

Selye János Egyetem
Tanárképző Kar
Matematika Tanszék

Tudományos diákköri munka

Körláncok szerkesztése inverzióval



Témavezető: Dr. Németh László

Konzulens: Dr. habil. RNDr. Peter Csiba, PhD.

Szerző: Újvári Dániel

Tanulmányi szak:
Matematika - informatika tanári szak

Nappali képzés

Összefoglaló.

Röviden bemutatjuk a síkbeli körre vonatkozó inverziót, majd példákat adunk ennek alkalmazására, az Apollóniusz-féle feladatok, az arbelosz és a Papposz-körláncok szerkesztésére. A szerkesztések újszerűsége abban rejlik, hogy az összes feladat egységesen, nagyon részletesen, a szerkesztési lépések pontos nyomonkövethetőségével, mindenki számára elérhetően van elvégezve.

Abstract.

We briefly introduce the inversion on the plane circle and then give examples of its application to the problems of Apollonius, the construction of arbelos, and the chains of Pappus. The novelty of the edits lies in the fact that the whole exercise is carried out in a unified way, in great detail, with precise tracing of the editing steps, in a way that is accessible to all.

Tartalomjegyzék

Előszó	3
1. A síkbeli inverziók	5
1.1. Pont inverzió	5
1.1.1. Tulajdonságai	6
1.1.2. Szerkesztés menete ha P , a k körön kívül helyezkedik el	6
1.1.3. Szerkesztés menete, ha P , a k körön belül helyezkedik el	6
1.2. Az inverzió körének középpontjának inverze	7
1.3. Egyenes képe inverzióban	7
1.3.1. Szerkesztés menete	8
1.4. Kör képe inverzióban	8
1.4.1. Szerkesztés menete	9
1.5. Összegzés	9
2. Apollóniusz-feladatok	10
2.1. Kör, egyenes, egyenes	10
2.1.1. Szerkesztés menete	10
2.1.2. Diszkusszió.	11
2.2. Pont, pont, pont	13
2.3. Egyenes, egyenes, egyenes	13
2.4. Egyenes, egyenes, pont	14
2.5. Pont, pont, egyenes	15
2.6. Pont, pont, kör	16
2.7. Pont, kör, kör	17
2.8. Pont, kör, egyenes	18
2.9. Egyenes, kör, kör	19
2.10. Kör, kör, kör	20
3. Arbelos és Papposz-körláncok	21
3.1. Arbelos	21
3.2. Papposz-körláncok	23
3.2.1. Papposz-körláncok szerkesztése körre vonatkozó tükrözéssel	23
3.2.2. Körláncok Papposz-körláncban	25
4. Összefoglalás	31

Ábrák jegyzéke

1.	Inverzió pont képe	5
2.	Egyenes inverz képe	8
3.	Kör inverz képe	9
4.	Kör, egyenes, egyenes szerkesztés menete	12
5.	Kör, egyenes, egyenes megoldásai	13
6.	Két egyenest és egy pontot érintő körök	14
7.	Két pontot és egy egyenest érintő körök	15
8.	Két pontot és egy kört érintő körök	16
9.	Két kört és egy pontot érintő körök	17
10.	Egy pontot, egy egyenest és egy kört érintő körök	18
11.	Két kört és egy egyenest érintő körök	19
12.	Három kört érintő körök	20
13.	Arbelos	21
14.	Arbelos területének kiszámítása	22
15.	Arbelos területével megegyező kör	23
16.	Papposz-körlánc	23
17.	Papposz-lánc alapok megszerkesztése	24
18.	Papposz-lánc	25
19.	Első érintő körök	26
20.	Második érintő körök	26
21.	Harmadik érintő körök	26
22.	Első érintő körök inverz képe	27
23.	Második érintő körök inverz képe	27
24.	Harmadik érintő körök inverz képe	27
25.	Érintő körök	28
26.	Érintő körök inverz képe	28
27.	Apollóniusz gasket-hez hasonló körlánc	29
28.	Apollóniusz gasket-hez hasonló két körlánc	29
29.	Apollóniusz gasket-hez hasonló három körlánc	30
30.	Apollóniusz gasket-hez hasonló körláncok	30

Bevezető

A geometria az emberiség egyik legrégebbi tudományterülete, Eukleidész *Elemek* című könyvének alapja is ez volt. Ez a könyv foglalja össze a geometria alapvető fogalmait és axiómarendszerét, amelyet euklideszi geometriaként ismerünk. Az eukleideszi elemek által meghatározott geometriai rendszer rendkívül fontos volt az ókori és a középkori matematikában, és ma is széles körben tanítják a geometria alapjaként. Az eukleideszi geometria az egyszerű, síkbeli geometria területére korlátozódik, és olyan alapvető tételeket fogalmaz meg, mint például a háromszög belső szögeinek összege, a párhuzamosítási axióma és a pitagorasz-tétel. Azonban, ahogy az idők során fejlődött a matematika, a geometria egyre kisebb szerepet kapott. Napjainkban közoktatásban már nagyon kevés óraszámban oktatják, és ráadásul kevés szerkesztéssel.

A dolgozatunkban azt mutatjuk meg, hogy viszonylag nehéz feladatok akár egyszerűen is megszerkeszthetők. A szerkesztések során nem hagyományos körzőt, vonalzót használunk, hanem GeoGebra szerkesztőprogramot mint segédeszközt. Azért hasznos eszköz a GeoGebra, mert a mai világban mindenkinek a zsebében ott lapul egy okos telefon, főként az iskolásoknak. Ennek az ingyenes programnak a segítségével mindenki könnyedén kipróbálhatja és felfedezheti a geometriai szerkesztéseket. Nem állítjuk, hogy ez jobb, vagy kiváltja a hagyományos szerkesztést, viszont mivel az oktatók idő híján vannak, ezért előre is elkészíthetik benne a feladatokat. Számos példát láthattunk a GeoGebra hasznosságára nemcsak a közép-, de a felsőoktatás kapcsán is, például Talata [1], [2] munkáiban. Számunkra az a cél, hogy ezen program segítségével gyorsan, egyszerűen, és látványosan be lehessen mutatni szerkesztéseket. Mi egy speciális szerkesztési módot választottunk: a körre való tükrözést, más néven az inverziót.

A dolgozatunk első részében az inverziót mint fogalmat és gyakorlatot mutatjuk meg. Nem célunk mélyrehatóan tárgyalni a témát, ami [3]-ben megtalálható, hanem szeretnénk használató és alkalmazható tudást átadni. Külön tárgyaljuk a pont inverzióját, majd ebből levezetjük az egyenes, illetve a kör inverzét. Ezen alakzatok inverzének ismerete elengedhetetlen a következő rész tárgyalásában.

A továbbiakban az Apollóniusz-feladatkör néhány alapeladatára mélyrehatóan mutatjuk be az inverziót. A feladat egy olyan érintő kör szerkesztése, amely érint vagy áthalad három speciális alakzaton, mint a pont, az egyenes vagy a kör. Így összesen tíz feladat vetődik fel. Ezen feladatok megoldását tárgyaljuk és vezetjük le a dolgozatunk második részében. Célunk, hogy a GeoGebra program segítségével egységesen elkészítsük ezen megoldásokat, hogy jól szemléltethetők és érthetőek legyenek. Az elkészített feladatok <https://www.geogebra.org/u/ujvaridani97> érhetőek el.

A harmadik fejezetben az arbelos geometriai alakzattal vezetjük át az Apollóniusz-féle feladatok megoldásait a Papposz-körláncokra. Ezen láncok a síkon azonos méretű körök ismétlődő láncolatai két párhuzamos között. Ha ezen lánc inverz képét vizsgáljuk, három félkört és azon belül egymást érintő körök láncolatát kapjuk. Célunk megmutatni, hogy az Apollóniusz-féle feladatok segítségével egy arbeloson, vagy egy körön belül milyen összetett körláncokat

kaphatunk.

Meggyőződésünk, hogy a feladatok minden geometria iránt érdeklődő és geometriát tanuló számára hasznos lehet. Célunk még, hogy ha a középiskolában a diákoknak az inverzió nem is tananyag, akkor is a tanítási órákon, vagy szakkörökön a tanárok be tudják mutatni, hogy milyen lehetőségek rejlenek a geometriai szerkesztésekben. Továbbá, hogy felkeltsük a diákok, hallgatók érdeklődését, és arra motiváljuk őket, hogy fedezzék fel a geometriai szerkesztések világát, amely sok tudományterületnek elengedhetetlen alapját képezi, mint például a robotika, navigáció, vagy az optikai rendszerek.

A szerző e témát társszerzővel cikk formában is feldolgozta [4]-ben.

1. A síkbeli inverziók

Ebben a fejezetben a síkbeli inverzió fogalmát és tulajdonságait tárgyaljuk, amelyeket a továbbiakban alkalmazunk a szerkesztésekhez. Az inverziót a tér egy rögzített Σ síkján vizsgáljuk. Az inverzió csak azon tulajdonságait ismertetjük, amelyek a későbbi szerkesztések elkészítéséhez fontosak lesznek. A precíz tárgyalása megtalálható [3].

Legyen adott a síkon egy O középpontú, r sugarú k kör. Az alábbiak során értelmezzük a k körre vonatkozó inverziókat, ami a $\Sigma \setminus \{O\}$ lyukas síkot képezi önmagára. Mivel minden pont inverzét értelmezzük a síkon, ezért szükségünk van egy speciális eset tárgyalására, az O középpont inverz képét. A síkon minden egyeneshez hozzárendelünk egy-egy végtelen távoli pontot úgy, hogy a párhuzamos egyenesekhez ugyanazt a pontot rendelünk, és a végtelen távoli pontok egy egyenest alkotnak a végtelenben.

1.1. Pont inverzió

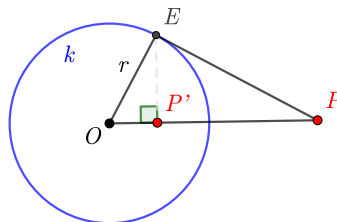
Vegyünk a síkon az O középpontú, r sugarú k kört. Legyen P egy körön kívüli pont, húzzunk érintőt a k körhöz, majd az E érintési pontot vetítsük a merőlegesen az OP szakaszra, így kapjuk a P' pontot. (Az 1. ábra.) Ebben az esetben $OP \cdot OP'$ értéke független P változótól. A OPE derékszögű háromszög esetén, írjuk fel az OE oldalára a befogótételt (lásd [5]). Így kapjuk:

$$OE^2 = OP \cdot OP'.$$

Az $OE = r$ összefüggés miatt következőképpen alakítható át az egyenlet:

$$r^2 = OP \cdot OP'. \quad (1)$$

Az EP' szakasz merőleges az OP szakaszra [6].



1. ábra. P pont inverz képe

Az így kapott eredménnyel meghatároztuk a szorzatunk értékét, ezáltal lehetővé téve inverzió fogalmának bevezetését.

1. Definíció. Adott a síkon egy O középpontú, r sugarú, k kör. Rendeljük hozzá a sík egy O -tól különböző P pontjához az OP félegyenesnek azt a P' pontját, amelyre $r^2 = OP \cdot OP'$ teljesül. Az így meghatározott transzformációt inverzióknak, az O pontot az inverzió pólusának, k kört az inverzió alapkörének nevezzük. A P' pont a P pont inverz képe amely az 1. ábrán látható.

Az inverzió a sík minden O -tól különböző pontjához rendel egy inverz pontot. Ha P az alapkörön belül van, akkor P' képe az alapkörön kívül van, ha P alapkörön kívül van, akkor P' képe az alapkörön belül helyezkedik el. A körvonalon elhelyezkedő pont képe önmaga.[3]

1.1.1. Tulajdonságai

- Illeszkedéstartó.
- Ha P inverze P' , akkor P' inverze P .
- A körön kívüli pontok inverze a körön belül, a körön belüli pontok inverze a körön kívül van.
- A k körre illeszkedő P pontok képe önmaga.
- Szögtartó.

1.1.2. Szerkesztés menete ha P , a k körön kívül helyezkedik el

1. Felvesszük a P pontot és az O középpontú k kört.
2. Megszerkesztjük OP szakaszt.
3. Alkalmazzuk Thalész-tételét az érintő szerkesztéséhez, ekkor E metszéspontot kapjuk.
4. Merőleges szerkesztése OP szakaszra E metszésponton keresztül.
5. Az OP szakasz és az E ponton áthaladó merőleges metszéspontja meghatározza a P' pontot.

1.1.3. Szerkesztés menete, ha P , a k körön belül helyezkedik el

1. Felvesszük a P pontot és az O középpontú k kört.
2. Megszerkesztjük OP egyenest.
3. P pontba merőlegest szerkesztünk OP egyenesre ekkor megkapjuk E pontot.
4. Az E pontba érintőt szerkesztünk a k körhöz.
5. Az érintő metszéspontja OP egyenessel megadja a P pont inverzét P' .

1.2. Az inverzió körének középpontjának inverze

Az 1. definíciót használva, a sík bármely pontjának tudjuk értelmezni inverz képét, kivéve az inverzió körének középpontját az O pontot. Látható hogy problémát okoz, ha az O pontot próbáljuk meg invertálni. Ha olyan P pontokat veszünk figyelembe, amelyek nagyon közel vannak az O -hoz, akkor a $|OP|$ hosszúság nagyon kicsi lesz, és a $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ egyenletnek teljesítéséhez a $|OP'|$ hosszúságnak óriásinak kell lennie (lásd az 1 egyenlet). Az 1. ábrán látható geometriai konstrukcióval is szemléltethetjük, hogy mi történik: ahogy a P' pont az O felé halad, az E pont úgy mozog, hogy az EP egyenes egyre közelebb kerül a sugárral párhuzamos OP' szakaszhoz. Amikor párhuzamosak, a metszéspont nem létezik. A P' pont végtelen messzire mozog az egyenes mentén.

Nem elfogadható, hogy van egy pont, amelyet nem lehet inverz képét venni, és az egyik kiút a problémából matematikailag az, ha úgy döntünk, hogy már nem egy szabványos euklideszi síkot tekintünk, hanem egy kiterjesztett síkot, amely egy pontot tartalmaz a végtelenben, amely a kör középpontjának inverz képe. Annak érdekében, hogy az inverzió kétszeri megismétlése minden pontot vissza vigyen az eredeti helyére a síkon, ezért a végtelenben lévő pont inverze a kör középpontja.

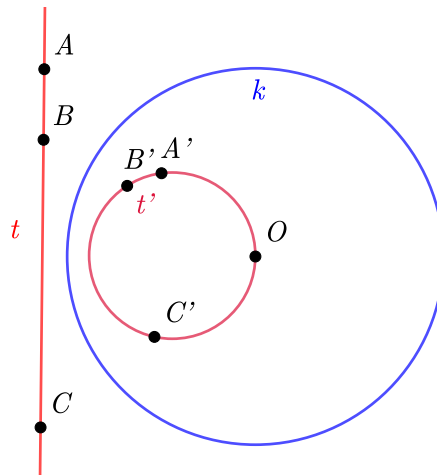
Az így kiterjesztett síkon minden egyenesnek van egy végtelen pontja, amely az O pont inverzét képezi. A párhuzamos egyenesek ugyanabba a végtelen pontban találkoznak, így ha megvizsgáljuk az összes nem párhuzamos egyenes végtelen pontját, egy végtelenben lévő egyenest kapunk, amely egy kört alkot a sík körül.

Tehát innentől kezdve, amikor egy kör középpontjának vesszük az inverz képét, akkor a sík azon végtelen pontjára gondolunk, amelyben a párhuzamos egyenesek találkoznak. Ezzel biztosítva a következőkben azt, hogy minden pontnak legyen inverz képe.

1.3. Egyenes képe inverzióban

Az előző pontban bevezetett inverzió fogalmát felhasználjuk a síkbeli alakzatok inverzióihoz. Feladataink megoldásához szükségesek az egyenesek inverzióinak ismerete. A példában nem a legegyszerűbb megoldást alkalmazzuk annak érdekében, hogy jobban tudjuk szemléltetni az eddigiekben kifejtett állításokat.

Legyen adott a síkon egy O középpontú, r sugarú, k kör, amely az inverzió alap köre, és egy t egyenes. A t egyenesen vegyünk fel a A , B és C pontokat. Határozzuk meg A , B és C inverz képét k körre. Az így kapott inverz A' , B' és C' pontokból látszódik, hogy nem egy egyenesre illeszkednek. Ha vesszük a t egyenes végtelen pontját, akkor az O pontot kapom. Amennyiben vennénk még végtelen sok pontot, amelyek illeszkednek a t egyenesre, és vennénk inverz képeiket a k körre, akkor kirajzolódna t' képe amely egy kör. Ezért elegendő vennünk az A' , B' és C' pontokra illeszkedő kört, amely minden esetben áthalad O ponton, mivel minden egyeneshez hozzárendeltünk egy végtelen pontot, amelynek inverz képe az O pont (lásd a 2. ábrán).



2. ábra. Egyenes inverz képe

- Ha a t egyenes a k körön kívül helyezkedik el, t' egy k körön belüli kör lesz, ami áthalad az inverzió középpontján.
- Ha a t egyenes érintője a k körnek, akkor a t' kör érinti a t egyenest abban a pontban, ahol az inverzió körét érinti.
- Ha a t egyenes metszi a k kört, de nem halad át az O ponton, akkor a t' kör egy metsző kör lesz a k körre nézve, ami áthalad az inverzió középpontján.
- Ha a t egyenes áthalad az O ponton, akkor a t egyenes képe önmaga lesz, $t=t'$, tehát egyenes képe egyenes, ami áthalad az inverzió középpontján.

1.3.1. Szerkesztés menete

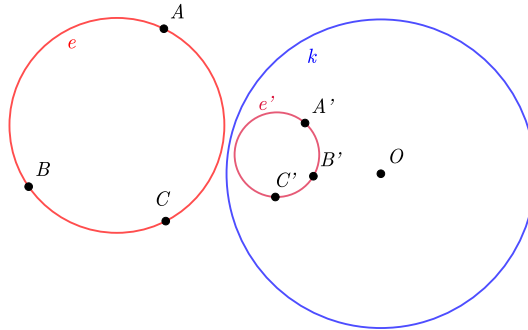
1. Felvesszük a t egyenest és az O középpontú k kört.
2. Kiválasztunk a t egyenesen tetszőleges három pontot A, B, C kapjuk.
3. Vesszük a pontok inverzét k körre nézve A', B', C' kapjuk.
4. Összekötjük egy egyenes szakasszal A', B', C' pontokat $A'B'C'_\Delta$ kapjuk.
5. Abban az esetben, ha A', B', C' pontokat nem egy egyenesen fekszenek, megszerkesztjük $A'B'C'_\Delta$ háromszög köré írható körét t' kapjuk. Ha A', B', C' pontok egy egyenesen fekszenek, akkor egyenes képe egyenes.

1.4. Kör képe inverzióban

A következőkben egy kör inverziót vizsgálunk meg, hasonlóan az egyeneshez.

Legyen adott egy tetszőleges e kör és egy tetszőleges k kör, amely az inverzió köre. Az e körön vegyünk fel tetszőlegesen három pontot A, B és C -t [7]. Határozzuk meg A, B és C

inverz képét k körre nézve. Az így kapott A' , B' és C' pontokat összekötő kör az e kör inverz képe $\rightarrow e'$ (lásd a 3. ábrán).



3. ábra. Kör inverz képe

- Ha az e kör a k körön kívül helyezkedik el, akkor e' a k körön belül helyezkedik el.
- Ha az e kör a k körön belül helyezkedik el, akkor e' a k körön kívül helyezkedik el.
- Ha az e kör metszi a k kört, akkor e' is metszi a k kört azon pontokban, ahol e is metszi.
- Ha az e kör metszi a k kör középpontját, akkor e' egy egyenes, amely e kör és k kör metszéspontján halad át, ha van metszéspont.

1.4.1. Szerkesztés menete

1. Felvesszük e tetszőleges kört és O középpontú k kört.
2. Kiválasztunk az e körön tetszőleges három pontot A , B , C kapjuk.
3. Vesszük a pontok inverzét k körre A' , B' , C' kapjuk.
4. Összekötjük A' , B' , C' pontokat $A'B'C'_{\Delta}$ kapjuk.
5. Abban az esetben, ha A' , B' , C' pontok nem egy egyenesen fekszenek, megszerkesztjük $A'B'C'_{\Delta}$ köré írható körét e' kapjuk. Ha A' , B' , C' pontok egy egyenesen fekszenek akkor kör képe egyenes.

1.5. Összegzés

A síkbeli inverzió a középponttól eltekintve kölcsönösen egyértelmű, ponttartó, illeszkedéstartó, szögtartó leképezés, amely az egyeneseket és köröket egyenesbe vagy körbe viszi át. Egy pont képe lehet pont és a végtelen, egy egyenes képe lehet egy kör illetve egyenes, és a kör képe is lehet egyenes is illetve egy kör is. A továbbiakban ezen tulajdonságokat fogjuk felhasználni a szerkesztéseinkben.

2. Apollóniusz-feladatok

Ebben a fejezetben olyan geometriai feladatokat, problémákat fogunk tárgyalni, amelyek az inverzió ismeretével egyszerűbben megoldhatóak, mint hagyományos euklideszi szerkesztésekkel. Apollóniusz írt két könyvet *Contacts* ($\epsilon\pi\alpha\phi\alpha\iota$ – Epaphaí, Tangencies) címen, amelyben felvetette és meg is oldotta a híres problémáit [8], [9]. (Sajnos az eredeti könyv mára elveszett.) A probléma a következő: legyen adott három alakzat, amelyek lehetnek pontok, egyenesek vagy körök. Szerkesszünk olyan kört vagy egyenest, amely érinti az alakzatokat (átmegy a pontokon). Így keletkezett tíz feladat. Az egyszerűbben megoldhatókat az első könyvében írta le, míg az összetettebb megoldást igénylő feladatokkal a második kötetben foglalkozott. Az egyszerűbb esetek: ha például három pontra kell egy kört rajzolnunk, vagy három egyeneshez kell érintő kört szerkesztenünk. Ezek a háromszög köré és bele írható körök esetei. A legösszetettebb feladat az ún. kör, kör, kör feladat, amikor három körhöz keresünk érintő köröket.

A következőkben bemutatjuk az összes esetet. Először egy összetettebb feladatot oldunk meg részletesebben, majd a maradék kilenc esetet kevésbé részletesen. A szerkesztéseket a GeoGebra szoftverrel végeztük el.

Az összes eset részletes megoldása [10]-ben tekinthető meg.

2.1. Kör, egyenes, egyenes

Feladat: Adott a síkon két egyenes és egy kör. Szerkesszünk olyan kört mely érinti az adott elemeket.

Elemzés: Az adott körünket ponttá zsugorítjuk, mert így a feladat egyszerűsödik pont, egyenes, egyenes problémára. Mivel lezsugorítottuk a kört, ezért az egyeneseket is el kell tolnunk az adott távolsággal. Vagy nagyítjuk, vagy kicsinyítjük a ponttól való távolságot. A pontunk lesz az inverzió körének középpontja, amelynek méretét tetszőlegesen választhatjuk meg. A két egyenesnek vesszük az inverzióját, amelyből két kört kapunk. Ezeknek a köröknek vesszük az érintőit, és ezeknek az érintőknek vesszük az inverzét az alapkörre. Ebben az esetben olyan köröket fogunk kapni, amelyek érintik a két egyenest és a pontot. Ezeknek a köröknek megkeressük a középpontját, és növeljük vagy csökkentjük, annyival a kör sugarát amennyivel eltoltuk az egyenesünket, ezáltal kapunk két megoldást. Mivel az egyeneseket két irányba tudjuk eltolni ezért négy megoldásunk lesz. Szerkesztéshez a GeoGebra programot használjuk.

A szerkesztés menete az alábbi linken elérhető: [Kör, egyenes, egyenes szerkesztésének mente GeoGebrában.](#)

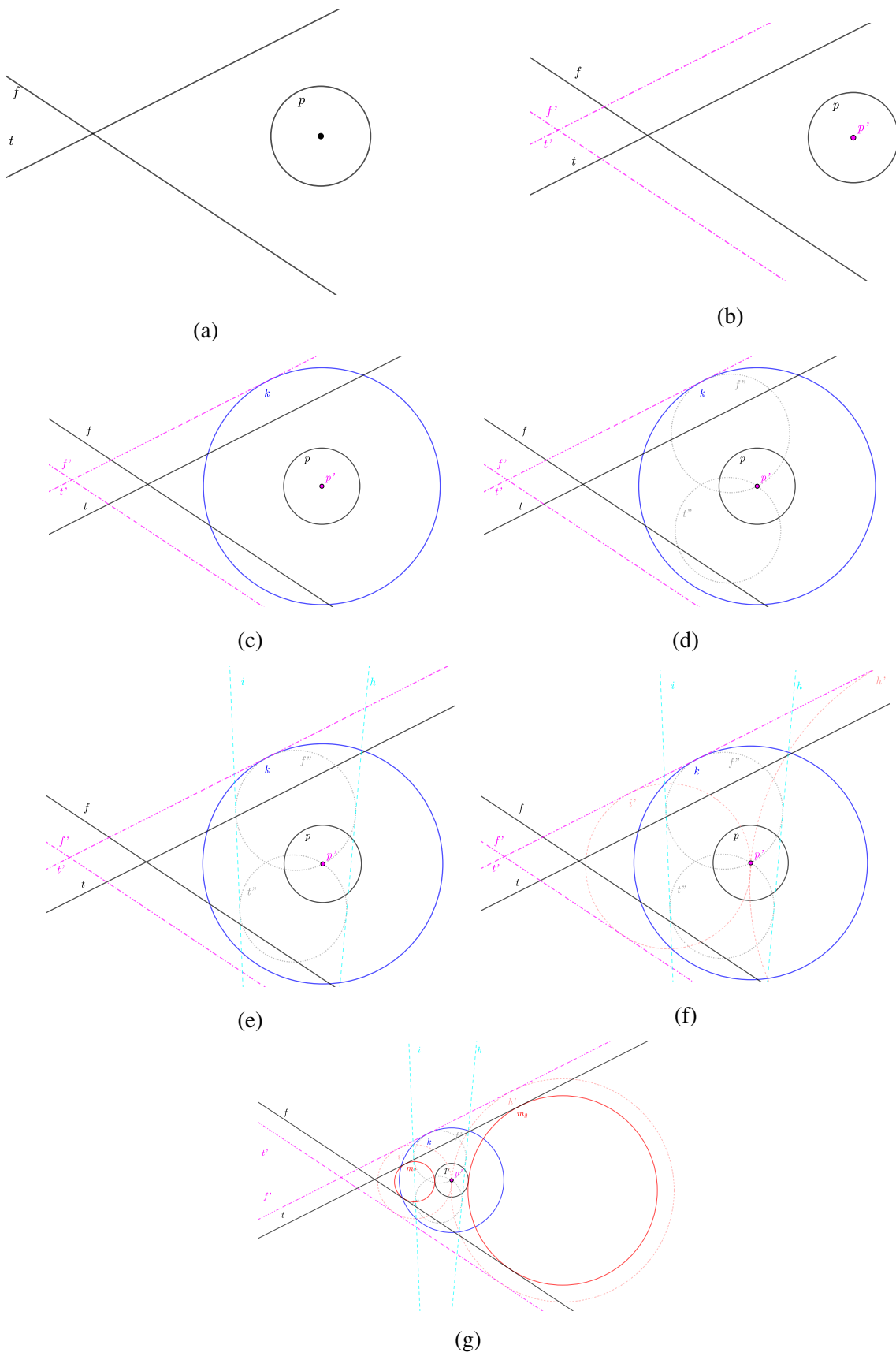
2.1.1. Szerkesztés menete

1. Legyen adott az f és t egyenes, és p az alapkör. Lásd a 4a. ábrán.
2. Az f és t egyeneseket eltoljuk p kör sugarával, és $p \rightarrow p'$ ponttá zsugorítjuk. Lásd a 4b. ábrán.

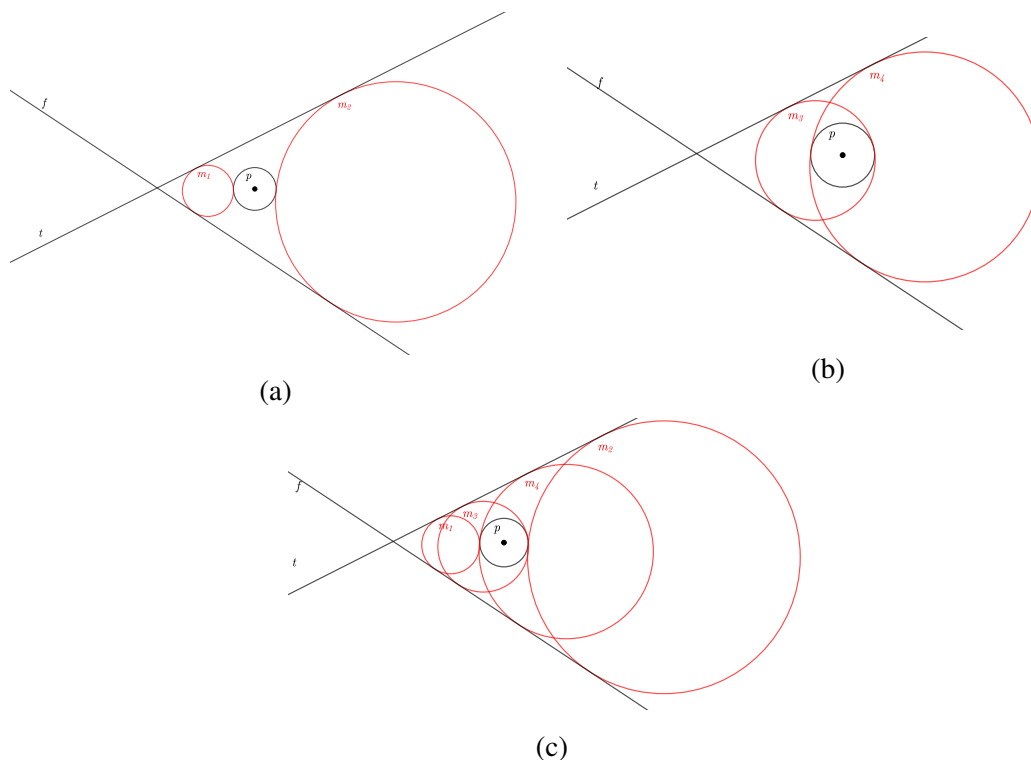
3. Felvesszük a k kört úgy, hogy ugyanazon középpontja legyen mint a p körnek, és a k kör lesz az inverzió köre. Lásd a 4c. ábrán.
4. Vesszük f' és t' inverzét $\rightarrow f''$ és t'' . Lásd a 4d. ábrán.
5. Az f'' és t'' inverz köröknek megszerkesztjük az érintőit $\rightarrow i$ és h . Lásd a 4e. ábrán.
6. Az i és h érintőknek vesszük az inverzét k körre $\rightarrow i'$ és h' körök. Lásd a 4f. ábrán.
7. Az i' és h' köröket lecsökkentjük p kör sugarával $\rightarrow m_1$ és m_2 . Lásd a 4g. ábrán. Így kapjuk meg, azon megoldásokat amelyek kívülről érintik a p kört. Lásd az 5a. ábrán.
8. Ezen lépéseket ugyanilyen sorrendben hajtjuk végre, viszont a két egyenest ellentétes irányba toljuk el a p kör sugarával, és így megkapjuk azon megoldás köreit, amelyek belülről érintik a p kört, és érintik az f és t egyeneseket. Lásd az 5b. ábrán.
9. A feladat négy megoldása. Lásd az 5c. ábrán.

2.1.2. Diszkusszió.

- Ha t és f metszik egymást és p kör nem érinti az egyeneseket, akkor négy megoldásunk van.
- Ha érinti a p kör valamelyik egyenest, akkor három megoldásunk lesz.
- Ha az egyenesek metszéspontja és a kör középpontja egybeesik, akkor nyolc megoldásunk lesz.
- Ha f és t párhuzamos és p a két egyenes közötti síkon helyezkedik el, akkor két megoldása van a feladatnak.
- Ha az f és t egyenesek párhuzamosak, és a p kör valamely egyenes túloldalán helyezkedik el, de érinti az egyenest, akkor egy megoldásunk van.
- Ha az f és t egyenesek párhuzamosak, és a p kör valamely egyenes túloldalán helyezkedik el, de nem érinti az egyenest, akkor nincs megoldása a feladatnak.



4. ábra. Kör, egyenes, egyenes szerkesztés menete



5. ábra. Kör, egyenes, egyenes megoldásai

2.2. Pont, pont, pont

További feladatok elemzését és diszkusszióját írjuk le, és a szerkesztés menete megtekinthető a mellékelt linken.

Feladat: Adott három pont a síkon. Szerkesszünk olyan kört, amely áthalad a három ponton.

Elemzés: Három pontunk adott a síkon. Összekötjük őket egyenesekkel, majd az egyenesek által alkotott háromszögnek vesszük az oldalfelező merőlegeseit, és azok metszéspontja megadja a megoldás körének középpontját. A megoldás az egyenesek által megkapott háromszög köré írható kör.

Szerkesztés menete: [Pont, pont, pont szerkesztés menete Geogébrában.](#)

Diszkusszió.

- Ha a pontok nem fedik egymást vagy két pont fedi egymást vagy egyesíti, minden esetben van egy megoldásunk.
- Ha három pont fedi egymást, akkor végtelen sok megoldásunk van.
- Ha egy egyenesre esik, akkor nincs megoldásunk.

2.3. Egyenes, egyenes, egyenes

Feladat: Adott három egyenes a síkon. Szerkesszünk olyan kört, amely érinti mindhárom egyenest a síkon.

Elemzés: Három egyenes adott a síkon, vegyük fel úgy ezeket az egyeneseket hogy metsszék egymást. Az így kapott metszéspontok egy háromszöget alkotnak, amelynek a belső szögfelezői metszéspontja adja meg a háromszög beleírható körét, és a külső szögfelezők adják meg a külső érintő köröket, így kapva a négy megoldást.

Szerkesztés menete: [Egyenes, egyenes, egyenes szerkesztés menete Geogebrában.](#)

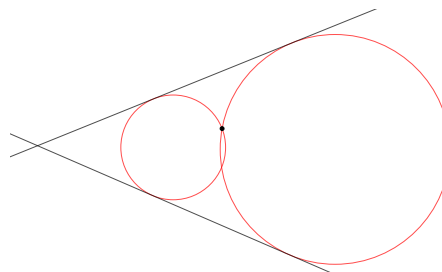
Diszkusszió.

- Ha az egyenesek páronként metszik egymást, akkor négy megoldás van.
- Ha az egyenesek párhuzamosok és nem fedik egymást, akkor nincs megoldásunk.
- Ha az egyenesek párhuzamosok, és legalább két egyenes fedi egymást, akkor végtelen sok megoldásunk van.
- Ha két egyenes párhuzamos, és a harmadik egyenes metszi mindkét egyeneset, akkor két megoldásunk van.

2.4. Egyenes, egyenes, pont

Feladat: Adott két egyenes és egy pont a síkon. Szerkesszünk olyan kört, amely érinti a két egyenest és áthalad a ponton.

Elemzés: Ettől a feladattól kezdve az inverziót alkalmazzuk a megoldásban. Adott a síkon két egyenes és egy pont, úgy vesszük fel az egyeneseket, hogy metsszék egymást, és a pont ne legyen az egyeneseken. Úgy választjuk meg az inverzió körét, hogy a pont legyen a középpontja. Vesszük az egyenesek inverzét, így kapunk két olyan kört, amelyek áthaladnak a ponton. Megszerkesztjük a két inverz körnek az érintőit, ezek az érintők olyan egyenesek, amelyek érintik az inverzió körét és az adott köreinket, tehát vesszük az érintők inverzeit az inverzió körére, akkor a két érintő egyenesből olyan köröket kapunk, melyek áthaladnak az inverzió körének középpontján, és érintik az egyeneseket.



6. ábra. Két egyenest és egy pontot érintő körök

Szerkesztés menete: [Egyenes, egyenes, pont szerkesztés menete GeoGebrában.](#)

Diszkusszió.

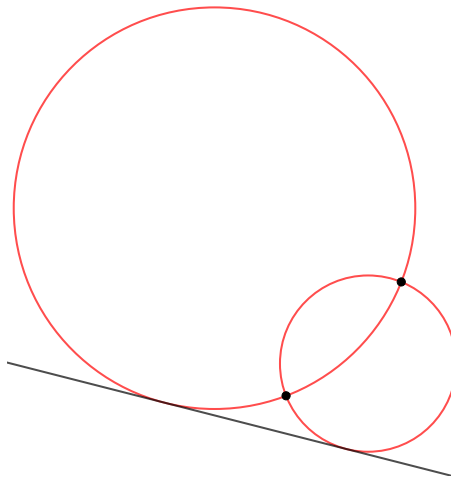
- Ha a pont a két egyenes metszéspontjában helyezkedik el, nincs megoldása a feladatnak.

- Ha az egyenesek párhuzamosok, és a pont nem a két egyenes között, vagy valamelyik egyenesen helyezkedik el, nincs megoldása a feladatnak
- Ha az egyenesek párhuzamosok, és a pont az egyik egyenesen helyezkedik el, akkor egy megoldásunk van.
- Ha az egyenesek párhuzamosak, és a pont az egyenesek között helyezkedik el, vagy az egyenesek metszik egymást, akkor két megoldásunk van.

2.5. Pont, pont, egyenes

Feladat: Adott egy egyenes és két pont a síkon. Szerkesszünk olyan kört, amely érinti az egyenest és áthalad a pontokon.

Elemzés: Adott a síkon egy egyenes és két pont. Vegyük fel úgy a pontokat, hogy egyenesnek azonos oldalán legyenek és ne fedjék egymást. Úgy válasszuk meg az inverzió körét, hogy az egyik pont az inverzió középpontja legyen, és a másik pont az inverzió körén helyezkedjen el. Ebben az esetben a kör középpontjának inverze a végtelenben lesz, a másik ponté pedig önmaga lesz. Vegyük az egyenes inverzét és az így kapott körnek az érintőit azon ponthoz, amely nem mozdult el az inverzió során. Az így kapott érintők érintik egyik pontunkat és az egyenesből kapott körünket. Tudjuk, hogy a végtelenben minden egyenes felvesz egy végtelen pontot, és ott érinti a pont inverzét. Tehát vesszük az érintő egyenesek inverzét és olyan köröket kapunk, amelyek érintik az egyenest és áthaladnak az adott pontokon.



7. ábra. Két pontot és egy egyenest érintő körök

Szerkesztés menete: [Pont, pont, egyenes szerkesztésének menete GeoGebrában.](#)

Diszkusszió.

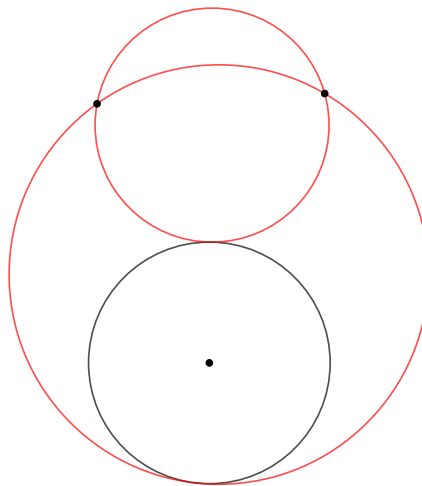
- Ha a pontok az egyenes egy síkjában helyezkednek el, és nem fedik egymást, akkor két megoldásunk van.

- Ha a pontok az egyenes egy síkjában helyezkednek el, és fedik egymást, akkor végtelen sok megoldás van.
- Ha a pontok az egyenesen helyezkednek el, és fedik egymást, egy megoldás van.
- Ha a pontok az egyenes két oldalán vagy az egyenesen helyezkednek el, de nem fedik egymást, akkor nincs megoldásunk.

2.6. Pont, pont, kör

Feladat: Adott egy kör és két pont a síkon. Szerkesszünk olyan kört, amely áthalad a két ponton és érinti a kört.

Elemzés: Adott a síkon egy kör és két pont, vegyük fel úgy a pontokat, hogy a körön kívül vagy belül legyen mindkettő. Úgy válasszuk meg az inverzió körét, hogy az egyik pont az inverzió középpontja legyen, és a másik pont az inverzió körén helyezkedjen el. Ebben az esetben a kör középpontjának inverze a végtelenben lesz, a másik ponté pedig önmaga lesz. Vegyük a kör inverzét és az így kapott körnek az érintőit azon ponthoz, amely nem mozdult el az inverzió során. Az így kapott érintők érintik egyik pontunkat és a körből kapott körünket. Tudjuk, hogy a végtelenben minden egyenes felvesz egy végtelen pontot, tehát vesszük az érintő egyenesek inverzét, így olyan köröket kapunk, amelyek érintik a kört és áthaladnak az adott pontokon.



8. ábra. Két pontot és egy kört érintő körök

Szerkesztés menete: [Pont, pont, kör szerkesztés menete GeoGebrában.](#)

Diszkusszió.

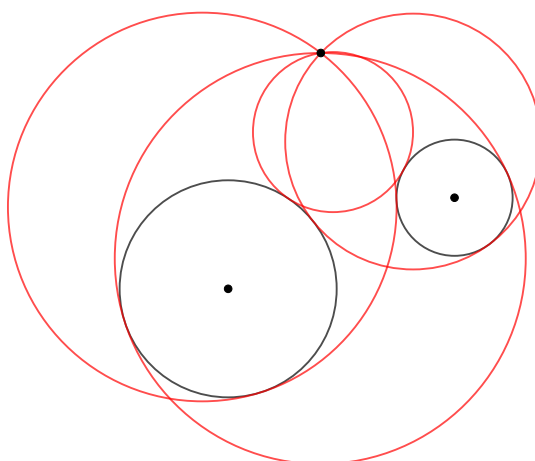
- Ha a pontokat nem választja el a kör, tehát vagy a körön kívül, vagy a körön belül helyezkednek el, akkor két megoldás van.

- Ha az egyik pont a körön helyezkedik el, vagy mindkettő pont fedi egymást, akkor egy megoldásunk van.
- Ha a pontok a körön helyezkednek el, de nem fedik egymást, vagy a kör elválasztja őket, tehát az egyik a körön belül, a másik a körön kívül helyezkedik el, akkor nincs megoldás.

2.7. Pont, kör, kör

Feladat: Adott egy pont és két kör a síkon. Szerkesszünk olyan kört, amely áthalad a ponton és érinti a két kört.

Elemzés: Adott a síkon egy pont és két kör. Vegyük fel úgy az alakzatokat, hogy ne fedjék vagy metsszék egymást. Válasszuk az inverzió körét úgy, hogy annak középpontja a pontunk legyen, így mikor a pont inverzét vesszük, az a végtelenben lesz, míg a körök inverzei körök lesznek. Vegyük az invertált körök érintőit, amelyek olyan egyenesek lesznek, melyek érintik az inverz köröket. Mivel egyenesek, van egy pontjuk a végtelenben, tehát a pontunk inverzével is érintkeznek. Ezért, ha vesszük az érintők inverzeit, akkor olyan köröket kapunk, amelyek érintik a két kört és áthaladnak a ponton.



9. ábra. Két kört és egy pontot érintő körök

Szerkesztés menete: [Pont, kör, kör szerkesztés menete GeoGebrában.](#)

Diskusszió.

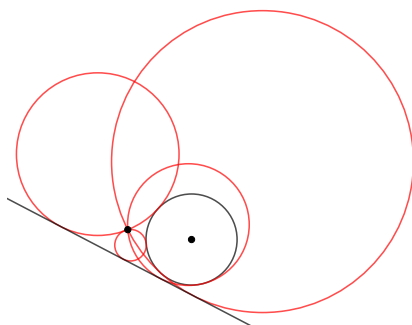
- Ha a pont és a körök nem fedik, illetve nem metszik egymást, akkor négy megoldásunk van.
- Ha a két kör metszi egymást, de nem fedik, akkor két megoldásunk van.
- Ha a pont és az egyik kör a második körön belül helyezkedik el, akkor négy megoldásunk van.

- Ha az egyik körön belül helyezkedik el a pont, vagy a másik kör és a harmadik alakzat a körön kívül helyezkedik el, nincs megoldásunk.
- Ha a pont az egyik körön helyezkedik el, és a másik kör érinti, de nem azonos pontban, akkor egy megoldásunk van.
- Ha a pont a két kör metszésén belül helyezkedik el a pont, akkor két megoldásunk van.

2.8. Pont, kör, egyenes

Feladat: Adott a síkon egy pont, egy kör és egy egyenes. Szerkesszen olyan kört, amely áthalad a ponton és érinti az egyenest és a kört.

Elemzés: Adott a síkon egy pont, egy kör és egy egyenes. Vegyük fel úgy az alakzatokat, hogy ne fedjék egymást, és a pont és kör az egyenes egy oldalán helyezkedjenek el. Válasszuk meg az inverzió körét úgy, hogy a pontunk legyen az inverzió körének középpontja. Ebben az esetben a pont inverze a végtelenben lesz. Vegyük a kör és az egyenes inverzét, így kapunk két inverz kört, két eset kivételével. Ha a pont az egyenesen vagy a körön helyezkedik el, akkor annak inverz képe egyenes lesz, és nem tudunk érintőket szerkeszteni egy egyeneshez és körhöz. De mivel a pont ilyenkor valamelyik alakzaton helyezkedik el ez egy egyszerűbb problémához vezet, amikor csak egy egyenes és egy kör közötti érintő kört kell szerkeszteni. Tekintsünk el ezektől az esetektől. Tehát az egyenes és kör inverze is egy-egy kör. Így tudunk érintőket szerkeszteni a két inverz kör közé, amely egyenesek érintik az inverz köröket, és van egy közös pontjuk a végtelenben a pont inverzével. Tehát ha vesszük az érintők inverzét, akkor olyan köröket kapunk, amelyek érintik az egyenest és a kört, és áthaladnak a ponton.



10. ábra. Egy pontot, egy egyenest és egy kört érintő körök

Szerkesztés menete: [Pont, kör, egyenes szerkesztés menete GeoGebrában.](#)

Diszkusszió.

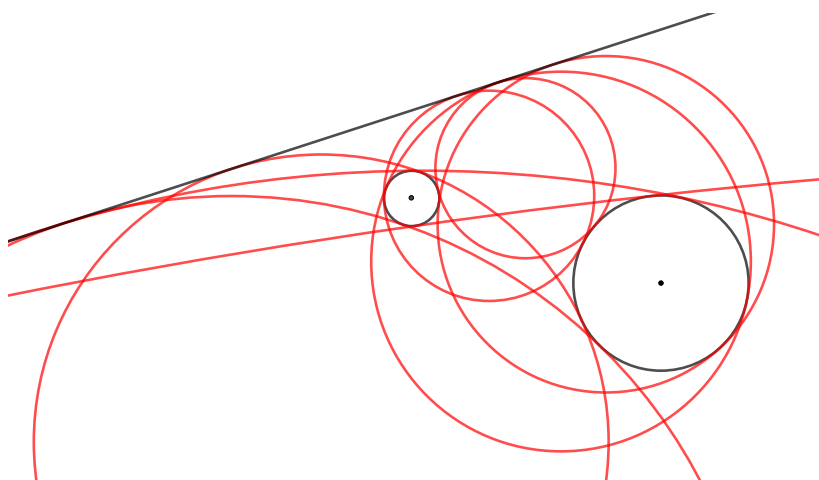
- Ha a pont és a kör az egyenes azonos oldalán helyezkedik el, és nem fedí a kör a pontot, akkor négy megoldásunk van.

- Ha az egyenes metszi vagy érinti a kört, és a pont a körrel azonos oldalán helyezkedik el az egyenesnek, akkor két megoldásunk van.
- Ha a pont és a kör az egyenes másik oldalain vagy a pont a körön belül helyezkedik el, és a kör nem metszi vagy érinti a kört, akkor a feladatnak nincs megoldása.
- Ha a pont a kör középpontjában helyezkedik el, és az egyenes érinti a kört, akkor egy megoldásunk van.

2.9. Egyenes, kör, kör

Feladat: Adott a síkon egy egyenes és két kör. Szerkesszen olyan kört, amely érinti az egyenest és a két kört.

Elemzés: Kicsinyítsük le mindkét kört annyira, hogy az egyik ponttá zsugorodjon. Ekkor az egyenest is eltoljuk párhuzamosan a kicsinyítés távolságával. Így kapunk egy pont, egyenes, kör Apollóniusz-feladatot. Legyen az inverzió alapköre egy tetszőleges pont körüli kör. Alkalmazva az alakzatokra ezt az inverziót, kapunk egy kör, kör feladatot (a pont képe végtelenben van), azaz a két körhöz kell megszerkesztetni a közös érintőket. Majd ezek inverz képeit nagyítani a végső megoldáshoz. Mivel két irányba is el tudjuk tolni az egyenest, így általában kétszer 4 megoldásunk lesz (11. ábra).



11. ábra. Két kört és egy egyenest érintő körök

Szerkesztés menete: [Egyenes, kör, kör szerkesztés menete GeoGebrában.](#)

Diszkusszió.

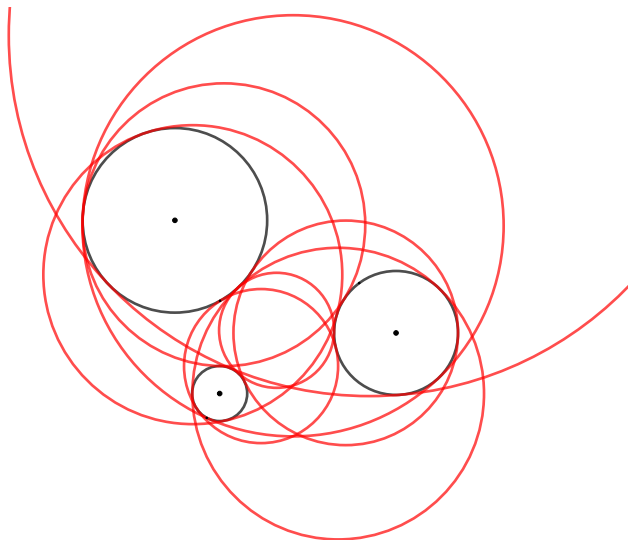
- Ha a két kör nem fedí egymást, és az egyenes azonos oldalán helyezkednek el, akkor nyolc megoldásunk van.
- Ha az egyik kör érinti vagy metszi az egyenest, és a másik kört nem fedí, de azonos oldalon helyezkednek el, akkor négy megoldásunk van.

- Ha az egyik kör érinti vagy metszi az egyenest, és a másik kör a metsző körön belül helyezkedik el, akkor két megoldásunk van.
- Ha az egyik kör a másik körön belül helyezkedik el, és nem metszik az egyenest, vagy a két kör az egyenes két különböző oldalán helyezkednek el, akkor nincs megoldásunk.

2.10. Kör, kör, kör

Feladat: Adott a síkon három kör. Szerkesszünk olyan kört, amely érinti a három kört.

Elemzés: Ebben a feladatban csúcsosodnak ki Apollóniusz feladatai. A következőkben a kör, kör, egyenes feladatra vezetjük vissza. Vegyünk egy olyan kört, amelynek középpontja az egyik körön helyezkedik el. Ez lesz az első inverziós körünk, amelyre ha a megadott három kör inverzét vesszük, akkor egy egyenest és két kört kapunk. Innentől kezdve az előzőekben ismerttetett lépések alapján eljutunk egy olyan megoldásig, ahol az inverz egyenes és a két körre érintő köröket kapunk. Ezeket a köröknek kell még az első inverz körünkre invertálni, így megkapva azon megoldásokat, amely az eredeti három kört érintik.



12. ábra. Három kört érintő körök

Szerkesztés menete: [Kör, kör, kör szerkesztés menete GeoGebrában.](#)

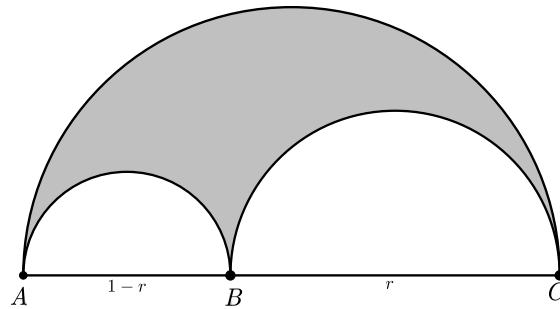
Diszkusszió.

- Ha a három kör nem fedi és nem érinti egymást, akkor nyolc megoldásunk van.
- Ha két kör fedi egymást és a harmadik kört nem, akkor nincs megoldásunk.
- Ha az egyik körön belül helyezkedik el a maradék két kör, akkor négy megoldásunk van.
- Ha a körök érintik egymást, akkor két megoldás van.

3. Arbelos és Papposz-körláncok

3.1. Arbelos

A továbbiakban a körök érintkezésével foglalkozunk, azon belül is speciális eseteket fogunk megvizsgálni, annak érdekében, hogy körláncokat kapjunk.



13. ábra. Arbelos

Az "arbelos" kifejezés görögül cipéskést jelent. Ezt a kifejezést a 13. ábra árnyékolt területére használjuk, amely az ókori suszterek által használt kés pengéjére emlékeztet. Arkhimédész volt az első matematikus, aki tanulmányozta ennek az alaknak a matematikai tulajdonságait. Az arbelos egy olyan sík terület, amelyet három, három csúcsú kör határol úgy, hogy minden félkör minden sarka meg van osztva a másikkal egy egyenes mentén, amely a legnagyobb kör átmérője, de a kisebb körök átmérői is rajta helyezkednek el. A központi bevágás helyzete tetszőleges, és az átmérő mentén bárhol elhelyezhető. Az arbelos számos váratlan azonosságot kielégít [11].

Vizsgáljuk meg a bal és jobboldali félkör átmérőjét. Mivel körök átmérője $r < 1$, és $1 - r$, ezért az őket körülvevő kör átmérője 1. Ekkor az ív hossza az arbelos alja mentén a következő:

$$L = \frac{1}{2}[\pi r + \pi(1 - r)] = \frac{1}{2}\pi.$$

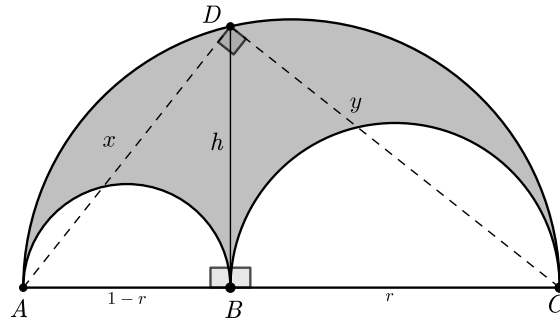
Így az ívhossz a bezáró félkör mentén megegyezik a két kisebb félkör mentén mért ívhosszal.

Állítsunk merőlegest az átmérőre B pontban, hogy az így kapott egyenes metszéspontja a körívvel legyen D (a 14. ábra). A BD átmérőjű kör területe megegyezik az arbelos területével. Legyen $AC = 1$ és $r = AB$, majd egyszerre oldjuk meg az alábbi egyenleteket: [11]

$$\begin{aligned}
r^2 + h^2 &= x^2 \\
(1 - r^2) + h^2 &= y^2 \\
x^2 + y^2 &= 1^2
\end{aligned}$$

Az oldalakra:

$$\begin{aligned}
x &= AD = \sqrt{r} \\
y &= CD = \sqrt{1 - r} \\
h &= BD = \sqrt{r(1 - r)}
\end{aligned}$$

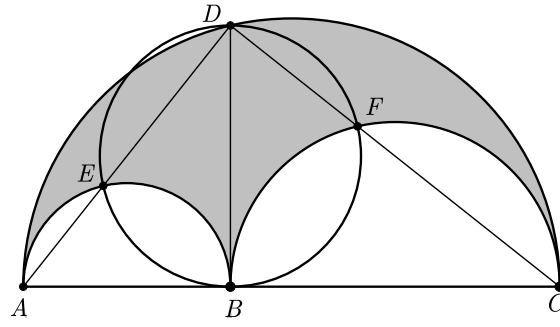


14. ábra. Arbelos területének kiszámítása

Vegyük az AB és BC átmérőjű körök érintőjét, az így kapott két pont E és F pontok. A 15. ábrát. Ezek a pontok AD és CD egyeneseken fekszenek. Továbbá a BD és az EF felezi egymást, és a B, D, E és F pontok húrnégyszöget alkotnak.

Konstruáljuk meg az érintő körök láncolatát, kezdve a két kis és a nagy kör érintőjével. Ezt a láncot Papposz-körláncoknak nevezzük, és a körök középpontjai egy olyan ellipszisre esnek, amelynek fókuszpontjai az azt határoló félkörök középpontjaiban vannak. Továbbá, az n -edik kör C_n átmérője $(1/n)$ -szerese a félkör alapjára merőleges távolságnak. Ez az eredmény legkönnyebben inverzióval bizonyítható, de már Papposz is ismerte, aki ősi tételként hivatkozott rá [11].

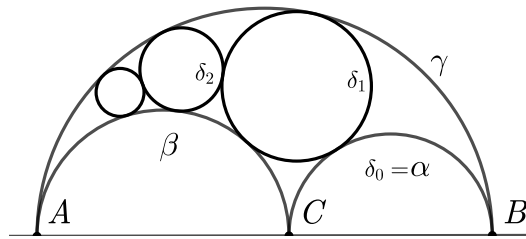
Az EF közös érintője (15. ábra), valamint a nagy félkör és az első Papposz-kör közös érintője az AB egyenesen találkozik.



15. ábra. Arbelos területével megegyező kör

3.2. Papposz-körláncok

A Papposz-körlánc egy arbelos-on belüli, érintő körök láncolata. Legyen α, β, γ az arbelost alkotó körök, és A, B, C érintési pontok. Az első érintő kör α, β, γ is érinti δ_1 . A következő kör β, γ, δ_1 érinti δ_2 , így folytatva ezen érintő köröket, melyek érintik β, γ , és éppen aktuális δ , akkor kapjuk meg a Papposz-körláncot (lásd a 16. ábra).



16. ábra. Papposz-körlánc

Az előzőekben tárgyalt apollóniusz feladatokkal megtudjuk szerkeszteni a körláncot, mert három körhöz kell érintőt szerkeszteni. Azonban ez egy hosszadalmas megoldás lenne. Amennyiben megvizsgáljuk a 16. ábrát, látható hogy a β és γ körök érintik az összes körláncban elhelyezkedő kört. A harmadik kör pedig mindig érinti az előző illetve következő kört a láncban. Az inverzió alaptulajdonsága hogy illeszkedéstartó, ezért elegendő a síkon megszerkesztenünk egy érintő azonos méretű körökből álló láncot, melyek középpontja egy egyenesen helyezkedik el, és két párhuzamost, melyek érintik a köröket. Ezen alakzat inverz képe egy Papposz-körlánc lesz.

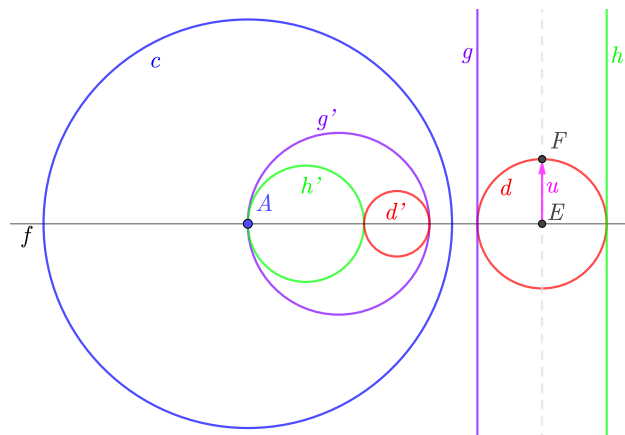
3.2.1. Papposz-körláncok szerkesztése körre vonatkozó tükrözéssel

Következő részben a Papposz-körlánc körre vonatkozó tükrözését fogjuk levezetni.

Elemzés: Készítünk két párhuzamost és egy olyan kört, amely érinti mindkét egyenesünket. Ebben az esetben, ha vesszük mindhárom alakzatnak inverz képét egy tetszőleges körre, akkor három olyan kört fogunk kapni, amelyek speciálisan érintik egymást. A két párhuzamos az inverzió középpontjában, és a kör a két párhuzamosból kapott köröket egy-egy pontban érinti. Abban az esetben, ha a párhuzamosok közé újabb köröket szerkesztünk olyan módon, hogy a két párhuzamost és a kört is érintse, akkor az újabb körünk inverz képe érinteni fogja a már meglévő három körünket. Ezzel a módszerrel újabb körök szerkesztése esetén mindig olyan kör lesz az inverzió képe, amely érinti azokat az alakzatokat, amelyeket inverzió előtt is. Így kapjuk meg a Papposz-körláncokat körre vonatkozó tükrözéssel.

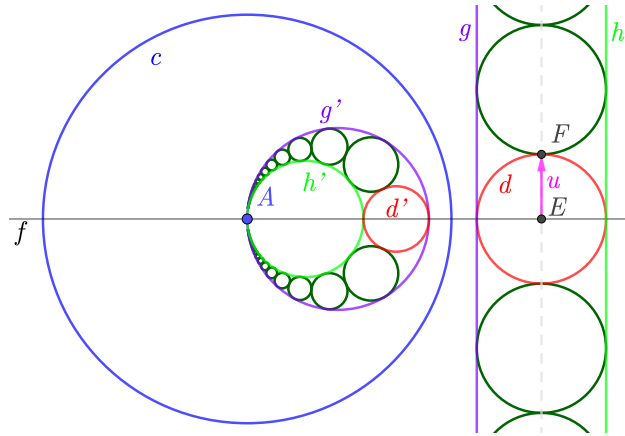
Szerkesztés:

- Vegyünk fel egy tetszőleges A középpontú c kört.
- Vegyünk fel egy tetszőleges E pontot.
- Szerkesszünk meg A és E pont közötti egyenest, ez f .
- Szerkesszünk E középpontú tetszőleges sugarú kört, ez d .
- A d kör és f egyenes metszéspontjaiban állítsunk merőlegest f egyenesre g, h egyenesek.
- Szerkesszünk f egyenesre merőlegest E ponton keresztül, majd vegyük a metszéspontját d körrel ez F pont.
- Legyen $\overrightarrow{EF} = \vec{u}$ vektor.
- Tekintsük c kört az inverzió körének, vegyük rá d kör és g, h egyenes inverzét d', g', h' köröket kapjuk. (lásd a 17. ábra).



17. ábra. d', g', h'

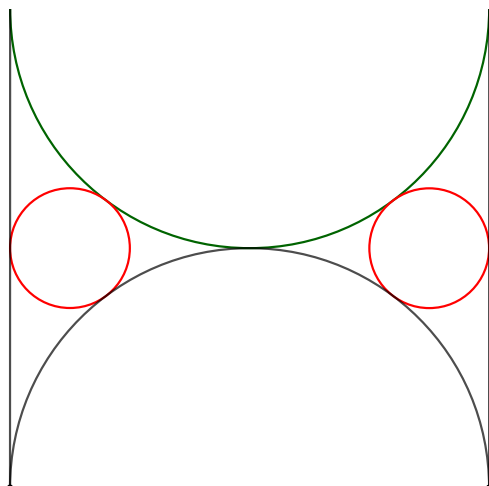
- E középpontú d kört képét vesszük $2\vec{u}$ távolsággal és $-2\vec{u}$ távolsággal. Ezt a lépést ismételjük meg mindig, hogy újabb elemeket kapjunk a körlánchoz (lásd a 18. ábra).



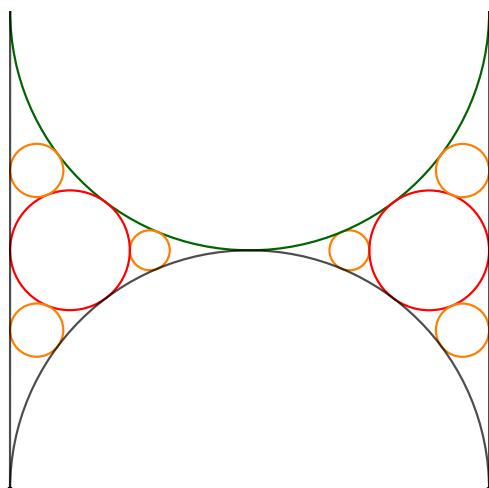
18. ábra. Papposz-lánc

3.2.2. Körláncok Papposz-körláncon

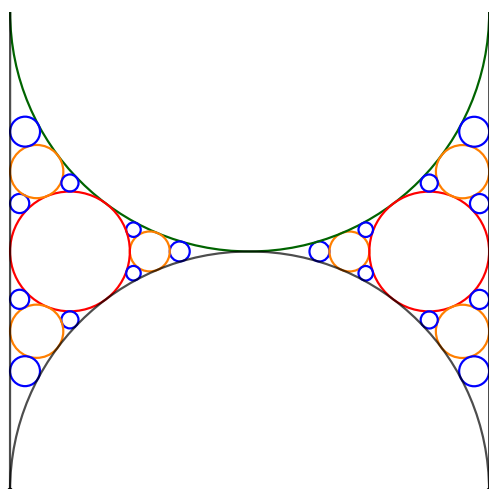
Témavezetőm javaslatára továbbgondoltuk a Papposz-körláncot és az Apollóniusz-féle feladatokat. Arra a következtetésre jutottunk hogy össze lehet kombinálni őket. Ebben a fejezetben az idáig megismert Apollóniusz-féle feladatok megoldásait fogjuk használni Papposz-körláncon. Azt mutatjuk meg hogy egy Papposz-körláncon belül is lehet még végtelen sok körláncot létrehozni. A 18. ábrán jól megfigyelhető, hogy egy körláncot hogyan lehet megszerkeszteni, azonban, ha a két párhuzamosunk közé nem csupán egy kört teszünk hanem többet, akkor további körláncokat kapunk. Úgy készítjük a további köröket, hogy azok is érintő körök legyenek. Elsőként egy olyan kört szerkesztünk, amely érinti a két párhuzamoson belüli kört és az egyik egyenest (lásd a 19. ábrán). Itt alkalmazzuk az egyenes, kör, kör Apollóniusz-féle feladat megoldását, így kapva meg az érintő kört. Az így létrejött érintő körhöz is szerkesztünk még érintő köröket, amelyből még három Apollóniusz-féle feladat következik. Így bővítve az ábrát végtelen sok körláncot vagyunk képesek szerkeszteni (lásd a 20. és a 21. ábrákon).



19. ábra. Első érintő körök

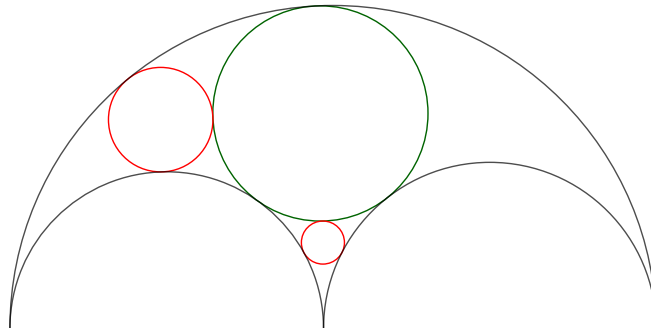


20. ábra. Második érintő körök

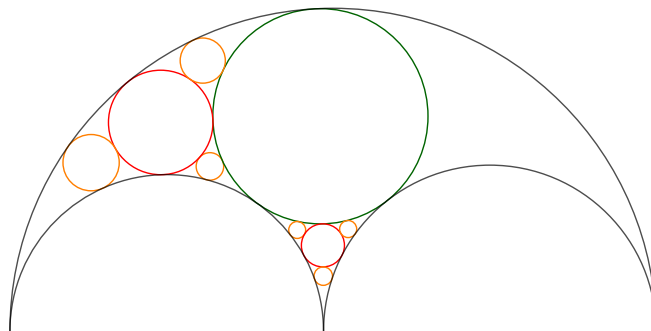


21. ábra. Harmadik érintő körök

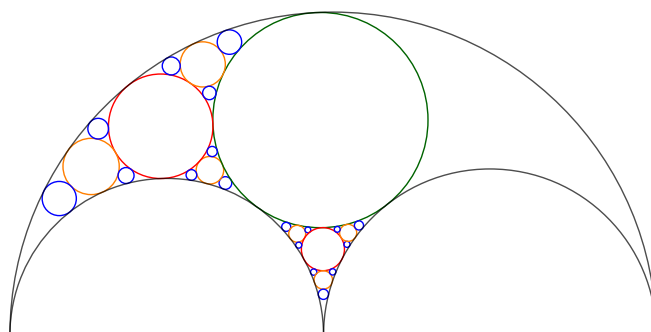
Vesszük ezen alakzatok inverz képét (lásd a 22. a 23. és a 24. ábrákon).



22. ábra. Első érintő körök inverz képe

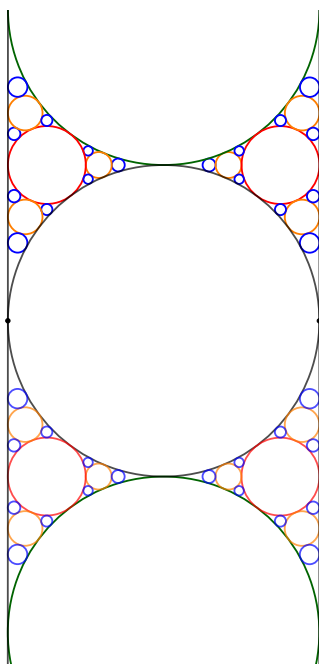


23. ábra. Második érintő körök inverz képe

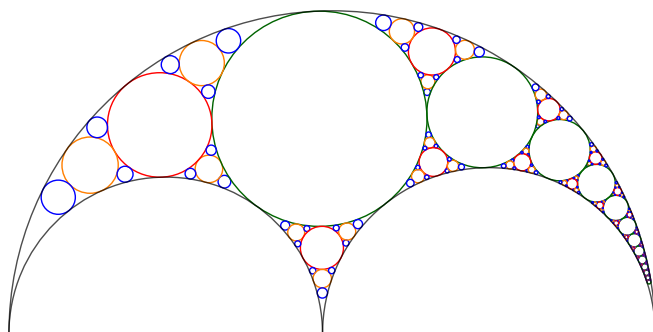


24. ábra. Harmadik érintő körök inverz képe

Ezután vesszük ezen köröknek a sorozatát a síkon (lásd a 25. ábrán), majd ezen köröket is invertáljuk (lásd a 26. ábrán). Így látszódik az, hogy egy körláncon belül is tudunk még készíteni végtelen számú körláncot.

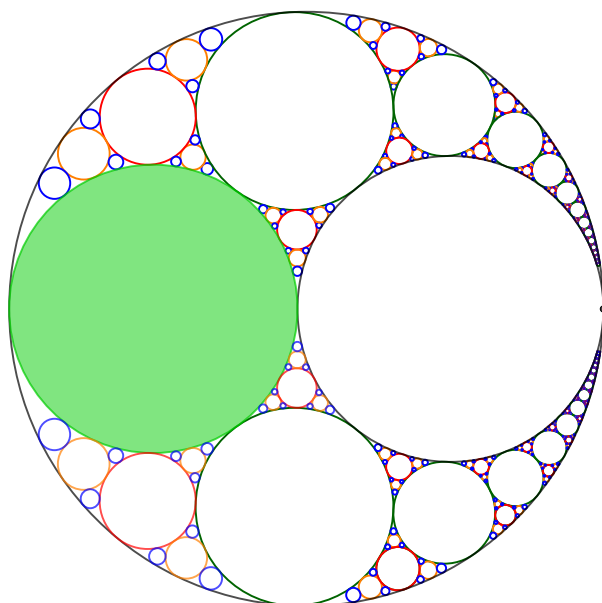


25. ábra. Érintő körök



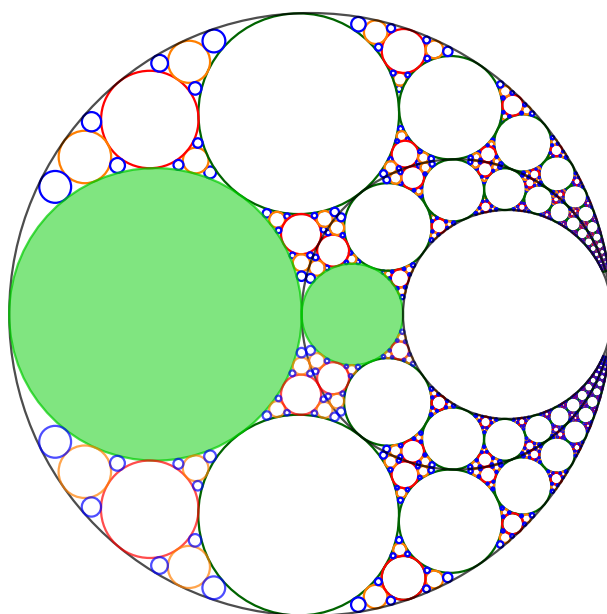
26. ábra. Érintő körök inverz képe

Abban az esetben, ha nem csak az alberoson belül vizsgáljuk a körláncokat, hanem az inverzió körén belül akkor egy Apollóniusz gasket-hez hasonló alakzatot kapunk (lásd a [27. ábrán](#)).



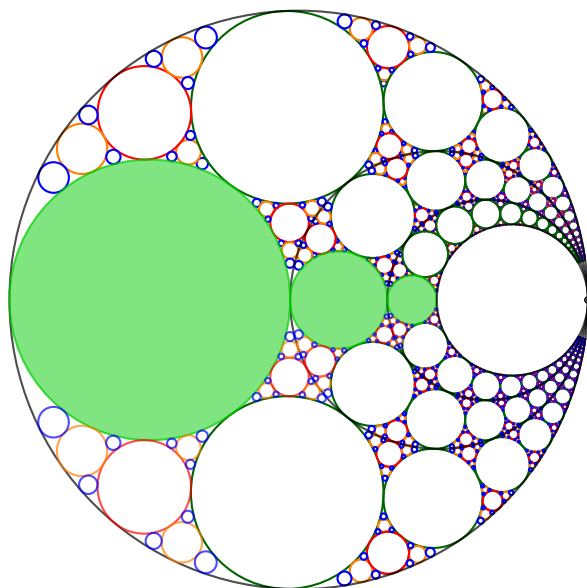
27. ábra. Apollóniusz gasket-hez hasonló körlánc

Vegyük a 25. ábrán látható érintő körláncokat, és helyezzünk el belőle két azonos láncot egymás mellett és vegyük ennek inverz képét (lásd a 28. ábrán).



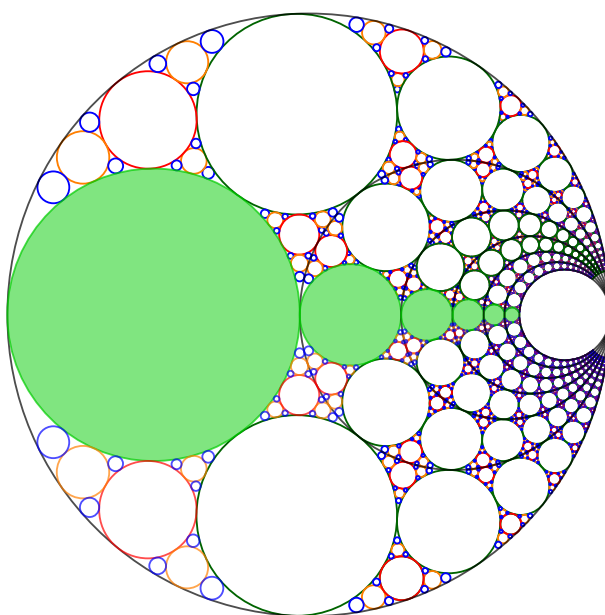
28. ábra. Apollóniusz gasket-hez hasonló két körlánc

Vegyük a 25. ábrán látható érintő körláncokat, és helyezzünk el belőle három azonos láncot egymás mellett és vegyük ennek inverz képét (lásd a 29. ábrán).



29. ábra. Apollóniusz gasket-hez hasonló három körlánc

Abban az esetben ha a 25. ábrán látható érintő körláncokat, végtelenszer helyezzük egymás mellé és ezeknek vesszük inverz képét, egy fraktált kapunk.



30. ábra. Apollóniusz gasket-hez hasonló körláncok

4. Összefoglalás

A dolgozatunk matematika tantárgyból, azon belül is geometriából ad egy kidolgozott segédanyagot, a körre vonatkozó síkbeli tükrözésre, más néven inverzióra. A szerkesztések elkészítéséhez a Geogebra alkalmazást használtuk. Minden szerkesztést saját kezűleg készítettünk amely megjelenik a dokumentumban, azzal a céllal, hogy lépésről lépésre bemutassa és szemléltesse a szerkesztések menetét.

Inverzió bevezetésével kezdődik dolgozatunk amelyet nem teljes körűen tárgyaltuk, hanem elegendően ahhoz, hogy a továbbiakban a szerkesztésekhez fel tudjuk használni. Megvizsgáltuk egy pont inverz képét és tulajdonságait, és ezek alapján vizsgáltuk az egyenes és kör inverz képét és tulajdonságait.

A következő fejezetben az Apollóniusz-féle feladatokat mutattuk be, és ezen feladatok segítségével szemléltettük a síkbeli inverziót. Egy feladatot részletesen kifejtve, majd a többi feladatot elemzés és megvitatáson keresztül szemléltettük. A szerkesztések kidolgozott menete <https://www.geogebra.org/u/ujvaridani97> érhetőek el.

A továbbiakban a körök érintkezésének egy speciális esetét vizsgáltuk meg az arbeloszt, és annak egyes tulajdonságait, így átvezetve a Papposz-körláncokra.

Végezetül egy Papposz-körláncon belül készítettünk további körláncokat Apollóniusz-féle feladatok megoldásainak segítségével, és az érintkező körláncokból készítettünk egy fraktál struktúrát bemutató ábrásort.

Hivatkozások

- [1] I. Talata, “Négydimenziós konvex politóp ábrázolása GeoGebrával”, *Dimenziók – Matematikai Közlemények*, 5. évf., 11–18. old., 2017, ISSN: 2064-2172. DOI: <https://doi.org/10.20312/dim.2017.02>.
- [2] I. Talata, “Közelítő szögharmadolás szerkesztése GeoGebrával”, *Dimenziók – Matematikai Közlemények*, 7. évf., 9–18. old., 2019, ISSN: 2064-2172. DOI: <https://doi.org/10.20312/dim.2019.02>.
- [3] H. György, *Bevezetés a geometriába*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1960.
- [4] D. Újvári és L. Németh, “Apollóniusz-feladatok és körláncok GeoGebrával (Apollonius’ problems and circular chains with GeoGebra)”, *Dimenziók, Matematikai Közlemények*, 12. évf., 13–23. old., 2024, ISSN: 2064-2172. DOI: <https://doi.org/10.20312/dim.2024.02>. cím: <https://journal.uni-sopron.hu/index.php/dimenziok/article/view/dimenziok-12evf-2024-12k-013-023>.
- [5] D. Sándor, H. András, K. Géza és S. László, *Geometria 11–12. évfolyam*. Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 2024, 17–31. old. cím: https://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_iii.pdf.
- [6] J. L. Coolidge, *A treatise on the circle and the sphere*. Oxford University, 1916, 21–30. old. cím: <https://www.aproged.pt/biblioteca/treatiseoncircl.ecoolidge.pdf>.
- [7] E. W. Weisstein. “Inversion”. (2024), cím: <https://mathworld.wolfram.com/Inversion.html> (elérés dátuma 2024. 03. 28.).
- [8] H. S. M. Coxeter, *The Problem of Apollonius*. The American Mathematical Monthly, 2018.
- [9] E. R. Sipos, “Apollonius’ problems in grammar school”, *Theaching Mathematics and Computer Science*, 7. évf., 69–85. old., 2009. DOI: [10.5485/TMCS.2009.0205](https://doi.org/10.5485/TMCS.2009.0205).
- [10] D. Újvári, *Inverziók Geogebra-val*, 2024. cím: <https://www.geogebra.org/u/ujvaridani97>.
- [11] E. W. Weisstein. “Arbelos”. (2024), cím: <https://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html> (elérés dátuma 2024. 03. 28.).