



MISKOLCI EGYETEM
Gépészmérnöki és Informatikai Kar
Műszaki Mechanikai Intézet



Tudományos Diákköri Dolgozat

Kétmezős *hp*- verziós végelelemmódszerek kifejlesztése 1D-s rugalmasságtani feladatokra

Készítette:

PAP BENJÁMIN NOEL
gépészmérnöki alapszakos hallgató

Konzulens:

DR. TÓTH BALÁZS
egyetemi docens
Műszaki Mechanikai Intézet
Miskolci Egyetem

Miskolc-Egyetemváros
2024

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. A rugalmasságtan 1D-s peremértékfeladata	3
2.1. A sima és szinguláris tesztfeladat	4
2.2. Anyagi határfelületet tartalmazó tesztfeladat	5
3. A virtuális munka elv	8
4. Vegyesmezős variációs elvek	10
4.1. Primál variációs elv	10
4.2. Duál variációs elv	12
5. <i>hp</i>-verziós végelelemmódszerek	15
5.1. Geometriai leképezés és <i>h</i> -verziós sűrítés	15
5.2. <i>p</i> -típusú approximáció	16
5.3. Virtuális munka elvre épülő végelelemmódszer	17
5.4. Primál elvre épülő kétmezős végelelemmódszer	18
5.5. Duál elvre épülő kétmezős végelelemmódszer	19
6. Numerikus példák	22
6.1. Programkörnyezet	22
6.2. A sima tesztfeladat	22
6.2.1. Konvergencia vizsgálatok	23
6.2.2. Szimulációs eredmények	25
6.3. Szinguláris tesztfeladat	30
6.3.1. Konvergencia vizsgálatok	30
6.3.2. Szimulációs eredmények	32
6.4. Szinguláris tesztfeladat megoldása lokális hálósűrítéssel	35
6.4.1. Konvergencia vizsgálatok	35
6.4.2. Szimulációs eredmények	38
6.5. Anyagi határfelületet tartalmazó feladat	41
6.5.1. Konvergencia vizsgálatok	41
6.5.2. Szimulációs eredmények	44
7. Elért tudományos eredmények	50

1. Bevezetés

A mérnöki gyakorlatban használt végeselemes szoftverek legtöbb esetben a rugalmasságtani feladatokhoz a virtuális munka elvet, mint matematikai modellt alkalmazzák, amellyel megoldják a vonatkozó differenciálegyenletet, illetve egyenletrendszert numerikusan. Ezzel az elvvel első lépésben csak az elmozdulást lehet kiszámítani közvetlenül, további számításokkal lehet bármilyen más változót (erőket és feszültségeket) kinyerni, amely lassítja az eredmény feldolgozását. Továbbá ezek a szoftverek a feladatok megoldása során fellépő szingularitást se tudják megfelelő pontossággal kezelni.

A differenciálegyenlet-rendszerek végeselemes megoldásának a gyorsítására új variációs elvek bevezetését dolgoztuk ki, melyekkel az elmozdulás mellett az axiális erő is kiszámítható a feladat megoldása közben. Ezek az elvek a vegyesmezős variációs elvek, azon belül is két elvet különböztetünk meg. A primál variációs elvet, valamint a duál variációs elvet. Ezen variációs elvek használatával összességében nő a megoldandó egyenletrendszer nagysága, azonban mivel nincs szükség utólagos számolásokra, így a megoldást lehet vele gyorsítani.

A primál variációs elv alapja, hogy a virtuális munka elvhez hasonlóan relaxáljuk az egyensúlyi egyenletet, majd ezután a geometriai egyenletet súlyozzuk egy tesztfüggvénnyel, és ennek a gyenge alakját használjuk fel a modell felépítéséhez. Ezt az elvet használva minden esetben az elmozdulás lesz folytonos, ezáltal pontosabb is. Ezzel szemben a duál variációs elv lényege, hogy a geometriai egyenletet relaxáljuk, majd az egyensúlyi egyenlet tesztfüggvénnyel súlyozott gyenge alakját használjuk. Az erre épülő numerikus modellnél az axiális erő lesz folytonos.

A rugalmasságtani peremértékfeladatok további pontosságának és konvergenciasebességének növelésére bevezetjük a p -verziós közelítést is, azaz az egy elemen belül lévő polinom-approximációk fokszám növelését. Ehhez az úgynevezett integrált Legendre-típusú polinomokat fogjuk használni, amely a későbbi fejezetekben részletesen lesz tárgyalva. A p -verzió egyik könnyen felismerhető tulajdonsága a konvergencia vizsgálatok során látható, ugyanis ez a módszer képes exponenciális jellegű görbéket produkálni, tehát a konvergencia sebességet képes jelentősen növelni. Emellett használjuk még a h -verzió adta elemsűrítést is a pontosság növelése érdekében.

A fent említettekkel összhangban a kutatás célja olyan, vegyesmezős variációs elveken alapuló magasabb rendű végeselemes módszerek kifejlesztése, amelyek képesek nagy pontossággal és magas konvergencia sebességgel megoldani az 1D-s tesztfeladatokat. Ennek keretében egy saját fejlesztésű (*in-house*) végeselemes kód került kidolgozásra a peremértékfeladatok numerikus implementálására.

A dolgozat hét fő fejezetre oszlik. A bevezetés után kerül bemutatásra a peremértékfeladat erős alakú megfogalmazása, majd a 2.1. és 2.2. alfejezetekben a program tesztelésére használt benchmark feladatok bemutatására és analitikus megoldására kerül sor. A 3. fejezetben a virtuális munka elvet mutatom be, ezt követően a (4) fejezetben a vegyesmezős variációs elvek elméleti hátterét bontom ki részletesen. Az 5. fejezetben kifejtem a hp -típusú végeselemes megoldó felépítését, és annak egyéb részleteit. A 6. fejezetben először a programkörnyezetet és a konvergencia vizsgálatához használt hibaszámításokat mutatom be, majd három numerikus példán keresztül tesztelem a végeselemes módszerek teljesítőképességét, azaz kiértékelem a konvergencia vizsgálatokat, emellé pedig minden egyes tesztfeladatra illusztrálom a szimulációs eredményeket is.

Sorrendben a folytonos (sima) tesztfeladattal kezdve, majd a szinguláris feladattal folytatva végül az anyagi határfelületet tartalmazó feladattal zárjuk a numerikus vizsgálatokat. Az elért tudományos eredményeket a 7. fejezetben foglalom össze. A dolgozatot a hivatkozások és az ábrák jegyzéke zárja.

2. A rugalmasságtan 1D-s peremértékfeladata

Ebben a fejezetben bemutatom az 1D-s rugalmasságtani feladat megoldására szolgáló differenciálegyenlet-rendszert és peremfeltételeit, majd ismertetem azon néhány peremértékfeladat analitikus megoldását, melyre a végeselemmóduszereket tesztelni fogom.

Tekintsünk egy lineárisan rugalmas, homogén és izotrop testet, mely a tér $\bar{\Omega} = [0, \ell]$ tartományát foglalja el, ahol $\Omega = (0, \ell)$. Ekkor a lineáris rugalmasságtan 1D-s peremértékfeladatának egyenletrendszerét alkotó egyenleteket fizikai tartalmuk alapján az alábbiak szerint csoportosíthatjuk:

egyensúlyi egyenlet:

$$N' + f = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

anyag egyenlet:

$$N = AE\varepsilon \quad \text{in } \Omega, \quad (2)$$

geometria egyenlet:

$$\varepsilon - u' = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3)$$

ahol $A(x)$ és $E(x)$ rendre a keresztmetszet területét és a rugalmassági moduluszt, mint geometriai- és anyagjellemzőt, míg $f(x)$ a vonal mentén megoszló erőrendszer sűrűségét, $u(x)$, $N(x)$ és $\varepsilon(x)$ pedig az elmozdulásmezőt, az axiális erőt és az alakváltozásmezőt mint ismeretlen változókat jelöli. Itt érdemes kiemelni, hogy a (2) egyenlet kivételével a többi egyenlet differenciálegyenlet.

Mivel az $A(x) > 0$ és $E(x) > 0$ relációk minden esetben fennállnak, továbbá feltételezzük, hogy $AE > 0$ állandó, az alakváltozásmező apró átrendezéssel kifejezhető az axiális erővel, majd ezáltal ki is küszöbölhető, mint közbelső változó, így az alábbi differenciálegyenlet-rendszert kapjuk:

$$N' + f = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (4)$$

$$\frac{N}{AE} - u' = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (5)$$

Ha az utóbbi egyenletből kifejezzük az axiális erőt, majd a kapott összefüggést beírjuk a (4) egyenletbe, akkor az 1D-s lineáris rugalmasságtan elmozdulásmezőre felírt Navier-féle alapegyenletéhez jutunk:

$$AEu'' + f = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (6)$$

A fentiekben részletezett peremértékfeladathoz tartozó peremfeltételek az alábbiak lehetnek:

Dirichlet-típusú peremfeltétel:

$$u(x=0) = \tilde{u}, \quad (7)$$

Neumann-típusú peremfeltétel:

$$u'(\ell) = \frac{\tilde{F}}{A(\ell)E(\ell)}. \quad (8)$$

A (6) differenciálegyenlet általános megoldása az

$$u_{\text{ex}}(x) = u_{\text{h}}(x) + u_{\text{p}}(x) \quad (9)$$

alakban számítható, ahol

$$u_{\text{h}}(x) = c_0 + c_1 x \quad (10)$$

a homogén differenciálegyenlet általános megoldása, míg

$$u_{\text{p}}(x) = -\frac{1}{AE} \int_0^x \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi \quad (11)$$

a partikuláris megoldás.

A fentiekben származtatott (6) differenciálegyenletet – beleértve a (4)–(5) differenciálegyenlet-rendszert is – a (7)–(8) peremfeltételekkel együtt az egydimenziós lineáris rugalmasságtani peremértékfeladat *erős* alakú megfogalmazásának nevezzük [4, 6]. Jelen dolgozatnak nem célja az erős alak közvetlen (*direct*) megoldása. Célunk a (4)–(5) differenciálegyenlet-rendszer gyenge, illetve relaxált alakú megoldásának előállítása.

2.1. A sima és szinguláris tesztfeladat

Tekintsünk egy $\ell = 1$ m hosszúságú, homogén és állandó keresztmetszetű 1D-s testet, melynek a baloldali vége befogott, míg a jobboldala szabad. Ez esetben a peremfeltételek az alábbiak:

$$u(x=0) = \tilde{u} := 0, \quad (12)$$

$$u'(x=\ell) = \frac{N(\ell)}{A(\ell)E(\ell)} = \frac{\tilde{F}}{AE} := 0, \quad (13)$$

ahol $\tilde{F} = 0$ N és $A(\ell)E(\ell) = AE = 1$ N (konstans). A testen az $f(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$ megoszló terhelést működtetjük. Ekkor a (6) differenciálegyenlet partikuláris megoldása (11) alapján a következőképpen számítható:

$$u_{\text{p}}(x) = -\frac{\alpha(\alpha - 1)}{AE} \int_0^x \int_0^\eta \eta^{\alpha-2} d\eta d\xi = -\frac{x^\alpha}{AE}. \quad (14)$$

Az általános megoldás a (9)–(10) összefüggések alapján az

$$u_{\text{ex}}(x) = c_0 + c_1 x + u_{\text{p}}(x) = c_0 + c_1 x - \frac{x^\alpha}{AE} \quad (15)$$

alakban írható fel. A c_0 és c_1 integrációs konstansok a (12)–(13) peremfeltételekből határozhatók meg:

$$u_{\text{ex}}(0) = c_0 := 0, \quad (16)$$

$$u'_{\text{ex}}(1) = c_1 - \alpha := 0 \longrightarrow c_1 = \alpha. \quad (17)$$

Az utóbbiakat visszahelyettesítve a (15) egyenletbe a feladat analitikus megoldása az

$$u_{\text{ex}}(x) = \alpha x - x^\alpha \quad (18)$$

formában írható az axiális elmozdulásra, míg az

$$N_{\text{ex}}(x) = AEu'_{\text{ex}} = AE\alpha(1 - x^{\alpha-1}) = \alpha(1 - x^{\alpha-1}) \quad (19)$$

alakot ölti az axiális erőre [6]. Vegyük észre azt, hogy ha $\alpha < 1$ akkor a feladat *szinguláris* válik, egyébként ha $x \geq 1$, akkor a feladat folytonos (korlátos) lesz [6]. Emellett az $\alpha > 0,5$ relációnak is fenn kell állnia véges alakváltozási energia létezése esetén.

2.2. Anyagi határfelületet tartalmazó tesztfeladat

Ebben az 1D-s tesztfeladatban egy olyan $\ell = \ell_1 + \ell_2$ hosszúságú testet vizsgálunk, melyben az $x = \ell_1$ helyen belső anyagi határfelület helyezkedik el, azaz a test anyaghatárt tartalmaz. Továbbá a két különböző anyag határán általános esetben akár keresztmetszenváltozás is bekövetkezhet. Ebben az esetben a tartományok anyagtulajdonságát és a keresztmetszetek területét rendre az alábbi módon definiáljuk:

$$E(x) = \begin{cases} E_1(x) & \text{in } \Omega_1, \\ E_2(x) & \text{in } \Omega_2, \end{cases} \quad (20)$$

és

$$A(x) = \begin{cases} A_1(x) & \text{in } \Omega_1, \\ A_2(x) & \text{in } \Omega_2, \end{cases} \quad (21)$$

míg a tartományokra vonatkozó differenciálegyenletek – összhangban a (6) egyenlettel – az alábbiak szerint alakulnak változó anyagtulajdonsággal és keresztmetszettel:

$$(A_1 E_1 u'_1)' + f = 0 \text{ in } \Omega_1, \quad (22)$$

$$(A_2 E_2 u'_2)' + f = 0 \text{ in } \Omega_2, \quad (23)$$

ahol $\Omega_1 = (0, \ell_1)$ és $\Omega_2 = (\ell_1, \ell_2)$, valamint

$$u_{\text{ex}}(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{in } \Omega_1, \\ u_2(x) & \text{in } \Omega_2 \end{cases} \quad (24)$$

az analitikus megoldások az elmozdulásokra tartományonként. A testre az $f(x)$ vonal mentén megoszló terhelésen kívül az $\tilde{F}$ axiális erő működik az $x = \ell$ helyen. A testet a baloldali végén megfogjuk, így a peremfeltételeket a következő módon adhatjuk meg:

$$u_{\text{ex}}(x = 0) = u_1(0) = \tilde{u} := 0, \quad (25)$$

$$N_{\text{ex}}(x = \ell) = N_1(\ell) = A(\ell)E(\ell)u'_{\text{ex}}(\ell) = A_2(\ell)E_2(\ell)u'_2(\ell) = \tilde{F}, \quad (26)$$

ahol – (5) alapján –

$$N_{\text{ex}}(x) = \begin{cases} N_1(x) = A_1(x)E_2(x)u'_1(x) & \text{in } \Omega_1, \\ N_2(x) = A_2(x)E_2(x)u'_2(x) & \text{in } \Omega_2, \end{cases} \quad (27)$$

az analitikus megoldások az axiális erőre. Emellé társulnak még az

$$u_1(\ell_1) := u_2(\ell_1) \quad (28)$$

$$N_1(\ell_1) = A_1(\ell_1)E_1(\ell_1)u'_1(\ell_1) := N_2(\ell_1) = A_2(\ell_1)E_2(\ell_1)u'_2(\ell_1) \quad (29)$$

illesztési feltételek az anyaghatáron. A (24) tartományonkénti elmozdulások ismeretében (3) és (5) alapján az alakváltozások, illetve a fajlagos nyúlások axiális irányban az

$$\varepsilon_{\text{ex}}(x) = \begin{cases} \varepsilon_1(x) = u'_1(x) & \text{in } \Omega_1, \\ \varepsilon_2(x) = u'_2(x) & \text{in } \Omega_2, \end{cases} \quad (30)$$

képlet szerint számíthatók, míg az axiális erők az egyes tartományokon az

$$N_{\text{ex}}(x) = \begin{cases} N_1(x) = A_1(x)E_2(x)u'_1(x) & \text{in } \Omega_1, \\ N_2(x) = A_2(x)E_2(x)u'_2(x) & \text{in } \Omega_2, \end{cases} \quad (31)$$

összefüggésekből kaphatók meg.

Tekintsük most a test jobboldali végét szabad peremnek, azaz legyen $\tilde{F} := 0$, és működtessük a testen az $f(x) = \sin(8x)$ megoszló terhelést, továbbá vizsgáljuk a következő tartományfelosztást: $\Omega_1 := (0, 1)$ m és $\Omega_2 := (1, 1,5)$ m, ahol $\ell_1 = 1$ m, míg $\ell_2 = 0,5$ m. Ebben az esetben a peremértékfeladat általános megoldása (10)–(11) alapján az alábbi módon írható fel tartományonként:

$$u_1(x) = a_0 + a_1 x + u_{1p}(x), \quad (32)$$

$$u_2(x) = b_0 + b_1 x + u_{2p}(x), \quad (33)$$

ahol

$$u_{1p}(x) = -\frac{1}{A_1 E_1} \int_0^x \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi = \frac{\sin(8x)}{64} - \frac{x}{8} \quad (34)$$

és

$$u_{2p}(x) = -\frac{1}{A_2 E_2} \int_1^x \int_1^\xi f(\eta) d\eta d\xi = \frac{\sin(8x)}{640} - \frac{\cos 8}{80}x - \frac{\sin 8}{640} + \frac{\cos 8}{80} \quad (35)$$

a vonatkozó partikuláris megoldások szakaszonként homogén anyagtulajdonságú, $E_1 = 1$ Pa és $E_2 = 10$ Pa rugalmassági modulusú, prizmatikus $A = A_1 = A_2 = 1$ m² keresztmetszetű testre.

A (32)–(33) általános megoldásokban megjelenő integrációs konstansok a (25)–(26) peremfeltételekből és a (28)–(29) illesztési feltételekből határozhatók meg, mely lényegében négy egyenletet jelent a négy (a_0 , a_1 , b_0 és b_1) konstansokra nézve. Behelyettesítve a (32) általános megoldást a (34) partikuláris megoldással együtt a (25) elmozdulási peremfeltételbe az a_0 integrációs konstansra zérus adódik. Ezzel már csak három egyenletet – a (26) peremfeltételt kombinálva a (28)–(29) illesztési feltételekkel – kell megoldani a maradék három (a_1 , b_0 és b_1) integrációs konstansra. Elhagyva a részlet-számításokat a szakaszonkénti elmozdulásokra az

$$u_1(x) = -\frac{\sin(8x)}{64} + \frac{\cos 12}{8}x \quad (36)$$

és

$$u_2(x) = -\frac{\sin(8x)}{640} + \frac{\cos 12}{80}x - \frac{9 \sin 8}{640} + \frac{9 \cos 12}{80} \quad (37)$$

elmozdulásfüggvényeket kapjuk [6]. Behelyettesítve az utóbbi két függvény deriváltját a 30–(31) összefüggésekbe az

$$\varepsilon_1(x) = u'_1(x) = -\frac{\cos(8x)}{8} + \frac{\cos 12}{8}, \quad (38)$$

$$\varepsilon_2(x) = u'_2(x) = -\frac{\cos(8x)}{80} + \frac{\cos 12}{80} \quad (39)$$

megoldást kapjuk a tartományonkénti alakváltozásra míg az

$$N_1(x) = A_1 E_1 u'_1(x) = -\frac{\cos(8x)}{8} + \frac{\cos 12}{8}, \quad (40)$$

$$N_2(x) = A_2 E_2 u'_2(x) = -\frac{\cos(8x)}{8} + \frac{\cos 12}{8} \quad (41)$$

megoldáshoz jutunk a szakaszonként axiális erő vonatkozásában.

3. A virtuális munka elv

A következő fejezetben levezetésre fog kerülni a virtuális munka elv, mint elmozdulásmezőre alapváltozóként építő elv, variációs egyenlete, majd ez igazolva is lesz az iránymenti deriváltak által is (azaz feltételezve, hogy létezik potenciál).

A (4)–(5) differenciálegyenlet-rendszer leggyakrabban használt variációs alakja, illetve gyenge alakú megfogalmazása a virtuális munka elv. A virtuális munka elv levezetésének első lépéseként megszorozzuk a (4) egyensúlyi egyenletet egy $v(x)$ teszt-függvénnyel, majd integráljuk a kapott szorzatot a Ω térfogati tartományon:

$$\int_0^\ell (N' + f) v \, dx = 0. \quad (42)$$

Ezt az egyenletet az egyensúlyi egyenlet *gyenge* alakjának nevezzük. Most helyezzük át a differenciáloperátort a $v(x)$ teszt-függvényre a

$$\int_0^\ell N' v \, dx = [N v]_0^\ell - \int_0^\ell N v' \, dx = N(\ell)v(\ell) - N(0)v(0) - \int_0^\ell N v' \, dx \quad (43)$$

parciális integrálás alkalmazásával, majd ezzel egyidejűleg építsük be a (8) Neumann-féle peremfeltételt a (43) egyenletbe feltételezve, hogy az $x = 0$ helyen a $v(x)$ teszt-függvény homogén (elmozdulási) peremfeltételt elégít ki, azaz $v(0) = 0$, így az

$$\tilde{F} v(\ell) - \int_0^\ell N v' \, dx + \int_0^\ell f v \, dx = 0, \quad (44)$$

variációs egyenletethez jutunk, melyet az egyensúlyi egyenlet *relaxált* alakjának nevezünk. Most helyettesítsük be az (5) geometriai egyenlet axiális erőre kifejezett alakját a (44) variációs egyenletbe, ezzel a művelettel a virtuális munka elv nullára rendezett formáját kapjuk:

$$\tilde{F} v(\ell) - AE \int_0^\ell u' v' \, dx + \int_0^\ell f v \, dx = 0. \quad (45)$$

Igazolható, – és a továbbiakban be is fogjuk látni – hogy az utóbbi variációs egyenlet a

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} AE \int_0^\ell (u')^2 \, dx - \int_0^\ell f u \, dx - \tilde{F} u(\ell) \quad (46)$$

potenciális energia funkcionál $u(x)$ helyen vett irány menti deriváltjával egyezik meg. Képezzük most a $\Pi(u)$ funkcionál irány menti deriváltját az $u(x)$ helyen és a $v(x)$ irányba:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_v \Pi &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \Pi(u + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{1}{2} AE \int_0^\ell (u' + \varepsilon v')^2 \, dx - \int_0^\ell f (u + \varepsilon v) \, dx - \tilde{F} (u(\ell) + \varepsilon v(\ell)) \right] \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \left[AE \int_0^\ell (u' + \varepsilon v') v' \, dx - \int_0^\ell f v \, dx - \tilde{F} v(\ell) \right]_{\varepsilon=0} = \\ &= AE \int_0^\ell u' v' \, dx - \int_0^\ell f v \, dx - \tilde{F} v(\ell) := 0. \quad (47) \end{aligned}$$

Vegyük észre azt, hogy a fenti irány menti derivált megegyezik a (45) variációs egyenlet baloldalának ellentettjével. Képezzük most a (46) funkcionál második irány menti deriváltját, azaz az utóbbi egyenlet (első) irány menti deriváltját:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_v^2 \Pi &= \left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \Pi(u + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[AE \int_0^\ell (u' + \varepsilon v') v' dx - \int_0^\ell f v dx - \tilde{F} v(\ell) \right]_{\varepsilon=0} = AE \int_0^\ell (v')^2 dx \geq 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Az utóbbi egyenlet – v' -ben – kvadratikus volta miatt mindig pozitív vagy zérus. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $v = 0$ vagy $v' = 0$, azaz ha merevtestszerű mozgásról van szó. Látható, hogy a folytonosan differenciálható és a (7) Dirichlet peremfeltételt kielégítő $u(x)$ elmozdulásmezőtől függő $\Pi(u)$ potenciális energia funkcionálnak az egyensúlyi egyenletet és a feszültségi peremfeltételt is kielégítő megoldásfüggvénynél minimuma van, hiszen (i) a $\Pi(u)$ funkcionálnak stacionárius helye van ott, ahol (47) fennáll, vagyis az első irány menti derivált zérus. (ii) Mivel a (48) egyenlőtlenség fennáll $\forall u(x)$ -re úgy, hogy $v(x) \neq 0$ és kizárjuk a merevtestszerű mozgást is, a szélsőérték minimum.

A variációs feladat tehát a következő: keressük azt a folytonosan differenciálható és a (7) Dirichlet peremfeltételt kielégítő $u(x)$ próbafüggvényt (triál függvényt), melyre az

$$\tilde{F} v(\ell) - AE \int_0^\ell u' v' dx + \int_0^\ell f v dx = 0 \quad (49)$$

variációs egyenlet fennáll $\forall$ folytonosan differenciálható és homogén elmozdulási peremfeltételt kielégítő $v(x)$ tesztfüggvényre. Az utóbbi megfogalmazás a virtuális munka elv matematikai megfogalmazásával egyenértékű.

4. Vegyesmezős variációs elvek

Ebben a fejezetben először bemutatásra kerül a primál variációs elv matematikai modelljéhez kapcsolódó variációs egyenletek levezetése és azok igazolása az iránymenti deriváltak segítségével is. Ezután bemutatásra kerülnek hasonló módszereket alkalmazva a duál variációs elv matematikai modelljéhez köthető variációs egyenletek is, és annak igazolása szintén az iránymenti deriváltak segítségével is.

4.1. Primál variációs elv

A primál elv variációs egyenleteinek levezetésekor ismét áthelyezzük a differenciáloperátort a v tesztfüggvényre, de nem építjük be a geometriai egyenletet erős formában a formalizmusba. Elsőként tehát megismételjük a 3. fejezet (42)–(44) lépéseit, azaz megszorozzuk az (1) egyensúlyi egyenletet egy $v(x)$ tesztfüggvénnyel, majd integráljuk azt az Ω tartományon, ezt követően parciális integrálással áthelyezzük a differenciáloperátort a v tesztfüggvényre, és beépítjük a (8) Neumann-típusú peremfeltételt, illetve feltételezzük, hogy $v(x)$ homogén (elmozdulási) peremfeltételt elégíti ki az $x = 0$ peremen, ezzel ismét az

$$\tilde{F} v(\ell) - \int_0^\ell N v' dx + \int_0^\ell f v dx = 0 \quad (50)$$

relaxált alakhoz jutunk. Azonban most szorozzuk meg a (3) geometriai egyenletet egy másik $w(x)$ tesztfüggvénnyel, majd a kapott szorzatot integráljuk az Ω tartományon, így a geometriai egyenlet

$$\int_0^\ell \frac{Nw}{AE} dx - \int_0^\ell u' w dx = 0 \quad (51)$$

gyenge alakjához jutunk. Belátható, – és meg is fogjuk tenni ezt – hogy az utóbbi két egyenlet, illetve azok

$$\tilde{F} v(\ell) - \int_0^\ell N v' dx + \int_0^\ell f v dx + \int_0^\ell \frac{Nw}{AE} dx - \int_0^\ell u' w dx = 0 \quad (52)$$

összege a

$$\Pi_P(u, N) = \frac{1}{2AE} \int_0^\ell N^2 dx - \int_0^\ell u' N dx + \tilde{F} u(\ell) + \int_0^\ell f u dx \quad (53)$$

kétváltozós funkcionál első irány menti deriváltjának zérus értékével egyezik meg. Képezzük először a fenti $\Pi_P(u, N)$ funkcionál $u(x)$ irányba vett irány menti deriváltját a $v(x)$ helyen:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_v \Pi_P &= \left. \frac{d}{d\varepsilon_1} \Pi_P(u + \varepsilon_1 v, N) \right|_{\varepsilon_1=0} = \\ &= \frac{d}{d\varepsilon_1} \left[\frac{1}{2AE} \int_0^\ell N^2 dx - \int_0^\ell (u + \varepsilon_1 v)' N dx + \tilde{F} (u(\ell) + \varepsilon_1 v(\ell)) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\ell f (u + \varepsilon_1 v) dx \right]_{\varepsilon_1=0} = - \int_0^\ell N v' dx + \int_0^\ell f v dx + \tilde{F} v(\ell) := 0 \end{aligned} \quad (54)$$

melyet zérussal egyenlővé téve annak stacionaritását feltételezzük. Képezzük most $\Pi_P(u, N)$ $N(x)$ irányba vett irány menti deriváltját a $w(x)$ helyen:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_w \Pi_P &= \left. \frac{d}{d\varepsilon_2} \Pi_P(u, N + \varepsilon_2 w) \right|_{\varepsilon_2=0} = \\ \frac{d}{d\varepsilon_2} \left[\frac{1}{2AE} \int_0^\ell (N + \varepsilon_2 w)^2 dx - \int_0^\ell u' (N + \varepsilon_2 w) dx + \tilde{F} u(\ell) + \int_0^\ell f u dx \right]_{\varepsilon_2=0} &= \\ \left[\frac{1}{AE} \int_0^\ell (N + \varepsilon_2 w) w dx - \int_0^\ell u' w dx \right]_{\varepsilon_2=0} &= \\ \frac{1}{AE} \int_0^\ell N w dx - \int_0^\ell u' w dx &:= 0, \quad (55) \end{aligned}$$

melyet ha zérussal teszünk egyenlővé, a $\Pi_P(u, N)$ funkcionál másik stacionaritási feltételét kapjuk, az utóbbi két stacionaritási feltétel pedig, rendre az (50) és (51) variációs egyenlettel egyezik meg. Ezzel beláttuk, hogy az (50)–(51) variációs egyenletek valóban a $\Pi_P(u, N)$ kétváltozós funkcionál stacionaritási feltételeinek felelnek meg. Vegyük észre azt is, hogy az utóbbi két egyenlet összege éppen az (52) egyenlettel egyezik meg.

Vizsgáljuk meg most a $\Pi_P(u, N)$ kétváltozós funkcionál második iránymenti deriváltját is abból a célból, hogy a stacionaritási pont (hely) típusát kideríthessük! Állítsuk elő az (54)–(55) egyenletek tiszta és vegyes iránymenti deriváltjait, melyek rendre az alábbi módon határozhatók meg:

$$\mathcal{D}_{vv}^2 \Pi_P = \left. \frac{d^2}{d\varepsilon_1^2} \Pi(u + \varepsilon_1 v, N) \right|_{\varepsilon_1=0} = 0, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ww}^2 \Pi_P &= \left. \frac{d^2}{d\varepsilon_2^2} \Pi_P(u, N + \varepsilon_2 w) \right|_{\varepsilon_2=0} = \frac{d}{d\varepsilon_2} \left[\int_0^\ell \frac{(N + \varepsilon_2 w) w}{AE} dx - \int_0^\ell u' w dx \right]_{\varepsilon_2=0} \\ &= \frac{1}{AE} \int_0^\ell w^2 dx \geq 0 \quad (57) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{vw}^2 \Pi_P &= \left. \frac{d(\mathcal{D}_v \Pi_P)}{d\varepsilon_2} \right|_{\varepsilon_2=0} = \\ \frac{d}{d\varepsilon_2} \left[- \int_0^\ell (N + \varepsilon_2 w) v' dx + \int_0^\ell f v dx + \tilde{F} v(\ell) \right]_{\varepsilon_2=0} &= - \int_0^\ell w v' dx, \quad (58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{wv}^2 \Pi_P &= \left. \frac{d(\mathcal{D}_w \Pi_P)}{d\varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1=0} = \\ \frac{d}{d\varepsilon_1} \left[\frac{1}{AE} \int_0^\ell N w dx - \int_0^\ell (u' + \varepsilon_1 v') w dx \right]_{\varepsilon_1=0} &= - \int_0^\ell v' w dx = \mathcal{D}_{vw}^2 \Pi_P. \quad (59) \end{aligned}$$

Természetesen az utóbbi két egyenlet ugyanazt az eredményt szolgáltatja, mivel a vegyes (második) irány menti deriváltaknak meg kell egyezniük. Az utóbbi négy egyenlet közül csak kettő előjelét ismerjük egyértelműen, míg kettő előjele kérdéses, azaz a vegyes (második) iránymenti derivált előjeléről nem tudunk nyilatkozni egyértelműen, az lehet pozitív, negatív és zérus is, azaz lehet a feltételezett stacionaritási hely lehet minimum-, maximum- vagy nyeregpont is.

A primál kétmezős variációs elv tehát a következő: keressük azt az $N(x)$ próbafüggvényt és azt a folytonosan differenciálható és a (7) Dirichlet peremfeltételt kielégítő $u(x)$ próbafüggvényt, melyre az

$$\tilde{F} v(\ell) - \int_0^\ell N v' dx + \int_0^\ell f v dx = 0, \quad (60)$$

$$\int_0^\ell \frac{Nw}{AE} dx - \int_0^\ell u' w dx = 0 \quad (61)$$

variációs egyenletek fennállnak $\forall w(x)$ tesztfüggvényre, valamint $\forall$ folytonosan differenciálható és homogén elmozdulási peremfeltételt kielégítő $v(x)$ tesztfüggvényre. Továbbá igazoltuk, hogy a $\Pi_P(u, N)$ kétváltozós funkcionál stacionaritási feltételei megegyeznek a fenti két variációs egyenlettel.

4.2. Duál variációs elv

A duál elv variációs egyenleteinek származtatásakor – ellentétben a primál elvvel – a (3) geometriai egyenletet relaxáljuk, míg az egyensúlyi egyenletnek a $v(x)$ tesztfüggvénnyel súlyozott (42) gyenge alakját használjuk fel később a numerikus modell felépítéséhez. Tehát ennek a folyamatnak az első lépéseként most a (3) geometriai egyenletet szorozzuk be egy $w(x)$ tesztfüggvénnyel, majd a kapott szorzatot integráljuk az Ω tartományon, ennek eredményeként épp az (51) gyenge alakot kapjuk:

$$\int_0^\ell \frac{Nw}{AE} dx - \int_0^\ell u' w dx = 0. \quad (62)$$

Azonban itt még nem állunk meg, hanem parciális integrálással folytatjuk áthelyezve ezáltal a differenciáloperátort a $w(x)$ tesztfüggvényre, majd beépítve a (7) Dirichlet-típusú peremfeltételt az elmozdulásra és feltételezve, hogy w az $x = \ell$ helyen homogén (Neumann) peremfeltételnek tesz eleget, azaz $w(\ell) = 0$, így az

$$\int_0^\ell u' w dx = [u v]_0^\ell - \int_0^\ell u w' dx = -\tilde{u} w(0) - \int_0^\ell u w' dx \quad (63)$$

egyenlethez jutunk, melyet behelyettesítve a (62) variációs egyenletbe, a geometriai egyenlet

$$\int_0^\ell \frac{Nw}{AE} dx + \tilde{u} w(0) + \int_0^\ell u w' dx = 0 \quad (64)$$

relaxált alakját kapjuk. Emellé az egyensúlyi egyenlet $v(x)$ tesztfüggvénnyel súlyozott (42) gyenge alakját fogjuk használni, mellyel előálltak a duál elv variációs egyenletei,

illetve előállt a duál variációs elv integrálegyenlet-rendszere. Igazolható, hogy a (62) és a (64) variációs egyenlet, illetve azok

$$\int_0^\ell \frac{Nw}{AE} dx + \tilde{u} w(0) + \int_0^\ell u w' dx + \int_0^\ell N' v dx + \int_0^\ell f v dx = 0 \quad (65)$$

összege a

$$\Pi_D(u, N) = \frac{1}{2AE} \int_0^\ell N^2 dx + \int_0^\ell u N' dx + \tilde{u} N(0) + \int_0^\ell f u dx \quad (66)$$

kétváltozós funkcionál irány menti deriváltjainak zérus értékével egyenértékű. Ennek igazolásához képezzük a $\Pi_D(u, N)$ funkcionál első irány menti deriváltjait:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_v \Pi_D &= \left. \frac{d}{d\varepsilon_1} \Pi_D(u + \varepsilon_1 v, N) \right|_{\varepsilon_1=0} = \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon_1} \left[\frac{1}{2AE} \int_0^\ell N^2 dx + \int_0^\ell (u + \varepsilon_1 v) N' dx + \tilde{u} N(0) + \int_0^\ell f (u + \varepsilon_1 v) dx \right] \right|_{\varepsilon_1=0} \\ &= \int_0^\ell N' v dx + \int_0^\ell f v dx := 0 \quad (67) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_w \Pi_D &= \left. \frac{d}{d\varepsilon_2} \Pi_D(u, N + \varepsilon_2 w) \right|_{\varepsilon_2=0} = \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon_2} \left[\frac{1}{2AE} \int_0^\ell (N + \varepsilon_2 w)^2 dx + \int_0^\ell u (N + \varepsilon_2 w)' dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{u} (N(0) + \varepsilon_2 w(0)) + \int_0^\ell f u dx \right] \right|_{\varepsilon_2=0} = \\ &= \left. \left[\frac{1}{AE} \int_0^\ell (N + \varepsilon_2 w) w dx + \int_0^\ell u w' dx + \tilde{u} w(0) \right] \right|_{\varepsilon_2=0} = \\ &= \frac{1}{AE} \int_0^\ell N w dx + \int_0^\ell u w' dx + \tilde{u} w(0) := 0. \quad (68) \end{aligned}$$

A $\Pi_D(u, N)$ kétváltozós funkcionál stacionárius, ha a fenti két irány menti derivált zérus, ezek a $\Pi_D(u, N)$ funkcionál stacionaritási feltételei. Látható, hogy az utóbbi két egyenlet, megegyezik a (62) és a (64) variációs egyenlettel. Vizsgáljuk meg most azt, hogy a stacionaritási feltételeket kielégítő megoldásnál milyen típusú a szélsőérték hely. Ehhez állítsuk elő a $\Pi_D(u, N)$ funkcionál tiszta és vegyes második irány menti deriváltjait rendre az alábbiak szerint:

$$\mathcal{D}_{vv}^2 \Pi_D = \left. \frac{d^2}{d\varepsilon_1^2} \Pi_D(u + \varepsilon_1 v, N) \right|_{\varepsilon_1=0} = 0, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ww}^2 \Pi_D &= \left. \frac{d^2}{d\varepsilon_2^2} \Pi_D(u, N + \varepsilon_2 w) \right|_{\varepsilon_2=0} = \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon_2} \left[\int_0^\ell \frac{(N + \varepsilon_2 w) w}{AE} dx + \int_0^\ell u w' dx + \tilde{u} w(0) \right] \right|_{\varepsilon_2=0} = \frac{1}{AE} \int_0^\ell w^2 dx \geq 0 \quad (70) \end{aligned}$$

és

$$\mathcal{D}_{vw}^2 \Pi_D = \left. \frac{d(\mathcal{D}_v \Pi_D)}{d\varepsilon_2} \right|_{\varepsilon_2=0} = \frac{d}{d\varepsilon_2} \left[\int_0^\ell (N + \varepsilon_2 w)' v \, dx + \int_0^\ell f v \, dx \right]_{\varepsilon_2=0} = \int_0^\ell w' v \, dx, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{wv}^2 \Pi_D &= \left. \frac{d(\mathcal{D}_w \Pi_D)}{d\varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon_1} \left[\frac{1}{AE} \int_0^\ell N w \, dx + \int_0^\ell (u + \varepsilon_1 v) w' \, dx + \tilde{u} w(0) \right]_{\varepsilon_1=0} \\ &= \int_0^\ell v w' \, dx = \mathcal{D}_{vw}^2 \Pi_D. \end{aligned} \quad (72)$$

A (69)–(70) tiszta második irány menti deriváltak előjele könnyen eldönthető, míg a (71)–(72) vegyes második irány menti deriváltak – melyek megegyeznek – előjelei nem határozhatók meg egyértelműen. Ennek következtében a stacionaritási hely (pont) típusa nem dönthető el egyértelműen, ez lehet minimum-, maximum vagy nyeregpon

A duál kétmezős variációs elv tehát a következő: keressük azt az $u(x)$ próbafüggvényt és azt a folytonosan differenciálható és a (8) Neumann peremfeltételt kielégítő $N(x)$ próbafüggvényt, melyre a

$$\int_0^\ell N' v \, dx + \int_0^\ell f v \, dx = 0, \quad (73)$$

$$\frac{1}{AE} \int_0^\ell N w \, dx + \int_0^\ell u w' \, dx + \tilde{u} w(0) = 0 \quad (74)$$

variációs egyenletek fennállnak $\forall v(x)$ tesztfüggvényre, valamint $\forall$ folytonosan differenciálható és homogén Neumann peremfeltételt kielégítő $w(x)$ tesztfüggvényre. Továbbá igazoltuk azt is, hogy a $\Pi_D(u, N)$ kétváltozós funkcionál stacionaritási feltételei megegyeznek a fenti két variációs egyenlettel.

5. *hp*-verziós végelelemmódszerek

Ebben a fejezetben elsőként a virtuális munka elvre, azaz az elmozdulásmezőre, mint alapváltozóra épülő *hp*-verziós végelelemmódszert, majd a kétmeős primál- és duál variációs elvekre épülő *hp*-verziós végelelemmódszert fogjuk bemutatni. Az itt bemutatásra kerülő numerikus módszerek a 3. és a 4. fejezetekben levezetett elméleti modellekre, mint matematikai modellekre alapoznak.

5.1. Geometriai leképezés és *h*-verziós sűrítés

A *hp*-verziós végelelemmódszerek levezetéséhez elsőként az Ω számítási tartomány felosztására van szükségünk. Tekintsük tehát az ℓ hosszúságú Ω fizikai tartomány végelelemes diszkretizációját, osszuk fel azt n darab ugyanolyan hosszúságú fizikai elemre (egyenközű felosztás). Ezzel előáll az Ω fizikai tartomány végelelemes hálójá, mely a következőképpen definiálható:

$$\Omega_h : x_1 = 0 < \dots < x_e < x_{e+1} < \dots < x_{n+1} = \ell, \quad (e = 1, \dots, n). \quad (75)$$

Ezután minden egyes fizikai elemet, így például az e -edik

$$\Omega_{\text{fiz}}^e := \{x \mid x_e < x < x_{e+1}\} \quad (76)$$

fizikai elemet is az

$$\Omega_{\text{mes}} := \{\xi \mid -1 < \xi < 1\} \quad (77)$$

mester elemre képezzük le, – abból a célból, hogy a később sorra kerülő numerikus integrálásokat az Ω_{mes} mester elemen végezhessük el – alkalmazva az

$$x^e := N_1(\xi)x_e + N_2(\xi)x_{e+1} \quad (78)$$

lineáris leképező függvényt, ahol x_e és x_{e+1} az e -edik fizikai elem csomópontjainak x koordinátáit jelöli, míg

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \text{és} \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (79)$$

a külső alakfüggvényeket definiálja, lásd a részletekért a [1, 5] könyveket. Természetesen az Ω számítási tartomány Ω_h végelelemes hálójának minden fizikai elemére fennáll, hogy $\Omega_{\text{fiz}}^e \subset \Omega_h$. Az e -dik Ω_{fiz}^e fizikai elem méretét, illetve hosszát annak csomóponti koordinátáival adhatjuk meg:

$$\ell^e := x_{e+1} - x_e, \quad (80)$$

mely egyenközű felosztás esetén állandó.

A variációs egyenletekben megjelenő integrálok Ω_{mes} mester elemen történő elemenkénti elvégzéséhez szükségünk lesz az e -edik dx^e ívelem és a $d\xi$ ívelem között fennálló kapcsolatra, transzformációra, mely lényegében a (78) leképező függvény

$$dx^e = \frac{dx^e}{d\xi} d\xi = J^e d\xi = \frac{\ell^e}{2} d\xi \quad (81)$$

teljes differenciálja, ahol

$$J^e = \frac{\ell^e}{2} \quad (82)$$

a transzformáció Jacobi-féle determinánsa, együtthatója az e -edik elemen. Emellett szükségünk lesz az x térkoordináta és az Ω_{mes} mester elemen bevezetett ξ koordináta szerinti deriválások közötti kapcsolatra, mely – kihasználva a (81) összefüggést – az alábbiak szerint alakul természetesen mind az elmozdulás mind az axiális erő deriváltjaira nézve is:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{du^e[\xi(x)]}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{\ell^e} \frac{du^e(\xi)}{d\xi} \quad (83)$$

és

$$N'(x) = \frac{dN}{dx} = \frac{dN^e[\xi(x)]}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{\ell^e} \frac{dN^e(\xi)}{d\xi}. \quad (84)$$

5.2. p -típusú approximáció

Második lépésként definiáljunk az Ω_{mes} mester elemen belül egy p -típusú hierarchikus approximációs polinomot, melyet a továbbiakban a következőképpen jelölünk: $\mathcal{S}^p(\Omega_{\text{mes}})$, ahol p az alkalmazott polinom fokszámára utal. Vezessük be most az N_i ($i = 1, 2, \dots, p+1$) jelölést az $\mathcal{S}^p(\Omega_{\text{mes}})$ polinomot alkotó alakfüggvényekre. Az $\mathcal{S}^1(\Omega_{\text{mes}})$ polinom esetén, azaz a legalacsonyabb fokszámú approximáció esetén, vagyis ha $p = 1$, csak a (79) külső alakfüggvényeket érdemes megtartani, azonban az $\mathcal{S}^p(\Omega_{\text{mes}})$ esetén, azaz ha $p \geq 2$, további magasabb fokszámú úgynevezett belső alakfüggvényeket kell bevezetnünk, melyeket az angol szakirodalomban „bubble modes” néven illetnek. Ezeket a belső alakfüggvényeket a következőképpen definiáljuk:

$$N_i(\xi) = \frac{L_{i-1}(\xi) - L_{i-3}(\xi)}{2(2i-3)}, \quad (85)$$

melyek lényegében az úgynevezett integrált Legendre-típusú polinomok, ahol $L_i(\xi)$ az Legendre-polinomokat jelöli ($i = 3, 4, \dots, p+1$) [2, 3, 5].

Ezeknek az N_i alakfüggvényeknek a további előnyös tulajdonságai vannak [2, 3, 5]:

- (i) ez a függvényrendszer ortogonális a $\xi \in [-1, 1]$ intervallumon ($i \geq 3$), illetve
- (ii) az $\mathcal{S}^{p-1}(\Omega_{\text{mes}})$ alakfüggvényei az $\mathcal{S}^p(\Omega_{\text{mes}})$ alakfüggvényeinek egy részhalmazát képezik, tehát az $\mathcal{S}^p(\Omega_{\text{mes}})$ polinom elemei hierarchikusak, azaz rekurziós formulával előállíthatók, valamint
- (iii) ezek a belső alakfüggvények eltűnnek az Ω_{mes} mester elem végpontjaiban, azaz $N_i(-1) = N_i(1) = 0$, ha $i \geq 3$.

Ezeket a jellegzetes tulajdonságokat fogjuk kihasználni az elemek összerakási, illesztési folyamata során.

A továbbiakban a virtuális munka elv (49) variációs egyenletét, valamint a kétmezős primál elv (60)–(61) variációs egyenleteit és a duál elv (73)–(74) variációs egyenleteit fogjuk diszkretizálni. Az utóbb említett variációs egyenletekben megjelenő változókat,

azaz az $u(x)$ és $N(x)$ próbafüggvényt, mint triál függvényt, valamint a $v(x)$ és $w(x)$ súlyfüggvényt, mint tesztfüggvényt a következő módon közelítjük az e -edik elemen:

$$u^e(\xi) = \sum_{i=1}^{p_u+1} q_i^e N_i(\xi), \quad N^e(\xi) = \sum_{i=1}^{p_N+1} s_i^e N_i(\xi), \quad (86)$$

$$v^e(\xi) = \sum_{i=1}^{p_v+1} v_i^e N_i(\xi), \quad w^e(\xi) = \sum_{i=1}^{p_w+1} w_i^e N_i(\xi), \quad (87)$$

ahol q_i^e , s_i^e és v_i^e , w_i^e ismeretlen együtthatók. Azért, hogy mátrixos alakban fel tudjuk írni a variációs egyenleteket a Voigt-féle mátrixalgebrai jelölést fogjuk használni. Írjuk át most az utóbbi approximációkat az

$$u^e = \mathcal{L}^T \mathbf{q}^e, \quad s^e = \mathcal{N}^T \mathbf{s}^e \quad \text{és} \quad v^e = \mathcal{L}^T \mathbf{v}^e, \quad w^e = \mathcal{N}^T \mathbf{w}^e \quad (88)$$

mátrixos formára, ahol

$$(\mathbf{q}^e)^T = [q_1 \quad \dots \quad q_{p_u+1}] \in \mathbb{R}^{(p_u+1) \times 1}, \quad (\mathbf{s}^e)^T = [s_1 \quad \dots \quad s_{p_N+1}] \in \mathbb{R}^{(p_N+1) \times 1}$$

és

$$(\mathbf{v}^e)^T = [v_1 \quad \dots \quad v_{p_v+1}] \in \mathbb{R}^{(p_v+1) \times 1}, \quad (\mathbf{w}^e)^T = [w_1 \quad \dots \quad w_{p_w+1}] \in \mathbb{R}^{(p_w+1) \times 1}$$

az e -dik elem triál- és tesztfüggvényeinek ismeretlen együtthatóit tartalmazza, valamint

$$\mathcal{L}^T = [N_1 \quad \dots \quad N_{p_u+1}], \quad \mathcal{N}^T = [N_1 \quad \dots \quad N_{p_N+1}]$$

az approximációs mátrixok, melyek az $\mathcal{S}^{p_u+1}(\Omega_{\text{mes}})$ és $\mathcal{S}^{p_N+1}(\Omega_{\text{mes}})$ polinomok bázis-függvényeit tartalmazzák.

5.3. Virtuális munka elvre épülő végeselemméthód

Ebben az alfejezetben a virtuális munka elv egymezős (49) variációs egyenletét fogjuk felírni diszkretizált formában. Behelyettesítve az első és a harmadik mátrixos alakot a (88) közelítésekből a (49) gyenge alakba és tekintettel a (81)–(83) transzformációs összefüggésekre a

$$\sum_{e=1}^n \left[(\mathbf{v}^e)^T (-\mathcal{K}^e \mathbf{q}^e + \mathbf{f}^e) \right] = 0 \quad (89)$$

lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk, melyben

$$\mathcal{K}^e = \frac{A^e E^e}{2 \ell^e} \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}' \mathcal{L}'^T d\xi \in \mathbb{R}^{(p_u+1) \times (p_u+1)} \quad (90)$$

és

$$\mathbf{f}^e = \frac{\ell^e}{2} \int_{-1}^{+1} \mathcal{L} f(\xi) d\xi \in \mathbb{R}^{(p_v+1) \times 1} \quad (91)$$

az e -edik elem merevségi mátrixa és terhelési vektora (oszlopmátrixa), utóbbi Neumann peremfeltétel esetén például a jobboldali peremen, vagyis az n -edik elemen az

$$\mathbf{f}^n = \tilde{F} \mathcal{L}(+1) + \frac{\ell^e}{2} \int_{-1}^{+1} \mathcal{L} f(\xi) d\xi \in \mathbb{R}^{(p_v+1) \times 1} \quad (92)$$

alakot ölti. Biztosítva az elemhatáron az u próbafüggvény és v tesztfüggvény folytonosságát, az illesztést követően a

$$\mathcal{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (93)$$

lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk, ahol $\mathbf{f}$ a globális terhelési vektor, míg $\mathcal{K}$ a globális pozitív definit merevségi mátrix. A fenti egyenletrendszer megoldása után az axiális elmozdulás közelítésére kapunk közvetlenül eredményeket. Az alakváltozást és az axiális erőt csak ezek után a „postprocessing” részben tudjuk kiszámítani elemenként az alábbi módon:

$$\varepsilon^e = \frac{2}{\ell^e} \mathcal{L}'^T \mathbf{q}^e \quad \text{és} \quad N^e = \frac{2A^e E^e}{\ell^e} \mathcal{L}'^T \mathbf{q}^e. \quad (94)$$

Kihasználva ismét a (81)–(83) összefüggéseket és behelyettesítve a megfelelő (88) közelítéseket a 46 potenciális energia funkcionálba annak diszkretizált alakja az illesztések után a

$$\Pi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathcal{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad (95)$$

formában írható, mely $\mathbf{q}$ ismeretében, illetve annak visszahelyettesítésével könnyedén számítható.

5.4. Primál elvre épülő kétmezős végelelemmódszer

Ebben az alfejezetben a primál variációs elv kétmezős (60)–(61) variációs egyenleteit fogjuk felírni diszkretizált alakban. Ebből a célból behelyettesítve a (88) közelítéseket a (60)–(61) gyenge alakba és tekintettel ismét a (81)–(83) transzformációs összefüggésekre is a

$$\sum_{e=1}^n \left[(\mathbf{v}^e)^T (-\mathcal{Q}^e \mathbf{s}^e + \mathbf{f}^e) \right] = 0, \quad (96)$$

$$\sum_{e=1}^n \left[(\mathbf{w}^e)^T \left(\mathcal{H}^e \mathbf{s}^e - (\mathcal{Q}^e)^T \mathbf{q}^e \right) \right] = 0 \quad (97)$$

lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk, melyben

$$\mathcal{H}^e = \frac{\ell^e}{2 A^e E^e} \int_{-1}^{+1} \mathcal{N} \mathcal{N}^T d\xi \in \mathbb{R}^{(p_w+1) \times (p_s+1)}, \quad (98)$$

$$\mathcal{Q}^e = \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}' \mathcal{N}^T d\xi \in \mathbb{R}^{(p_v+1) \times (p_s+1)} \quad (99)$$

és

$$\mathbf{f}^e = \frac{\ell^e}{2} \int_{-1}^{+1} \mathcal{L} f(\xi) d\xi \in \mathbb{R}^{(p_v+1) \times 1} \quad (100)$$

az e -edik elem hajlékonysági mátrixa, kapcsoló mátrixa és terhelési vektora (oszlop-mátrixa), utóbbi Neumann peremfeltétel esetén a jobboldali peremen, vagyis az n -edik elemén az

$$\mathbf{f}^n = \tilde{F}\mathcal{L}(+1) + \frac{\ell^e}{2} \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}f(\xi) d\xi \in \mathbb{R}^{(p_v+1) \times 1} \quad (101)$$

formában írható. Ismét biztosítva az elemhatáron az u próbafüggvény és v tesztfüggvény folytonosságát, az illesztést követően a

$$-\mathcal{Q}\mathbf{s} + \mathbf{f} = 0, \quad (102)$$

$$\mathcal{H}\mathbf{s} - \mathcal{Q}^T \mathbf{q} = 0 \quad (103)$$

indefinit lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk, ahol $\mathbf{f}$ ismét a globális terhelési vektort, míg $\mathcal{H}$ a globális hajlékonysági mátrixot és $\mathcal{Q}$ a globális kapcsoló matrixot jelöli. A fenti egyenletrendszert megoldhatjuk direktben is (közvetlenül), de az ún. Schur „complement” technikával is. Eszerint az utóbbi egyenletből kifejezzük az $\mathbf{s}$ vektort a következőképpen:

$$\mathbf{s} = \mathcal{H}^{-1} \mathcal{Q}^T \mathbf{q}. \quad (104)$$

Ezt követően a kapott szorzatot behelyettesítjük a felette lévőbe, ezzel visszavezetjük az indefinit lineáris algebrai egyenletrendszert a $\mathbf{q}$ vektor megoldására az alábbi módon:

$$\mathcal{Q}\mathcal{H}^{-1} \mathcal{Q}^T \mathbf{q} = \hat{\mathcal{K}} \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (105)$$

ahol a

$$\hat{\mathcal{K}} = \mathcal{Q}\mathcal{H}^{-1} \mathcal{Q}^T \quad (106)$$

együttható mátrix a rendszer redukált merevségi mátrixa. Ennek előállításához azonban $\mathcal{H}$ invertálására van szükség, azaz $\mathcal{H}$ invertálható kell, hogy legyen.

A fenti egyenletrendszer megoldása után mind az axiális elmozdulás mind az axiális erő közelítésére egyidejűleg (közvetlenül) kapunk eredményeket, így nincs szükség az axiális erő utólagos kiszámítására, viszont az egyenletrendszer numerikus megoldása számításigényesebb feladat, mint a virtuális munka elv alkalmazása esetén.

Kihasználva ismét a (81)–(83) összefüggéseket és behelyettesítve a (88) közelítéseket a primál kétmezős elv (53) funkcionáljába annak diszkretizált alakja az illesztések után a

$$\Pi_P(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathcal{H} \mathbf{s} - \mathbf{q}^T \mathcal{Q} \mathbf{s} + \mathbf{q}^t \mathbf{f} \quad (107)$$

formában írható, ami $\mathbf{q}$ és $\mathbf{s}$ ismeretében, illetve annak visszahelyettesítésével könnyedén kiszámítható.

5.5. Duál elvre épülő kétmezős végelelemmódszer

Ebben az alfejezetben a duál variációs elv kétmezős (73)–(74) variációs egyenleteit fogjuk felírni diszkretizált alakban. Ebből a célból behelyettesítve a (88) közelítéseket a (73)–(74) gyenge alakba és megint szem előtt tartva a (81)–(83) transzformációs

összefüggéseket is a

$$\sum_{e=1}^n \left[(\mathbf{v}^e)^T \left(\tilde{\mathcal{Q}}^e \mathbf{s}^e + \mathbf{f}^e \right) \right] = 0, \quad (108)$$

$$\sum_{e=1}^n \left[(\mathbf{w}^e)^T \left(\mathcal{H}^e \mathbf{s}^e + (\mathcal{Q}^e)^T \mathbf{q}^e + \mathbf{g}^e \right) \right] = 0 \quad (109)$$

lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk, melyben

$$\mathcal{H}^e = \frac{\ell^e}{2 A^e E^e} \int_{-1}^{+1} \mathcal{N} \mathcal{N}^T d\xi \in \mathbb{R}^{(p_w+1) \times (p_s+1)}, \quad (110)$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}^e = \int_{-1}^{+1} \mathcal{L} \mathcal{N}^T d\xi \in \mathbb{R}^{(p_v+1) \times (p_s+1)} \quad (111)$$

és

$$\mathbf{f}^e = \frac{\ell^e}{2} \int_{-1}^{+1} \mathcal{L} f(\xi) d\xi \in \mathbb{R}^{(p_v+1) \times 1} \quad (112)$$

az e -edik elem hajlékonysági mátrixa, kapcsoló mátrixa és terhelési vektora (oszlop-mátrixa). Most a Dirichlet-típusú elmozdulási peremfeltétel van beépítve példaként az $x = 0$ helyen, azaz az első elemen, az ezzel kapcsolatos tag az alábbi módon alakul:

$$\mathbf{g}^e = \mathbf{g}^1 = \tilde{u} \mathcal{N}(-1). \quad (113)$$

Viszont duál variációs elv esetén az elemhatárokon az N próbafüggvény és w tesztfüggvény folytonosságát kell biztosítani, az illesztést követően a

$$\tilde{\mathcal{Q}} \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{f}} = 0, \quad (114)$$

$$\tilde{\mathcal{H}} \mathbf{s} - \tilde{\mathcal{Q}}^T \mathbf{q} + \mathbf{g} = 0 \quad (115)$$

indefinit lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk, ahol $\mathbf{f}$ megint a globális terhelési vektort, míg $\mathbf{g}$ a kinematikai terhelés globális vektorát, $\mathcal{H}$ a globális hajlékonysági mátrixot és $\mathcal{Q}$ a globális kapcsoló matrixot jelöli. A fenti egyenletrendszert megoldhatjuk ismét direktben (közvetlenül), de az ún. Schur „complement” technikával is. Eszerint kifejezve az $\mathbf{s}$ vektort az utóbbi egyenlethez az

$$\mathbf{s} = \tilde{\mathcal{H}}^{-1} \tilde{\mathcal{Q}}^T \mathbf{q} \quad (116)$$

összefüggést kapjuk, majd ezt beírva a felette lévőbe, ismét visszavezetjük az indefinit lineáris algebrai egyenletrendszert a $\mathbf{q}$ vektor megoldására az alábbi módon:

$$\tilde{\mathcal{Q}} \tilde{\mathcal{H}}^{-1} \tilde{\mathcal{Q}}^T \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathcal{K}} \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (117)$$

ahol a

$$\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{Q}} \tilde{\mathcal{H}}^{-1} \tilde{\mathcal{Q}}^T \quad (118)$$

együttható mátrix a rendszer redukált merevségi mátrixa. Ennek előállításához azonban a $\tilde{\mathcal{H}}$ globális hajlékonysági mátrix invertálására van szükség, azaz $\tilde{\mathcal{H}}$ invertálható kell, hogy legyen.

A fenti egyenletrendszer megoldása után mind az axiális elmozdulás mind az axiális erő közelítésére egyidejűleg (közvetlenül) kapunk eredményeket, így nincs szükség az axiális erő utólagos kiszámítására, viszont az egyenletrendszer numerikus megoldása számítási szempontból költségigényesebb feladat, mint a virtuális munka elv alkalmazása esetén.

Kihasználva ismét a (81)–(83) összefüggéseket és behelyettesítve a (88) közelítéseket a duál kétmezős elv (66) funkcionáljába annak diszkretizált alakja az illesztések után a

$$\Pi_D(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \tilde{\mathcal{H}} \mathbf{s} + \mathbf{q}^T \mathcal{Q} \mathbf{s} + \mathbf{q}^t \mathbf{f} + \mathbf{s}^t \mathbf{g} \quad (119)$$

formában írható, ami $\mathbf{q}$ és $\mathbf{s}$ ismeretében, illetve annak visszahelyettesítésével könnyedén kiszámítható.

6. Numerikus példák

Ebben a fejezetben a kifejlesztett végeselemes megoldó programot fogjuk tesztelni arra a három tesztfeladatra, melyek a korábbi fejezetekben már bemutatásra kerültek. Továbbá bemutatásra kerül a kiválasztott programozási környezet is. A virtuális munka elvre, a primál- és a duál kétmezős variációs elvre épülő hp -verziós végeselem módszer polinom approximációs tereit az 1. táblázat tartalmazza, illetve foglalja össze, ahol p az aktuális polinom-approximáció maximális polinom fokszámát jelenti.

Variációs elv \ Fokszám	p_u, p_v	p_s, p_w
Virtuális munka elv	p	p
Primál kétmezős elv	$p + 1$	p
Duál kétmezős elv	p	$p + 1$

1. táblázat. Alkalmazott approximációs terek.

A relatív hibákat az

$$e_E = \sqrt{\frac{|\Pi^{\text{FE}} - \Pi^{\text{ex}}|}{|\Pi^{\text{ex}}|}}, \quad e_E = \sqrt{\frac{|\Pi_P^{\text{FE}} - \Pi_P^{\text{ex}}|}{|\Pi_P^{\text{ex}}|}} \quad \text{és} \quad e_E = \sqrt{\frac{|\Pi_D^{\text{FE}} - \Pi_D^{\text{ex}}|}{|\Pi_D^{\text{ex}}|}} \quad (120)$$

energianormában és az egyes változók, azaz az elmozdulás és az axiális erő

$$e_u = \frac{\max |u_{\text{FE}} - u_{\text{ex}}|}{\max |u_{\text{ex}}|} \quad \text{és} \quad e_N = \frac{\max |N_{\text{FE}} - N_{\text{ex}}|}{\max |N_{\text{ex}}|} \quad (121)$$

maximális normájában fogjuk mérni.

6.1. Programkörnyezet

A feladat megoldásához a MATLAB programot használtuk, mely a korábbi tanulmányok során elsajátított tudás miatt került kiválasztásra.

A MATLAB mint programkörnyezet jelentősen egyszerűbb és gyorsabb felhasználást tesz lehetővé mint a C programozási nyelv, amellyel csökkenthető a program megírására fordított idő. Tovább könnyíti a helyzetet a programba beépített matematikai függvények, mint például numerikusan integráló algoritmusok, melyeket mi is használunk a feladatok megoldásához. A MATLAB hátránya a C-vel szemben az, hogy nem tud megfelelően memóriát kezelni, valamint a többmagos futtatás is korlátozottan érhető el benne, így lassabb.

Azonban a mi esetünkben nem igényel nagy futási időt a feladat, és sokkal több nyerhető a beépített algoritmusok használatával, így a MATLAB-ra esik a választás.

6.2. A sima tesztfeladat

Első körben a sima benchmarkfeladatra fogjuk tesztelni a végeselem módszereket, ahol a peremfeltételek a már korábban ismertetett (12)–(13) egyenletekből kaphatóak meg.

Az adatok felvétele a 2.1. fejezetben meghatározottak alapján történt, eszerint *Dirichlet-típusú peremfeltétel* lett előírva az $x = 0$ helyen, míg *Neumann-típusú peremfeltétel* az $x = \ell$ helyen. Számszerűsítve $\tilde{u} = 0$, $\tilde{F} = 0$ N és $A(\ell)E(\ell) = AE = 1$ N (konstans). Továbbá a (19) egyenlethől meghatározott észrevétel alapján a testen lévő $f(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$ megoszló terhelésben szereplő α értéktől függ a megoldás folytonossága és ezáltal maga a feladat is. Esetünkben $\alpha = 20$ értéket választunk, mellyel folytonos lesz a feladat megoldása.

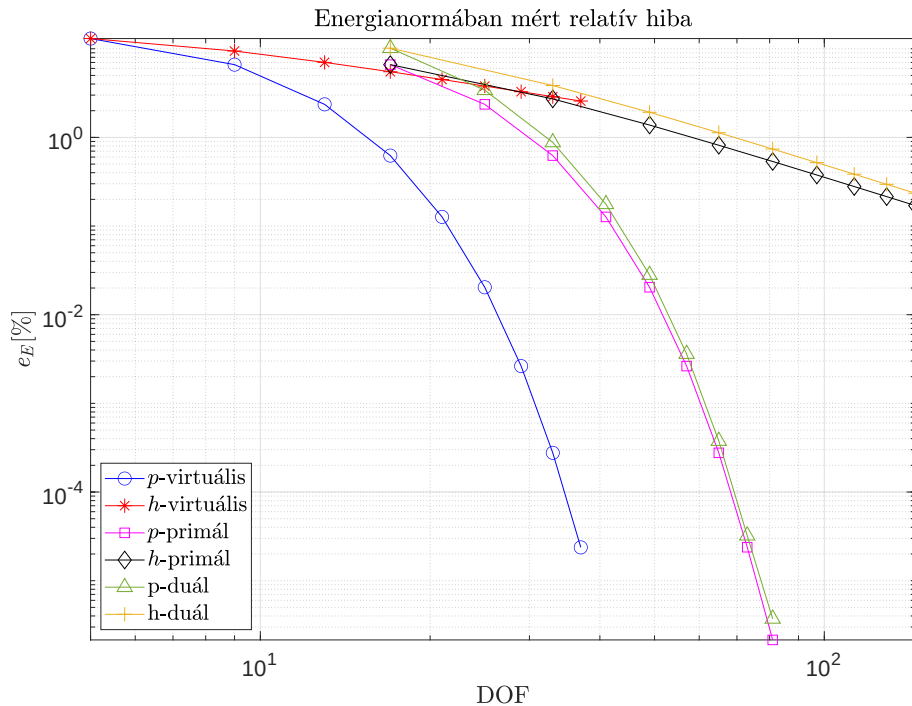
6.2.1. Konvergencia vizsgálatok

A konvergencia vizsgálatok során megvizsgáljuk az előzőekben tárgyalt tesztfeladatot a kifejlesztett programmal.

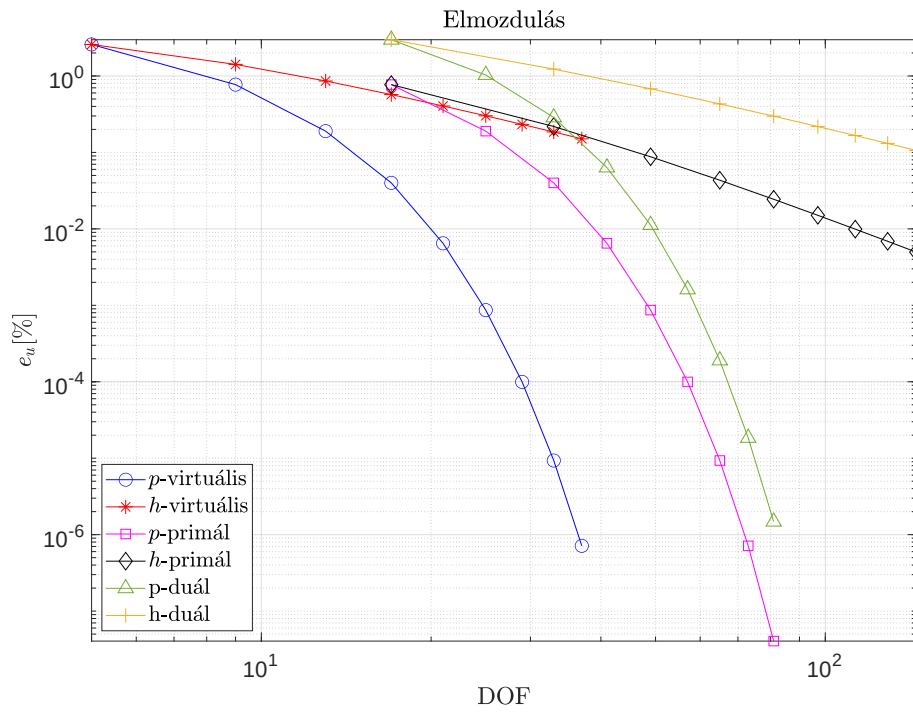
Először a p -verziós approximáció teljesítményét nézzük, úgy, hogy minden esetben veszünk egy egyenletes felosztású $n = 4$ elemű hálót és rögzítjük azt az Ω tartományon. Közben a p polinom fokszámot növeljük 1-től egyesével 9-ig.

A h -verziós konvergencia vizsgálatok során az Ω tartományt minden lépésben egységesen sűrítjük 4-től indulva 9 lépést megtéve 36-ig. Az összes hálósűrítési lépésben rögzítjük a polinom fokszámot $p = 1$ -nél a végelemekes háló összes elemén.

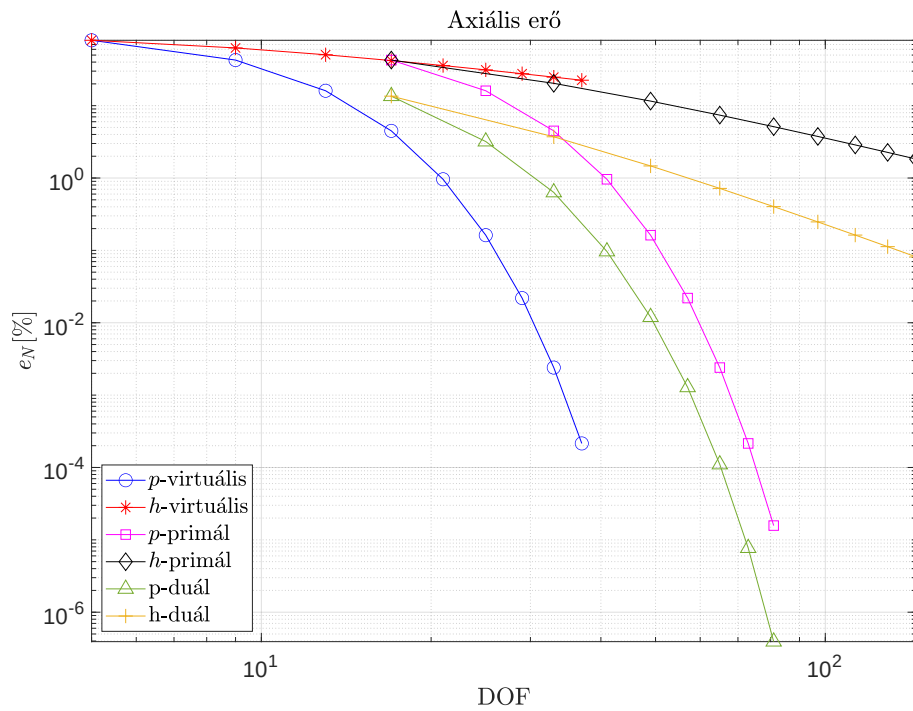
A vizsgálat során minden lépésben kiszámításra kerül a rendszer szabadsági fokainak száma (DOF) is.



1. ábra. Energianormában mért konvergenciák összehasonlítása a sima tesztfeladatnál



2. ábra. Elmozdulás maximum normában mért konvergenciának összehasonlítása



3. ábra. Axiális erő maximum normában mért konvergenciáinak összehasonlítása

Az 1., 2. és 3. ábrán rendre az energianormában mért, valamint az elmozdulás és az erő maximum normájában mért relatív hiba konvergenciáit ábrázoltuk a szabadsági fokok számának függvényében logaritmikus skálán. A hibák kiszámításához a már korábban definiált (120) és (121) összefüggéseket használtuk.

A relatív hibákra kapott konvergencia görbék karakterisztikája mind a három vizsgálat során megegyezik, és minden esetben azt a következtetést vonhatjuk le, hogy mind a h -, mind a p -típusú approximáció során magas és monoton konvergencia sebességek adódnak. Továbbá az állapítható meg, hogy a p -konvergencia minden esetben exponenciális jelleggel gyorsul, míg a h -konvergencia inkább lineáris. Tehát, ahogy azt vártuk, a polinomfokszám növelésével jelentősen nő a konvergencia sebessége. Ebből következik, hogy ha a kívánt pontosságot szeretnénk elérni, akkor a p -verziót használva jelentősen kevesebb elemszámmal, azaz nagyobb elemmérettel érhetjük azt el úgy, hogy ezzel a futási idő sem nő.

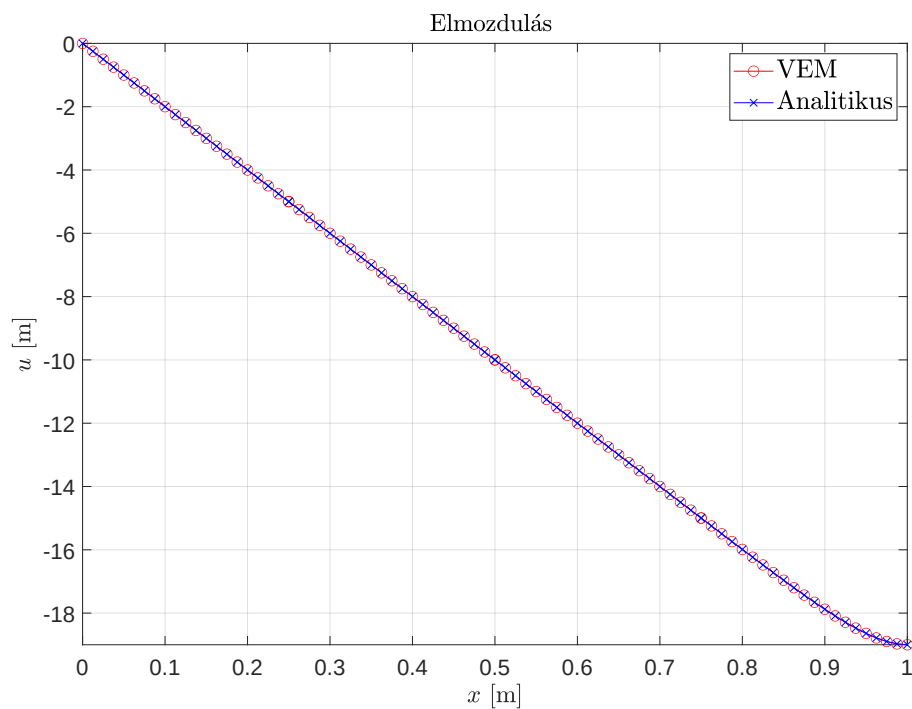
Tekintsük csak a h - konvergencia görbéket. Megállapítható, hogy a virtuális munka elv görbéi rendelkeznek a legkisebb meredekséggel mind a három vizsgálatnál, azaz ennek a leglassabb a konvergencia sebessége. A hiba az elmozdulásnál hamar eléri az 1%-os hibahatárt, viszont az erőnél már nem érhető el $n = 36$ elemmel sem ez a pontosság. Összehasonlítva a vegyesmezős variációs elvekkel, mind a primál-, mind a duál variációs elvnél jelentős gyorsulás érhető el, mely következtében nő a pontosság is. Az axiális erőnél megfigyelhető, hogy a duál elv konvergencia görbéje kisebb hibáról indul és meredekebb is, mint a primál elvnél. Ugyanez látható megfordítva az elmozdulás maximum normájában mért relatív hibánál, azaz a primál elv kisebb hibáról indul és a konvergencia görbéje meredekebb esést produkál, mint a duál elvnél. Ezzel szemléletesen is kimutatható a két variációs elv közötti különbség az approximációs tereiben, amely az 1. táblázatban is összefoglalásra került már a korábbiakban. Összességében ha az energianormában mért relatív hibát vizsgáljuk, akkor nagy különbség nem fedezhető fel a két elv között, mindössze annyit láthatunk, hogy a primál alacsonyabb hiba százalékról indul, a duál pedig nagyobb konvergencia sebességet produkál.

Most vizsgáljuk csak a p -konvergencia görbéket. Itt már nem minden esetben mondható el, hogy a virtuális munka elven alapuló módszerrel érjük el a legrosszabb pontosságot. Gyakorlatilag pár lépésen belül már az 1 %-os hibahatár alatt vagyunk és olyan alacsony értékre csökken a hiba a kilenc lépés alatt, hogy már érzékelhető különbség nincs is köztük. Ennél a verzióknál is látható a vegyesmezős variációs elvek sajátosságai az elmozdulásnál és az axiális erőnél, valamint a konvergencia görbék meredekségén is megfigyelhető ugyanaz, mint a h -verzióknál. Összegzőképpen megállapítható, hogy a p -verzióknál is nagyobb pontosság érhető el a primál-, és duál elvet használva.

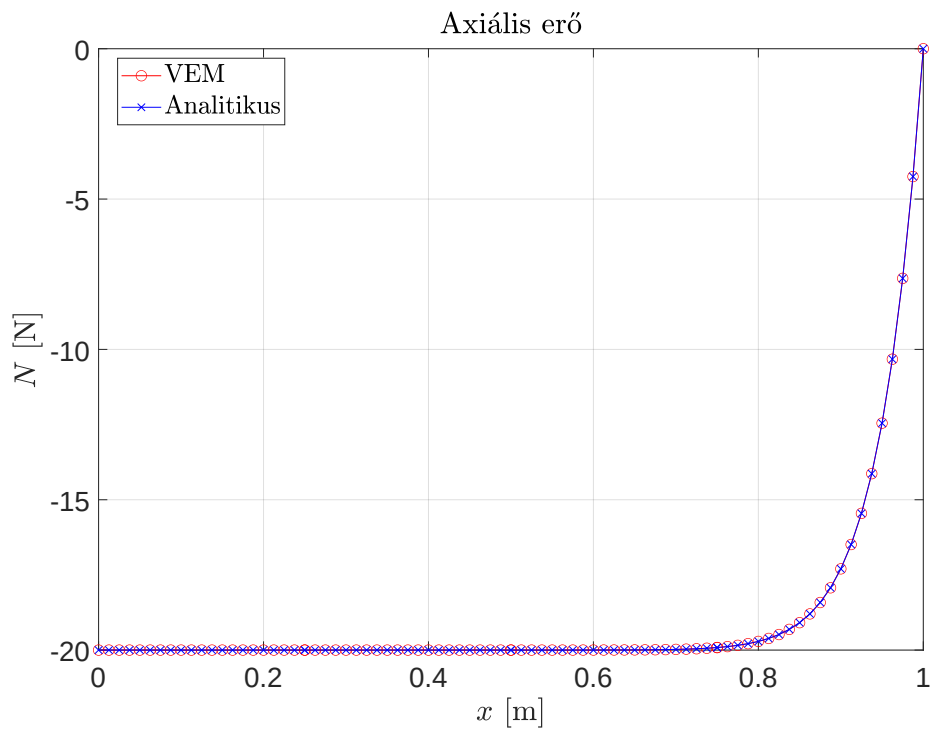
6.2.2. Szimulációs eredmények

A következőkben ábrázolni fogjuk a tesztfeladat elmozdulásra és axiális erőre adott végeselemes megoldásait, használva a virtuális munka elvet, a primál kétmezős variációs elvet és a duál kétmezős variációs elvet. A numerikusan számolt értékeket összehasonlítjuk a (18) és (19) analitikus megoldásokkal, ahová behelyettesítjük az $\alpha = 20$ értéket. A szimulációkat minden esetben ugyanolyan méretű hálóra végeztük el, amely jelen esetben $n = 4$ elemet tartalmaz, innen indítottuk a konvergencia vizsgálatokat is. Mellette a polinom fokszámot mindig a beállítható legnagyobb értékre választottuk (virtuális

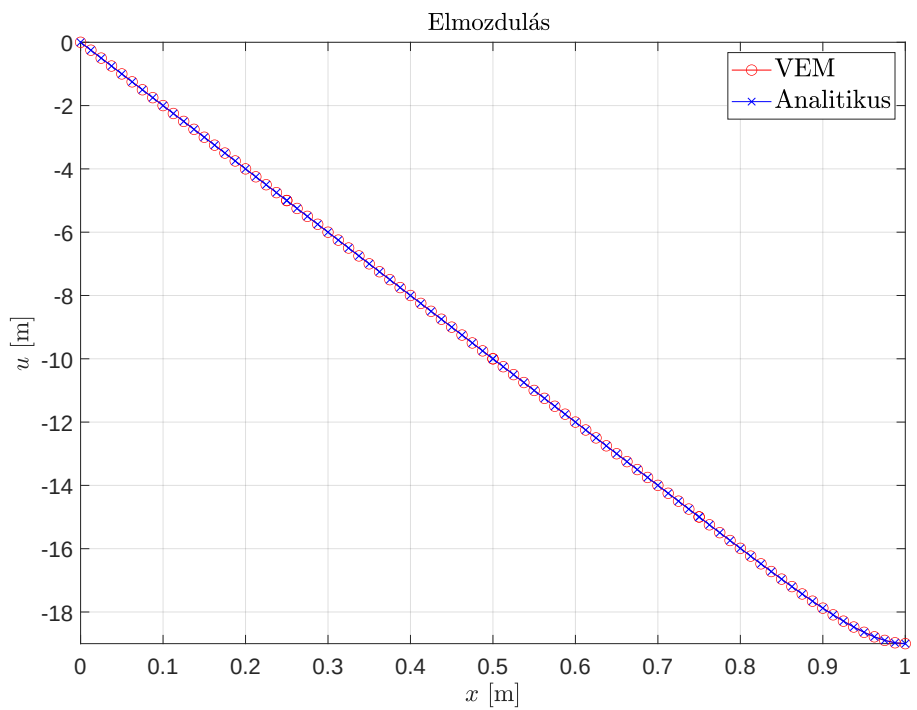
munka elvénél $p = 10$ és a vegyesmezős variációs elveknél $p = 9$).



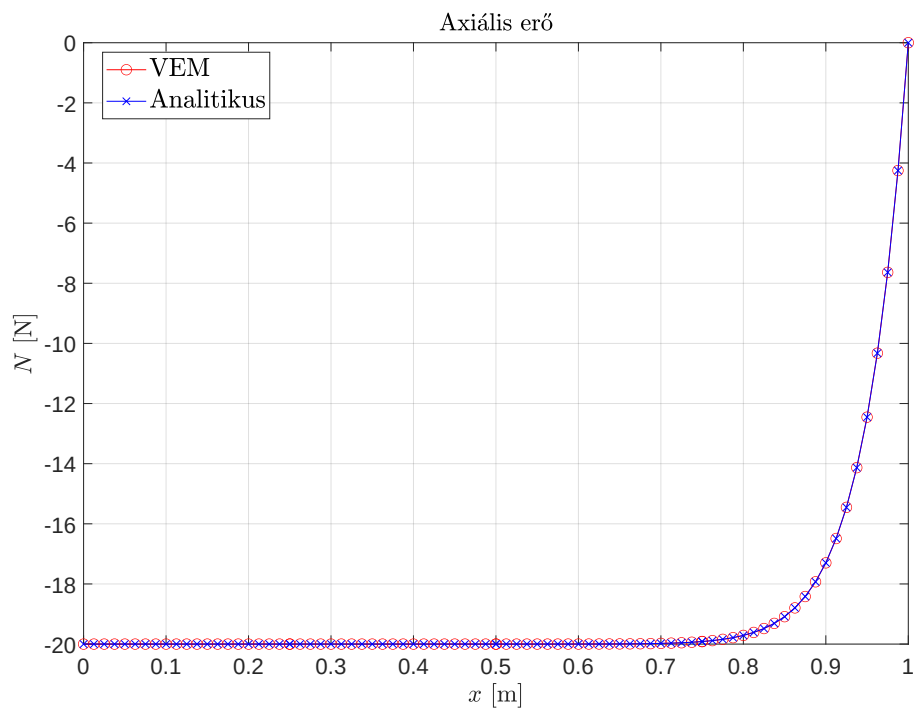
4. ábra. Megoldás az elmozdulásra virtuális munka elvet alkalmazva – sima tesztfeladat



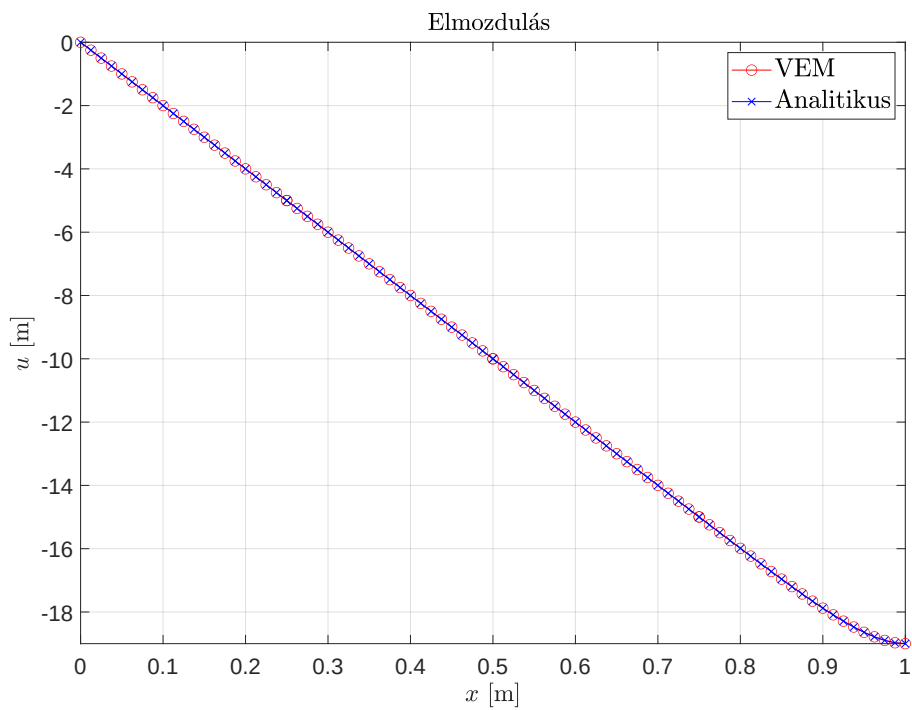
5. ábra. Megoldás az axiális erőre virtuális munka elvet alkalmazva – sima tesztfeladat



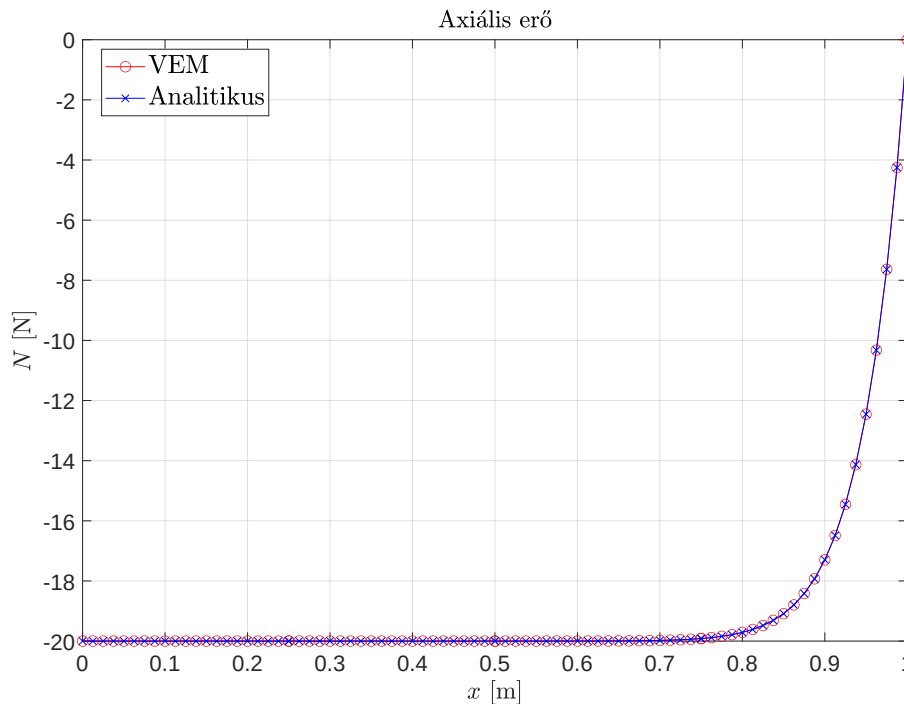
6. ábra. Megoldás az elmozdulásra primál variációs elvet alkalmazva – sima tesztfeladat



7. ábra. Megoldás az axiális erőre primál variációs elvet alkalmazva – sima tesztfeladat



8. ábra. Megoldás az elmozdulásra duál variációs elvet alkalmazva – sima tesztfeladat



9. ábra. Megoldás az axiális erőre duál variációs elvet alkalmazva – sima tesztfeladat

A 4., 6. és 8. ábrán az u elmozdulásra, míg az 5., 7. és 9. ábrán az N axiális erőre kapott szimulációs eredmények láthatók az x tengely mentén. Ahogy az már korábban kifejtésre került, az eredmények SI mértékegységben vannak közölve. Az elmozdulást nézve ez az érték eléri a 18 métert is, amely irreálisan nagy értéknek tűnhet egy mindössze 1 méter hosszú rúdon 1 méteres átmérővel, de ezek a tesztfeladatok nem valós mechanikai problémákat reprezentálnak, hanem numerikus tesztelésre kifejlesztett matematikai megoldásokat. Az axiális erőnél ilyesfajta kiugrás nem fedezhető fel, attól függetlenül, hogy ez esetünkben nem releváns információ.

Ha szeretnénk összehasonlítani a különböző variációs elveket a szimulációs eredmények szerint, akkor az fedezhető fel, hogy ilyen magas polinom fokszám esetén ritka hálózattal is szemmel látható eltérés nincsen. Erre lehetett következtetni már a konvergencia vizsgálatok eredményéből is, hiszen elmozdulásra egész magas p mellett mindegyik elv elérte a 10^{-6} hibaértéket százalékban mérve is, míg az axiális erőnél ez az érték 10^{-4} érték volt. Ebből következik az, hogy $p = 10$ -nél nagyobb polinomfokszámra nincs szükség, mivel érdemben nagyobb pontosságnövekedés már nem érhető el vele.

Azonban azt el kell mondani, hogy a feladat megoldása folytonos, tehát a legáltalánosabb esetben szokott előfordulni ez a fajta probléma, és bármelyik kereskedelmi forgalomban kapható hálósűrítéssel operáló végeselemes megoldó nagy pontossággal megoldja. Esetünkben is, ha csak n növelésével szerettük volna megoldani a feladatot akkor is a legtöbb esetben kellően nagy elemszámmal az 5 %-os hibahatáron belül vagyunk, amely a mérnöki gyakorlatban már elegendő pontosság.

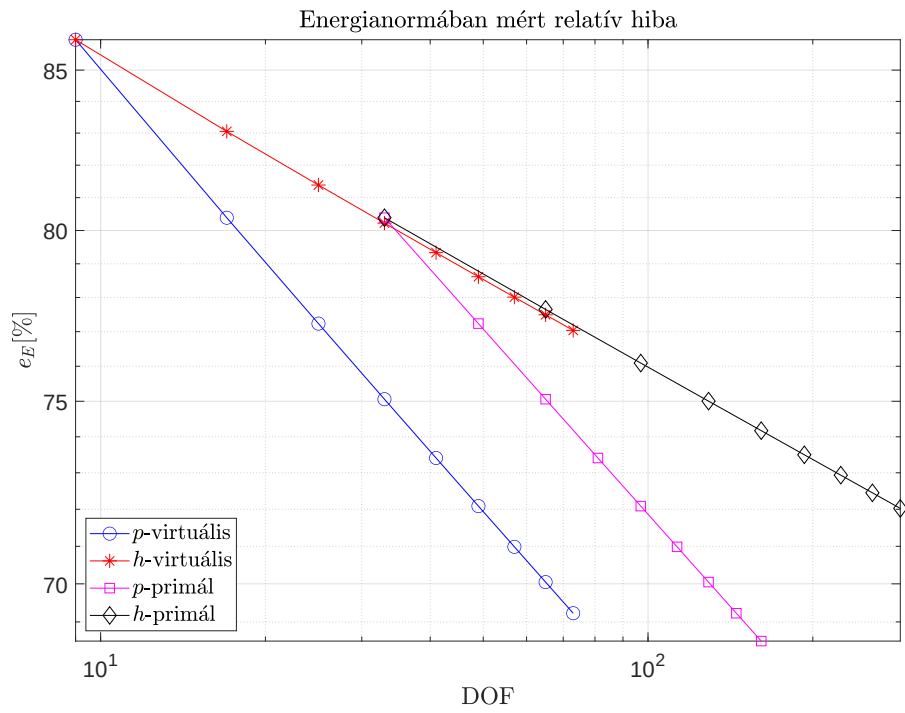
6.3. Szinguláris tesztfeladat

Következő tesztfeladatnak a már előzőekben tárgyalt példát fogjuk alapul venni, azonban kihasználjuk a 2.1 pontban kiemelt észrevételt. Ezek szerint, ha $\alpha < 1$ és $\alpha > 0,5$, akkor a feladat megoldása nem lesz folytonos, mivel az egzakt megoldás első deriváltjának az $x = 0$ helyen szingularitása van. A kereskedelmi forgalomban kapható legtöbb végeselemes szoftver ezt a tesztfeladatot nem tudja megfelelő pontossággal kezelni.

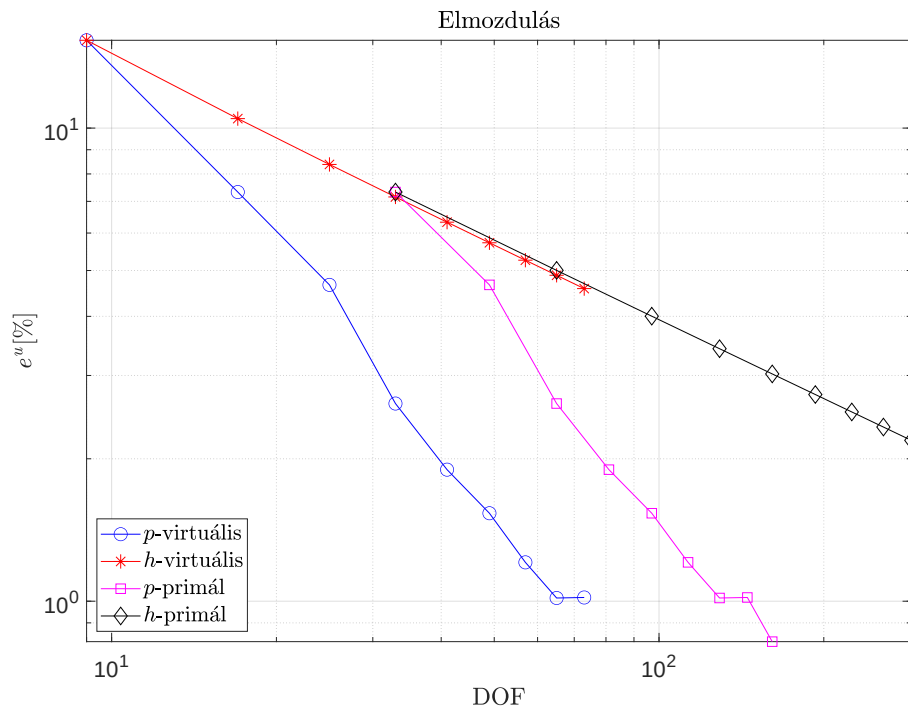
A feladat peremfeltételei, geometriai és anyagi paraméterei megegyeznek a korábbiakban használtakkal, azaz $\tilde{u} = 0$ m az $x = 0$ helyen és $\tilde{F} = 0$ N az $x = \ell = 1$ m peremen, valamint $AE = 1$ N (konstans). A testre ható megoszló terhelés alakja is formailag megegyezik: $f(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$, azaz jelen esetben is az egyenletben szereplő α értéktől függ a feladat folytonossága, most viszont az $\alpha = 0,55$ értéket választjuk, hogy fellépjen egy viszonylag erős szingularitás az $x = 0$ helyen.

6.3.1. Konvergencia vizsgálatok

Korábbiakhoz hasonlóan itt is első lépésben a kifejlesztett végeselemes kóddal konvergencia vizsgálatokat fogunk végezni a szóban forgó tesztfeladaton, először a p -verziós approximáció teljesítőképességét analizáljuk majd a h -verziósét. Végül összehasonlítjuk ezeket egymással, valamint a használt variációs elveket is. A p -verziónál a polinomfokszám növelése 1-től indul és 9-ig tart, viszont az előzőekkel ellentétben az elemszámot növeljük $n = 8$ -ra, melyet rögzítjük az Ω tartományon minden lépésben. A h -konvergenciánál az Ω tartományt minden lépésben növeljük egységesen 8-tól indulva 72-ig haladva 9 lépésen keresztül. Minden hálósűrítési lépésben rögzítjük a polinom fokszámot $p = 1$ -nél a végeselemes háló összes elemén. A vizsgálat során minden lépésben kiszámításra kerül a rendszer szabadsági fokainak száma (DOF) is.



10. ábra. Energianormában mért konvergenciák összehasonlítása – szinguláris feladat



11. ábra. Elmozdulás konvergenciák összehasonlítása – szinguláris feladat

A 10. és 11. ábrán láthatjuk az energianormában mért relatív hiba konvergenciáit, valamint az elmozdulás maximum normában mért relatív hibájának konvergenciáit a szabadsági fokok számának függvényében. A hibaszámításhoz most is a már korábban definiált (120) és (121) egyenleteket használjuk.

A vizsgálat során megállapítottuk, hogy a duál variációs elv nem alkalmas ennek a feladatnak a megoldására, mivel a (113) egyenletből látható, hogy a megoldás során nem törlődik az $x = 0$ helyen lévő végtelenbe tartó érték, mely következtében a konvergencia vizsgálatok értékei értékelhetetlenek lesznek. Ezért ezeket az értékeket nem is tüntetjük fel az ábrákon. Továbbá az axiális erő maximum normában mért relatív hiba konvergenciáját sem vizsgáljuk, mivel a szingularitás helyén a p érték növelésével nem minden lépésben javul az eredmény az előző sűrítési lépéshez képest, viszont a szimulációs eredményeket elemezve (később) enyhe oszcillációval ugyan, de meg tudja oldani a feladatot a szingularitás környékén, amely a következő alfejezetben lesz részletesen bemutatva.

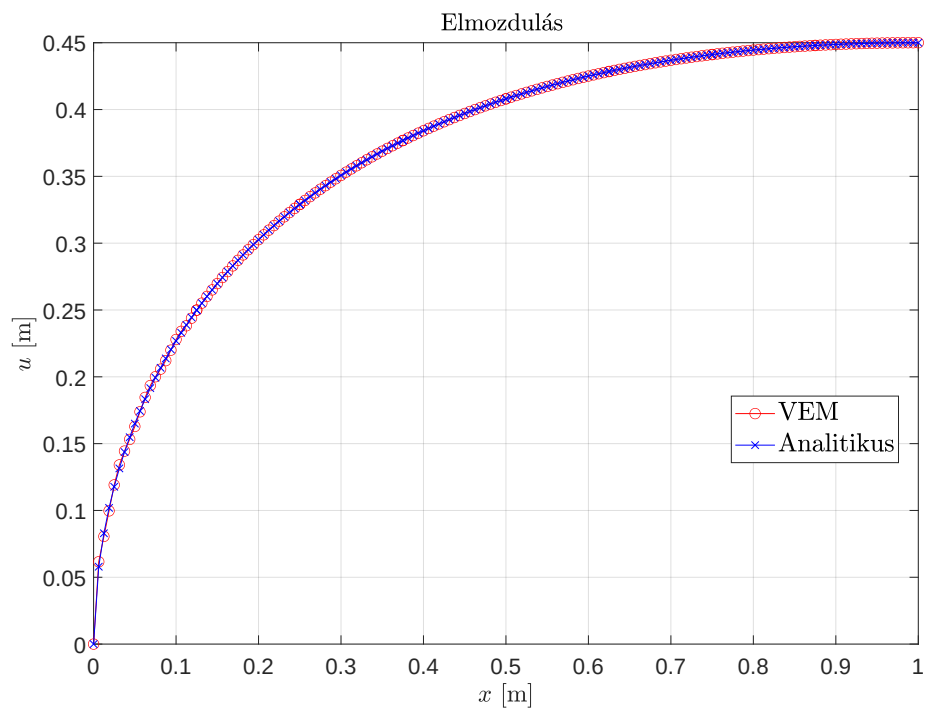
A vizsgálatához $n = 8$ elemszámot választottunk, amelynél nagyobb értéket használva a futási idő már jelentősen megnő, viszont ennek a lassulásnak az arányában nem javul az eredmény, tehát nincs szükség ennél sűrűbb hálót használni.

Tekintsük meg először az energianormában mért relatív hibát és láthatjuk, hogy az előző tesztfeladattal ellentétben itt a p -konvergencia nem produkál exponenciális jelleget. Mind a p - mind a h -konvergencia lineáris görbét ír le. A hiba mértéke a legnagyobb polinom fokszámot használva is csak 70 % körüli értéket tudunk elérni, tehát a polinomfokszám további emelésére vagy halósűrítésre lenne szükség. Azonban a nagy hiba ellenére az alapfeltevésünk itt is igazolódik, mivel a p -verziós konvergencia mindkét esetben meredekebb görbét mutat a h -verziós görbéknél. Továbbá kis mértékben de az is megfigyelhető, hogy a primál variációs elvvel számolt megoldások esetén meredekebb görbék lesznek mint a virtuális munka elvet alkalmazva.

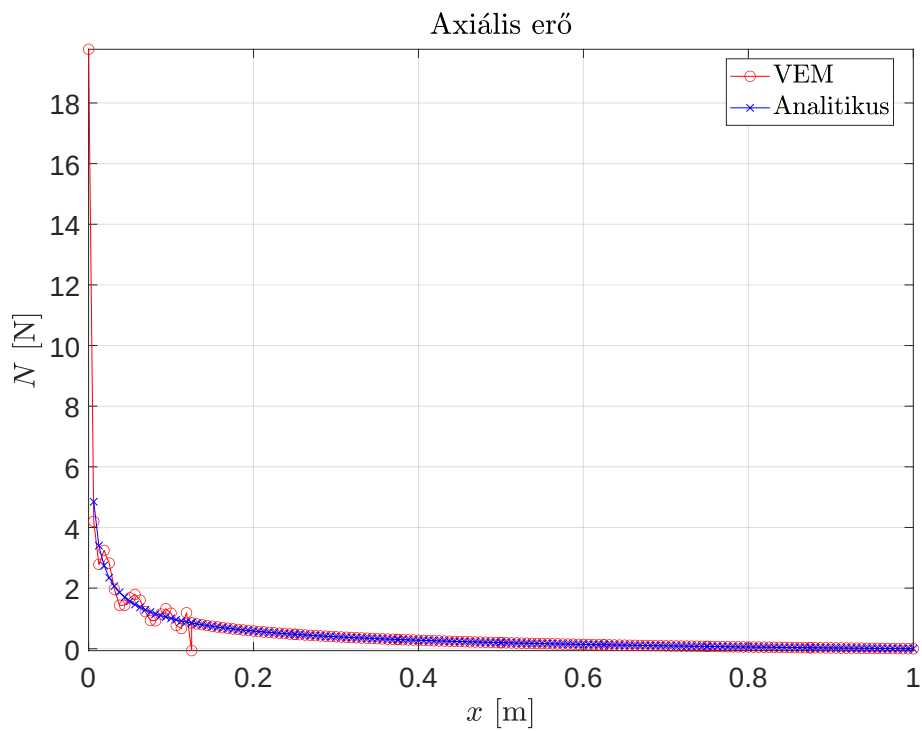
Ha nézzük az elmozdulás maximum normájában mért hibájának a konvergenciáit, szintén ugyanazt a következtetést tudjuk levonni, hogy a p -konvergenciák itt sem exponenciális jellegűek, azonban az előzőekkel szemben jelentősebb meredekséget lehet felfedezni. A hiba mértéke magas polinom fokszámnál már eléri az 1% és az alatti értéket, tehát ez már kellően pontosságot mutat.

6.3.2. Szimulációs eredmények

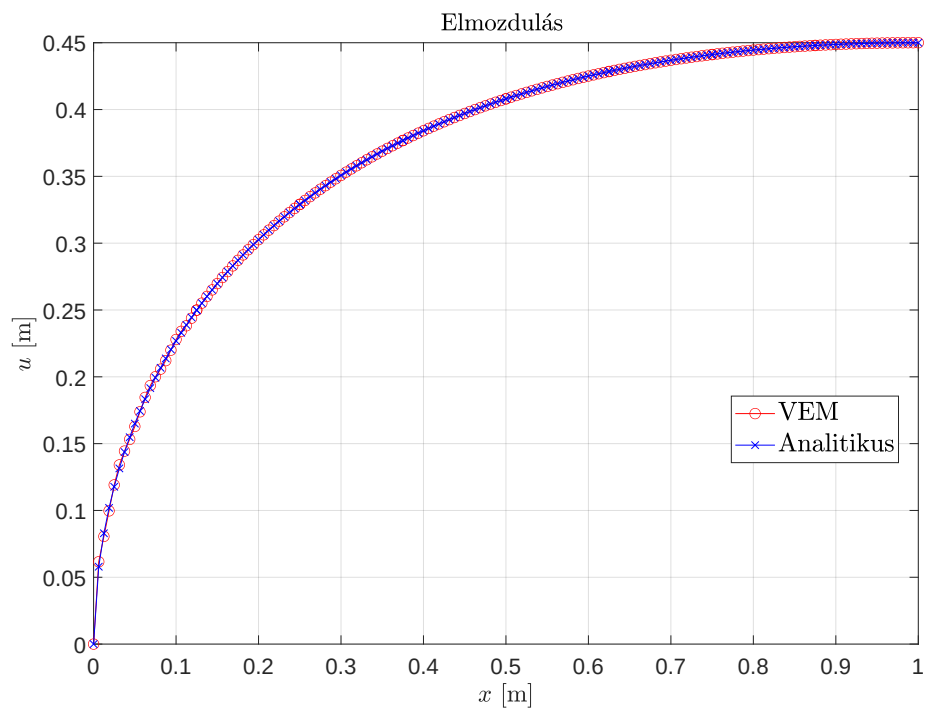
Ebben az alfejezetben a szinguláris tesztfeladat végeselemes szimulációit fogjuk megmutatni az elmozdulásra és az axiális erőre, valamint összevetjük azokat az analitikus eredménnyel amelyet már meghatároztunk a (18) és (19) egyenletekkel. A feladatot megoldjuk a virtuális munka elv valamint a primál variációs elv alkalmazásával is. A duál variációs elvet kihagyjuk mivel a már korábban is megfogalmazott előírás miatt a feladat szingularitásának megjelenése kiküszöbölhetetlen. A megoszló erő egyenletébe még mindig $\alpha = 0,55$ értéket helyettesítünk be, tehát nagyon erős szingularitást idézünk elő. A feladat megoldását egy rögzített sűrűségű hálón végezzük el, amely megegyezik a konvergencia vizsgálatok első lépésében használtával, azaz $n = 8$ elemet fogunk alkalmazni. A polinomfokszám a virtuális munka elvnél $p = 10$, míg a primál variációs elvnél $p = 9$.



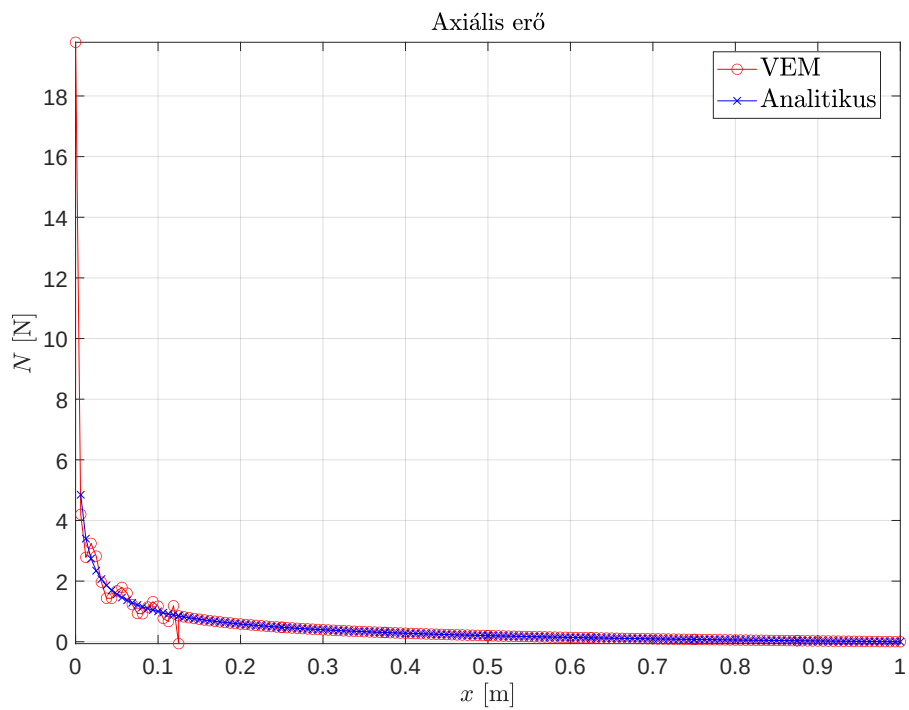
12. ábra. Megoldás az elmozdulásra virtuális munka elv esetén – szinguláris feladat



13. ábra. Megoldás az axiális erőre virtuális munka elv esetén – szinguláris feladat



14. ábra. Megoldás az elmozdulásra primál elv esetén – szinguláris feladat



15. ábra. Megoldás az axiális erőre primál elv esetén – szinguláris feladat

A 12. és 14. ábrán az elmozdulásra kapott numerikus megoldások láthatók az x tengely mentén, míg a 13. és 15. ábrán az axiális erőre kapottak láthatók. Jelen esetben is az eredmények közlése SI mértékegységben történik. Az előző teszteredményekkel ellentétben csak 0,45 méter a maximális elmozdulás, azonban ez is a való életben irreálisan nagy egy mindössze egy méteres rúdon, de itt szeretném ismét kihangsúlyozni, hogy ez a benchmark feladat csak a numerikus módszer megbízhatóságának analizálására szolgál, azaz valós műszaki tartalma nincs a megoldásnak. Az axiális erő maximális értékében látszik a szingularitás ami fellép $x = 0$ pontban.

Ha összehasonlítjuk a variációs elveket egymással akkor látható, hogy ilyen magas p értéknél nagy különbség nem fedezhető fel, amely már a konvergencia vizsgálat során is látható volt. Mivel a hiba értéke az elmozdulásnál 1% alá esik így látható, hogy a végeselemes megoldás csomópontjai nagy pontossággal illeszkednek az analitikusan kiszámolt értékekre. Az axiális erőt vizsgálva már nem mondható el ilyen jó pontosság, amelyre lehetett számítani mivel itt vártuk a szingularitást, és néztük milyen jól tudja azt kezelni. Összehasonlítva a kettőt nagy különbség nem fedezhető fel, 0,1 méterig mindenhol jól illeszkedik a végeselemes megoldás, onnantól pedig egy gyengébb oszcilláció fedezhető fel a szingularitás következtében. Ez a probléma kiszűrhető lenne lokális sűrítéssel, azaz nem egyenletesen felosztott háló alkalmazásával, amivel a következő fejezetben fogjuk bővíteni a feladatot.

A feladat összességében nagy nehézségekkel oldható meg, és a kereskedelmi forgalomban kapható szoftverek nem is tudnak vele mit kezdeni. Esetünkben is jól látható, hogy csak hálósűrítéssel a feladat nagy hibaszázalékkal oldható meg.

6.4. Szinguláris tesztfeladat megoldása lokális hálósűrítéssel

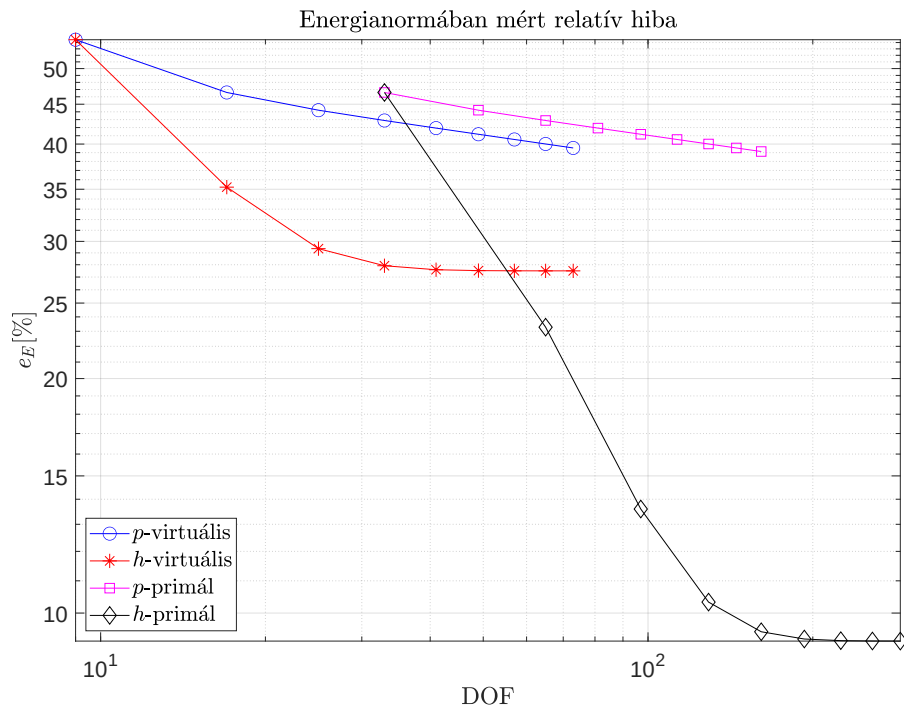
Ebben a fejezetben a korábban megoldott szinguláris tesztfeladatot lokális hálósűrítőessel fogjuk megoldani, ugyanis az egyenletes hálófelosztással nagy pontatlanságot értünk el, mely az axiális erőre kapott szimulációs eredményben is jelentkező oszcilláció formájában a szingularitás környékén. Lokális hálósűrítéssel azt szeretnénk elérni, hogy az $x = 0$ hely közelében sűrűbb háló legyen mint a rúd, illetve a számítási tartomány bármely más részén, ahol már eddig is nagy pontossággal tudtuk megoldani a feladatot. A nem egyenletes háló elkészítéséhez a csomópontok helyének kiszámításához bevezetjük az

$$x(i) = \ell q^{n-(i-1)}, \quad i = 2, \dots, n+1 \quad (122)$$

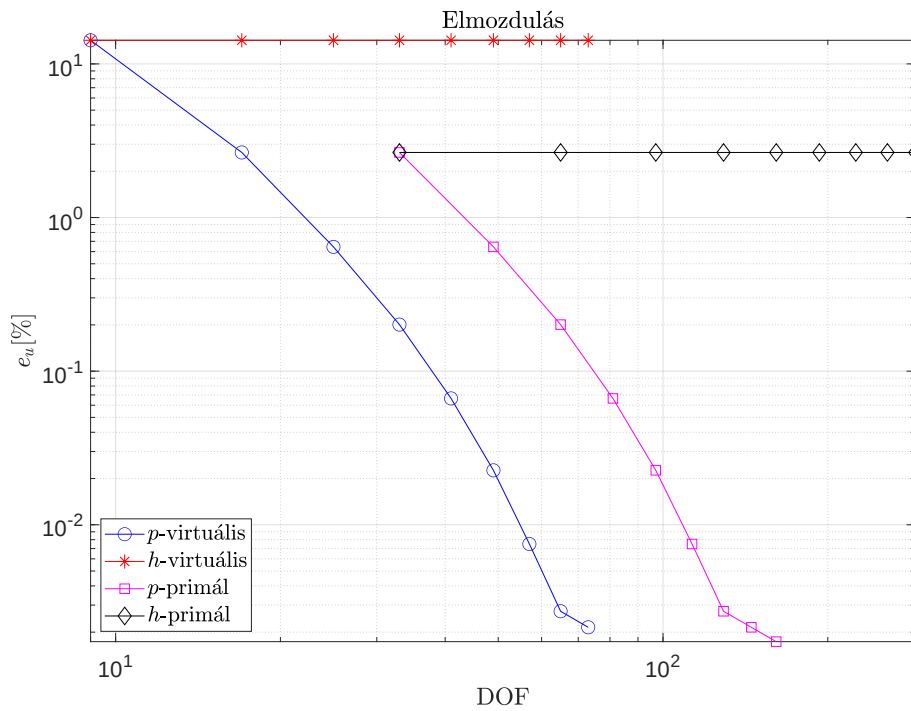
összefüggést, ahol $x(1) = 0$, amelyben a q egy konstans érték, mely meghatározza a háló lokális finomságát. Esetünkben ezt az értéket $q = 0,17$ -re választjuk.

6.4.1. Konvergencia vizsgálatok

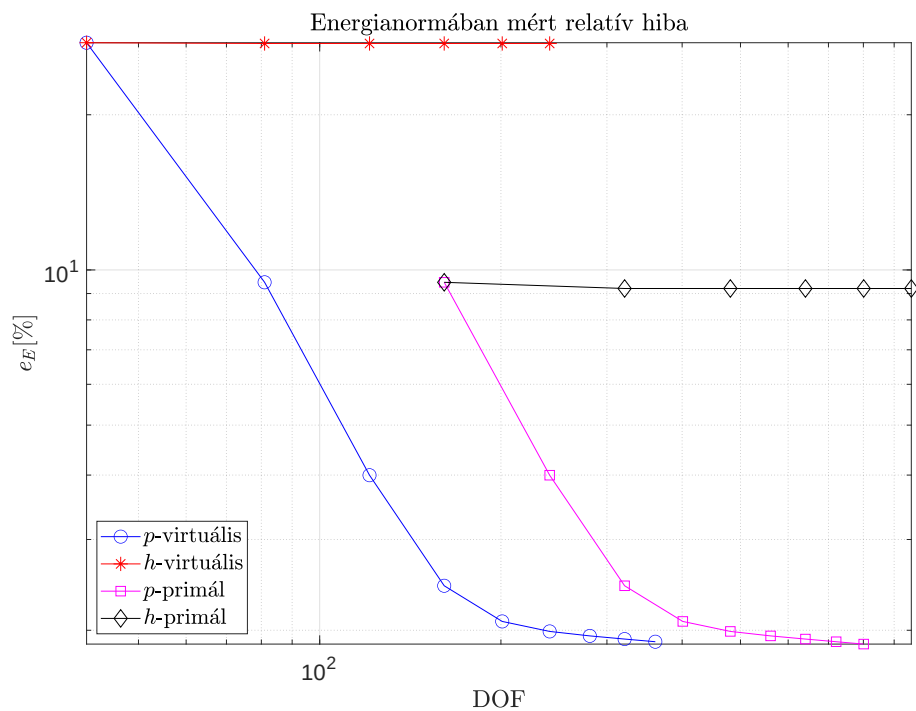
A konvergencia vizsgálatok teljes egészében megegyeznek az előzőekkel, annyi változtatással, hogy itt két különböző vizsgálatot is fogunk végezni az elemszámtartományt érintően. Először a szokásos $n = 8$ elemről indulva végezzük el a p - és h - konvergencia vizsgálatokat, másodszer $n = 40$ elemet veszünk fel kezdő lépésnek, mivel a korábbi tapasztalatok alapján a p -verzió nagy elemszámnál tud igazán jó eredményeket hozni az exponenciálisan gyorsuló konvergencia miatt. Itt is a vizsgálat során minden lépésben kiszámításra kerül a rendszer szabadsági fokainak száma (DOF) is.



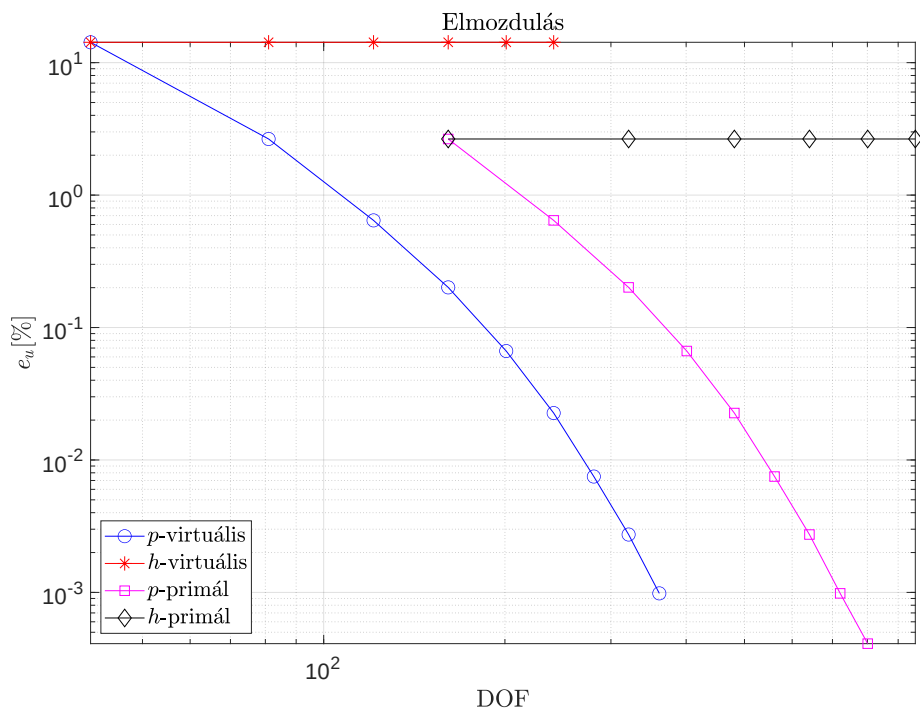
16. ábra. Energianormában mért konvergenciák kis elemszámokra – lokális hálósűrítés



17. ábra. Elmozdulás konvergenciák kis elemszámokra – lokális hálósűrítés



18. ábra. Energianormában mért konvergenciák nagy elemszámokra– lokális hálósűrítés



19. ábra. Elmozdulásban mért konvergenciák nagy elemszámokra – lokális hálósűrítés

A 16. és 18. ábrákon láthatóak a az energianormában mért relatív hibák konvergencia görbéi, míg a 17. és 19. ábrákon az elmozdulás maximum normában mért relatív hibájának konvergenciái láthatók. A hibaszámításhoz most is a már korábban definiált (120) és (121) egyenleteket használtuk.

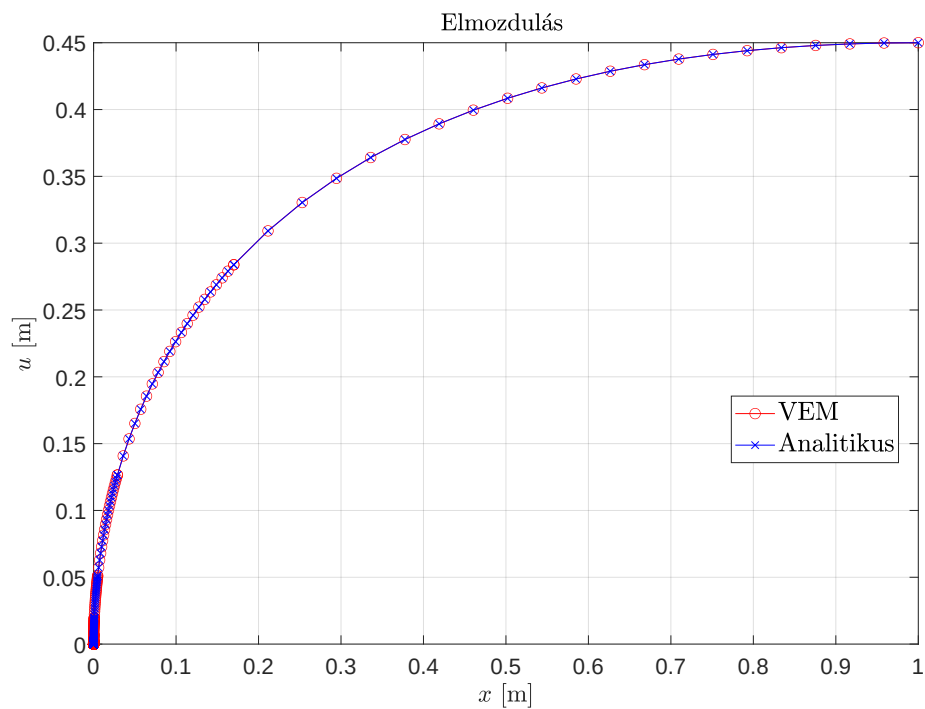
A konvergencia vizsgálatokat először kis elemszámról indulva végeztük el, és az energianormában mért relatív hiba görbéinél azt a megállapítást tehetjük, hogy a h -verzió ebben az esetben jelentős javulást tud elérni, míg a p -verzió ugyanazt az exponenciális függvény-jelleget hozza, mint amit az egyenletes sűrítésnél tapasztaltunk, viszont ugyan az esetlegesen elérhető relatív hiba értékét tovább tudtuk csökkenteni, a konvergencia exponenciálisan lassuló jelleget mutat. Továbbá az is jól látható, hogy a primál elv mindkét verziónál valamivel nagyobb konvergencia sebességeket produkál, mint a virtuális munka elvre épülő változat. Az elmozdulást nézve, az egyetlen változás az, hogy a p -konvergenciák görbéinél sikerült elérni az exponenciális jelleget, míg a h -konvergencia hasonló jellegű görbéket ad mint amiket az egyenletes hálófelosztásnál tapasztaltunk.

Vizsont, mivel az első vizsgálat során megállapítható volt, hogy az elemszám növelésével a h -konvergencia görbéi beállnak egy bizonyos értékre, addig a p -konvergenciák görbéi folyamatos esést produkálnak, tehát van még benne jelentős potenciál, illetve további tartalék az elérhető relatív hiba csökkentéséhez. A továbbiakban arra voltunk kíváncsiak, mekkora ez a tartalék, ezért $n = 40$ elemet vettünk fel a tartományon kezdő lépésnek a konvergencia vizsgálatok során. Ekkor az energianormában mért relatív hiba konvergencia görbéinél be is igazolódott ez a többlet, illetve javulási tartalék, hiszen látható, hogy a h -verzió konvergencia már csak nagyon minimális javulást mutat, addig a p -verziós konvergencia egy ideig még tud meredek görbét produkálni, mielőtt beállna egy elérhető hibaértékre. Az elmozdulásnál nagy változás megintcsak nem következett be, most is exponenciális jelleget ölt a p -verziós konvergencia görbe.

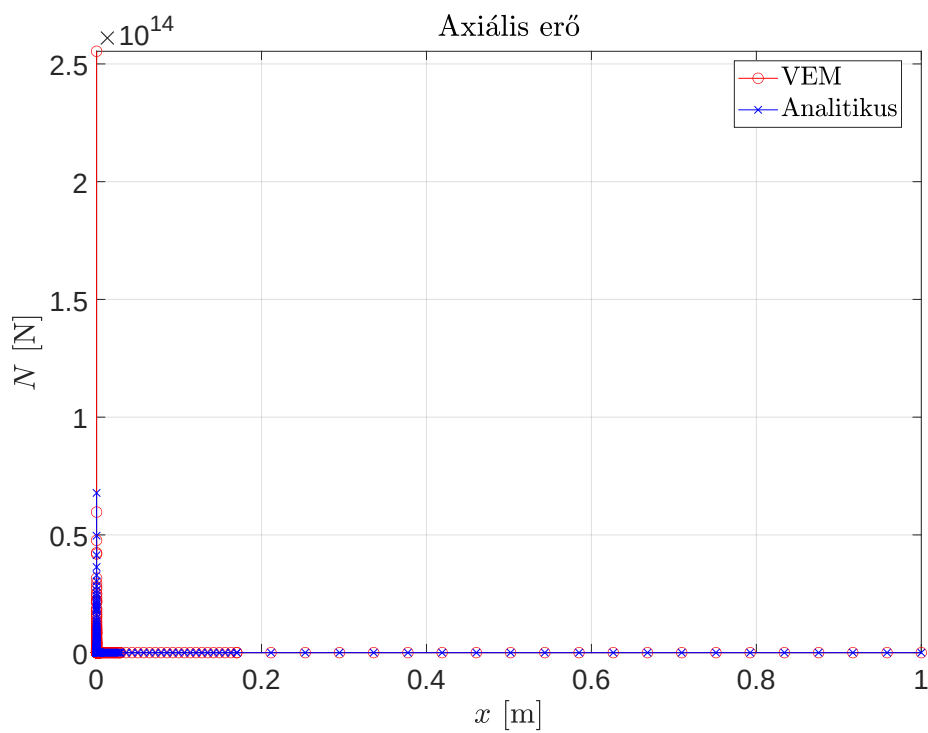
Összességében tehát elmondható, hogy a lokális hálósűrítéssel jelentős javulást lehet kihozni a megoldás pontosságában a szingularitásnál, amelyet kis elemről indulva először elemszám növeléssel, majd polinomfokszám növeléssel lehet a leghatékonyabban megoldani.

6.4.2. Szimulációs eredmények

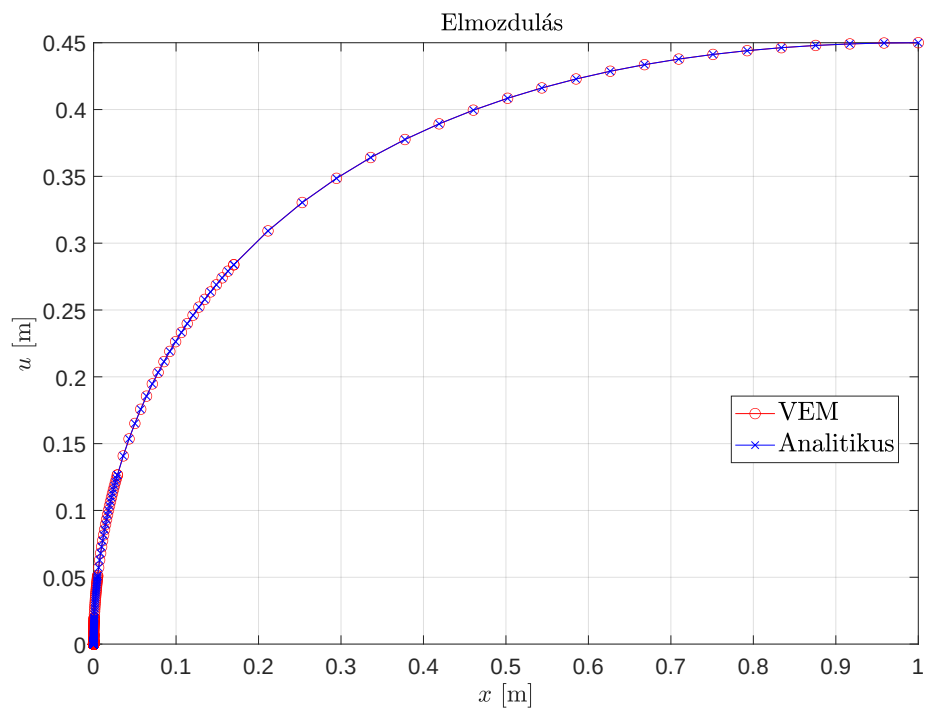
A következő alfejezetben a szinguláris tesztfeladat végeselemes megoldásait fogjuk megmutatni lokális hálósűrítést alkalmazva, majd összevetjük azt az analitikus megoldással is. A kiindulási paraméterek, valamint a használt egyenletek megegyeznek a 6.3.2 alfejezetben tárgyaltakkal annyi változtatással, hogy most az $n = 40$ értékre kapott eredményeket mutatjuk meg, mivel jelentős változás, illetve érzékelhető pontosságjavulás ekkora elemszámnál fedezhető fel leginkább.



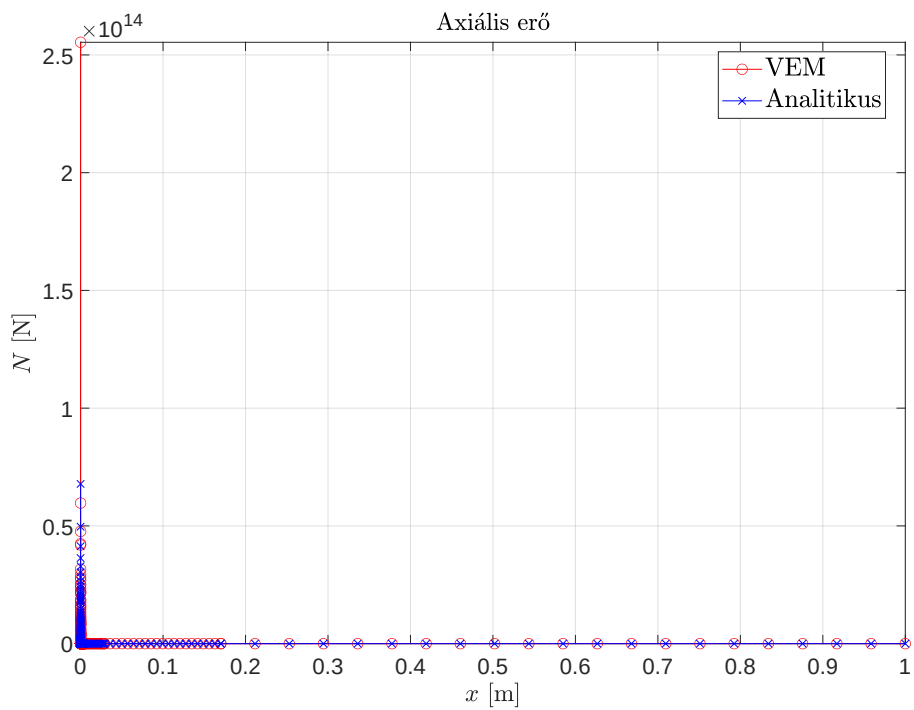
20. ábra. Megoldás az elmozdulásra virtuális munka elv esetén - szinguláris tesztfeladat



21. ábra. Megoldás az axiális erőre virtuális munka elv esetén - szinguláris tesztfeladat



22. ábra. Megoldás az elmozdulásra primál elv esetén - szinguláris tesztfeladat



23. ábra. Megoldás az axiális erőre primál elv esetén - szinguláris tesztfeladat

A 20. és 22. ábrán az elmozdulásra kapott numerikus és analitikus megoldások láthatóak az x tengely mentén, míg a 21. és 23. ábrán az axiális erő megoldás függvényei találhatók. Az eredmények közlése SI mértékegységben történt.

Nézzük meg először az elmozdulásokat és láthatjuk, hogy az előzőekben használt hálózashoz képest nagy változást nem tapasztalunk, amely várható volt már a számított hibákból is. Azonban a lokális sűrítés jellege szépen megfigyelhető, azaz az $x = 0$ értéknél jelentősen sűrűbb a háló, mint az $x = 1$ m helyen. Viszont ha az axiális erőkre kapott megoldásokat megfigyeljük, akkor felfedezhető, hogy az előzőekkel ellentétben itt megszűnik teljes mértékben az oszcilláció, és a numerikus megoldás minden pontban – a szingularitás környékén – jó egyezést mutat az analitikus értékekkel (kivéve persze az $x = 0$ helyet). Az axiális erőre kapott numerikus eredmények vonatkozásában volt leginkább nagy szükség a lokális hálósűrítés alkalmazására, mivel a korábbi – egyenletes – hálósűrítésnél tapasztalt oszcilláció az $x = 0, 1$ m koordinátától kezdett felerősödni az $x = 0$ helyet közelítve.

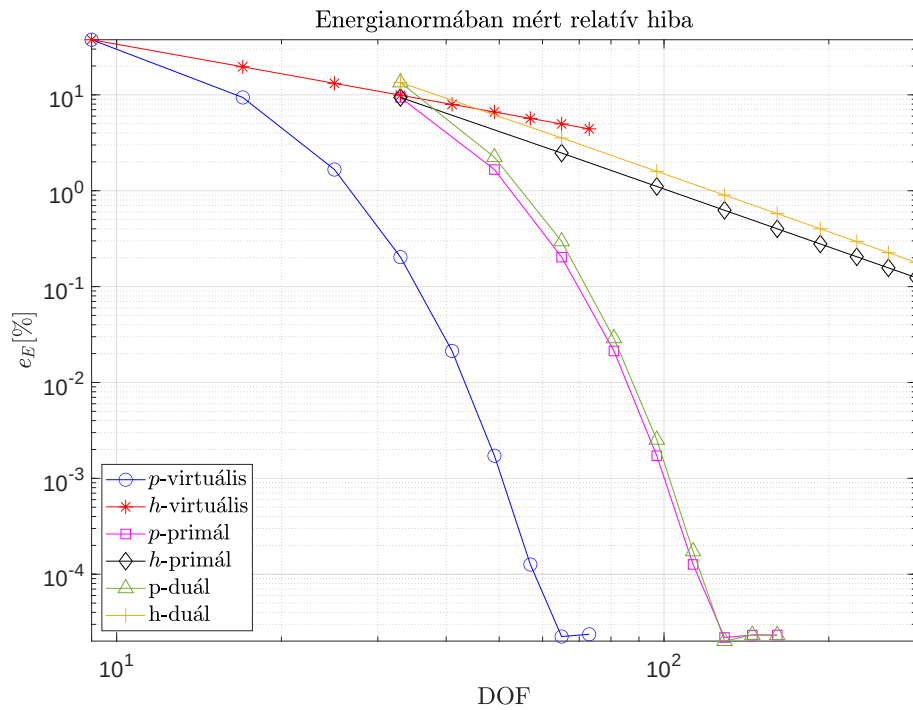
Összességében tehát megéri lokális hálósűrítést alkalmazni, azonban ennél is szükség van a viszonylag nagy elemszám felvételéhez ahhoz, hogy elérjük a kívánt pontosságot.

6.5. Anyagi határfelületet tartalmazó feladat

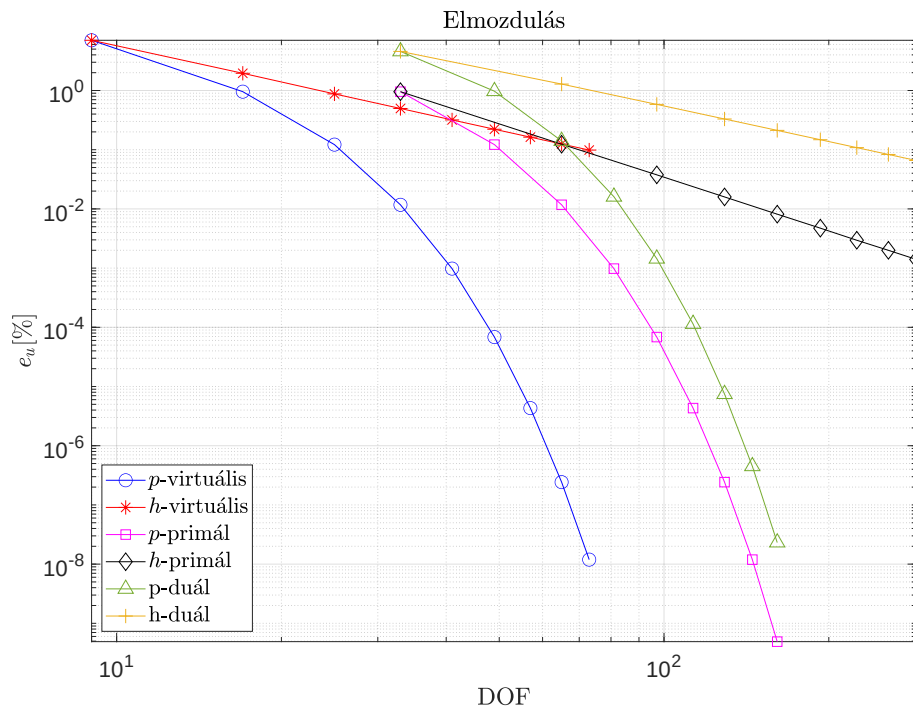
Következőleg az anyagi határfelületet tartalmazó tesztfeladatot fogjuk elvégezni, amely azt a mérnöki gyakorlatban előforduló problémát mutatja be, amikor az adott testnek különböző anyagtulajdonsága és/vagy keresztmetszete van. A feladat analitikus megoldását a 2.2. alfejezet tartalmazza. A feladat paramétereit számszerűsítve a következők: $AE_1 = 1$ Pa és $\ell_1 = 1$ m; $AE_2 = 10$ Pa és $\ell_2 = 0,5$ m (ha $A = A_1 = A_2$), valamint a testen lévő megoszló terhelés $f(x) = -\sin(8x)$. A peremfeltételeket tekintve itt is a már korábbiakban használtakat alkalmazzuk, azaz az $x = 0$ helyen megfogást alkalmazunk, míg az $x = \ell$ helyen az előírt axiális erő zérus (szabad perem).

6.5.1. Konvergencia vizsgálatok

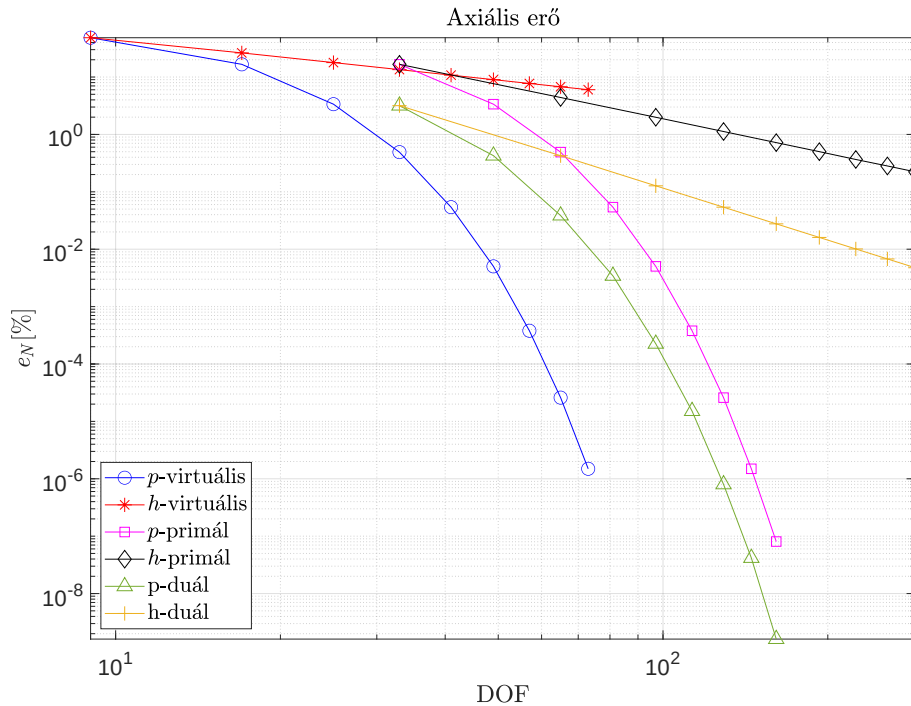
A konvergencia vizsgálatokat a már korábban is látott hibamértékeket alkalmazva fogjuk elvégezni, megnézve ezzel a kifejlesztett végeselemes megoldó teljesítőképességét. Először itt is a p -verziót fogjuk vizsgálni, úgy hogy veszünk tartományonként $n = 4$ elemet, tehát összesen 8 elemet és rögzítjük azt az Ω tartományon. Közben a polinom fokszámot növeljük 1-től egészen 9-ig. A h -verziónál az Ω tartományt sűrítjük 9 lépésen keresztül, kezdve 8 elemmel és egészen 72 elemig sűrítve, úgy hogy a polinom fokszámot rögzítjük minden lépésben $p = 1$ -nél. A vizsgálat során minden lépésben ismét kiszámításra kerül a szabdsági fokainak száma (DOF).



24. ábra. Energianormában mért konvergenciák – anyagi határfelület tesztfeladata



25. ábra. Elmozdulás konvergenciák – anyagi határfelület tesztfeladata



26. ábra. Axiális erő konvergenciája – anyagi határfelület tesztfeladata

A 24., 25. és 26. ábrán láthatóak az energianormában mért relatív hiba konvergencia görbéi, valamint az elmozdulás és az axiális erő maximum normában mért relatív hibáinak konvergenciái a szabadsági fokok számának függvényében. A hibaszámításokhoz a (120) és (121) egyenleteket használtuk.

A vizsgálatok során kapott konvergencia görbékből megállapítható, hogy mind a három esetben hasonlóak a kapott eredmények, továbbá megállapítható, hogy mind a h -verziónál, mind a p -verziónál magas és monoton konvergencia sebességek adódnak. A polinomfokszám növelés következtében a görbék exponenciális jelleget vesznek fel, azaz a konvergencia jelentősen gyorsul, míg a klasszikus hálósűrítésnél lineáris görbét kapunk, azaz állandó konvergenciasebesség tapasztalható. Tehát ritka hálóval és magas p -vel rövid futási idő mellett lehet nagy pontosságot elérni.

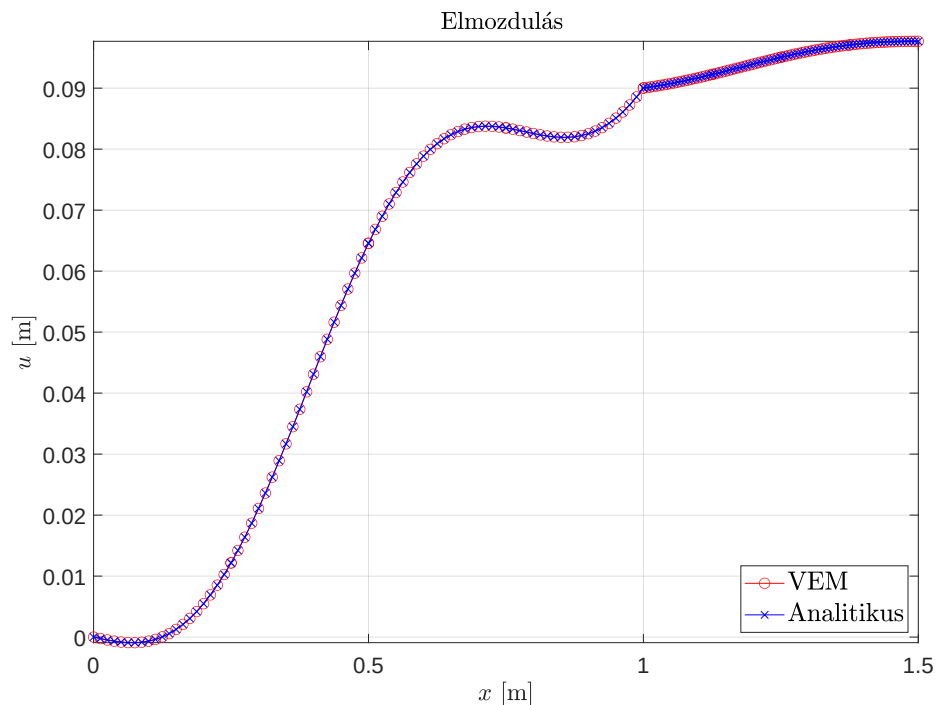
Először vizsgáljuk meg a h -konvergenciákat, melyből megállapítható, hogy a virtuális munka elvet alkalmazva a legkisebb meredekséggel rendelkező görbét kapjuk, valamint a hiba is nagy mértékű, mivel legtöbb esetben a 72 elemmel sem éri el a kitűzött 1%-os célt. Azonban látható, hogy a vegyesmezős variációs elveket alkalmazva nagy mértékű pontosságjavulás érhető el, és minden esetben elérjük ezt a korábban kitűzött célt. Ha összehasonlítjuk a primál és a duál elvet, észrevehető az a már korábban megfogalmazott megállapítás, hogy az elmozdulásnál a primál elv görbéje a meredekebb, míg az axiális erőnél a duál elvé. Továbbá itt is megfigyelhető, hogy összességében az energianormában mért relatív hibánál a duál elv konvergencia gyorsulása a nagyobb.

A továbbiakban nézzük a p -konvergencia görbéket. A polinom fokszám növelésével elérhető pontosságnövekedés megint exponenciális jelleget mutat, valamint az ábrákból is látható, hogy akár 10^{-8} értéket is el lehet érni. Az energianormában mért relatív hi-

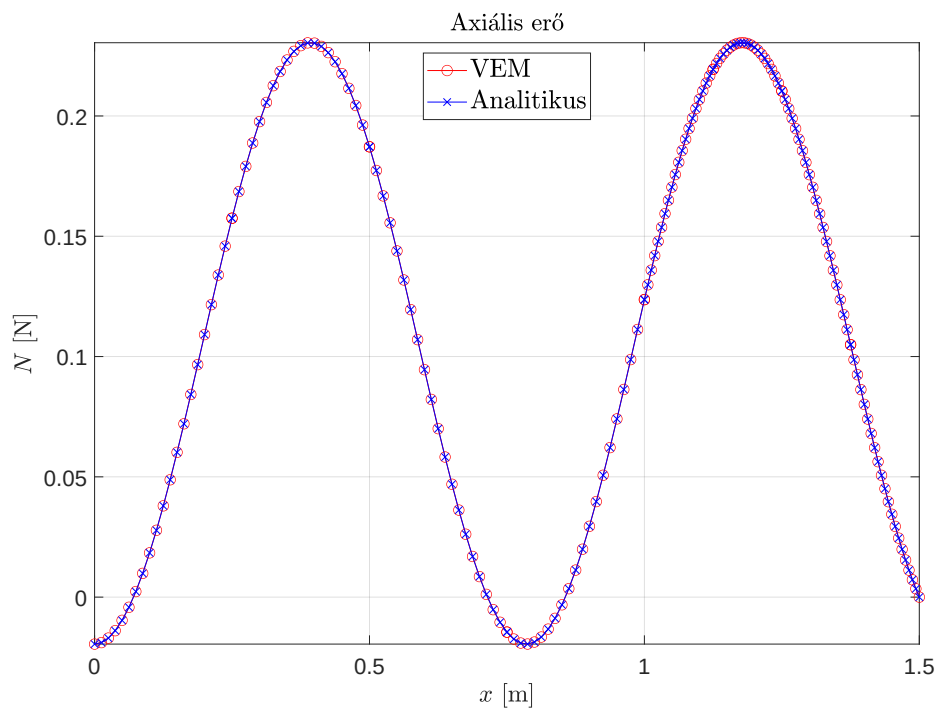
ba megmutatja, hogy a legnagyobb meredekséggel rendelkező variációs elv az a duál, valamint a leglassabb a virtuális munka elv. Továbbá mindhárom esetben megállapítható, hogy nincs szükség 9 lépésre a vizsgálat során, mivel az utolsó két-három lépésre már eléri a kívánt pontosságot. Az elmozdulás- és az axiális erő maximum normában mért konvergenciáinak vizsgálatakor ugyanarra a megállapításra juthatunk mint a h verziónál. Azaz a duál- és primál elv közötti különbség megfigyelhető, valamint minden esetben gyorsabbak mint a virtuális munka elv.

6.5.2. Szimulációs eredmények

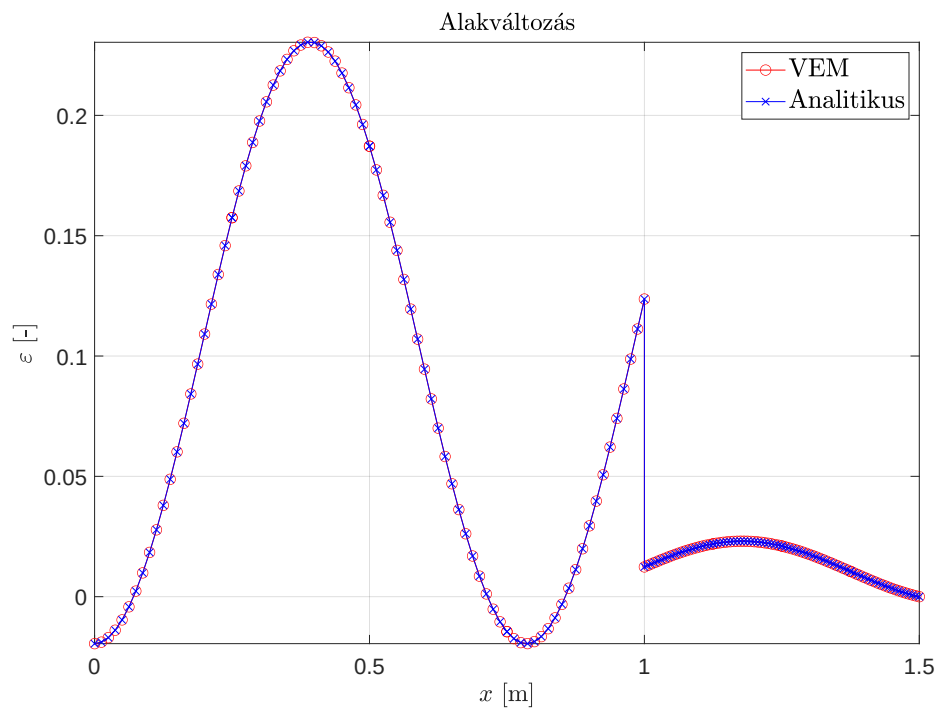
A következő részben az anyagi határfelületet tartalmazó tesztfeladat végeselemes megoldásait fogjuk megtekinteni, majd összehasonlítani azokat a már korábban kiszámításra került analitikus megoldással. Jelen esetben is vizsgálni fogjuk az elmozdulást és az axiális erőt, viszont kiegészítjük még ezeket az alakváltozással is, mivel a különböző anyagok miatt a határfelületen szakadást várunk a megoldásban, és vizsgáljuk, hogy a kifejlesztett programunk mennyire tudja jól – oszcillációmentesen – kezelni ezt a problémát. Az analitikus megoldások a már korábban meghatározott (34) és (35) egyenletekből kaphatóak meg. A szimulációk során $n = 8$ elemet veszünk fel és minden esetben ilyen sűrűségű hálót fogunk használni. A polinom fokszámot mindig a maximális választható értékre tesszük. A kiindulási paraméterek SI mértékegységben vannak, és az eredmények is ebben lesznek közölve.



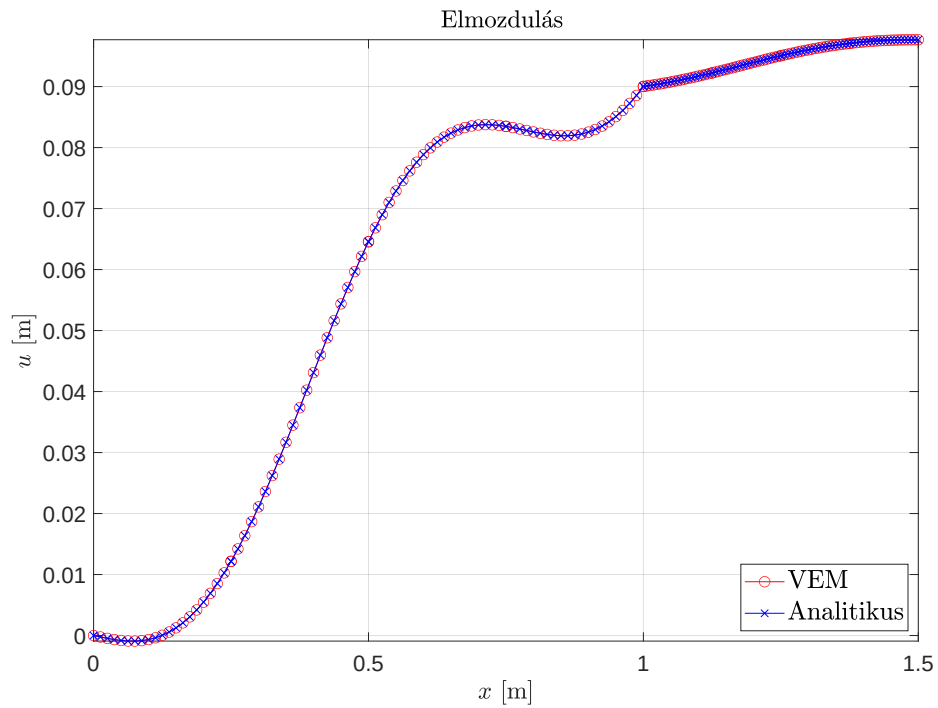
27. ábra. Az elmozdulás virtuális munka elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata



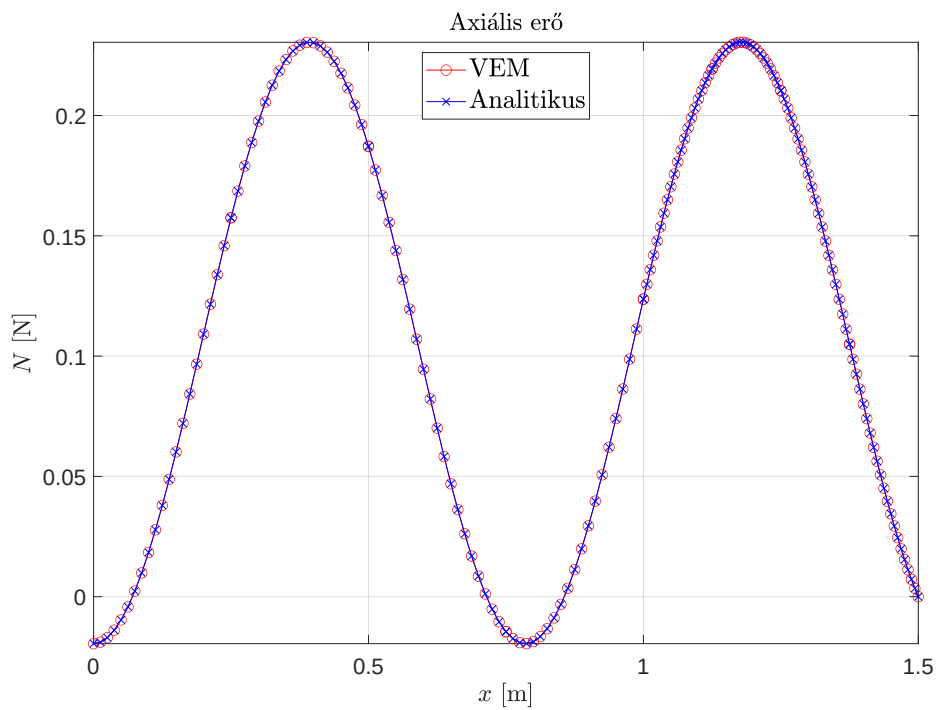
28. ábra. Az axiális erő virtuális munka elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata



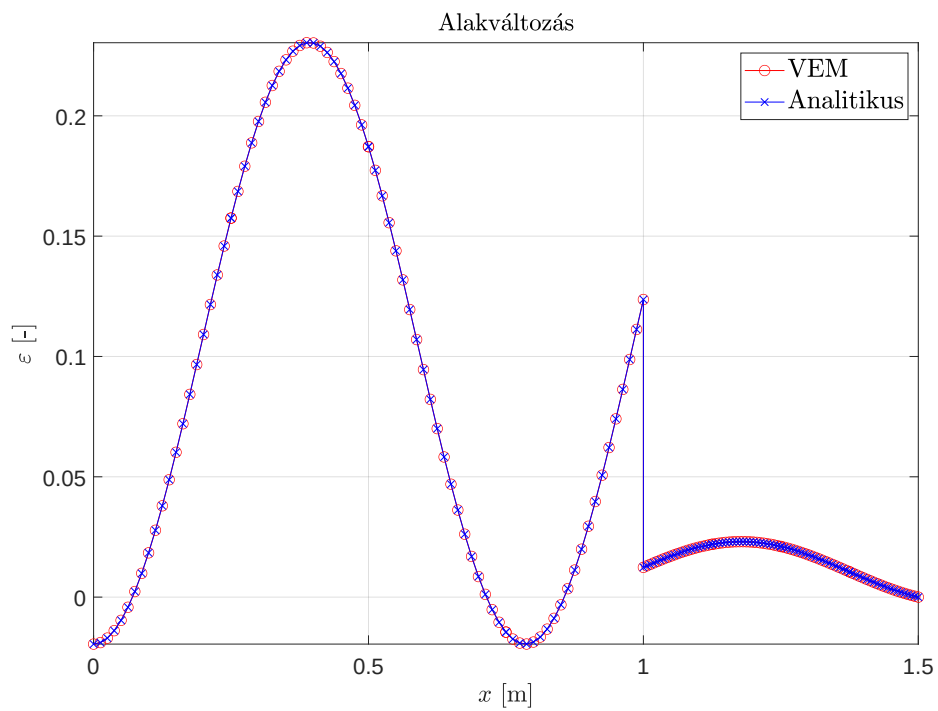
29. ábra. A nyúlás virtuális munka elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata



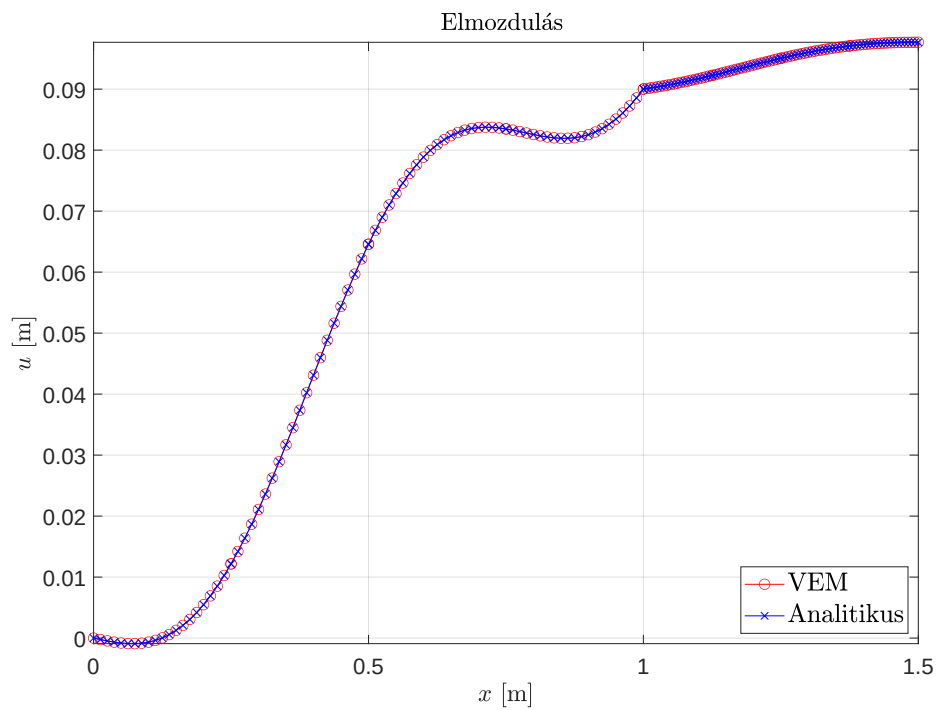
30. ábra. Megoldás az elmozdulásra duál elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata



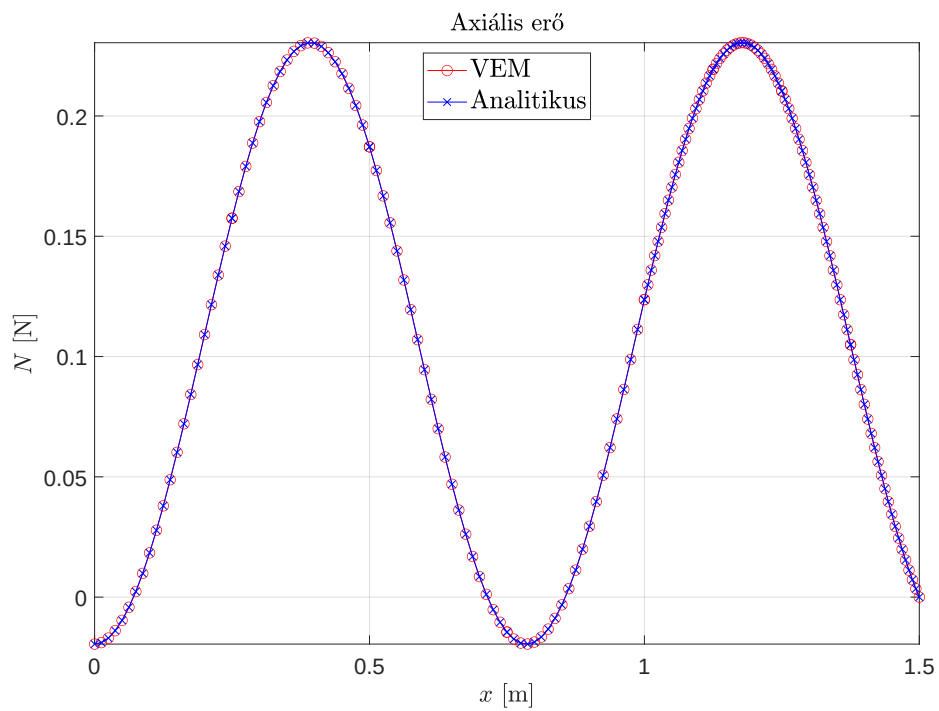
31. ábra. Megoldás az axiális erőre dual elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata



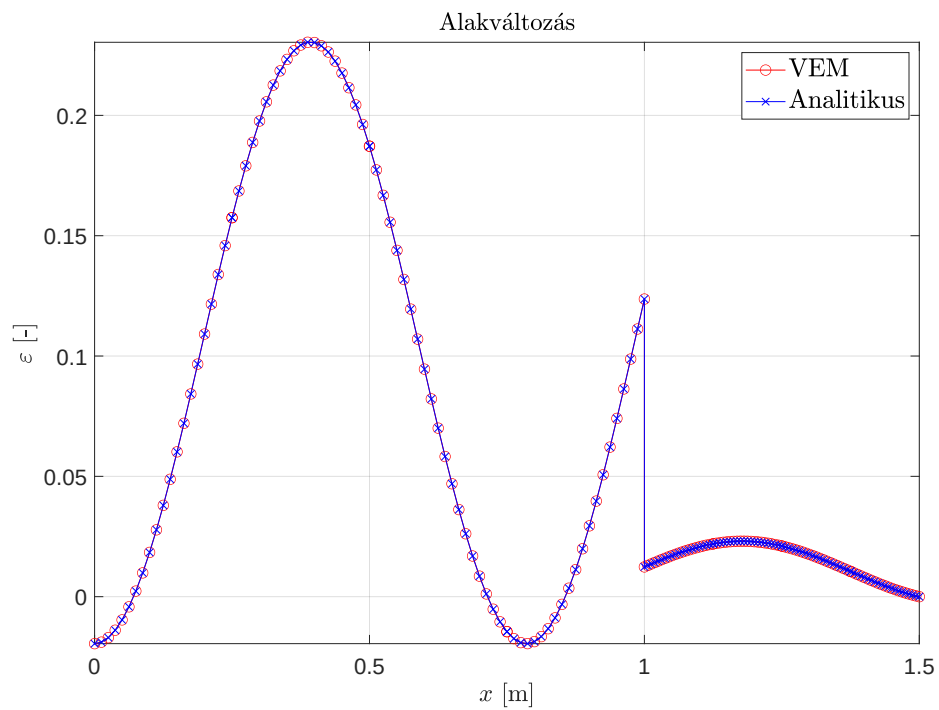
32. ábra. Megoldás a nyúlásra duál elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata



33. ábra. Megoldás az elmozdulásra primál elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata



34. ábra. Megoldás az axiális erőre primál elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata



35. ábra. Megoldás a nyúlásra primál elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata

A 27., 30. és 33. ábrán az elmozdulás eredményei, a 28., 31. és 34. ábrán az axiális erő eredményei, míg a 29. és 35. ábrán az alakváltozás eredményei láthatók az x tengely mentén plottolva. Az eredmények itt is SI mértékegységben vannak megadva, azonban a korábbi tesztfeladatokkal ellentétben itt nem kapunk a valóságtól nagy mértékben elrugaszkodott eredményeket, annak ellenére, hogy ez is egy generált benchmark feladat. Az ábrákon látható, hogy az alakváltozásra kapott megoldásokban az $x = 1$ m helyen megjelenik a várt szakadás oszcillációmentesen, valamint érzékelhető az elmozdulásra kapott eredményeken is a különböző anyagok jelenléte, illetve az anyaghatár megléte.

Összehasonlítva a variációs elveket, megint észrevehető, hogy egész magas polinom fokszámnál az alacsony elemszám ellenére is nagy pontosságot tudunk elérni mind a három vizsgált mechanikai mennyiség vonatkozásában. Az elmozdulásnál fellépő anyagi határfelületet nagy pontossággal tudják megoldani a végeselemes megoldók. Az axiális erőnél nem lép fel szakadás, az eredmény a megoszló terhelésként megadott szinusz görbéhez illeszkedő jelleget mutat, tehát a program bármiféle nehézség nélkül megoldja ezt a tesztfeladatot bármelyik variációs elv vonatkozásában.

Az alakváltozásnál lép fel a feladat fő érdekessége, ezért számoljuk ki azt is ebben a tesztfeladatban. Míg az elmozdulásnál csak a görbe jellege változik meg az anyag változása során (az anyaghatár átlépésével), addig az alakváltozásnál az $x = 1$ helyen két különböző értéket is kapunk, amely következtében jelentkezik egy ugrás a megoldásban. Azonban ezeket a végeselemes program még magas p értékeknél is szépen leköveti függetlenül attól melyik variációs elvet használjuk, azaz minden típusú elem jól illeszkedik az analitikusan kiszámolt pontokra.

Összességében ez is tartományokra bontva folytonos feladatnak számít, amit már a korábbiakban is nagy pontossággal tudtunk megoldani, itt viszont a szakadás jelenléte már erősebb megoldót igényelhet, mivel elemszám növeléssel csak nagy értéknél érhető el elfogadható pontosság. Továbbá az eredményekből látható, hogy kiugróan magas p értékre nincs szükség, hogy kellő pontosságot kapjunk.

7. Elért tudományos eredmények

A bevezetésben meghatározott célokkal összhangban a klasszikus hálósűritésre és a virtuális munka elvre épülő végeselemmódszerek mellé vegyesmezős variációs elveken alapuló hp -verziós végeselemmódszereket sikerült kifejleszteni, melyek mind az elmozdulást, mind az axiális erőt külön változóként kezelik.

A kifejlesztett végeselemes kód alkalmas az 1D-s rugalmasságtani feladatok hatékony – nagy pontosságú és gyors konvergenciájú – megoldására. A bemutatott végeselemmódszerek pontosabb, megbízhatóbb eredményeket biztosítanak mind h - mind p -típusú approximáció esetén a kereskedelmi forgalomban megtalálható végeselemes megoldókkal szemben. Ahogy azt előzetesen vártuk, a vegyesmezős variációs elvek gyorsítottak a h -verziós konvergenciákon, majd a p -verzió alkalmazásával exponenciális jelleget is sikerült elérni, mely nagyon alacsony hibaértékkel társult.

A kifejlesztett programot három különböző tesztfeladaton is vizsgáltuk, és ezek közül kettőnél értük el ezeket az eredményeket. A sima tesztfeladatnál jelentős pontosság-növelést lehetett elérni, ugyanúgy mint az anyagi határfelületet tartalmazó feladatnál is ahol az alakváltozásban lévő $x = 1$ m helyen lévő szakadást is szépen lekövette mindegyik megoldó. A szinguláris feladat nem produkált minden esetben ilyen szintű pontosságot, és kisebb mértékű oszcilláció jelent meg az axiális irányú erőre kapott eredményekben a szingularitás környékén. Az erős szingularitásnak (és önmagában a szingularitásnak) köszönhetően az $x = 0$ helyen lévő értéket nem tudta pontosan kezelni, (ami nem is várható), de erre a kereskedelmi forgalomban lévő végeselemes szoftverek sem képesek, sőt talán még kevésbé alkalmasak mint az itt bemutatott hp -verziós végeselemmódszerek.

Azonban ezt a pontatlanságot lokális hálósűritéssel, azaz nem ekvidisztáns felosztású háló alkalmazásával sikerült jelentősen orvosolni, ezáltal az oszcillációt teljes mértékben el tudtuk tüntetni és a relatív hibák értékei is jelentősen csökkentek. Sőt nagy elemszámnál a p -konvergencia jelentős tartalékokat tudott felmutatni a pontosság növelésében.

Hivatkozások

- [1] K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [2] L. Demkowicz. *Computing with hp-Adaptive Finite Elements. One- and Two-Dimensional Elliptic and Maxwell Problems*, volume I of *Applied Mathematics and Nonlinear Science*. Chapman & Hall/CRC Press, Taylor & Francis Group, 2007.
- [3] Alexander Düster, Ernst Rank, and Barna Szabó. *The p-Version of the Finite Element and Finite Cell Methods*, chapter Part 1: Solids and Structures, pages 1–35. Encyclopedia of Computational Mechanics. John Wiley & Sons, Ltd, 2nd edition, 2017. doi:10.1002/9781119176817.ecm2003g.
- [4] Alexander Düster and Olivier Allix. Selective enrichment of moment fitting and application to cut finite elements and cells. *Computational Mechanics*, 65:429–450, 2020. doi:0.1007/s00466-019-01776-2.
- [5] B. Szabó and I. Babuška. *Introduction to Finite Element Analysis: Formulation, Verification and Validation*. John Wiley & Sons, New York, 2011.
- [6] Balázs Tóth and Alexander Düster. *h*-adaptive radial basis function finite difference method for linear elasticity problems. *Computational Mechanics*, 71:433–452, 2023. doi:0.1007/s00466-022-02249-9.

Ábrák jegyzéke

1.	Energianormában mért konvergenciák összehasonlítása a sima tesztfeladatnál	23
2.	Elmozdulás maximum normában mért konvergenciának összehasonlítása	24
3.	Axiális erő maximum normában mért konvergenciáinak összehasonlítása	24
4.	Megoldás az elmozdulásra virtuális munka elvet alkalmazva – sima tesztfeladat	26
5.	Megoldás az axiális erőre virtuális munka elvet alkalmazva – sima tesztfeladat	27
6.	Megoldás az elmozdulásra primál variációs elvet alkalmazva – sima tesztfeladat	27
7.	Megoldás az axiális erőre primál variációs elvet alkalmazva – sima tesztfeladat	28
8.	Megoldás az elmozdulásra duál variációs elvet alkalmazva – sima tesztfeladat	28
9.	Megoldás az axiális erőre duál variációs elvet alkalmazva – sima tesztfeladat	29
10.	Energianormában mért konvergenciák összehasonlítása – szinguláris feladat	31
11.	Elmozdulás konvergenciák összehasonlítása – szinguláris feladat	31
12.	Megoldás az elmozdulásra virtuális munka elv esetén – szinguláris feladat	33
13.	Megoldás az axiális erőre virtuális munka elv esetén – szinguláris feladat	33
14.	Megoldás az elmozdulásra primál elv esetén – szinguláris feladat	34
15.	Megoldás az axiális erőre primál elv esetén – szinguláris feladat	34
16.	Energianormában mért konvergenciák kis elemszámokra – lokális hálósűrítés	36
17.	Elmozdulás konvergenciák kis elemszámokra – lokális hálósűrítés	36
18.	Energianormában mért konvergenciák nagy elemszámokra – lokális hálósűrítés	37
19.	Elmozdulásban mért konvergenciák nagy elemszámokra – lokális hálósűrítés	37
20.	Megoldás az elmozdulásra virtuális munka elv esetén - szinguláris tesztfeladat	39
21.	Megoldás az axiális erőre virtuális munka elv esetén - szinguláris tesztfeladat	39
22.	Megoldás az elmozdulásra primál elv esetén - szinguláris tesztfeladat .	40
23.	Megoldás az axiális erőre primál elv esetén - szinguláris tesztfeladat . .	40
24.	Energianormában mért konvergenciák – anyagi határfelület tesztfeladata	42
25.	Elmozdulás konvergenciák – anyagi határfelület tesztfeladata	42
26.	Axiális erő konvergenciája – anyagi határfelület tesztfeladata	43
27.	Az elmozdulás virtuális munka elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata	44
28.	Az axiális erő virtuális munka elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata	45
29.	A nyúlás virtuális munka elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata .	45

30.	Megoldás az elmozdulásra duál elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata	46
31.	Megoldás az axiális erőre dual elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata	46
32.	Megoldás a nyúlásra duál elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata .	47
33.	Megoldás az elmozdulásra primál elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata	47
34.	Megoldás az axiális erőre primál elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata	48
35.	Megoldás a nyúlásra primál elv esetén – anyagi határfelület tesztfeladata	48

Eredetiség nyilatkozat

"Alulírott Pap Benjámín Noel, a Miskolci Egyetem Gépészmérnöki és Informatikai Karának hallgatója büntetőjogi és fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem és aláírásommal igazolom, hogy ezt a dolgozatot saját magam készítettem, a benne leírt vizsgálatokat – ha ezt külön nem jelzem – magam végeztem el, és az ismertetett eredményeket magam értem el. Adatokat, információkat csak az irodalomjegyzékben felsorolt forrásokból használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Miskolc, 2024. 11. 05.

.....
a hallgató aláírása

A konzulens nyilatkozata

Alulírott, Dr. Tóth Balázs a Miskolci Egyetem Műszaki Mechanikai Intézetének oktatója a Kétmezős *hp*-verziós végeselemméthód szer kifejlesztése 1D-s rugalmasságtani feladatokra című TDK dolgozatot beadásra alkalmasnak ítélem.

Miskolc, 2024. 11. 05.

Tóth Balázs

.....
a konzulens aláírása