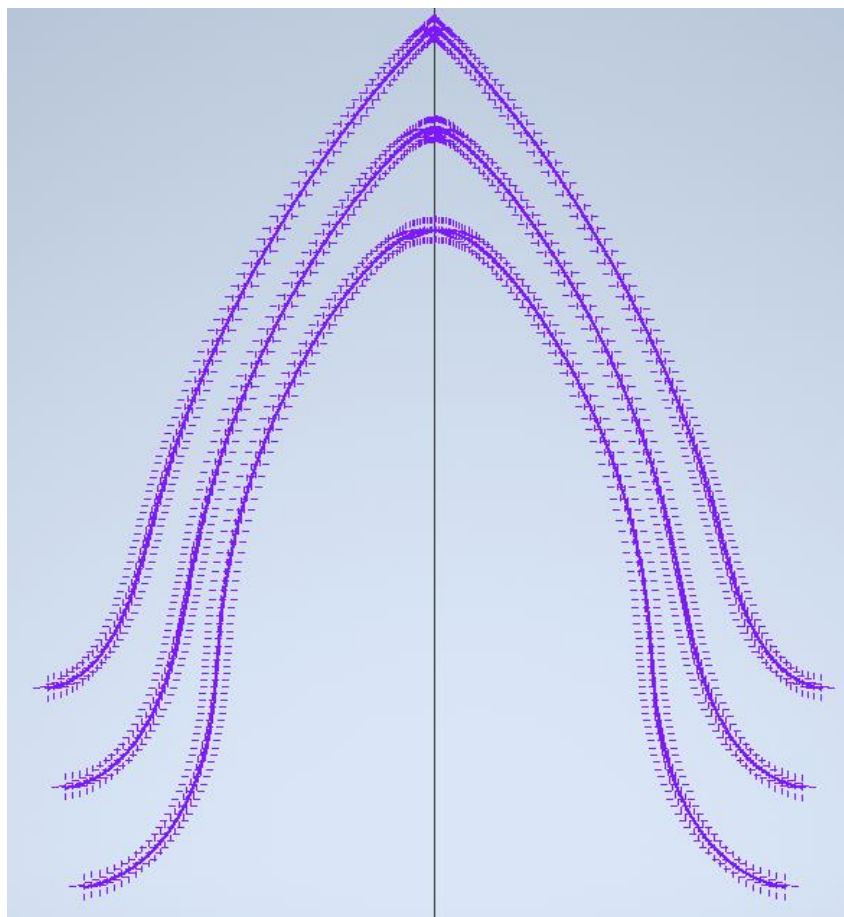
20. ábra. $Z=19$, $\xi=+0.4$ eset (bal), illetve $Z=27$, $\xi=-0.4$ eset (jobb)

Evolvens fogazatok

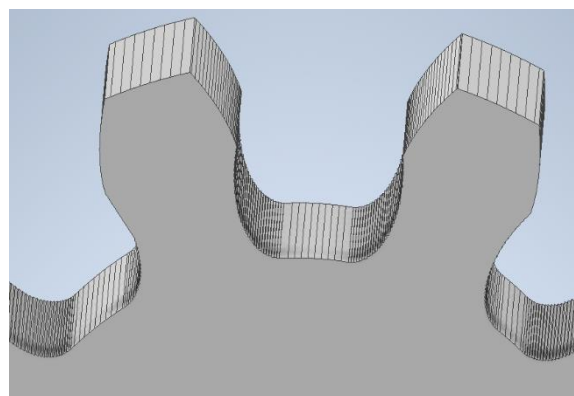
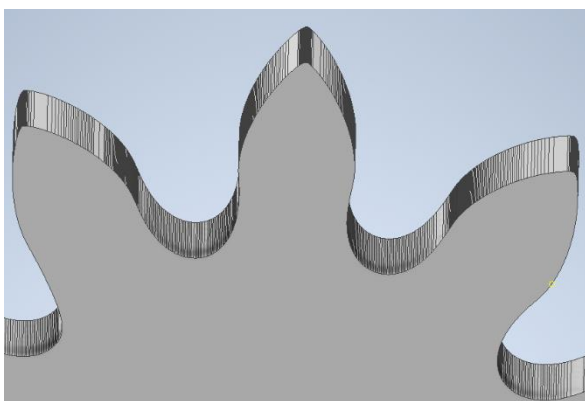
A 21. ábrán a $Z=19$ fogú fogaskerék profiljait szemléltettük alaphelyzetben, valamint profileltolt helyzetekben, ebben az esetben ugyancsak a $\xi=+0.4$, illetve $\xi=-0.4$ paraméterezésnek megfelelő eseteket tüntettük fel.

Amint az látható, pozitív profileltolási érték esetén a fog kihegyesedik. Negatív profileltolási esetben nem jelenik meg ugyan foghegyesedés, viszont karcsú fogakat kapunk amelyek feltételezhetően hamarabb törnek.

A következőkben az alámetszés határát vizsgáljuk profileltolós fogaskerek esetében, a tárgyalt fogszám $Z=10$, valamint a profileltolás értéke $+\xi=0.4$. A 22. ábrán az $Z=10$ fogú evolvens illetve koszinusz kerekeket ábrázoljuk.



21. ábra. Profileltolt fogaskerékprofilok



22. ábra. $Z=10$ fog; Koszinusz profil (bal)

$Z=10$ fog; Evolvens profil (jobb)

Amint az 22. ábrán is látható, az alámetszés evolvens fogaskerék esetén szemmel láthatóan hatalmas. Az alámetszés által létrejövő fogláb görbe terjedelme szemmel láthatóan nagyobb, mint az evolvens ívszakasz. Ezzel ellentétben, koszinusz fogaskerek esetén nem jelentkezik az alámetszési jelenség, tehát koszinusz fogaskerek esetén a minimális fogszámszám az evolvens fogazathoz képest csökkenthető. Ez későbbi tanulmányom egyik célja.

6 Következtetések

A koszinusz fogazat kialakításakor látható hogy a lécek egybevágók, továbbá ezzel párhuzamosan sablon-ellensablonként érintkeznek, ami az egyedüli szerszámmal való kialakítást lehetővé teszi.

A fogszám jelentősen befolyásolja a fogaskerék profiljának alakját.

Amikor ugyanolyan modullal rendelkező, de különböző fogszámú fogaskerekeket gyártunk, a nagyobb fogszám előnyös, mivel ekkor erősebb fogtövet eredményez a koszinuszgörbe.

A koszinusz fogaskerekek, foglábgörbájük alakját tekintve, kedvezőbbek, mint az evolvens fogazat, mivel az evolvens esetében gyengébb fogtő lehet, ami jelentősen befolyásolja az élettartamot.

A koszinusz fogazat esetében, kis fogszámoknál a profilok közötti távolság jelentősen csökken a fejkör felé haladva, ami kihegyesedés veszélyét hordozza.

Koszinusz profil alkalmazásával a $Z=17$ fogszámnál kisebb fogszámú kerek is kialakíthatók, tehát a minimális fogszámhatár kitolható, ezzel szemben az evolvens profil esetében, $Z=17$ fog alatt megjelenik az alámetszés.

7 Irodalomjegyzék

- [1] Shanming Luo , Yue Wu , Jian Wang: The generation principle and mathematical models of a novel cosine gear drive. *Mechanism and Machine Theory* 43 (2008) 1543–1556.
- [2] Máté, M., Gál, K., Tolvaly-Rosca, F.: *Koszinuszprofilú lefejtőléccel gyártott fogaskerékpár szintézise és CAD-vizsgálata*. 19. Műszaki Tudományos Közlemények, Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2023. <https://eda.eme.ro/items/6913ae78-c4dd-4639-b2a1-8815a51555d7>
- [3] Pálfi, K., Prezenszky, T., Csibi, V., Antal, B., Gyenge, Cs., Balogh, F.: *Fogazott alkatrészek tervezése, szerszámai és gyártása*, Gloria Kiadó, Kolozsvár, 1999.
- [4] Tolvaly-Rosca, F. : *A számítógépes tervezés alapjai: AutoLisp és Autodesk Inventor alapismeretek*. Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2009.
- [5] ISO 53:1998 *Cylindrical gears for general and heavy engineering Standard basic rack tooth profile*. <https://www.iso.org/standard/22643.html>. Utolsó letöltés: 2024. ápr. 12, 4:45PM.

- [6] Máté, M. Hengeres fogaskerek gyártószerszámai, Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2016.
- [7] Hollanda D.: Așchiere și scule. Reprografia I.I.S.Tg.Mureș, 1994.234-240.
- [8] Szeniczei L.: Az általános fogazás. Nehézipari Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1958. 49-50.
- [9]MÁTÉ, M., *Az egyenesfogú metszőkerék szerszámkapcsolószögének optimalálása*. Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka, Kolozsvár, 1996. Műszaki Tudományos Füzetek - FMTÜ I. sz. (1996) pag. 12-15. <https://doi.org/10.36243/fmtu-1996.03>
- [10] Litvin, F.L.: A fogaskerékkapcsolás elmélete. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.
- [11] Rohonyi, V.: Fogaskerékhajtások. București, Editura Technică, 1958.