

Szerkesztések a Poincaré-modell segítségével

TDK dolgozat

Veres Dorottya

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium

Konzulens:

Dr. Szilágyi Brigitta, egyetemi docens

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Matematika Intézet, Algebra és Geometria Tanszék

BME 2024

Tartalomjegyzék

1. Kivonat	3
2. Abstract	3
3. Köszönetnyilvánítás	4
4. Bevezetés	5
5. A hiperbolikus geometria axiómarendszere	6
6. Görbék	8
6.1. Paraciklus és paraszféra	8
6.2. Hiperciklus és hiperszféra	10
6.3. Ciklusok	10
7. A Poincaré-modell	11
7.1. Paraciklus a modellen	12
7.2. Hiperciklus a modellen	12
7.3. Ciklusok a modellen	12
8. Szerkesztési lépések	15
8.1. Euklideszi síkon	15
8.2. Hiperbolikus síkon	15
9. Alapszerkesztések	17
9.1. Két pontot összekötő egyenes	17
9.2. Két pont szakaszfelező merőlegese	18
9.3. Két egyenes szögfelezője	19
9.4. Adott középpontú és sugarú kör	19
9.5. Adott egyeneshez adott távolságú hiperciklus	20
9.6. Adott egyeneshez, mint tengelyhez paraciklus	21
10. Alkalmazás	22
10.1. Közös merőleges 1	23
10.2. Közös merőleges 2	23
10.3. Körhöz érintő	24
10.4. Körülírt kör	25

10.5. Háromszög szerkesztés	26
11. Összefoglalás és kitekintés	30
12. Irodalom	31

1. Kivonat

A matematikusokat már az ókor óta foglalkoztatta a párhuzamossági axióma, ugyanis ez kicsit bonyolultabb, mint a többi axióma, amikre az euklideszi geometria épül. Eszerint az axióma szerint egy egyeneshez egy rajta kívül álló pontból pontosan egy párhuzamos egyenes húzható. Ezt próbálták igazolni matematikusok azzal, hogy ellentmondást kerestek abban, hogy több párhuzamos egyenes is húzható az adott ponton át. Valódi ellentmondást senki sem talált, csak túl furcsának gondolták az eredményeket és nem fogadták el, hogy előfordulhatna ellentmondás.

A 19. században Bolyai János és Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij egymástól függetlenül foglalkoztak a "paralellák problémájával" [1, 2]. Így született meg a hiperbolikus geometria, melyben kicserélték az eredeti párhuzamossági axiómát egy újra, vagyis hogy egy pontból több párhuzamos is húzható egy egyeneshez.

A dolgozatomban bemutatok több, a hiperbolikus geometria egy modellje (a Poincaré-modell [3]) segítségével általam elvégzett és definiált szerkesztést, és igazolok néhány érdekes állítást. A dolgozat jobb érthetősége kedvéért ismertetem a szükséges fogalmakat is a témában.

2. Abstract

Mathematicians have been concerned with the parallel postulate since ancient times, as it is a bit more complicated than the other axioms upon which Euclidean geometry is built. According to this axiom, from a point outside a line, exactly one parallel line can be drawn. Mathematicians tried to prove this by seeking a contradiction in the idea that more than one parallel line could be drawn from the same point. No one found an actual contradiction, but mathematicians considered the results too strange and did not accept that a contradiction could arise.

In the 19th century, János Bolyai and Nikolai Ivanovich Lobachevsky independently conducted extensive research on the topic, eventually creating hyperbolic geometry, in which the original parallel postulate was replaced with a new one, stating that multiple parallel lines can be drawn to a line from a single point.

In my paper, I present several constructions I have performed and defined using a model of hyperbolic geometry (the Poincaré model). Additionally, to improve the paper's clarity, I will explain the necessary concepts related to the topic.

3. Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Szilágyi Brigittának a dolgozat elkészítésében nyújtott támogatását és a témát érintő inspiráló beszélgetéseket. Valamint köszönöm Dr. Moussong Gábornak és Hujter Bálintnak a dolgozat megfogalmazásait érintő észrevételeit, illetve a kutatás kezdetén való iránymutatást.

4. Bevezetés

C'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente — H. Poincaré.

Azaz (szabad fordításban) a logika az, amivel bizonyítunk, de az intuíció az, amivel felfedezünk. Különösen igazak Poincaré szavai a hiperbolikus geometria felfedezésére, alakulására és formálódására. A geometria axiómáit intuitíve igaznak tartjuk (épp ezért axiómák), és ha valakinek más tűnik intuitíve igaznak, mint a többieknek, akkor az a "semmiből egy ujj más világot" (Bólyai János [1]) tud teremteni.

Ha bárkit megkérnénk, hogy képzeljen maga elé egy síkot, az gyakorlatilag mindenki számára valószínűleg a szokásos, mindennapokban előforduló euklideszi sík lenne. Emellett viszont létezik számos, a nemeuklideszi geometriákban használatos sík is. A kutatásaim során éppen egy ilyennel foglalkoztam, a hiperbolikus síkkal. Mivel nehéz lenne elképzelni mást, mint a megszokott euklideszi síkot, ezért létrehoztak különböző modelleket ezeknek a nemeuklideszi síkoknak az ábrázolására. Egy híres modell például a Poincaré-modell [3].

A GeoGebra [4] egy sokak által használt program, az euklideszi síkot rajzolja meg nekünk, különböző szerkesztéseket végezhetünk a használatával. Emellett készült egy másik változata is a programnak, amely viszont a hiperbolikus síkot a Poincaré-moddal szemlélteti. Ugyanúgy tudunk benne használni körzőt és vonalzót, és az euklideszi GeoGebrához hasonlóan tudunk benne szerkeszteni.

Ennek az új GeoGebrának [5, 6] a használata során merült fel bennem, hogy hogyan lehetne az euklideszi síkon, akár papíron, kétkezi eszközökkel, körzővel és vonalzóval szerkesztve egy nemeuklideszi síkot ábrázolni? És hogyan lehet a modell használatával hiperbolikus síkbeli szerkesztéseket, illetve bizonyításokat elvégezni?

A Poincaré-modell és az Euklideszi sík kapcsolatával többen is foglalkoztak korábban (pl. [7, 8, 9, 10] és egyetemi dolgozatok is születtek (pl. [11]), de megítélesem szerint módszeresen a szerkesztésekre fókuszáló munka nem született.

Ebben a dolgozatban szisztematikusan alkotom meg azokat az alapszerkesztéseket, amik segítségével mindent, ami megszerkeszthető, meg is tudunk szerkeszteni. A dolgozat utolsó fejezetében módszerem néhány alkalmazását mutatom be.

Kezdeként ismerkedjünk meg a hiperbolikus geometria néhány alapfogalmával, majd magával a modellel is!

5. A hiperbolikus geometria axiómarendszere

Mindenki jól ismeri az euklideszi geometriát, viszont az axiómarendszert, amire ez épül, azt már kevesebben. Ezeket az axiómákat többek között Hilbert pontokba szedte és 5 csoportra osztotta: illeszkedési, rendezési, egybevágósági, folytonossági és párhuzamossági axiómákra. Ezeket nem tudjuk bizonyítani, egyszerűen igaznak vannak kikiáltva. Ezek alapján épül fel az euklideszi sík.

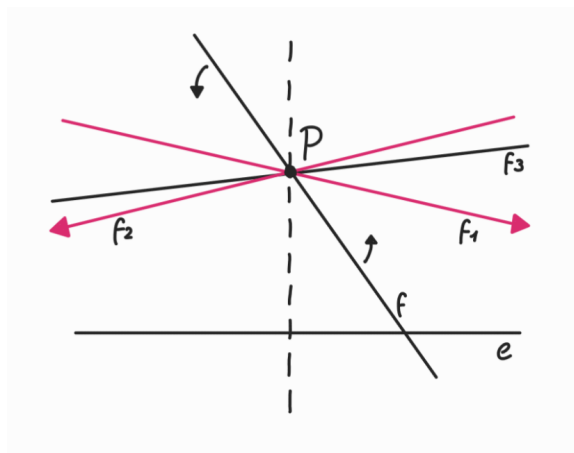
Az euklideszi axiómarendszerben van egy érdekes axióma, a párhuzamossági axióma. Ez azt mondja ki, hogy ha adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont, akkor azon a P ponton keresztül pontosan egy párhuzamos, vagyis nem metsző egyenes húzható. Ez az axióma érezhetően elüt a többitől, furcsábbnak tűnik. Emellett a többi axióma magától értetődőnek hangzik (egy példa: egy egyenesen 3 pont közül az egyik mindig a másik kettő között van), mintha nem szorulódnak magyarázatra. Hiszen a megszokott euklideszi síkot elképzelve hogy lehetne az, hogy 3 kollineáris pontból egyik sincs középen? A párhuzamossági axióma viszont eltér ettől. A matematikusok évezredek óta keresztül próbálták ezt levezetni a többi axióma felhasználásával, sikertelenül.

Sokan úgy gondolták, hogy igazolták azt, hogy egy ponton át csak egy párhuzamos húzható, de valójában csak egy, a párhuzamossági axiómával egyenértékű állítás igaznak tételezésével sikerült ez. Például feltették, hogy 3 pontra mindig illeszkedik kör. Ehhez viszont arra lenne szükség, hogy a 3 pont 3 szakaszfelező merőlegese egy pontban metsszen, a kör középpontjában. Viszont semmi nem garantálja, hogy a 3 egyenes metssz egyáltalán. Azok a matematikusok, akik az axióma cáfolásával próbálkoztak, szintén nem jártak sikerrel.

A 19. században Bolyai János volt az, aki meghatározott egy olyan geometriát, ami az úgynevezett maradék axiómákra épül (ebbe minden beletartozik a párhuzamossági axiómán kívül). Ezt nevezte abszolút geometriának. Erre most nem térek ki a dolgozatban.

Ezen kívül létrehozott egy új axiómát a párhuzamossági helyett, amely szerint végtelen sok nem metsző egyenes húzható a P ponton keresztül, ami nem metszi az e egyenest (5.1. ábra).

Ehhez állítsunk egy f merőlegest a P pontból az e egyenesre. Erre a tengelyre az ábra szimmetrikus. Most kezdjük el ezt a merőlegest pozitív irányba forgatni. Egy idő után el fog érni abba az f_1 helyzetbe, amikor úgy mond "elpattan" az e egyenestől. Ez a helyzet szimmetrikus az eredeti merőlegesre és e mindkét irányához tartozik ilyen helyzetű egyenes. f_1 tükörképe legyen f_2 . Ez a két egyenes határol egy szögtartományt, ami nem tartalmazza a merőlegest. Bármely, ebben a tartományban meghúzott P -n átmenő egyenes párhuzamos lesz e -vel. A párhuzamosokat határoló egyeneseket elpattanó egyeneseknek hívják, amik ezek között vannak, azokat pedig ultraparallel egyeneseknek.



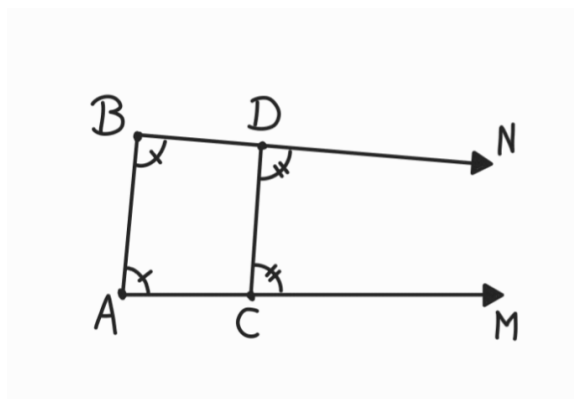
5.1. ábra

Bolyai megsejtette, hogy ha az euklideszi axiómarendszer ellentmondásmentes, és a párhuzamossági axiómát a korábban leírta kicseréljük, akkor továbbra is ellentmondásmentes geometriát kapunk. Ezt később bizonyították.

6. Görbék

6.1. Paraciklus és paraszféra

Vegyünk egy párhuzamos egyenespárt, az AM és BN félegyenéseket úgy, hogy az AB szakasz ugyanakkora szöget zár be mindkét félegyenessel. Kijelölünk az AM félegyenesen egy C pontot, ahhoz található a BN félegyenesen egy D pont, amire $\angle NDC = \angle DCM$. CD -t nevezzük AM és BN izogonális szelőjének (6.1. ábra). CD -nek AM -mel és BN -nel nem feltétlenül egyezik meg a bezárt szöge, ha a C pontot máshol vesszük fel. Az euklideszi geometriában a bezárt szög például mindig 90° .

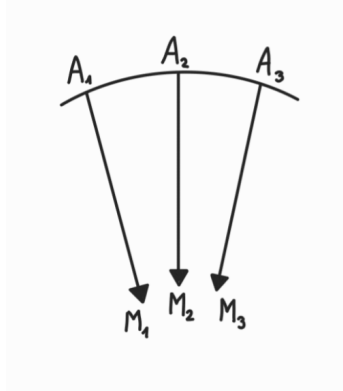


6.1. ábra.

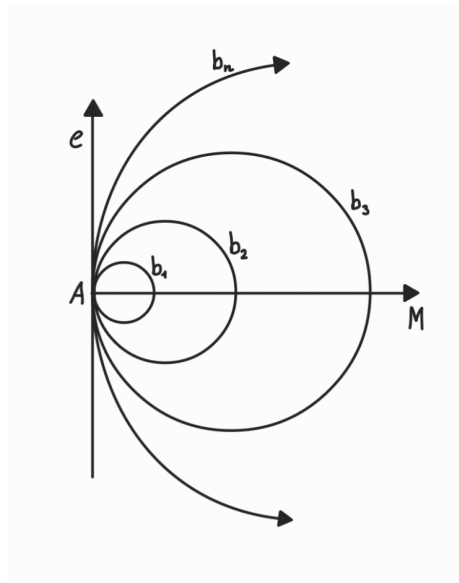
A paraciklus (6.2. ábra) egy olyan görbe, amelynek ha két pontját kiválasztjuk (A_1 és A_2), és ebből a két pontból a görbére merőlegest állítunk, vagyis ezen két ponthoz húzott érintőre merőlegest állítunk (A_1M_1 és A_2M_2), A_1A_2 izogonális szelője lesz a két, görbére merőleges félegyenessel (ezek a félegyenések definíció szerint párhuzamosok). Ezeket az AM félegyenéseket hívjuk a paraciklus tengelyének. Ha az A_1M_1 félegyenest az A_2M_2 félegyenésbe visszük, akkor a görbét önmagába toljuk el. Az ilyeneket hívjuk uniformis görbéknek, így ez a második felsorolt ilyen síkgörbe a kör után.

A paraciklus az euklideszi geometriában egy egyenest jelent. Ez bizonyos értelmezések szerint egy végtelen sugarú körnek is tekinthető (6.3. ábra). Rajzoljunk egy AM félegyenésre egy olyan kört, ami áthalad az A ponton és a középpontja a félegyenesen van, ezt nevezzük b -nek. Kezdjük el a kör középpontját M felé mozgatni (közben A maradjon rajta a körön). Ha az összes ilyen kört megrajzoljuk, akkor azok lefedik a sík egy részét. A paraciklus ennek a lefedett résznek a határalakzata.

Ezt a térben is el lehet képzelni, ugyanígy venni egy félegyenest, csak gömbnek a középpontját vesszük fel erre a félegyenésre. Ezt nevezzük paraszférának, ami



6.2. ábra.



6.3. ábra.

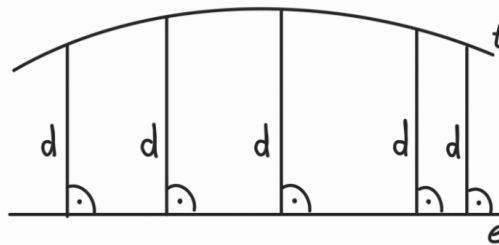
egy uniformis felület. Az érdekessége, hogy ha veszünk egy síkot, akkor 4-féle eset lehetséges:

- A sík nem metszi a paraszférát.
- A sík érinti a paraszférát és az érintési pontból induló tengelye a paraszférának merőleges a síkra. Az uniformitás miatt erre a pontra forgásszimmetrikus a görbe felület.
- A sík nem tartalmazza egyik tengelyét sem a paraszférának, így a metszet egy kör.

- A sík tartalmaz egy tengelyt, így egy paraciklust metsz ki a paraszférából.

6.2. Hiperciklus és hiperszféra

Vegyünk egy e egyenest. Ennek minden pontjába állítsunk egy merőlegest. Minden merőlegesen vegyünk fel e -től az egyik félsík felé egy pontot d távolságra, ezeket kössük össze. Így kaptuk meg a harmadik uniformis görbét (6.4. ábra), a hiperciklust. Ha a d távolság 0, akkor egy egyenest kapunk. Így az egyenes is egy hiperciklus.



6.4. ábra.

Hiperszférát pedig ennek a 3-dimenziós verziójaként kapunk (egy sík pontjaira állítunk merőlegeseket). Az eredeti sík és a hozzá tartozó, d távolságú hiperszféra között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van (ha hiperszféra bármely pontjába húzunk egy érintőt és erre merőlegest állítunk, akkor ahol ez metszi a síkot az lesz a pont képe, ha pedig a síkra állítunk merőlegest, annak az lesz a képe, ahol a hiperszférát elmetszi). Ha választunk a síkon egy egyenest, akkor annak a hozzá tartozó hiperszférán egy hiperciklus a képe. Ezeket a hiperciklusokat nevezzük a hiperszféra fővonalának. Érdekesség, hogy két fővonal szöge megegyezik a hozzájuk tartozó egyenesek szögével, így a megfeleltetés szögtartó.

6.3. Ciklusok

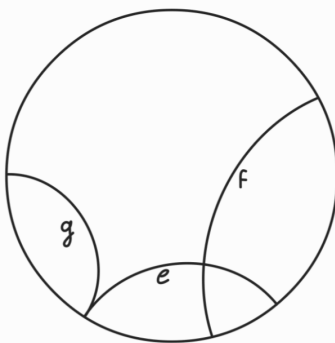
Összefoglaló néven az imént felsorolt két görbét és a köröket ciklusoknak nevezzük. Az euklideszi geometriában igaz az, hogy 3 pontra egyértelműen illeszkedik egy kör vagy egy egyenes. Az abszolút geometriában ez úgy van helyesen kimondva, hogy 3 pontra egyértelműen illeszkedik egy uniformis görbe, vagyis egy kör, paraciklus vagy hiperciklus. (3 pontra a nem biztos, hogy létezik összekötő kör, mert annak a középpontját három szakaszfelező merőleges metszéspontjaként kapnánk, de a párhuzamossági axióma elvételével már nem biztos, hogy metszenek a merőlegések, ha nincsen a 3 pont egy egyenesen)

7. A Poincaré-modell

Egy geometriai modell azt jelenti, hogy képzünk egy olyan struktúrát, amely a vizsgálandó szempontokból egyenértékű az eredeti, vizsgált fogalommal. A hiperbolikus geometria egyik legismertebb modellje a Poincaré modell. Ennek a segítségével az euklideszi síkon tudjuk ábrázolni a hiperbolikus síkot. Mivel az egész végtelen síkot szeretnénk ábrázolni egy korlátos körlapon, ezért természetesen a modell nem távolságtartó. Viszont a többi modellhez képest kedvező, hogy egy szögtartó megfeleltetés. A modellben a sík megfelelője egy nyílt körlap, ez az alapkör. A pontok az alapkör pontjai. Az egyenesek olyan körvonalaknak az alapkörbe eső részük, amik merőlegesen metszik az alapkört, valamint az alapkör átmérőit. A szakasz az egyenes körvonalának egy cikkelye. A tükrözés a modellen az inverzió a tükrötengelyre (ami a modellben egy kör cikk).

Az egybevágóságot ugyanúgy lehet definiálni, mint az euklideszi síkon: tetszőleges tükrözések szorzataként. Ez a modellen néhány inverzió szorzata, amik az alapkört önmagába viszik.

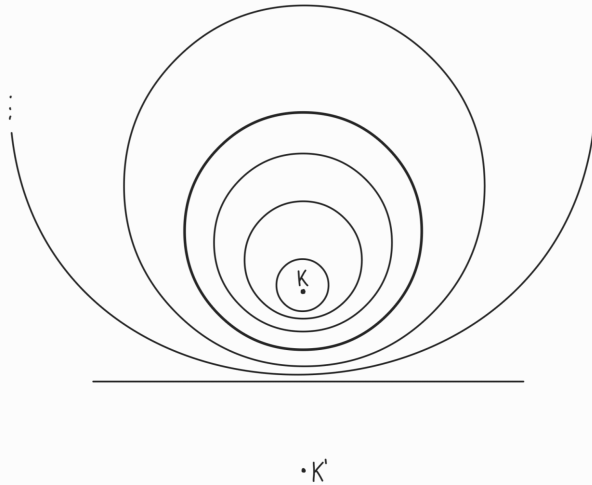
A hiperbolikus párhuzamossági axióma szerint két egyenes helyzete 3-féle lehet: metsző, elpattanó és ultraparalell (7.1. ábra). Legyen 3 egyenes e , f és g . Helyezkedjenek el ezek egymáshoz képest az ábrán látható módon. e és f metsző egyenesek, a metszéspontjuk az alapkörön belül van. e és g elpattanó egyenesek, a metszéspontjuk az alapkörön van. f és g ultraparalell egyenesek. Két modellbeli egyenes nem metszhet az alapkörön belül 2 pontban, mert a két metszéspont egymás alapkörre vett inverze.



7.1. ábra.

A körök (7.2. ábra) ténylegesen euklideszi értelemben is körök lesznek, csak a középpontjuk lesz elcsúszva ahhoz képest. A kör átmérőit itt is felezi a középpont. Érdekes, hogy ha választunk egy K középpontot, és megrajzoljuk a modellen

az összes K középpontú kört, ezek a K pont és K alapkörre vett inverzének az Apollóniusz-féle körsorához fognak tartozni. Az ábrán vastagabb az alapkör.



7.2. ábra.

Most nézzük meg, a különböző görbék hogy néznek ki a modellen. Így látva könnyebben megérthetők a korábbi definíciók.

7.1. Paraciklus a modellen

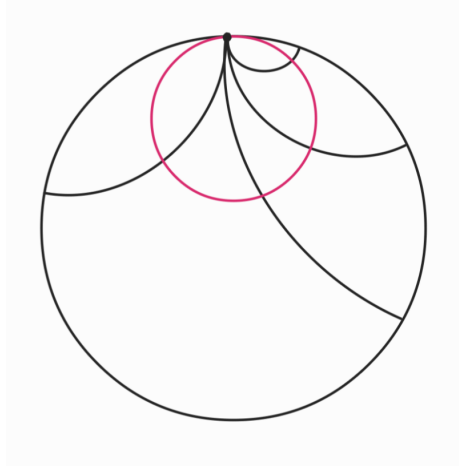
A paraciklus egy olyan euklideszi értelemben vett kör, amely az alapkört belülről érinti (7.3. ábra). Ez persze a síkon nem lesz kör, mert az alapkörrel vett metszéspontja már nem a sík része. Ennek a tengelyei az alapkört merőlegesen metsző körök lesznek, amik a görbe érintési pontján áthaladnak.

7.2. Hiperciklus a modellen

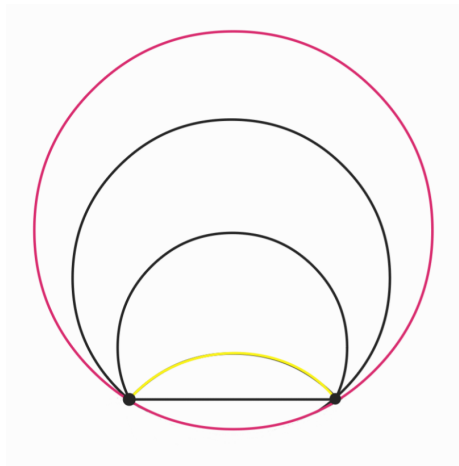
A hiperciklus (7.4. ábra) olyan kör vagy egyenes az euklideszi síkon, ami metszi az alapkört, de nem 90° -ban (az is hiperciklus, ha 90° -ben metszi, csak akkor a távolsága az egyenestől 0), ezek az ábrán a fekete körívek. Ez annak a modellbeli egyenesnek a távolságegyenese, ami a két metszéspontot köti össze, ez az egyenes sárga.

7.3. Ciklusok a modellen

Ha az euklideszi síkba építve nézünk rá a modellre, és a modell alapkörén belül kijelölünk 3 pontot, akkor egyértelműen látszik a korábban ciklusokról megfogal-



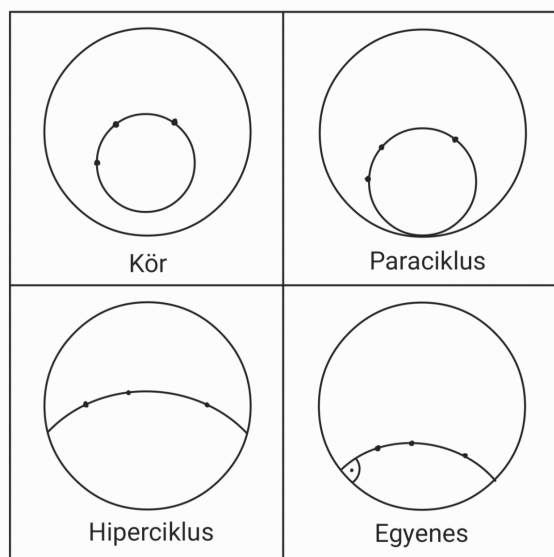
7.3. ábra.



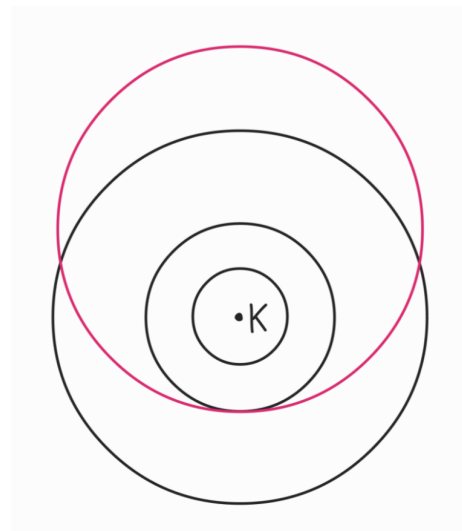
7.4. ábra.

mazott állítás, vagyis hogy 3 pontra mindig illeszkedik pontosan egy uniformis görbe (7.5(a). ábra). Az euklideszi síkon a 3 pont biztosan egy körre vagy egy egyenesre esik, akkor ezek az alapkörhöz képest 3-féle helyzetben lehetnek: Nem metszenek, belülről érintik egymást vagy metszenek. Ezekben az esetekben hiperbolikus értelemben a 3 pontra rendre egy kör, egy paraciklus és egy hiperciklus illeszkedik.

Még érdekesség, hogy ha veszünk a modellen egy K pontot, ami nem az alapkör középpontja és köré rajzolunk egy euklideszi kört és ennek a sugarát folyamatosan növeljük, akkor a kapott vonal a hiperbolikus síkon több fázison átmegy, majd a körnek már minden pontja az alapkörön kívülre fog esni (7.5(b). ábra). Ha csak az alapkörön belülré eső részét figyeljük a körvonalnak, akkor az először



((a))



((b))

7.5. ábra.

hiperbolikus-síkbeli kör lesz, majd paraciklus, aztán hiperciklus. Ebből a paraciklus fázist csak egy pillanatra veszi fel egyetlen sugárhosszal. Az egyenest nem veszi fel, mert a merőlegesen metsző körnek biztosan az alapkörön kívül van a középpontja. Az ábrán az alapkör rózsaszín.

8. Szerkesztési lépések

8.1. Euklideszi síkon

Ha adott két pont a síkon, ezekből körzővel és vonalzóval egy alakzat akkor szerkeszthető, ha az alábbi lépések véges számú használatával el tudjuk azt érni.

A lépések:

- Két ponton át rajzolunk egy egyenest.
- Egy meglévő pontot középpontnak véve rajzolhatunk köré egy adott sugarú kört (a sugár hosszát másoljuk egy meglévő szakasról).
- Két egyenesnek, két körnek, vagy egy egyenesnek és egy körnek a metszéspontjait megrajzolhatjuk.

Alapszerkesztéseknek hívjuk azokat a szerkesztéseket, amiket néhány lépésből könnyen el tudunk érni és viszonylag gyakran kell őket használni.

Ilyenek például:

- Két pont szakaszfelező merőlegesének szerkesztése,
- Két egyenes által bezárt szög szögfelezőjének szerkesztése,
- Egy szakasz többszörözése,
- Egy szakasz tetszőleges számú egyenlő részre osztása,
- Körhöz külső pontból húzott érintő szerkesztése,
- Kör középpontjának szerkesztése,
- Egyeneshez külső ponton átmenő párhuzamos egyenesnek szerkesztése.

Ezek a hiperbolikus síkon is megvalósíthatók, de nem feltétlenül a szokásos lépésekkel, ugyanis szakasz n egyenlő részre való osztásához vagy szakasz többszörözéséhez általában a párhuzamos szelők tételét használjuk, körhöz külső pontból húzott érintőhöz pedig a Thalész-tételt. Ezek a hiperbolikus síkon nem működő tételek.

8.2. Hiperbolikus síkon

A szerkeszthetőség lényegében ugyanazt jelenti, mint euklideszi síkon, vagyis ha 2 pont adott, abból véges sok megengedett lépésből milyen alakzatok szerkeszthetők meg. Ami számottevő különbség, az az, hogy amíg az euklideszi síkon csak 2-féle eszközünk van, addig a hiperbolikus síkon 4: egyenesvonalzó, paraciklusvonalzó, körző és hiperkörző.

Ezekkel az eszközökkel elvégezhető lépések:

- Két ponton át egyenest rajzolunk,
- Egy meglévő pontot középpontnak véve rajzolhatunk köré egy adott sugarú kört (a sugár hosszát másoljuk egy meglévő szakasról),
- Korábban meglévő egyeneshez rajzolhatunk paraciklust úgy, hogy annak az egyenes a tengelye,
- Rajzolhatunk egy már meglévő egyeneshez hiperciklust olyan távolsággal, ami már létezik,
- Bármely két ciklusnak megrajzolhatjuk a metszéspontját.

Ezek alapján nézzük meg az alapszerkesztéseket.

9. Alapszerkesztések

Mostantól euklideszi értelemben írok csak a szerkesztésekről, az euklideszi szerkesztési szabályoknak megfelelően fogok szerkeszteni. A hiperbolikus sík alapkörét rózsaszínnel rajzolom, zölddel a megszerkesztett fontos részeket.

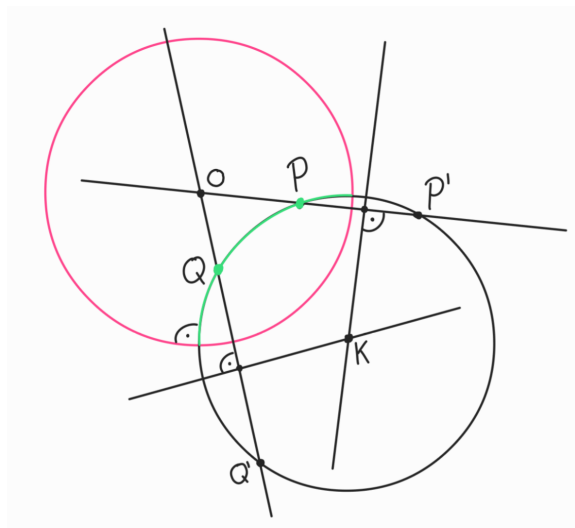
9.1. Két pontot összekötő egyenes

Ha adott egy P pont a modellen, akkor azoknak a K pontoknak a halmaza, ahonnan a K középpontú, KP sugarú kör merőlegesen metszi az alapkört, a PP' szakaszfelező merőlegese, ahol P' az inverz képe P -nek az alapkörre. (Inverziót tudunk szerkeszteni.)

Ugyanígy, ha Q a modell egy pontja, akkor az inverz képével, Q' -vel vett szakaszfelező merőlegeseinek bármely L pontjával rajzolunk L középpontú, LQ sugarú kört, akkor az is merőlegesen metszi az alapkört.

A két szakaszfelező merőleges metszéspontjából kell egy olyan kört rajzolnunk, ami tartalmazza a P, Q, P', Q' pontokat. A $PQQ'P'$ négyszög biztosan húr-négyszög, a középpontja pedig sehol máshol nem lehet, mint a metszéspontban.

Ennek a körnek az alapkörön belülre eső része lesz a hiperbolikus egyenes, ami P -t és Q -t összeköti (9.1. ábra).



9.1. ábra.

Ha a szakaszfelező merőlegesek nem metszenek, akkor a P, Q, P', Q' pontok egy euklideszi egyenesre esnek, és ez az egyenes áthalad az alapkör középpontján. Ekkor ez maga a hiperbolikus egyenes is.

9.2. Két pont szakaszfelező merőlegese

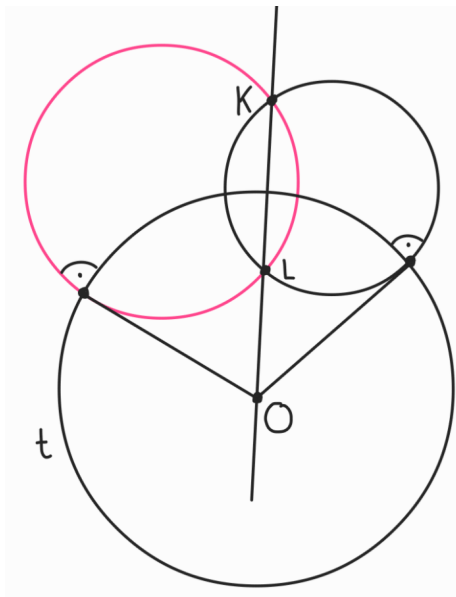
A Poincaré-modellen a tengelyes tükrözés nem más, mint egy pontnak a tükörtengelyre vett inverziója. Ezt a tengelyt szeretnénk megszerkeszteni, ha adottak a P és P' pontok, amik egymás képei.

A tengely köre legyen t . A t kör középpontja biztosan a PP' egyenesen lesz, mert az inverzió alapkörének a középpontja, maga a pont és az inverz képe egy egyenesre esik.

A t körnek merőlegesnek kell lennie a P -t P' -vel összekötő hiperbolikus egyenesre és az alapkörre. Messe az alapkört K és L pontban a PP' hiperbolikus egyenes.

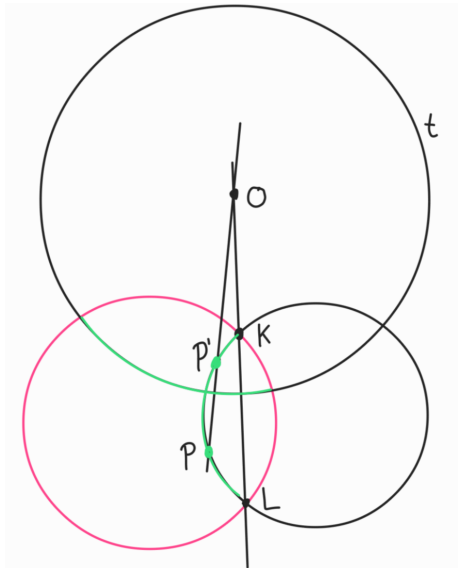
Azoknak a pontoknak a halmaza, ahonnan húzható olyan sugarú kör, hogy az mindkét megrajzolt kört merőlegesen messe, azok a két kör hatványvonalán lesznek, hiszen a hozzájuk húzott érintőknek ugyanolyan hosszúnak kell lennie.

Így már van két egyenes (PP' és KL), amiken rajta kell lennie t középpontjának. Ezek metszéspontjában lesz a középpont (9.2. ábra).



9.2. ábra.

A t kör sugarának megszerkesztése már könnyű a középpontjának ismeretében (ismert egy kör középpontja és egy pont erre a körre vett inverz képével együtt), így szerkesztettünk szakaszfelező merőlegest. A két zöld körív metszéspontja egyben a PP' szakasz felező pontja (9.3. ábra).



9.3. ábra.

9.3. Két egyenes szögfelezője

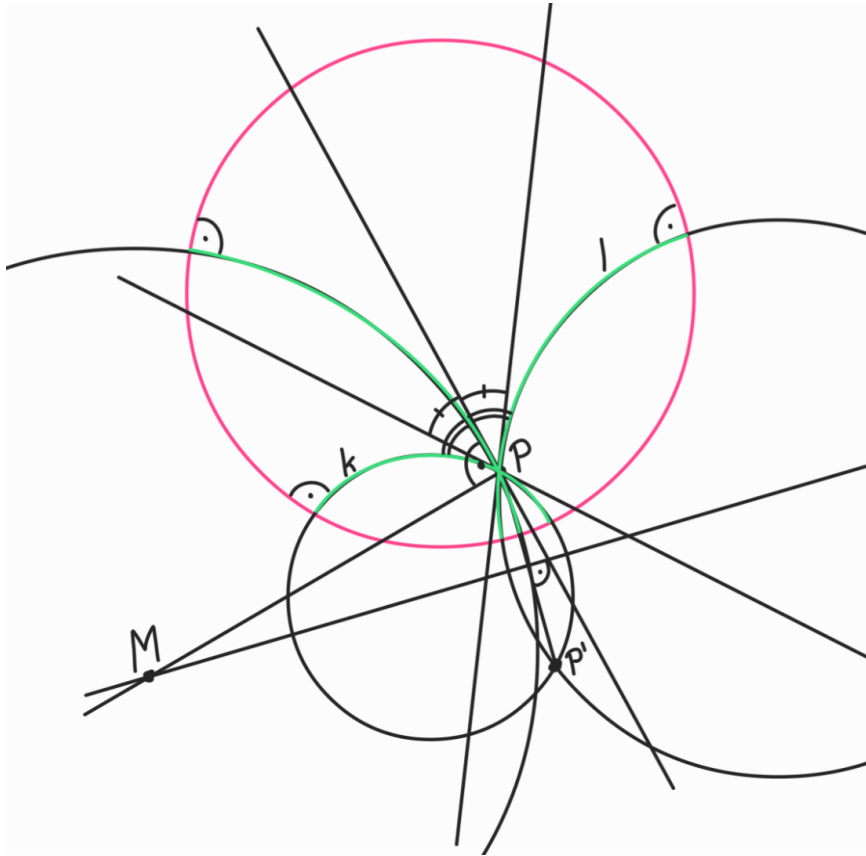
Két hiperbolikus egyenes k és l , a metszéspontjuk P (k és l jelöli a hiperbolikus-egyenesekhez tartozó köröket is.). k és l olyan szöget zárnak be egymással, mint a P -ből egymáshoz húzott érintői. Az érintőknek szerkesszük meg az euklideszi értelemben vett egyik szögfelezőjét. Erre állítsunk P -ből merőlegest. A merőlegesen bármilyen M pontot kiválasztunk, az M középpontú, MP sugarú kör felezni fogja k és l által bezárt szöget. Már csak arra van szükség, hogy ez a kör merőleges legyen az alapkörre.

k és l másik metszéspontja P' , P alapkörre vett inverziója. A szögfelező körnek át kell haladni a P -n és P' -n. Az M pont rajta lesz PP' szakaszfelező merőlegesén is.

Így megkaptunk két egyenest, amiknek a metszéspontjából P -n keresztül húzott kör, a k és l hiperbolikus-egyenesek szögfelezője lesz (9.4. ábra).

9.4. Adott középpontú és sugarú kör

A középpont K . Ha valahol az alapkörön megvan adva a sugár hossza, akkor annak egyik végpontja tükrözésekkel K -ba juttatható. Így adott a K középpont és a kör kerületén egy P pont. Szerkesszük meg P' -t úgy, hogy a PP' hiperbolikus-szakasz felezőpontja legyen K . A KP szakaszra állítsunk K -ban merőlegest, vagyis egy kört rajzoljunk, ami merőlegesen metszi KP -t és az alapkört. Majd erre a megrajzolt körre invertáljuk P -t. Így PP' egy átmérő.

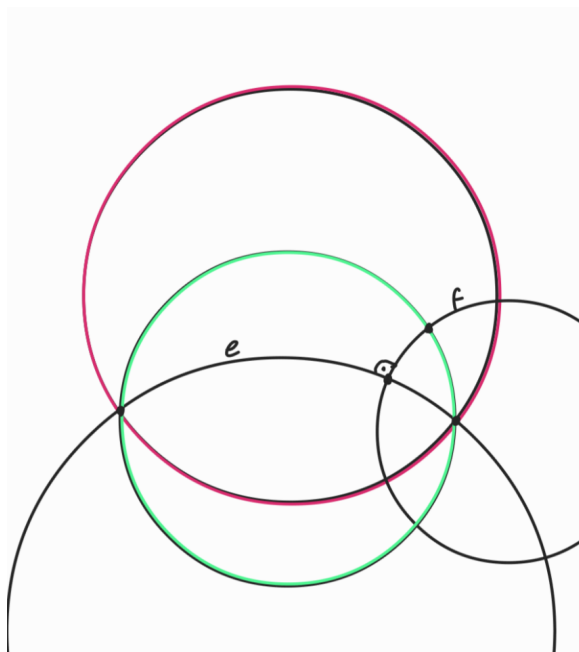


9.4. ábra.

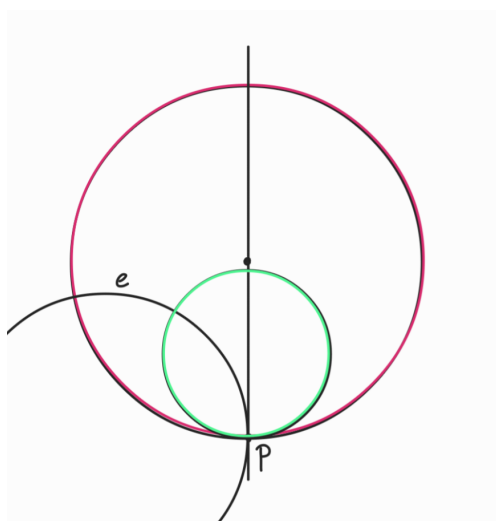
Hogy megszerkesszük a K középpontú hiperbolikus kört, aminek PP' az átmérője, ahhoz szerkesztendő egy kör, ami hiperbolikusan tükrös az átmérőre, vagyis az inverz képe a PP' által meghatározott körívre (ami egy hiperbolikus egyenes). PP' körívének a középpontja O . Ha ebből húzunk két egyenest, OP és OP' egyeneseket, akkor ha a szerkesztendő kör merőleges, ezek érintői lesznek (9.5. ábra). Így a két megrajzolt egyenesre kell merőlegest állítani P -ből és P' -ből, a merőlegesek metszéspontja lesz a szerkesztendő kör euklideszi középpontja. A hiperbolikus pedig K .

9.5. Adott egyeneshez adott távolságú hiperciklus

Ha adott a hiperbolikus síkon egy e egyenes (merőlegesen metsző körív az alapkörrel) és rajta kívül valahol egy szakasz, f (egy alapkört merőlegesen metsző körívnek egy cikkelye), mint a távolság, akkor egy inverzióval eljuttatjuk f egyik végpontját e egyik pontjára, ugyanebből a pontból állítunk egy merőlegesen metsző



9.6. ábra.



9.7. ábra.

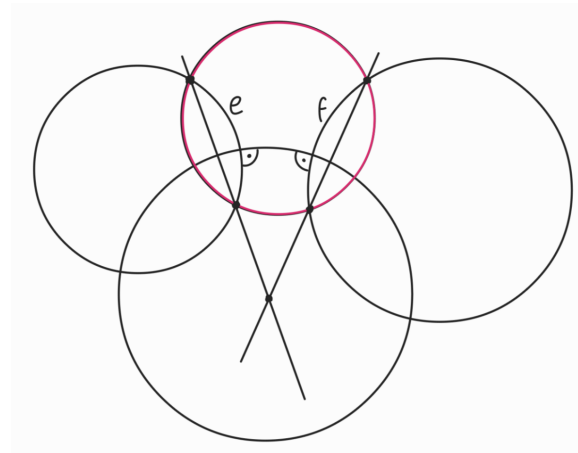
10. Alkalmazás

Ezek a szerkesztési módszerek segítenek néhány abszolút geometriai összefüggés ábrázolásában, akár abszolút geometrián belüli tételek, szerkeszthetőségek bizonyításában. Erre példák a következők:

10.1. Közös merőleges 1

Meg lehet-e szerkeszteni a hiperbolikus geometriában két nemmetsző egyeneshez (e és f) mindig egy harmadik egyenest, amely e -re és f -re is merőleges?

Ez egy bonyolultabb kérdés lenne, ha nem ismernénk a Poincaré-modellt. Ha a két hiperbolikus egyenes már adott, akkor a feladat, hogy szerkesszünk hozzájuk az euklideszi síkon egy negyedik kört (e , f és az alapkör mellé) ami a korábbi hármat merőlegesen metszi. Ezt könnyen megtehetjük, ha e és f két-két metszéspontját az alapkörrel összekötjük egy-egy egyenessel, akkor ezeknek az egyeneseknek a metszéspontjából (a 3 kör hatványpontjából) húzunk érintőket a 3 körhöz, a 6 érintési pontot összekötve egy mindhárom körre merőleges kört fogunk kapni (10.1. ábra). A modellben ez egy egyenes, ami mindkét megjelölt egyenesre merőleges. Így az állítást bizonyítottuk. Érdekesség, hogy az euklideszi geometriában végtelen sok ilyen egyenes szerkeszthető, hiperbolikus geometriában viszont csak egyetlen egy.



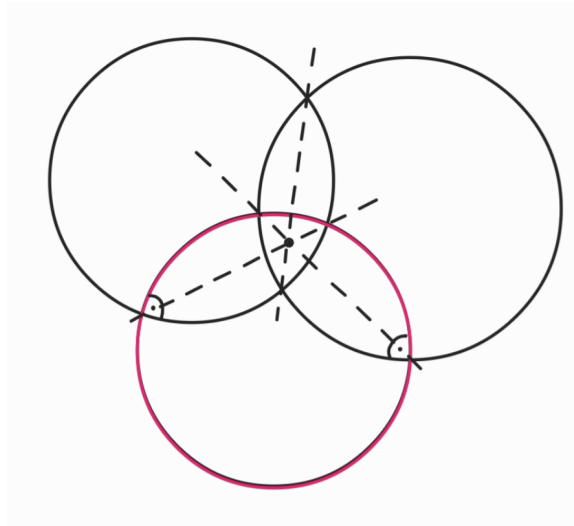
10.1. ábra.

10.2. Közös merőleges 2

Bizonyítandó, hogy ha van két különböző egyenesnek közös merőlegese, akkor a két egyenes nem metszi egymást.

Indirekten tegyük fel, hogy két egymást metsző egyenesnek lehet közös merőlegese. Ha ezt a merőleget szeretnénk megszerkeszteni, ahhoz az előbb leírt lépéseket használhatjuk. A két egyenes e és f . A modellel tehát van az alapkör, azt két merőlegesen metsző kör, amik metszik egymást is, és ezekhez szükség van egy negyedik körre, ami mindháromra merőleges. Ennek a negyedik körnek a középpontjának muszáj rajta lennie a három körnek a páronkénti hatványvonalán, hogy

merőleges tudjon rájuk egyszerre lenni, így a hatványpontban lesz a középpontja. Viszont ez a 3 kör metszetében van, mindhárom körön belülré esik (10.2. ábra), ez ellentmondás, hiszen egy körre merőleges körnek a középpontjának a körön kívül kell esnie. Tehát ha létezik közös merőleges, a két egyenes nem metszi egymást.



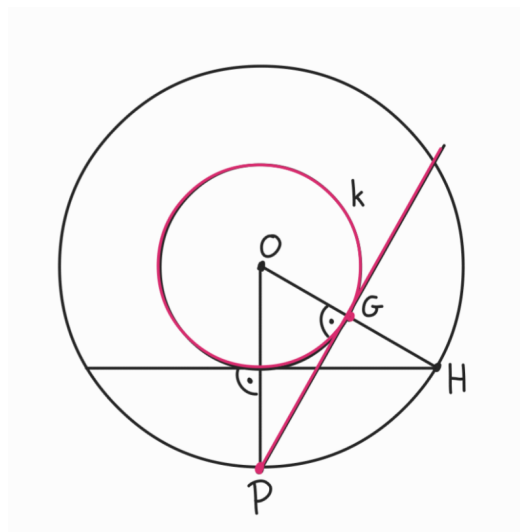
10.2. ábra

10.3. Körhöz érintő

Világos, hogy nem tudunk a Thalész-tétel segítségével körhöz érintőt szerkeszteni. Szerencsére enélkül is megoldható a szerkesztés, mégpedig Euklidész régi módszerével. Adott k kör és rajta kívül egy P pont. Kössük össze a kör középpontját (O pont) P -vel, a metszéspont legyen Q . Állítsunk OP -re merőlegest Q -ból. Ez messe az O középpontú, OP sugarú kört a H pontban. Kössük össze a H pontot az O ponttal, a k körrel a metszéspont G . Ez után ha összekötjük a P pontot G -vel, akkor ez egy érintője lesz a körnek (10.3. ábra).

Ahhoz, hogy ez működjön a hiperbolikus síkon, 3 dologra van szükség, amik igazak a hiperbolikus geometriában is, mivel nem használják a párhuzamossági axiómát:

- Egy körnek egy pontjába húzott érintő merőleges a ponthoz tartozó sugárra,
- A körrel koncentrikus körön lévő bármely pontból húzott érintő hossza egyenlő,
- A körhöz egy külső pontból húzott két érintőnek a hossza megegyezik.



10.3. ábra.

Ezeket az állításokat használva bizonyítjuk, hogy a szerkesztés valóban egy érintőt eredményez: OP merőleges HQ -ra, OH merőleges PG -re. $OH=OP$, vagyis a merőlegesek is egyenlő hosszúak, $HQ=PG$. Ha az OP sugarú körön lévő H pontból a HQ hosszú szakasz érintő, akkor PG is érintő lesz (P rajta van az OP sugarú körön, G rajta van a k körön).

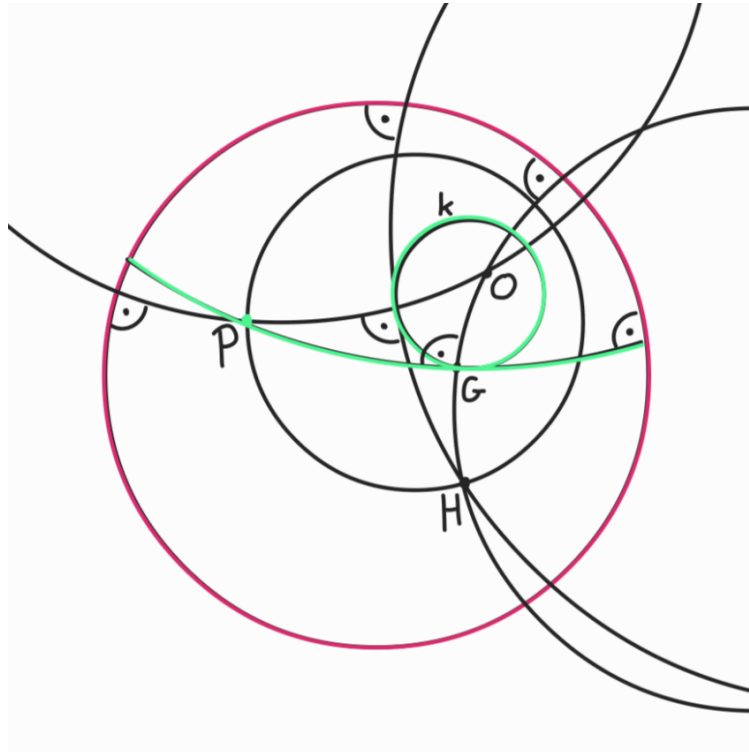
Ugyanezek a szerkesztési lépések a Poincaré-modellen felrajzolva (10.4. ábra):

10.4. Körülírt kör

Egy háromszög szakaszfelező merőlegesei vagy párhuzamosak egymással, vagy egy pontban metszenek. Azt már tudjuk, hogy a hiperbolikus síkon 3 pontra mindig illeszkedik egy egyenes, kör, hiperciklus, vagy paraciklus. A feladat a következő. Adott 2 pont a modellen P és Q , szerkesszük meg a mértani helyét azoknak a pontoknak, amelyekre illeszkedik olyan kör, ami tartalmazza a 2 megadott pontot.

Definíció szerint tudjuk, hogy egy egyenesen ha adott 2 pont mint egy kör átmérője, akkor ha az egyik pont fix és a másikat mozgatjuk az egyenesen, akkor a meghatározott körök által lefedett területnek a síkon a határoló alakzata a paraciklus. Egy egyeneshez, mint tengelyhez, 2 paraciklus tartozik a fix pontnak a két oldalán. (6.1 fejezet)

P és Q szakaszfelező merőlegesen mozog a rájuk illeszkedő köröknek a középpontja. Ez tekinthető két paraciklus tengelyének. Ha megrajzoljuk ezeket, akkor az a modellen 2 kört fog jelenteni, amik áthaladnak a két ponton és belülről érintik az alapkört.



10.4. ábra.

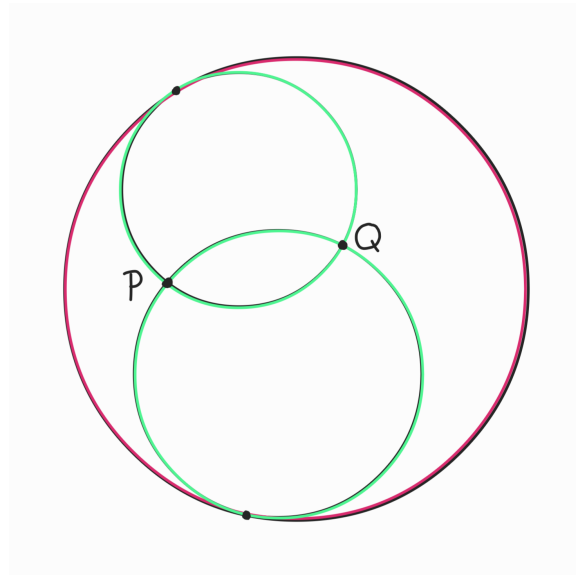
A két kört megrajzolva az alapkör 3 részre bomlik: a körök metszete, szimmetrikus differenciája és ami egyik körnek sem része. A P és Q pontokra illeszkedő körsor körei pedig 2 részre bomlottak, a teljesen az alapkörbe eső és részben azon kívülre eső körökre. Ezeket választja el a két paraciklus. Tehát akkor lesz körülírt kör szerkeszthető, ha a harmadik pont a szimmetrikus differenciába esik, mert így a körülírt kör a körsor köreinek azon részhalmazába esik, ami teljes egészében a modellen van.

Az következő ábrán megfigyelhető az is, hogy a 3. pont helyzetétől hogyan függ, hogy egyenes (az alapkört merőlegesen metsző körön), kör (a paraciklusok szimmetrikus differenciáján belül), hiperciklus (a szimmetrikus differencián kívül) vagy paraciklus (a két megrajzolt paracikluson) lesz a rájuk illeszkedő alakzat.

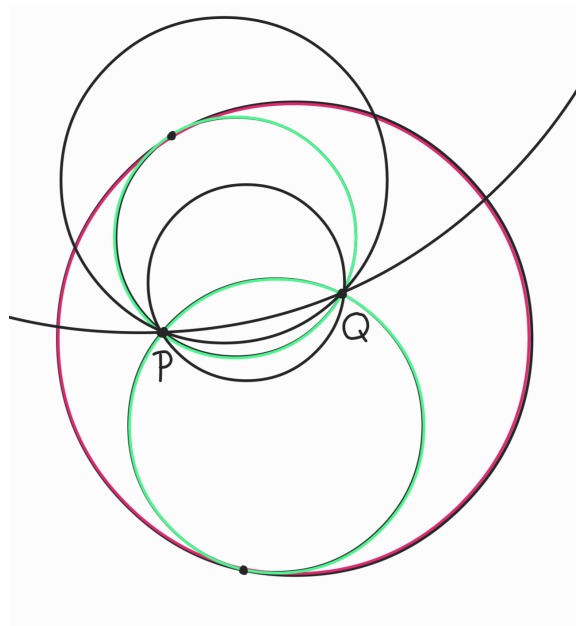
10.5. Háromszög szerkesztés

Adott a síkon 3 darab szög (α, β és γ), melyeknek összege kisebb, mint 180° . Szerkesztendő egy háromszög, aminek a szögei éppen ekkorák.

A háromszöget úgy szeretnénk megszerkeszteni, hogy a modellen mindhárom oldala egyenes legyen. Ennek a legegyszerűbb módja az, ha az euklideszi síkon



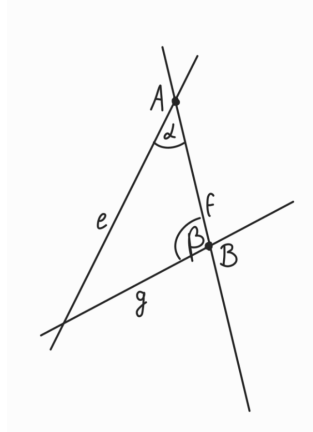
10.5. ábra.



10.6. ábra.

az oldalak két egyenes és egy kör legyenek, ezekhez majd hozzászerkesztjük az alapkört, aminek a középpontja a két egyenes metszete és merőleges a körre. Így lesz végül a hiperbolikus síkon mindhárom oldala a háromszögnek egyenes.

Vegyünk fel 3 egyenest, e , f és g . Közülük e és f α szöget, f és g pedig β szöget zárnak be (10.7. ábra). Most legyen γ a legkisebb szög.

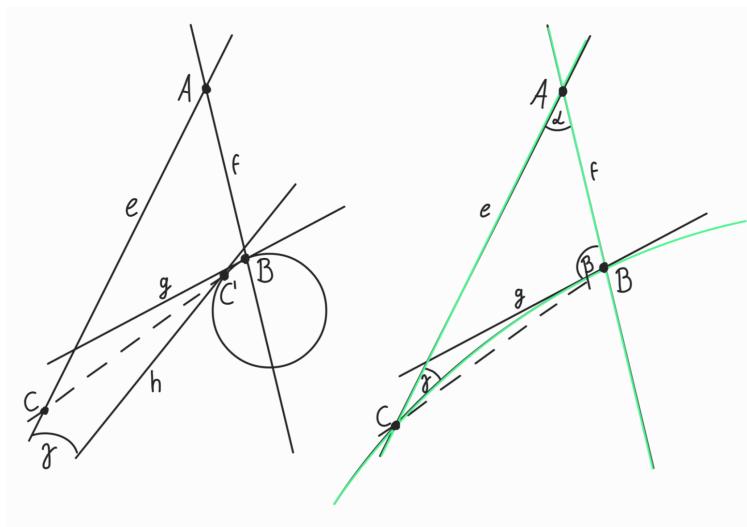


10.7. ábra.

A modellen e és f hiperciklusok lesznek, g pedig érinteni fogja a háromszög harmadik oldalát, ezzel garantálva, hogy β szöget zárjon be a háromszög két megfelelő oldala. Legyen f és e metszete A , f és g metszete B . Szerkesszünk egy kört, ami B -ben érinti g -t és γ szöget zár be e -vel. A körnek és e -nek a metszete C , a keresett háromszög ABC .

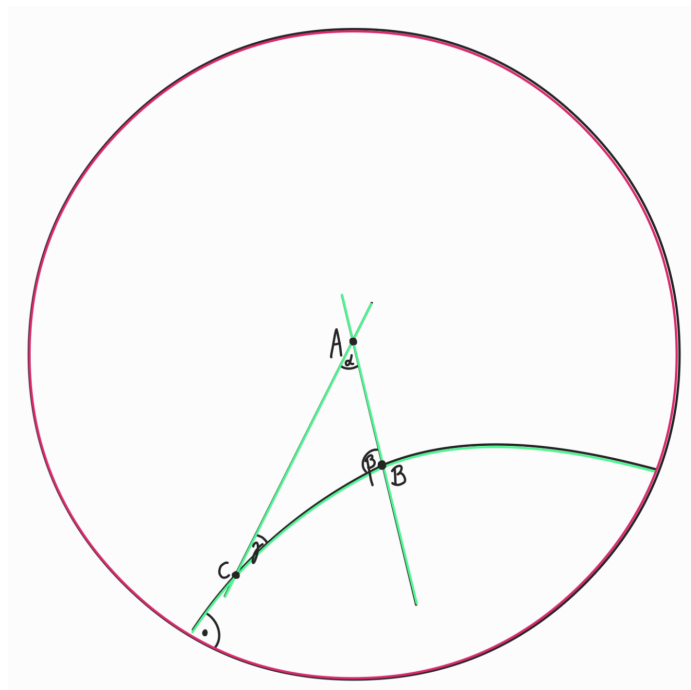
Ez már könnyen szerkeszthető. Vegyünk fel egy tetszőleges kört, ami érinti B -ben g -t. Ehhez rajzoljunk egy érintőt, h -t, ami e -vel γ szöget zár be (először rajzolunk egy h' egyenest, ami γ szöget zár be e -vel, majd a kör középpontjából állítsunk merőlegest h' -re, ahol a merőleges metszi a kört, az abból a pontból húzott érintője a körnek γ szöget fog e -vel bezárni, hiszen csak eltoltuk h' -t), az érintési pont C' . A kört és h -t nagyítsuk B -ből úgy, hogy C' e -re kerüljön. Ehhez hosszabítsuk meg a BC' szakaszt, ahol ez metszi e -t, ott megkaptuk a C pontot (10.8. ábra).

A konstrukció befejezéséhez már csak az alapkört kell megrajzolnunk úgy, hogy a középpontja A legyen (így e és f is modellbeli egyenesek lesznek) és merőleges legyen a háromszög BC oldalát meghatározó körre. Ehhez húzzunk érintőket A -ból a BC körívhez. Az egyik érintési pont és A által meghatározott szakasz legyen az alapkör sugara, A a középpontja. Ez a kör így merőleges ABC mindhárom oldalára (10.9. ábra). A háromszög három csúcsa pedig biztosan az alapkörön belül lesz, mert a körön belülré esik az érintési pontokat A felől összekötő köríve a háromszög BC oldalának, valamint a körív tartalmazza a B és C csúcsokat (az érintő és a körív 0° -os szöget zár be, $0^\circ < \gamma, \beta$ így az érintési pontoktól A -hoz közelebb lesz B és C). Így rajzoltunk a modellen egy háromszöget, melynek a szögei α, β, γ , és az oldalai egyenesek.



10.8. ábra.

Mivel a hiperbolikus geometriában minden háromszög, amik szögei egyenlőek, egyben egybevágóak is, elegendő egyetlen háromszög megszerkesztése adott szögekkel.



10.9. ábra.

11. Összefoglalás és kitekintés

A a Poincaré-modellben megalkottam és bemutattam elemi szerkesztési lépések egy olyan készletét, melyekre építve több hiperbolikus geometriai állítást is igazoltam konstrukció segítségével. Módszerem előnye, hogy a bizonyítások az Euklideszi geometria szerkesztéseire épülnek, és így intuitív és szemléletes megközelítést adnak egyébként komplex matematikai apparátust igénylő problémákhoz.

A továbbiakban tervezek hasonló abszolút geometriai állítások bizonyításával foglalkozni. Ezek közé tartozik egy érdekes probléma, mégpedig hogy hogyan lehet egy szakaszt n egyenlő részre osztani.

12. Irodalom

- [1] Bolyai János. *Appendix*. in Bolyai Farkas: Tentamen. Marosvásárhely, 1832.
- [2] Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij. *A geometria új alapjai, a párhuzamosok teljes elméletével*. Kazany: Egyetemi Tudományos Közlemények, 1835-1838.
- [3] H. Poincaré. "Theorie des groupes fuchsien". *Acta Math. (Stockholm)* 1 (1882), 1–62. old.
- [4] GeoGebra. *Teach and learn math in a smarter way*. URL: <https://www.geogebra.org/>.
- [5] a.zampa. *The hyperbolic plane*. URL: <https://www.geogebra.org/m/tHvDKWdC>.
- [6] Szilassi Lajos. *A Bolyai geometria – szemléletesen*. URL: <https://www.geogebra.org/m/NSQ9meGe>.
- [7] P. Szász. "Hyperbolische Trigonometrie an dem Poincaréschen Kreismodell abgelesen". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 7 (1956), 65–69. old.
- [8] G. Hajós és P. Szász. "On a new presentation of the hyperbolic trigonometry by aid of the Poincaré model". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio mathematica.* 7 (1964), 67–71. old.
- [9] G. Horváth Ákos és Szirmai Jenő. *Nemeuklideszi geometriák modelljei*. Typotex Kiadó, 2009. URL: <https://edu.interkonyv.hu/konyvek/szirmai-jeno-nemeuklideszi-geometriak-modelljei/>.
- [10] Reiman István. *A geometria és határterületei*. 1. kiad. Budapest: Gondolat, 1986.
- [11] Vida Mária. *Szerkeszthetőség a hiperbolikus geometriában*. Szakdolgozat. Budapest: ELTE, 2004.