



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék



Terjedési jellemzők és áthallás vizsgálata többeres, acélköpenyes kábelben

TDK dolgozat

Vágó Bendegúz Zsolt
Tanszéki konzulens: Dr. Gyimóthy Szabolcs
Külső konzulens: Tatai Péter

2024

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott Vágó Bendegúz Zsolt, kijelentem, hogy ezt a TDK dolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy autentikált felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Budapest, 2024. november 3.

Vágó Bendegúz Zsolt

Tartalomjegyzék

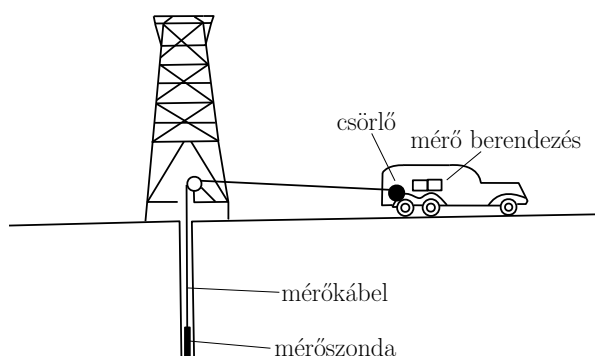
1. Bevezető	3
1.1. Geofizikai mérések fúrt kutakban	3
1.2. A vizsgálandó jelenségek	4
1.3. Célkitűzés	5
2. Csatolt távvezeték-rendszer modellje	6
3. A távvezeték-paraméterek meghatározása	9
3.1. Hosszegységre eső soros impedancia-mátrix	9
3.1.1. A végeselemes szimuláció elve	9
3.2. Hosszegységre eső sönt admittancia-mátrix	13
3.2.1. A végeselemes szimuláció elve	13
3.3. Eredmények	15
3.3.1. Négyeres kábel	15
3.3.2. Héteres kábel	17
3.4. A paraméterszámítás ellenőrzése analitikus formulákkal	20
4. Módusanalízis	22
4.1. Módusképek	22
4.2. Csillapítás és fázissebesség	23
5. Mérési eredmények magyarázata	25
5.1. Rezonancia	25
5.2. Kettős impulzus	27

1. fejezet

Bevezető

1.1. Geofizikai mérések fúrt kutakban

A fúrólyukban, szonda mozgatásával végzett geofizikai vizsgálat az ún. karotázs mérés (a francia carottage=mintavétel szóból) [1]. Ennek előnye a magmintavételes eljárásokkal szemben nem csak az, hogy költséghatékonyabb, de az is, hogy a ténylegesen jellemző körülmények között lehet vizsgálni a kőzetet. Egy ilyen lyukgeofizikai mérést szemléltet az 1.1. ábra.



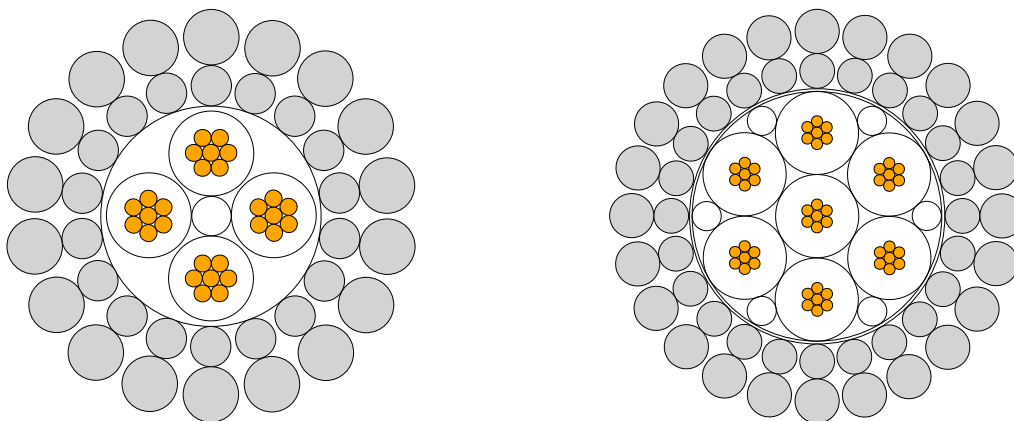
1.1. ábra. Karotázs mérés



1.2. ábra. Mérőkocsi

A mérőrendszer három fő része: a szonda, a kábel és a felszíni egység. Ebben a dolgozatban a kábel jelátviteli tulajdonságaira koncentrálunk, az azon végzett mérések közben tapasztalt jelenségekre keresünk magyarázatot.

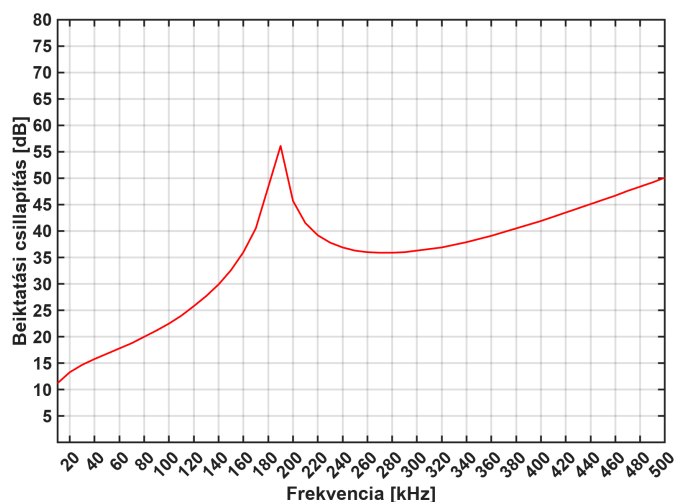
A kábelek hosszából fakadóan – akár 3-4 km hosszúak is lehetnek – a tömegük is jelentős. Annak érdekében, hogy saját súlyát elbírja, illetve ne nyúljon meg, acélsodronnyal erősítik meg – veszik körbe – az adatátvitelre szolgáló, rézből készült ereket. A rézvezetőket a köpenyen belül egy hőálló műanyag szigetelőréteg választja el egymástól [2]. Karotázs mérések során gyakran használt kábelek keresztmetszeti képét mutatja az 1.3. ábra.



1.3. ábra. Négyeres és héteres kábelek keresztmetszeti rajza

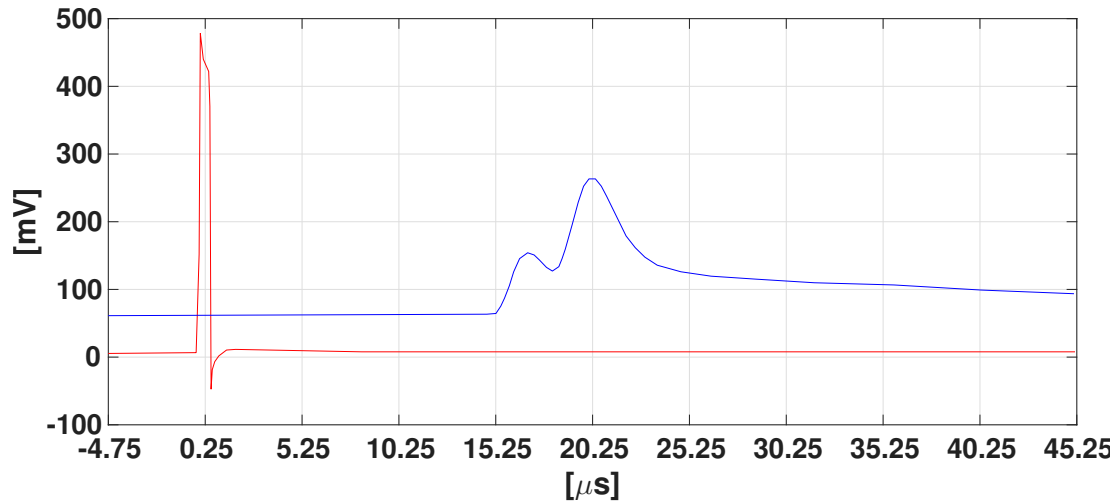
1.2. A vizsgálandó jelenségek

A kábelén végzett mérések során több érdekes jelenség is tapasztalható. Beiktatási csillapítás mérése esetén rezonanciacsúcsok figyelhetők meg. Ezek függenek a kábel hosszától, illetve attól, hogy melyik ereket használjuk. Az 1.4. ábrán egy négyeres kábelén végzett mérés látható, ahol 190 kHz körül figyelhetünk meg rezonanciacsúcsot.



1.4. ábra. Négyeres kábel szomszédos erein mért beiktatási csillapítás 2400 m hosszon

A másik jelenséget impulzusválasz mérésekor figyelhetjük meg. A bemeneten gerjesztett, kb. 1 μ s szélességű négyszögimpulzus hatására – bizonyos késleltetéssel – egy szétterjedt kettős impulzus jelenik meg. A jelenséget az 1.5. ábra mutatja.



1.5. ábra. Négyeres kábel szomszédos erein mért impulzusválasz

A rezonanciacsúcs nem minden esetben jelentkezik: átellenes ereket használva nem tapasztaljuk a jelenséget. Ezzel szemben a *kettős impulzust* minden mérés esetén megfigyelhetjük.

1.3. Célkitűzés

A jelenség magyarázatának megtalálása céljából a problémát több tudományos fórumon is közzétettük, de érdemi válasz nem érkezett. Ezután kezdtünk el mi is foglalkozni a feladattal.

A mérési eredmények alapján több lehetséges magyarázat is felvetődött: elképzelhető, hogy a vezetők között valamilyen áthallás van, és ez okozza a kettős impulzust, illetve a rezonanciát. Az áthallás oka sem egyértelmű: lehet, hogy a kábel sodrása vagy annak egyenetlensége miatt jön létre, de akár a kábel feltekercselése is okozhatja – a köpenyen kívül a kábelen nincs szigetelés, így feltekert állapotban ezek szabadon érintkezhetnek. A mérés körülményei is nagyban befolyásolhatják annak eredményét: a kábel végén lévő lezárások okozhatnak reflexiókat, akár módusok is átcsatolódhatnak rajtuk. Nem zárhatjuk ki azt a lehetőséget sem, hogy a jelenségeket valamilyen kábelhiba okozza.

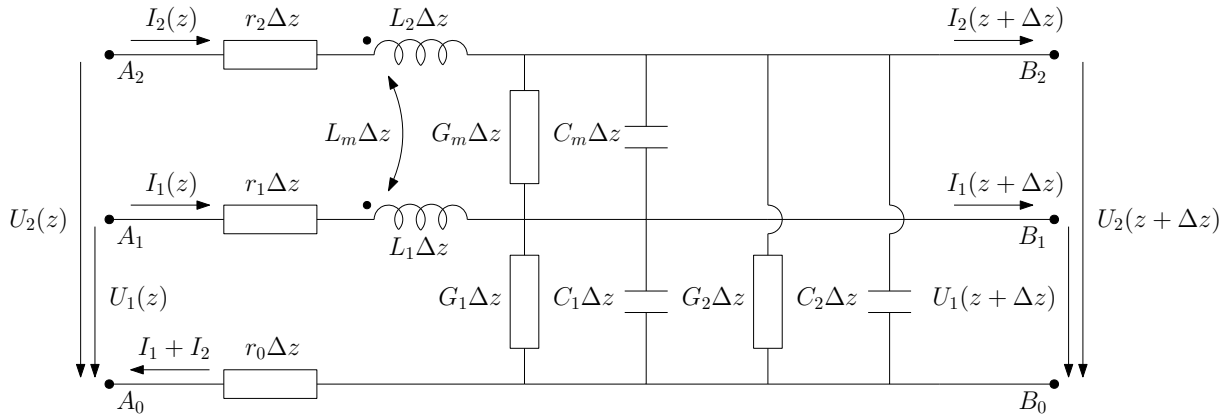
Dolgoztam célja utána járni ezeknek a lehetőségeknek, és magyarázatot adni a mérések során tapasztalt jelenségekre.

2. fejezet

Csatolt távvezeték-rendszer modellje

Feltételezzük, hogy a vizsgált jelenségek leírására, illetve magyarázatára szükséges és egyúttal elégséges lehet a többvezetős, csatolt távvezeték-rendszer modellje [3]. A távvezeték-modell alkalmazásának feltételei esetünkben általában véve teljesülnek: a vizsgált frekvenciatartományban a kábel keresztmetszeti méretei jóval kisebbek a hullámhossznál, ugyanakkor a gyakorlatban alkalmazott kábelhosszak a hullámhossz többszörösét is kitehetik. Ezen felül – bár a vezetők vesztesége nem elhanyagolható, valamint a szigetelőanyag a keresztmetszetben inhomogén kitöltésű – kvázi-TEM típusú terjedést feltételezünk.

A fogalmak bevezetése érdekében alább röviden közöljük a távvezeték-rendszer egyenleteinek levezetését a [4] irodalom alapján, mivel ez manapság általában nem szerepel a villamosmérnök képzés tananyagában. A jobb áttekinthetőség érdekében a levezetést – az általános mátrixos formalizmus mellett – egy 2+1 vezetős rendszer kézzelfogható példáján is végigkísérjük. Az utóbbi rendszer Δz hosszúságú szakaszára vonatkozó hálózati helyettesítő kép látható a 2.1. ábrán.



2.1. ábra. 2+1 vezetős csatolt távvezeték Δz hosszúságú szakasza

Írjuk fel a Kirchhoff-féle huroktörvényt az $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B_0$ és $A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow B_0$ hurkokra, illetve a csomóponti törvényt a B_1 és B_2 pontokra – szinuszos állandósult állapotban:

$$\begin{aligned}
 -U_1(z) + r_1\Delta z I_1 + j\omega L_1\Delta z I_1 + j\omega L_m\Delta z I_2 + U_1(z + \Delta z) + r_0\Delta z(I_1 + I_2) &= 0 \\
 -U_2(z) + r_2\Delta z I_2 + j\omega L_2\Delta z I_2 + j\omega L_m\Delta z I_1 + U_2(z + \Delta z) + r_0\Delta z(I_1 + I_2) &= 0 \\
 -I_1(z) - (G_m\Delta z + j\omega C_m\Delta z)(U_2 - U_1) + I_1(z + \Delta z) + (G_1\Delta z + j\omega C_1\Delta z)U_1 &= 0 \\
 -I_2(z) - (G_m\Delta z + j\omega C_m\Delta z)(U_1 - U_2) + I_2(z + \Delta z) + (G_2\Delta z + j\omega C_2\Delta z)U_2 &= 0 \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

A képletekben U és I a feszültség ill. áram komplex amplitúdóját (fazorját) jelöli; ω a körfrekvencia, j pedig a képzetes egység. Rendezzük át a (2.1) egyenleteket, és vegyük a $\Delta z \rightarrow 0$ határértéket:

$$\frac{dU_1}{dz} = -(r_1 + r_0)I_1 - r_0I_2 - j\omega L_1 I_1 - j\omega L_m I_2 \quad (2.2a)$$

$$\frac{dU_2}{dz} = -r_0I_1 - (r_2 + r_0)I_2 - j\omega L_m I_1 - j\omega L_2 I_2 \quad (2.2b)$$

$$\frac{dI_1}{dz} = -(G_1 + G_m)U_1 + G_m U_2 - j\omega(C_1 + C_m)U_1 - j\omega C_m U_2 \quad (2.2c)$$

$$\frac{dI_2}{dz} = +G_m U_1 - (G_2 + G_m)U_2 - j\omega C_m U_1 - j\omega(C_2 + C_m)U_2 \quad (2.2d)$$

Vezessük be a vezetők feszültségeit és áramait tartalmazó $\mathbf{U}$ és $\mathbf{I}$ vektorokat, és írjuk fel a (2.2) egyenleteket mátrixos alakban:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = - \left(\begin{bmatrix} r_1 + r_0 & r_0 \\ r_0 & r_2 + r_0 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} L_1 & L_m \\ L_m & L_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.3a)$$

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = - \left(\begin{bmatrix} G_1 + G_m & -G_m \\ -G_m & G_2 + G_m \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} C_1 + C_m & -C_m \\ -C_m & C_2 + C_m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2.3b)$$

Vezessük be az rezisztancia, induktivitás, konduktancia és kapacitás mátrixokat:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} r_0 + r_1 & r_0 \\ r_0 & r_0 + r_2 \end{bmatrix} & \mathbf{L} &= \begin{bmatrix} L_1 & L_m \\ L_m & L_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} G_1 + G_m & -G_m \\ -G_m & G_2 + G_m \end{bmatrix} & \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} C_1 + C_m & -C_m \\ -C_m & C_2 + C_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ezután definiálhatjuk a sönt admittancia és soros impedancia mátrixokat:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G} + j\omega\mathbf{C} \quad \mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} \quad (2.4)$$

(2.4) segítségével a (2.3) egyenleteket a következő elegáns alakban írhatjuk fel:

$$\frac{d}{dz} \mathbf{U} = -\mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (2.5a)$$

$$\frac{d}{dz} \mathbf{I} = -\mathbf{Y}\mathbf{U} \quad (2.5b)$$

Ezeket – ahogy a legegyszerűbb, kétvezetős távvezetékre vonatkozóan tanultuk – távíró egyenleteknek hívják. z szerint deriválva, majd egymásba visszahelyettesítve a következő Helmholtz-típusú, másodrendű differenciálegyenleteket kapjuk:

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{dz^2} - (\mathbf{Z}\mathbf{Y})\mathbf{U} = 0 \quad (2.6a)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{I}}{dz^2} - (\mathbf{Y}\mathbf{Z})\mathbf{I} = 0 \quad (2.6b)$$

A (2.6) egyenletek megoldását két ún. módus szuperpozíciójaként keressük az alábbi alakban:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} \tilde{U}_{i1} e^{-\gamma_1 z} + \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} \tilde{U}_{i2} e^{-\gamma_2 z} \quad (2.7a)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{bmatrix} \tilde{Y}_{w1} \tilde{U}_{i1} e^{-\gamma_1 z} + \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} \tilde{Y}_{w2} \tilde{U}_{i2} e^{-\gamma_2 z} \quad (2.7b)$$

ahol t és w a módusvektorok (módusképek) elemeit, $\tilde{U}_i$ a módusamplitúdókat, γ a terjedési együtthatót, $\tilde{Y}$ pedig a karakterisztikus módusadmittanciát jelöli. Vezessük be a γ terjedési együtthatókból a $\boldsymbol{\gamma}$ diagonálmátrixot, valamint annak exponenciális függvényét:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \quad \exp(-\boldsymbol{\gamma}z) = \begin{bmatrix} e^{-\gamma_1 z} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 z} \end{bmatrix}$$

Ennek segítségével a (2.7) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathbf{U} = \mathbf{T} \exp(-\boldsymbol{\gamma}z) \tilde{\mathbf{U}}_i \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{W} \tilde{\mathbf{Y}}_w \exp(-\boldsymbol{\gamma}z) \tilde{\mathbf{U}}_i \quad (2.8b)$$

$\tilde{\mathbf{Y}}_w$ a karakterisztikus modális admittancia mátrix. Helyettesítsük be (2.8a)-t (2.6a)-ba:

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{Z}\mathbf{Y})\mathbf{T} \quad (2.9)$$

Átrendezés után a következő sajátérték-feladatra jutunk:

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{Z}\mathbf{Y} - \boldsymbol{\gamma}^2 \mathbf{I})\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

Azt kaptuk, hogy a γ terjedési együttható négyzete a $\mathbf{Z}\mathbf{Y}$ mátrix sajátértéke, a feszültség módusképei pedig a sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lesznek. Ha (2.8b)-t helyettesítjük be (2.6b)-be, akkor az áram módusképeihez jutunk el $\mathbf{Y}\mathbf{Z}$ sajátvektorainak meghatározásával.

Vegyük észre, hogy γ_k^2 -nek $+\gamma_k$ és $-\gamma_k$ is négyzetgyöke. Ez annyit jelent, hogy (2.7a) nem teljes, a kifejezést ki kell egészíteni a $-\gamma_k$ -hoz tartozó taggal, amely egy $-z$ irányban haladó (úgymond „visszavert”) hullámként értelmezhető:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} (\tilde{U}_{i1} e^{-\gamma_1 z} + \tilde{U}_{r1} e^{\gamma_1 z}) + \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} (\tilde{U}_{i2} e^{-\gamma_2 z} + \tilde{U}_{r2} e^{\gamma_2 z}) \quad (2.11)$$

A módusképek ismeretében a karakterisztikus admittancia mátrix meghatározható:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_w = (\mathbf{T}^t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{T}) \boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{T}^t \mathbf{Y} \mathbf{T}) \boldsymbol{\gamma}^{-1} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{Y}_w = \mathbf{T}^{-1t} \tilde{\mathbf{Y}}_w \mathbf{T}^{-1} \quad (2.13)$$

$\mathbf{Y}_w$ lényegében a hullámimpedancia szerepét tölti be. Ez többek között azt jelenti, hogy ha a csatolt távvezeték egy olyan n -pólussal zárjuk le, aminek az admittancia mátrixa $\mathbf{Y}_w$, akkor a lezáráson nem lép fel reflexió.

3. fejezet

A távvezeték-paraméterek meghatározása

Ebben a fejezetben részletesen bemutatom, hogy hogyan határoztam meg a kábel paramétereit végeselem módszer segítségével. Az eredményeket a szakirodalomban fellelhető analitikus formulákkal is ellenőriztem. Azonban meg kell jegyeznem, hogy a módusanalízissel kapott eredmények (4. fejezet) a tapasztalat szerint meglehetősen érzékenyek a paraméterek értékeire, ezért a precíz numerikus analízis mindenképpen indokolt. A számítások elvégzésére a MATLAB Partial Differential Equation Toolbox-ot [5] használtam.

3.1. Hosszegységre eső soros impedancia-mátrix

Tekintsük a (2.5) távíró egyenletek közül a feszültségesés kifejezését:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{U} = -\mathbf{R}\mathbf{I} - j\omega\mathbf{L}\mathbf{I} \quad (3.1)$$

Az egyenletben szereplő $\mathbf{R}$ és $\mathbf{L}$ mátrixokat keressük a következő alakban:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Mint látni fogjuk, a paraméterek térelméleti vizsgálata pontosabb modellt eredményez, mint amit a 2.1. ábra hálózata sugall. A közelségi hatásként ismert örvényáram-jelenség például az R mátrixban csatolt rezisztenciaként jelentkezik, de a modell számot ad az ún. belső induktivitás frekvenciafüggéséről is.

3.1.1. A végeselemes szimuláció elve

Egyszerűsítő feltevések

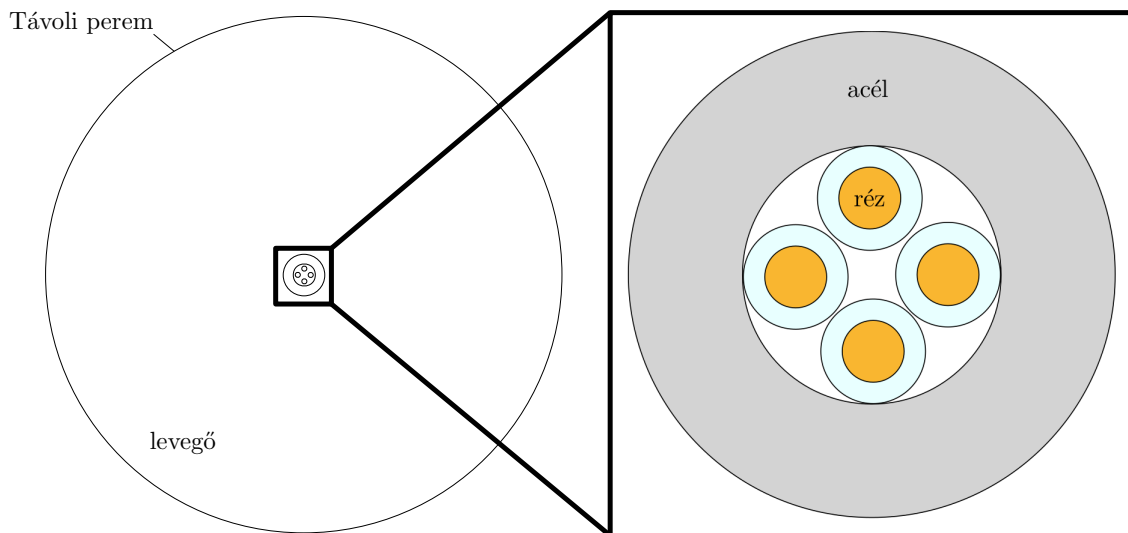
Ha a vezetékek sodrásából adódó menetemelkedéstől eltekintünk, akkor az eltolási szimmetria kihasználásával a modelltartomány egy 2D keresztmetszetre redukálható. Egyelőre nem modellezzük a rézerek és az acélköpeny egyes vezetőszárait, ehelyett homogén, hen-

geres vezetőként vesszük azokat figyelembe, amelyeknek fajlagos vezetőképessége:

$$\sigma_{\text{acél}} = 2 \cdot 10^6 \text{ S/m}$$

$$\sigma_{\text{réz}} = 5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$$

A modelltartományt egy kellő távolságban felvett, kör alakú peremmel zárjuk le. A modelltartomány geometriája a 3.1. ábrán látható.



3.1. ábra. A 2D modelltartomány geometriája a négyeres kábel esetében

Parciális differenciálegyenlet

A keresztmetszeti méreteket, az anyagjellemzőket valamint a jellemző frekvenciákat figyelembe véve, esetünkben indokolt a Maxwell-egyenletek magneto-kvázi-stacionárius közelítésének alkalmazása. Ezek frekvenciatartománybeli alakja – a releváns konstitúciós egyenletekkel kiegészítve – a következő [6]:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (3.2)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (3.3)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (3.4)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3.5)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.6)$$

Ahol $\vec{E}$ az elektromos térerősség, $\vec{H}$ a mágneses térerősség, $\vec{B}$ a mágneses indukció, $\vec{J}$ az áramsűrűség vektor-fázorjai. μ a mágneses permeabilitás, amely esetünkben az összes közegre jó közelítéssel μ_0 -nak vehető. Bevezetjük a mágneses vektorpotenciált:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (3.7)$$

Helyettesítsünk be (3.3)-ba:

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega \text{rot} \vec{A} \quad (3.8)$$

$$\text{rot}(\vec{E} + j\omega \vec{A}) = \vec{0} \quad (3.9)$$

(3.9) automatikusan teljesül, ha:

$$\vec{E} + j\omega\vec{A} = -\text{grad}\phi \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -j\omega\vec{A} - \text{grad}\phi \quad (3.10)$$

amellyel bevezettük a ϕ elektromos skalárpotenciált. (3.2), (3.5) és (3.7) alapján, feltételezve, hogy μ homogén az egész tartományon ($\mu = \mu_0$):

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\vec{A}\right) = \vec{J} \quad (3.11)$$

$$\text{rot rot}\vec{A} = \mu\vec{J} \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

Használjuk fel a vektoranalízis ismert $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ azonosságát, valamint vegyük fel az ilyenkor szokásos $\text{div } \vec{A} = 0$ ún. Coulomb-mértéket. Ezzel a következő differenciálegyenletekre jutunk:

$$-\Delta\vec{A} + j\omega\mu\sigma\vec{A} = -\mu\sigma\text{grad}\phi \quad (3.14)$$

Belátható, hogy 2D közelítésben ez az alábbi alakra redukálható [7][8][9]:

Vezető tartomány:

Nem vezető tartomány ($\sigma = 0$):

$$-\text{div}\left(\frac{1}{\mu_0}\text{grad}A_z\right) + j\omega\sigma A_z = -\sigma U'_k$$

$$-\text{div}\left(\frac{1}{\mu_0}\text{grad}A_z\right) = 0$$

Amelyben U'_k , $k = 1 \dots n$ az ún. hosszegységre eső beiktatott feszültség, egy vezető tartományonként állandó, de egyelőre ismeretlen érték. Ennek gerjesztésként történő, szisztematikus előírásával határozható meg a keresett $\mathbf{Z}$ mátrix (l. alább). Amint látható, a vektorpotenciálnak csak a z komponensére van szükség.

Peremfeltétel

A végeselem módszert alapértelmezésben zárt modelltartományra tudjuk alkalmazni. Az adott problémánál – nyílt tartományú lévén – mesterséges lezárással kell élnünk. A kábel megfelelően távolról tekinthető egy végtelen hosszú egyenes vezetőnek. Egy z irányú vezető esetén az x - y síkmetszetben a mágneses erővonalak koncentrikus körök. Esetünkben A_z kontúrvonalai lesznek a mágneses indukcióvonalak, vagyis egy távoli (a kábel keresztmetszeti méreteinél jóval nagyobb) kör alakú peremen praktikusán előírhatjuk a Dirichlet-típusú $A_z = \text{konst.} := 0$ peremfeltételt. Fontos, hogy ez nem zárja ki a peremen a tangenciális irányú mágneses tér jelenlétét, ebből következően azt sem, hogy a modell a tartományon kívül „visszafolyó” áramokat is figyelembe vegye. Ezeket az áramokat majd csak utólag, az $n \times n$ méretű $\mathbf{Z}$ mátrix megfelelő particionálásával tudjuk kizárni (l. alább).

Elvégzendő számítások

A k . vezetőben folyó áramot a következő képpen számolhatjuk:

$$J_z = -j\omega\sigma A_z - \sigma U'_k \quad (3.15)$$

$$I_k = \int_{\Omega_k} J_z d\Omega \quad (3.16)$$

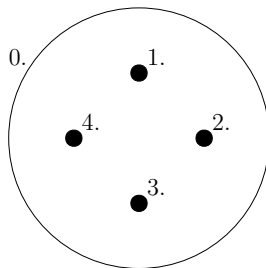
Az áramok és a hosszegységre eső feszültségek n -elemű vektorai közötti lineáris összefüggést az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\mathbf{I} = -\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{U}' \quad (3.17)$$

A $\mathbf{Z}$ mátrix úgy határozható meg, hogy a végeselemes számítást rendre elvégezzük az $\mathbf{U}'_i = \delta_{i,k}$, $k = 1..n$ bázisvektorokkal, mint gerjesztéssel ($\delta_{i,k}$ a Kronecker-szimbólum).

A mátrix redukálása

Szeretnénk úgy redukálni a mátrixot, hogy a köpeny legyen a referencia vezető – ez azért kézenfekvő, mert később a módusképek meghatározásánál, rögtön a négy aktív vezető fog szerepelni, nem kell a kapott vektorokat alakítani. Ez annyit jelent, hogy rajta folyik vissza a többi vezető árama.



3.2. ábra. Vezetők számozása

Használjuk a 3.2. ábra számozását. Ezek alapján a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{00} & z_{01} & z_{02} & z_{03} & z_{04} \\ z_{10} & z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{20} & z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{30} & z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{40} & z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_1 - I_2 - I_3 - I_4 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Fejtsük ki a (3.18) egyenlet 2. sorát és rendezzük át:

$$-\partial U_1 = -I_1 z_{10} - I_2 z_{10} - I_3 z_{10} - I_4 z_{10} + I_1 z_{11} + I_2 z_{12} + I_3 z_{13} + I_4 z_{14} \quad (3.19)$$

$$-\partial U_1 = I_1(z_{11} - z_{10}) + I_2(z_{12} - z_{10}) + I_3(z_{13} - z_{10}) + I_4(z_{14} - z_{10}) \quad (3.20)$$

Ezt az átrendezést elvégezhetjük a mátrixegyenlet 3-5. sorára is, mellyel a következő redukált mátrixegyenletre jutunk:

$$-\frac{\partial \mathbf{U}_r}{\partial z} = \mathbf{Z}_r \mathbf{I}_r \quad (3.21)$$

ahol a következő jelölésekkel éltünk:

$$\mathbf{U}_r = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z}_r = \begin{bmatrix} z_{11} - z_{10} & z_{12} - z_{10} & z_{13} - z_{10} & z_{14} - z_{10} \\ z_{21} - z_{20} & z_{22} - z_{20} & z_{23} - z_{20} & z_{24} - z_{20} \\ z_{31} - z_{30} & z_{32} - z_{30} & z_{33} - z_{30} & z_{34} - z_{30} \\ z_{41} - z_{40} & z_{42} - z_{40} & z_{43} - z_{40} & z_{44} - z_{40} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_r = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}$$

A későbbiekben erre a $\mathbf{Z}_r$ mátrixra lesz szükségünk, így az r (mint redukált) jelölést elhagyom.

3.2. Hosszegységre eső sönt admittancia-mátrix

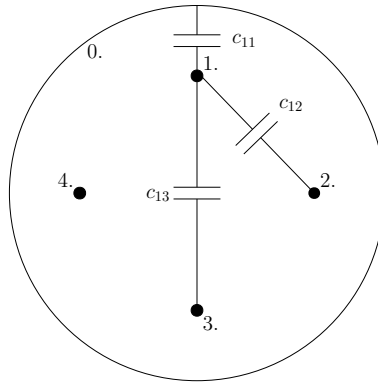
A sönt admittancia mátrix esetében más megközelítést alkalmazunk. Először is feltételezzük, hogy a vezetők közötti szivárgási áram elhanyagolható, vagyis a konduktancia mátrix minden eleme zérus. A kapacitás mátrix meghatározásához pedig több különböző elrendezés vizsgálatával jutunk.

3.2.1. A végeselemes szimuláció elve

Feladatunk a kapacitás mátrix meghatározása, amit a következő formában keresünk:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n c_{1k} & -c_{12} & \cdots & -c_{1n} \\ -c_{21} & \sum_{k=1}^n c_{2k} & \cdots & -c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \cdots & \sum_{k=1}^n c_{nk} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ahol c_{ij} az i . és a j . vezető közti részkapacitás.

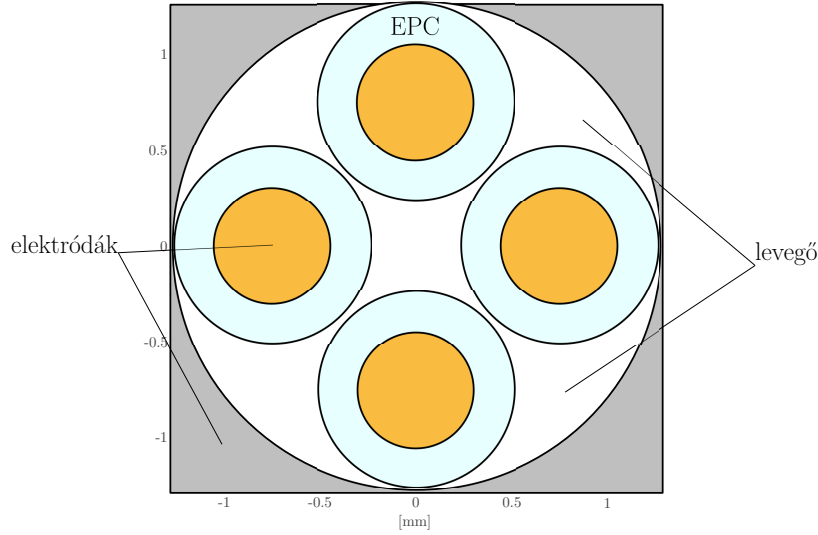


3.3. ábra. Meghatározandó részkapacitások

A 3.3. ábrán láthatóak a meghatározandó részkapacitások, amelyek a vezetők (elektrodák) közé kapcsolt kondenzátorként értelmezhetők. Az elrendezés szimmetriájából következően a 10 részkapacitásból csak 3 különbözik egymástól.

Egyszerűsítő feltevések

A korábban említett közelítésekből kifolyólag a 3.4. ábrán látható geometriát vettem fel. A modelltartomány öt részből áll, ebből négy a vezetők körüli szigetelés, egy pedig a szigetelők közti teret kitöltő levegő. A vezetők, mint elektródák, kizárhatók a modelltartományból. Ebből következik az is – szemben a 3.1 szakaszban ismertetett kvázi-stacionárius modellel – hogy az acélköpenyen kívüli levegő tartománnyal itt nem kell számolni.



3.4. ábra. A kapacitásmátrix meghatározásához felvett 2D modelltartomány

Peremfeltételek

A peremeken Dirichlet-feltételt alkalmazunk, vagyis előírjuk az elektrodák potenciálját. E potenciálértékek (mint gerjesztés) variálásával számíthatjuk ki a részkapacitásokat (l. alább).

Parciális differenciálegyenlet

Az elektrosztatika egyenletei [6]:

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \quad (3.23)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (3.24)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (3.25)$$

Ahol $\vec{D}$ az elektromos eltolás vektor, ρ pedig a töltéssűrűség. (3.23) automatikusan teljesül, ha $\vec{E} = -\text{grad} \phi$, ahol ϕ az elektrosztatikus skalárpotenciál. Ezt és a (3.25) egyenletet (3.24)-be helyettesítve a következő differenciálegyenletre jutunk:

$$-\text{div}(\varepsilon \text{grad} \phi) = \rho \quad (3.26)$$

A levegő relatív permittivitása tekinthető 1-nek. A kábel adatlapja szerint a vezetők körüli szigetelés anyaga EPC (*Ethylene Propylene Copolymer*), melynek relatív permittivitása $\varepsilon_r \approx 2.5$.

Elvégzendő számítások

Két elektróda közötti kapacitást könnyen meghatározhatjuk az elektromos térben tárolt energia segítségével. Emiatt minden elektróda potenciálját két érték közül választjuk – az egyszerűség kedvéért ez a két érték 0 V és 1 V. Az első elrendezés a 3.7a. ábrán látható. Itt mind a négy aktív vezető potenciálját 1 V-ra állítjuk, így a később számolt kapacitás pont a c_{11} – köpeny-ér kapacitás – négyszerese. A második elrendezés a 3.7b. ábrán látható. Itt két ellentétes ér potenciálját állítjuk 1 V-ra (1., 3.), a köpeny és a másik két vezető potenciálja 0 V. Mivel c_{11} értékét már ismerjük, így c_{12} – szomszédos erek közti kapacitás

– értéke is meghatározható. A harmadik elrendezés a 3.7c. ábrán látható. Ebben az elrendezésben csak a 1. vezető potenciálja lesz 1 V. A korábbi eredmények segítségével c_{13} – szemközti vezetők közti kapacitás – értéke meghatározható. Ha adott elrendezésre már ismerjük a skalárpotenciált, akkor először az elektromos tereősséget határozzuk meg:

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi \quad (3.27)$$

Ennek segítségével kiszámolhatjuk a hosszegységben tárolt energiát:

$$W' = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon E^2 d\Omega \quad (3.28)$$

Ahol Ω a modelltartományt jelöli. Innen pedig meghatározhatjuk az adott elrendezés kapacitását:

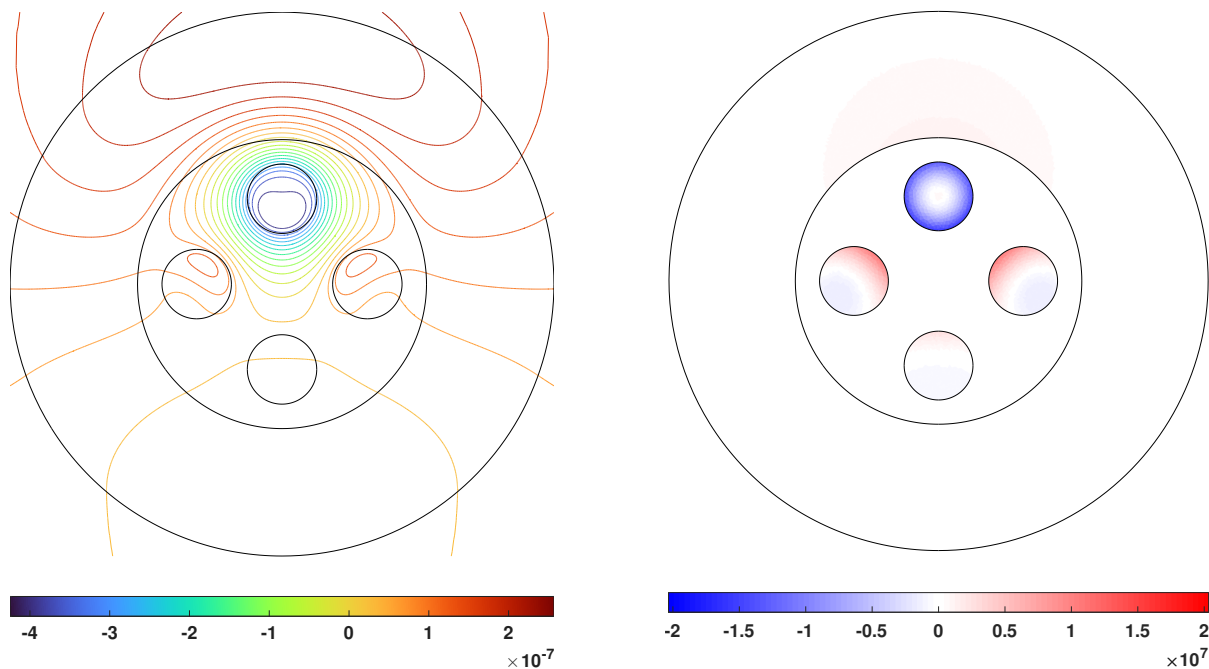
$$C' = \frac{2W'}{U^2} \quad (3.29)$$

3.3. Eredmények

3.3.1. Négyeres kábel

Soros impedancia

A 3.5. ábrán egy szimuláció eredménye látható, ahol az 1. számú vezetőt gerjesztettük.

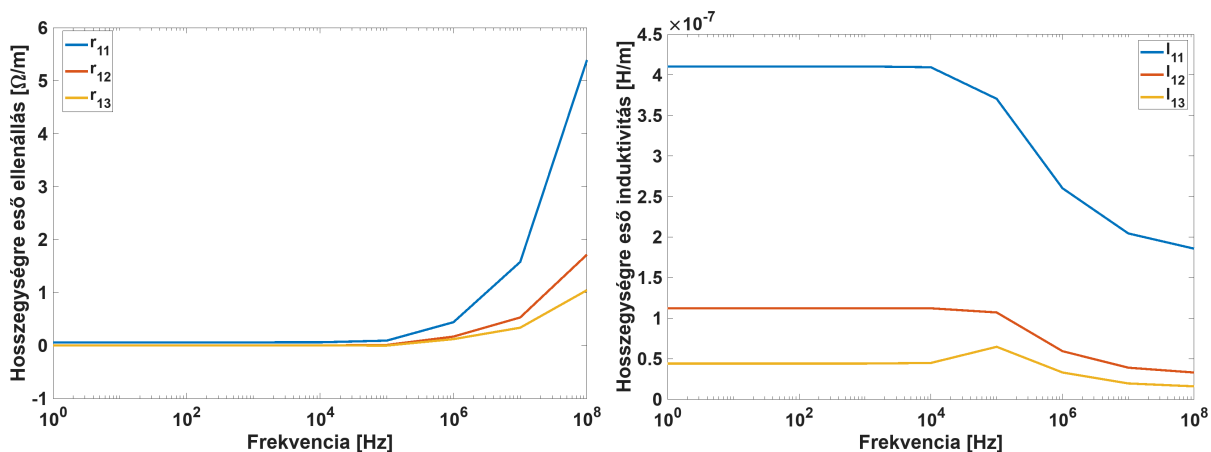


3.5. ábra. A mágneses indukcióvonalak és a vezetőkben fellépő áramsűrűség a $t = 0$ időpillanatban $f = 10$ kHz esetén

A soros impedancia mátrix felépítése szimmetria okokból a következőképpen alakul:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{12} \\ z_{12} & z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{13} & z_{12} & z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{13} & z_{12} & z_{11} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A 3.6. ábrán láthatjuk a soros impedancia mátrix egyes elemeinek változását a frekvencia függvényében – ahol a következő jelöléssel éltem: $z_{1k} = r_{1k} + j\omega l_{1k}$.



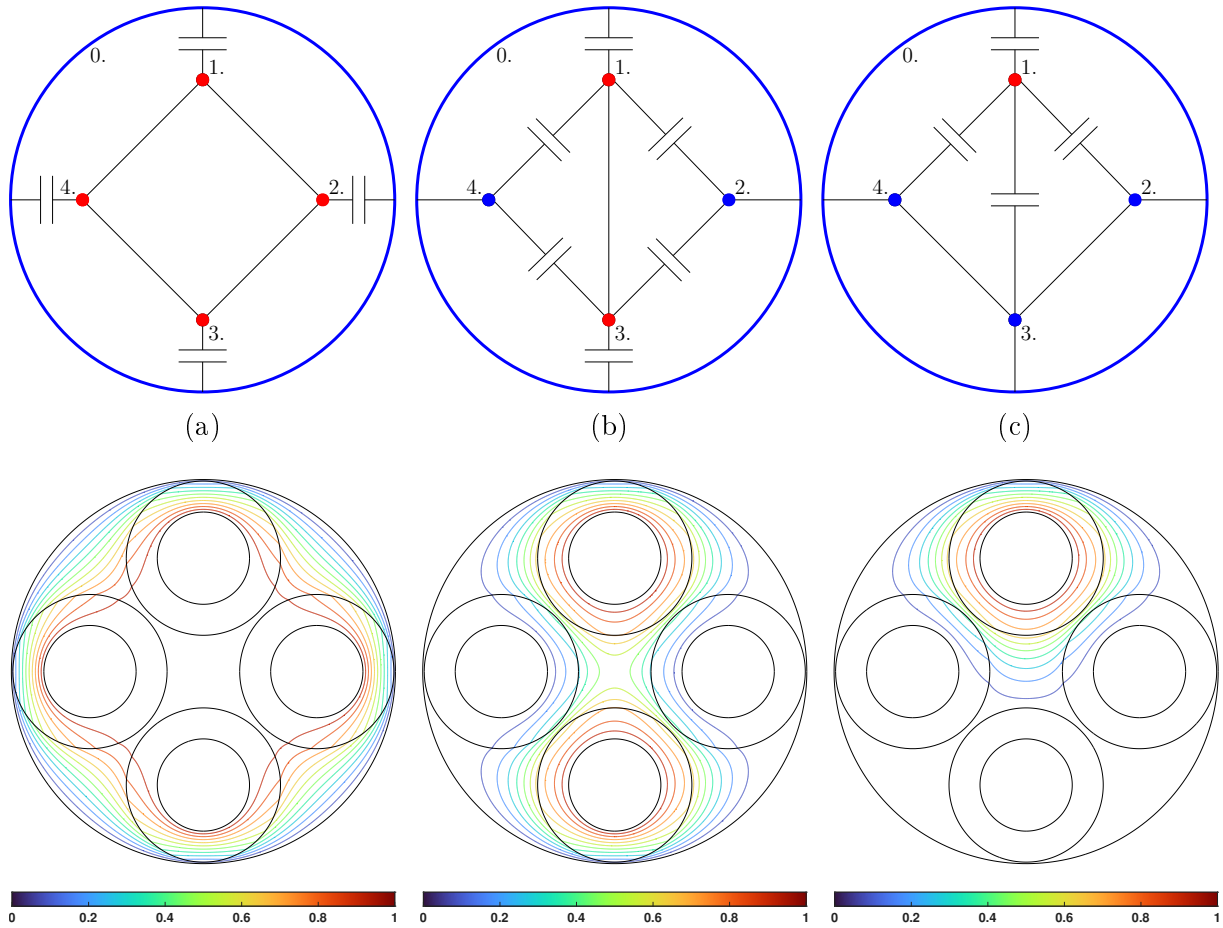
3.6. ábra

A következő megfigyeléseket tehetjük:

- A rezisztencia és induktivitás paraméterek egy ideig állandóak, majd egy adott frekvencia környékén kezdenek el változni. Ez annak a frekvenciának a környezetében történik, ahol a behatolási mélység eléri a vezetők sugarát.
- A ellenállás értékek az elvárásoknak megfelelően növekedni kezdenek, mivel az aktív vezetési keresztmetszet az áramkiszorítás miatt csökken.
- Az áramkiszorítás miatt a mágneses tér is fokozatosan kiszorul a vezetőlől, emiatt az induktivitás mátrix elemei általában csökkenő tendenciát mutatnak. Érdekes kivétel az l_{13} tényező, amely előbb kissé növekszik, majd csökken.

Kapacitás mátrix

A 3.7. ábrán a három különböző elrendezésre végzett szimulációk eredményei láthatóak.



3.7. ábra. A három elrendezés és a hozzájuk tartozó ekvipotenciális vonalak.

A részkapacitásokra a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$4c_{11} = 326,32 \text{ pF/m} \quad (3.31)$$

$$2c_{11} + 4c_{12} = 250,11 \text{ pF/m} \quad (3.32)$$

$$c_{11} + 2c_{12} + c_{13} = 127,32 \text{ pF/m} \quad (3.33)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$c_{11} = 81,58 \text{ pF/m}$$

$$c_{12} = 21,74 \text{ pF/m}$$

$$c_{13} = 2,26 \text{ pF/m}$$

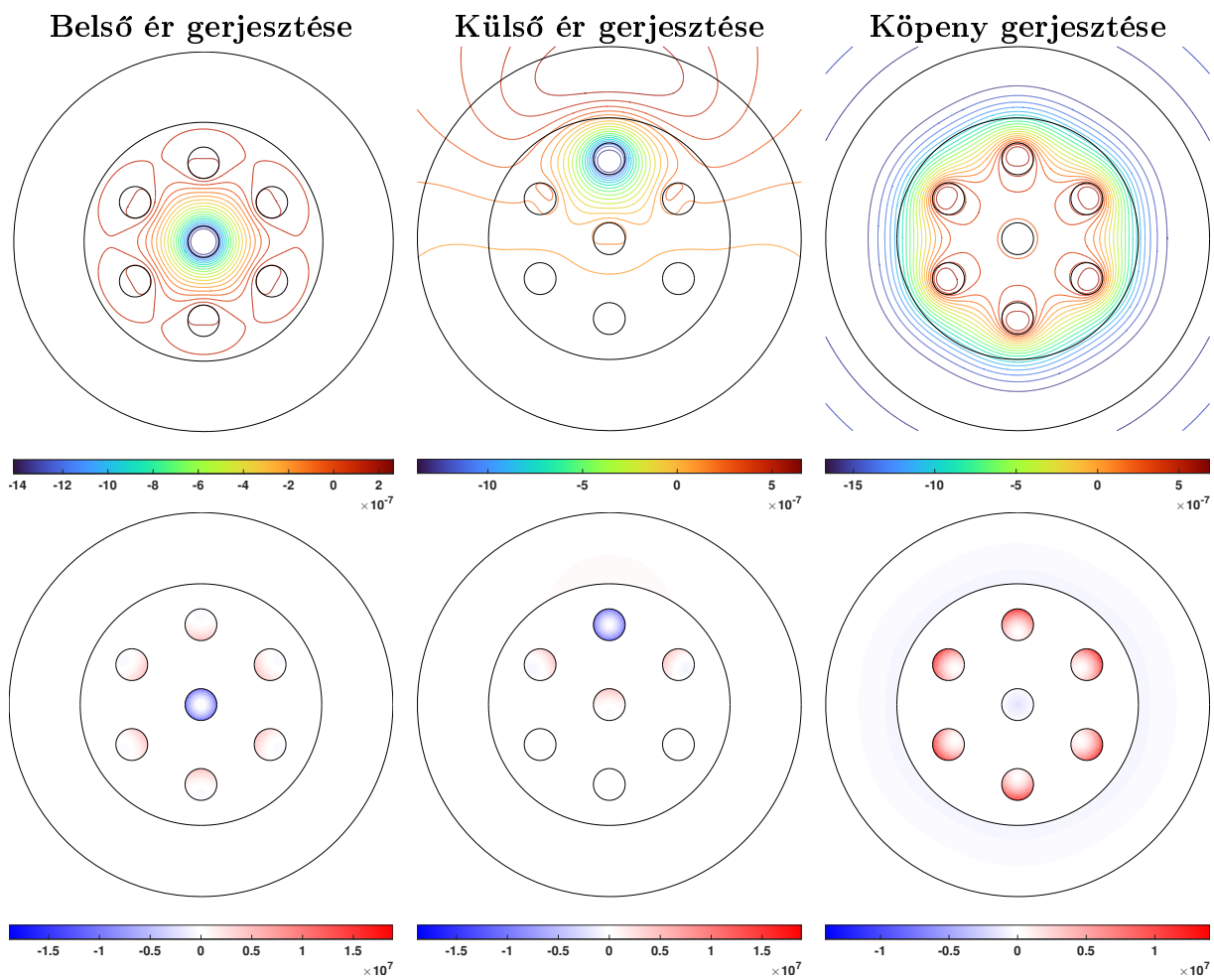
(3.22) alapján meghatározhatjuk a kapacitás mátrixot:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 127.32 & -21.74 & -2.26 & -21.74 \\ -21.74 & 127.32 & -21.74 & -2.26 \\ -2.26 & -21.74 & 127.32 & -21.74 \\ -21.74 & -2.26 & -21.74 & 127.32 \end{bmatrix} \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

3.3.2. Héteres kábel

Soros impedancia

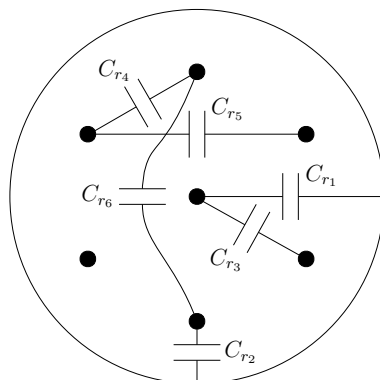
A hosszegységre eső soros impedancia mátrix meghatározása megegyezik – a keresztmet-szetet leszámítva – a két kábel esetén. A 3.8. ábrán a mágneses indukcióvonalakat és a vezetőkben fellépő áramsűrűséget figyelhetjük meg 3 különböző ér gerjesztése esetén.



3.8. ábra. A mágneses indukcióvonalak és a vezetőkben fellépő áramsűrűség a $t = 0$ időpillanatban $\omega = 200$ krad/s esetén

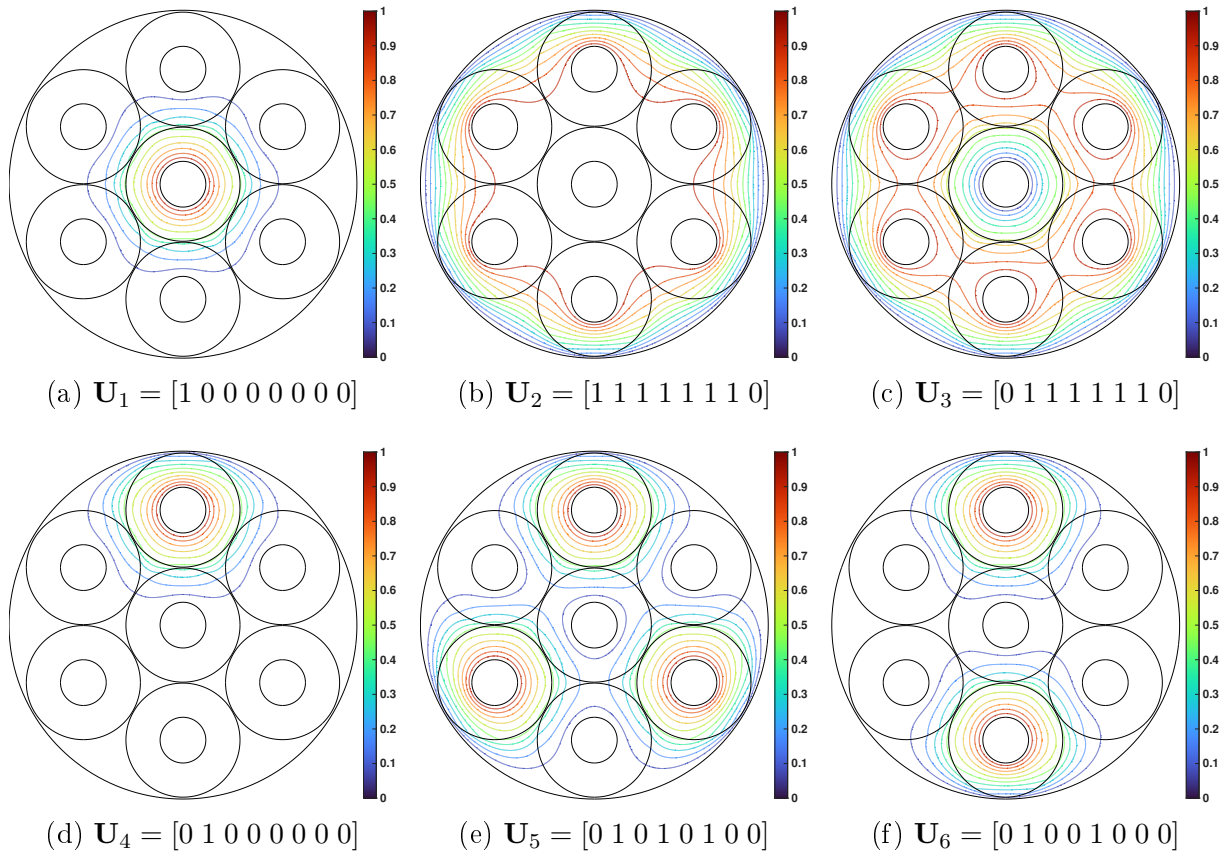
Kapacitás mátrix

A héteres kábel esetén a geometriából fakadóan a lehetséges 28 részkapacitásból csak 6 különbözik. Ezeket a 3.9. ábra mutatja.



3.9. ábra. Meghatározandó részkapacitások a héteres kábel esetén

A 6 ismeretlen meghatározásához 6 különböző feszültségvektorra lesz szükségünk (3.10. ábra):



3.10. ábra. Potenciáeloszlás különböző feszültségvektorok esetén

A fenti elrendezésekből kapott egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
 6C_{r_3} + C_{r_1} &= 97,1 \text{ pF/m} \\
 6C_{r_2} + C_{r_1} &= 443,0 \text{ pF/m} \\
 6C_{r_3} + 6C_{r_2} &= 527,5 \text{ pF/m} \\
 2C_{r_4} + 2C_{r_5} + C_{r_6} + C_{r_2} + C_{r_3} &= 121,4 \text{ pF/m} \\
 6C_{r_4} + 3C_{r_6} + 3C_{r_2} + 3C_{r_3} &= 324,9 \text{ pF/m} \\
 4C_{r_4} + 4C_{r_5} + 2C_{r_2} + 2C_{r_3} &= 239,7 \text{ pF/m}
 \end{aligned}$$

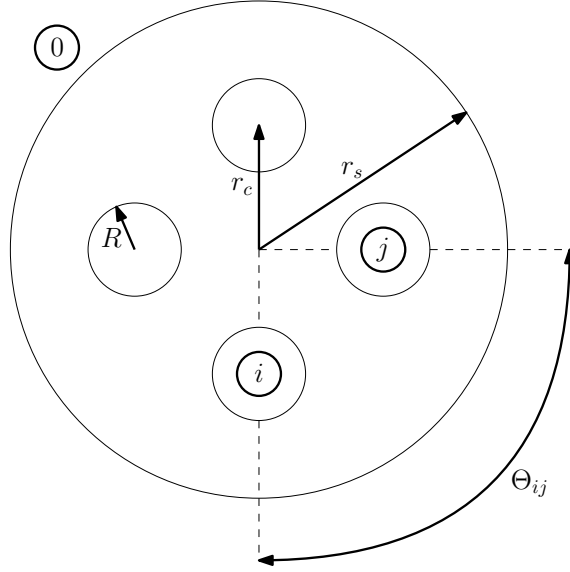
Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned}
 C_{r_1} &= 6,31 \frac{\text{pF}}{\text{m}} & C_{r_2} &= 72,78 \frac{\text{pF}}{\text{m}} & C_{r_3} &= 15,14 \frac{\text{pF}}{\text{m}} \\
 C_{r_4} &= 9,44 \frac{\text{pF}}{\text{m}} & C_{r_5} &= 6,54 \frac{\text{pF}}{\text{m}} & C_{r_6} &= 1,51 \frac{\text{pF}}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

Ezeket az eredményeket felhasználva (3.22) alapján meghatározhatjuk a kapacitás mátrixot, melyet terjedelmi okokra való tekintettel nem közlök.

3.4. A paraméterszámítás ellenőrzése analitikus formulával

Tökéletes vezetőből készült hengeres árnyékolásban futó vezetők esetén létezik analitikus formula az induktivitás és kapacitás mátrix becslésére ([3]-5.2.1.3). Fontos, hogy a képlet homogén közegre érvényes, így a kapacitás mátrix számítására szolgáló szimulációt $\varepsilon_r = 1$ szigetelő permittivitással újra futtattam. A soros impedanciát is újra számoltam úgy, hogy a köpeny vezetőképességét $\sigma_s = 100 \text{ ES/m}$ -re állítottam – ezzel imitálva a tökéletes vezetőből készült árnyékolást. A belső erek vezetőképességét $\sigma_s = 1 \text{ S/m}$ -re állítottam, hogy ne legyen bennük áramkiszorítás.



3.11. ábra

Használjuk a 3.11. ábra jelöléseit. Az elrendezés szimmetriájából kifolyólag a képletek a következőképpen alakulnak:

$$l_{ii} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{r_s^2 - r_c^2}{r_s R} \right) \quad (3.34)$$

$$l_{ij} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{r_c}{r_s} \sqrt{\frac{r_c^4 + r_s^4 - 2r_c^2 r_s^2 \cos \Theta_{ij}}{2r_c^4 - 2r_c^2 \cos \Theta_{ij}}} \right) \quad (3.35)$$

l_{ii} az i . vezető önindukciós tényezője, l_{ij} pedig az i . és j . vezető közti kölcsönös indukciós tényező.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Érdemes megjegyezni, hogy a formula is az árnyékolást tekinti referencia vezetőnek. Mivel a belső erek vezetőképességét kicsire választottam, a belső induktivitásuk nem lesz elhanyagolható. [10]-4.11 példája alapján a belső induktivitás értéke:

$$L'_b = \frac{\mu_0}{8\pi} \quad (3.37)$$

Ezzel korrigálva a szimulációból kapott $\mathbf{L}$ mátrixot már összehasonlíthatjuk az analitikus becsléssel.

Analitikus formula	Szimulációból kapott mátrix
$L = \begin{bmatrix} 199.5 & 47.5 & 26.5 & 47.5 \\ 47.5 & 199.5 & 47.5 & 26.5 \\ 26.5 & 47.5 & 199.5 & 47.5 \\ 47.5 & 26.5 & 47.5 & 199.5 \end{bmatrix} \frac{\text{nH}}{\text{m}}$	$L = \begin{bmatrix} 199.4 & 47.5 & 26.5 & 47.5 \\ 47.5 & 199.4 & 47.5 & 26.5 \\ 26.5 & 47.5 & 199.4 & 47.5 \\ 47.5 & 26.5 & 47.5 & 199.4 \end{bmatrix} \frac{\text{nH}}{\text{m}}$

$\mathbf{L}$ segítségével $\mathbf{C}$ kifejezhető – homogén közegben:

$$\mathbf{C} = \mu\varepsilon\mathbf{L}^{-1} \quad (3.38)$$

Analitikus formula	Szimulációból kapott mátrix
$C = \begin{bmatrix} 62.0 & -12.6 & -2.3 & -12.6 \\ -12.6 & 62.0 & -12.6 & -2.3 \\ -2.3 & -12.6 & 62.0 & -12.6 \\ -12.6 & -2.3 & -12.6 & 62.0 \end{bmatrix} \frac{\text{pF}}{\text{m}}$	$C = \begin{bmatrix} 66.5 & -10.2 & -1.9 & -10.2 \\ -10.2 & 66.5 & -10.2 & -1.9 \\ -1.9 & -10.2 & 66.5 & -10.2 \\ -10.2 & -1.9 & -10.2 & 66.5 \end{bmatrix} \frac{\text{pF}}{\text{m}}$

Mivel az induktivitás mátrix szinte pontosan megegyezik a becsléssel, és a kapacitás mátrix relatív hibája is kicsi, így az alkalmazott módszerek megbízhatónak tekinthetők.

4. fejezet

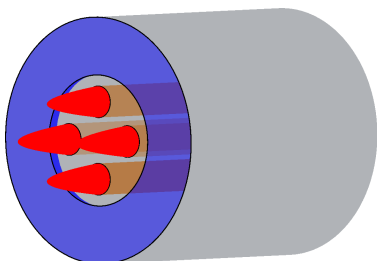
Módusanalízis

4.1. Módusképek

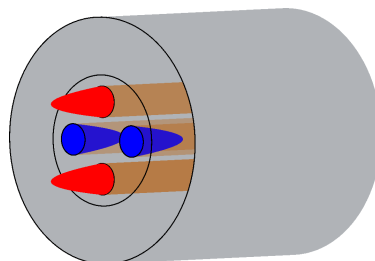
Az **YZ** mátrix sajátvektorainak a meghatározásával az áram módusképeihez jutunk.

$$\begin{array}{llll}
 \text{1. módus:} & \text{2. módus:} & \text{3. módus:} & \text{4. módus:} \\
 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}
 \end{array} \tag{4.1}$$

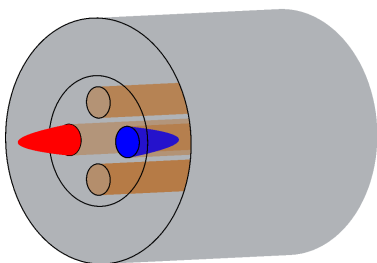
A módusképek szemléletesebb ábrázolására szolgálnak a következő ábrák:



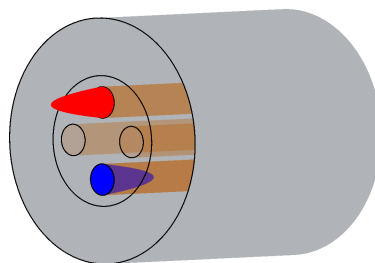
4.1. ábra. 1. módus



4.2. ábra. 2. módus



4.3. ábra. 3. módus



4.4. ábra. 4. módus

A 3. és 4. módus szimmetriájából sejthető, hogy azonos terjedési tulajdonságokkal rendelkeznek

4.2. Csillapítás és fázissebesség

Ahogy azt a 2. fejezetben is láttuk, a terjedési együthatók a **ZY** – vagy **YZ** – mátrix sajátértékeinek négyzetgyökei.

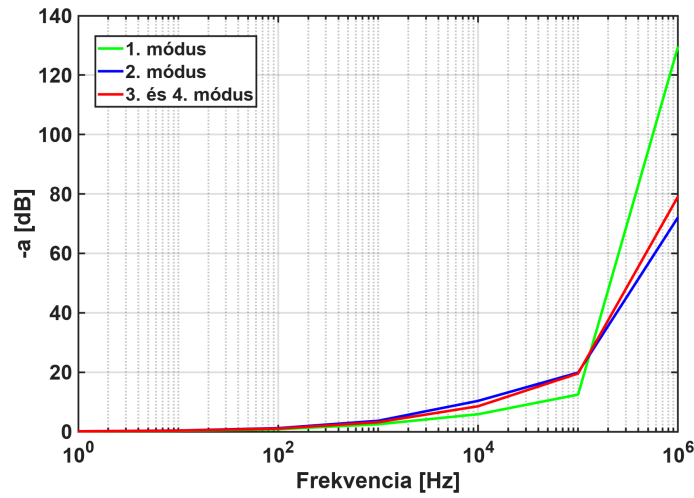
$$\gamma = \alpha + j\beta$$

γ valós részét – α – csillapítási tényezőnek, képzetes részét – β – pedig fázistényezőnek nevezzük. Utóbbi segítségével a fázissebesség is kiszámolható:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (4.2)$$

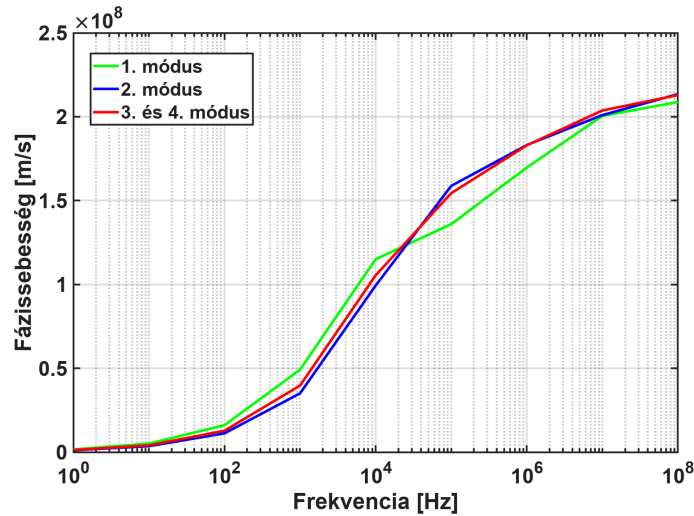
A 4.5. ábrán a teljes kábelben fellépő csillapítást ábrázoltam dB-ben, $l = 2400$ m esetén.

$$a = 20\log_{10}(e^{-2400\alpha})$$



4.5. ábra. A csillapítás értéke dB-ben kifejezve 2400 m-es kábel esetén

Az α és β paramétereket az 5. fejezetben impulzusválasz szimulációjára fogjuk használni.



4.6. ábra. Különböző módusok fázissebessége a frekvencia függvényében

A 4.6. ábrán az egyes módusok fázissebességeit láthatjuk, amelyek erősen diszperzív viselkedésre utalnak. A kapott eredmények első látásra meglepőek, – például, hogy alacsony frekvenciákon nagyon lecsökken a fázissebesség – de a kapcsolódó irodalomban találkozhatunk hasonló eredményekkel [11]. Érdekes megfigyelni azt is, hogy van két azonos fázissebességű módus. Ez annak a következménye, hogy a $\mathbf{ZY}$ mátrixnak van egy kétszeres sajátértéke, amit már a módusképek vizsgálatánál is sejtettünk.

5. fejezet

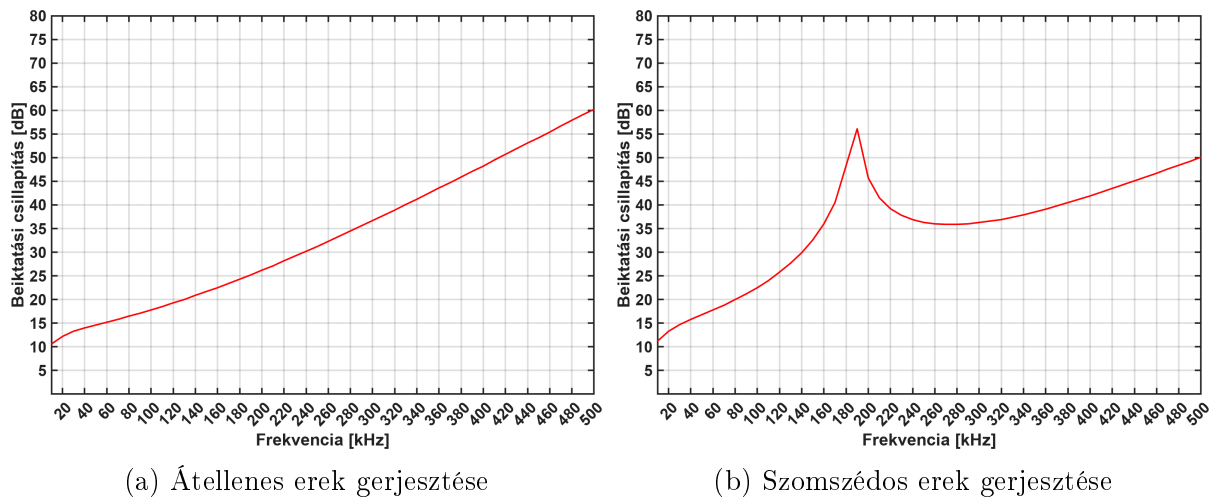
Mérési eredmények magyarázata

Előljáróban meg kell említeni, hogy a mérések során általában nem került minden körülmény rögzítésre (pl. lezáró ellenállások, földelés ténye stb.). Talán az sem hagyható figyelmen kívül, hogy míg a mérések a dobra feltekert kábelben történtek, addig a modell az egyenes kábelre vonatkozik.

Emiatt a szimuláció célja sem lehetett a mérések pontos reprodukálása. Sokkal inkább arra törekedtünk, hogy a számítások segítségével feltárjuk a jelenségek mögött rejlő fizikai jelenségeket, és magyarázatot kapjunk a mérések jellegzetességeire.

5.1. Rezonancia

Az első és nagyon fontos megfigyelés, hogy a rezonancia nem minden esetben jelentkezik, megjelenése függ attól, hogy melyik ereket gerjesztjük – 5.1. ábra.



5.1. ábra. A 2400 m hosszú (feltekert) kábelben, különböző érpárok gerjesztésével mért beiktatási csillapítás

Ennek az okát a módusképekben érdemes keresni. Úgy gondoljuk, hogy a szemközti ereken mért csillapítás esetén, azért nem lép fel rezonancia, mert egy alaplómódust gerjesztünk. Ezzel szemben a szomszédos erek mérésekor több alaplómódust használunk egyszerre. A négyeres kábel esetén akár fejben is meghatározhatjuk, hogy melyek ezek a módusok, de természetesen létezik szisztematikus módszer is. Lényegében egy 4 dimenziós vektortérben kell meghatározni egy tetszőleges vektor komponenseit, ahol a bázisvektorok az

alapl  dusok lesznek. Belátható, hogy szomszédos erek (normált) gerjesztése esetén a (4.1) módusok szerinti felbontás az alábbi:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

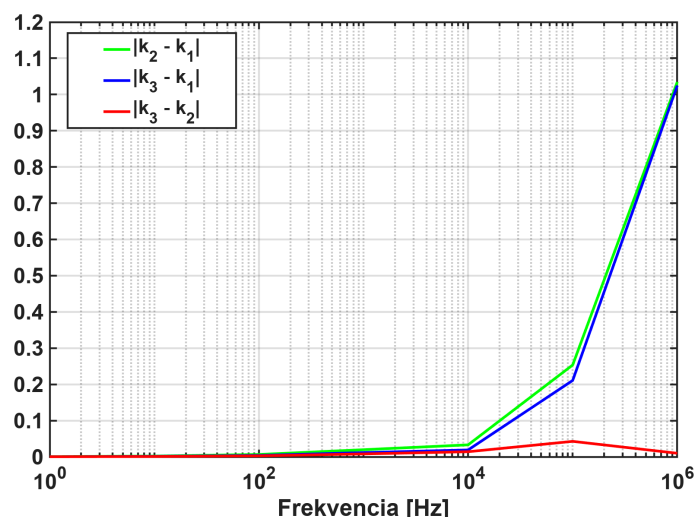
Egy korai elméletünk a rezonanciára az volt, hogy olyan módus lehet felelős érte, amelyet a mérés során ugyan közvetlenül nem gerjesztünk, de áthallás révén közvetve mégis létrejön. Ez kvantitatív módon is leírható lenne pl. a csatolt módusok elméletével [12]-7. fejezet. Ez a gerjesztetlen módus   gy k  pzelt  t   el, mint a szakadt vagy rövidre zárt v  g   távvezetéken létrejövő, önfenntartó l  ng  s ([10], 6.8 példa). Ez a magy  razat azonban két okból sem tűnik valószínűnek: egyrészét a módusok csillapítása 2-3 km hossz  n igen nagy, m  sr  sz  t a kábel 190 kHz-en – bármely módus vonakoz  s  ban – a hullámhossz többszöröse,   z  rt ilyen jellegű rezonáns viselkedést már jóval alacsonyabb frekvenciákon is tapasztalnunk kellett volna.

Jóval h  ihet  bbnek tűnik a következő magy  razat. Ha több módust gerjesztünk (mint pl. a szomszédos erek  n történő mérésénél), és ezek különböző f  zissebess  g  ek, akkor bizonyos hossz  n éppen ellenf  zisba kerülnek, ez a kioltás pedig csillapításként is értelmezhető. A hipotézis ellenőrzésére kiszámítottuk a módusok hullámhosszban mért úthossz k  l  nb  s  g  t a frekvencia függvényében. Adott f frekvencián az i . módus hullámhosszát a következő összefüggés segítségével számolhatjuk ki:

$$\lambda_i = \frac{v_{f_i}}{f} \quad (5.1)$$

Egy 2400 m hosszú kábelén az i . módus hullámszáma:

$$k_i = \frac{2400}{\lambda_i} \quad (5.2)$$



5.2.   bra. Hull  msz  mok k  l  nb  s  a a f  rkvencia függvényében

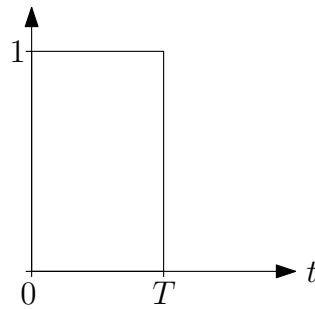
Tekintsük az 5.2.   br  t – mivel a 3.   s 4. módus terjedési együtthatója megegyezik, ezeket nem ábrázoltam külön. Ami számunkra érdekes az az, hogy 200 kHz környékén

a hullámszám különbség – az 1. módus marad le a 2., 3. és 4. módusoktól – 0.5 körüli értéket vesz fel. Ez azt jelenti, hogy lesz két módus, amelyek ellenfázisban érkeznek a kábel végére, vagyis mintegy „kioltják” egymást. Úgy gondoljuk, hogy ez a kioltás okozza a „rezonanciát” a beiktatási csillapítás mérése során. Itt érdemes kitérni arra, hogy a szomszédos erek móduskép felbontásában nem szerepel az 1. módus. Ennek ellenére lehetséges, hogy ez a módus is gerjesztve lesz. Okozhatja ezt a lezárás illesztetlensége vagy akár a köpeny földelése is.

5.2. Kettős impulzus

Kezdetben úgy gondoltuk, hogy az impulzusválaszban megjelenő kettős csúcs valóban két, eltérő sebességű impulzus, amelynek háttérében a többimódusú terjedés, illetve a módusok csatolása (áthallás) áll. Ennek azonban ellentmondott, hogy a kettős impulzus mindig megjelent attól függetlenül, hogy melyik ereket gerjesztettük.

A fázissebesség vizsgálata után teljesen más irányban indultunk el: úgy gondoljuk, hogy valójában egyetlen impulzus terjedésről van szó, amelynek a komponensei jelentősen eltérő fázissebességgel terjednek, egyszersmind eltérő csillapítást szenvednek. Ezt a sejtést támasztja alá [13] is, ahol többeres kábelek impulzus átvitelét szimulálták, és az eredményekben megjelent a kettős impulzus.



5.3. ábra

A terjedési együtthatók ismeretében szimulálni tudjuk az impulzus terjedését a kábelben. A gerjesztésünk legyen az 5.3. ábrán látható négyszög impulzus. A mérések során a gerjesztő impulzus szélessége kb. 1 μ s, így T értékét is ekkorára választjuk. A gerjesztés spektruma:

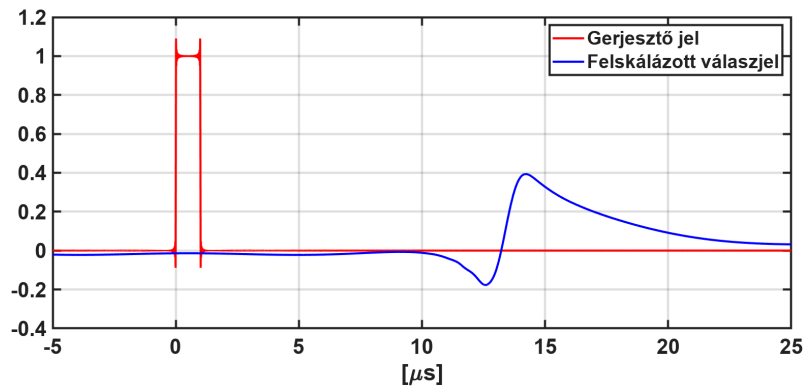
$$U(j\omega) = T \frac{\sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega \frac{T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}} \quad (5.3)$$

Ennek segítségével kifejezhetjük a gerjesztés és a válasz időfüggvényét:

$$u(t) \approx \sum_{k=-N}^N \frac{d\omega}{2\pi} U(jk d\omega) e^{jk d\omega t} \quad (5.4)$$

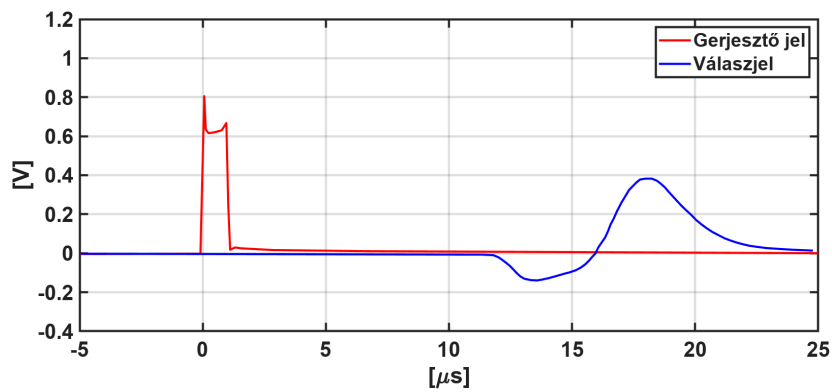
$$y(t) \approx \sum_{k=-N}^N \frac{d\omega}{2\pi} U(jk d\omega) e^{-\gamma l} e^{jk d\omega t} \quad (5.5)$$

A numerikus számításhoz felvesszünk egy Ω sávkorlátot, amelynél a gerjesztő impulzus sávzélessége mellett figyelembe vesszük a csillapítás frekvenciafüggését is (4.5. ábra). Az N osztátszámot pedig úgy határozzuk meg, hogy elkerüljük az átlapolódást az időfüggvényekben.



5.4. ábra. Impulzusválasz szimulációja 2400 m hosszú kábelre, a szemközti erek gerjesztése esetén, a válaszjelet ötszörösére skáláztuk, hogy a görbe jellegzetességei könnyebben kivehetők legyenek

A jelenség nagyon jól megfigyelhető a szimuláció eredményén: az impulzus szétterjed, és azt a látszatot kelti, mintha több impulzus érkezne meg a kábel végére.



5.5. ábra. Héteres kábelén mért impulzusválasz

Bár az 5.5. ábrán egy héteres kábelén mért impulzusválasz látható, a görbék közötti hasonlóság erősíti a magyarázatunkat.

Összegzés

Úgy gondoljuk, hogy sikerült megmagyarázni a vizsgált jelenségeket, azonban csak akkor lehetünk biztosak az eredményekben, ha alaposabban feltárjuk a korábbi mérések körülményeit vagy további célzott méréseket végzünk.

A következő lépés a héteres kábel analízisének befejezése, hogy az ezen a kábelén mért adatokat is összevethessük a számításainkkal. Ezentúl tovább finomíthatjuk a modellünket, például homegenizált vezetőképesség alkalmazásával.

Ezenkívül szeretnénk áthallás vizsgálatot végezni mindkét kábel esetén, amivel megerősíthetnénk a rezoncia kialakulásának magyarázatát.

Irodalomjegyzék

- [1] Balázs László. *Mélyfúrési geofizika*. Eötvös Lóránd Tudományegyetem, 2013.
- [2] TE Connectivity Ltd. family of companies. <https://www.is-rayfast.com/media/pdfs/lib/TE%20Literature/Wire%20and%20Cable%20Marine%20SubSea/Rochester%20Cables.pdf>, 2016.
- [3] Clayton R. Paul. *Analysis of multiconductor transmission lines*. Wiley-Interscience: IEEE Press, 2008.
- [4] J.A. Brandão Faria. Multimodal propagation in multiconductor transmission lines. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 28(14):1677–1702, 2014.
- [5] *MATLAB Partial Differential Equation Toolbox version: 3.6 (R2021a)*. Natick, Massachusetts, United States.
- [6] Zombory László Simonyi Károly. *Elméleti villamosságtan*. Műszaki Könyvkiadó, 2000.
- [7] J. Weiss and Z. J. Csendes. A one-step finite element method for multiconductor skin effect problems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-101(10):3796–3803, 1982.
- [8] S. Cristina and M. Feliziani. A finite element technique for multiconductor cable parameters calculation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25(4):2986–2988, 1989.
- [9] M. Feliziani and F. Maradei. A FEM approach to calculate the impedances of shielded multiconductor cables. In *2002 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, volume 2, pages 1020–1025 vol.2, 2002.
- [10] Bilicz Sándor. *Elektromágneses terek példatár*. 2010.
- [11] Andreas Chrysochos, Theofilos Papadopoulos, and Grigoris Papagiannis. Enhancing the frequency-domain calculation of transients in multiconductor power transmission lines. *Electric Power Systems Research*, 122, 05 2015.
- [12] H.A. Haus. *Waves and Fields in Optoelectronics*. Prentice-Hall series in solid state physical electronics. Prentice-Hall, 1984.
- [13] Wiesław Tarczyński and Ryszard Kopka. Signal propagation in multi-wire cables. *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, 203:51–63, 12 2015.