

KOZMOLÓGIAI INFLÁCIÓ VIZSGÁLATA ASZIMPTOTIKUSAN BIZTONSÁGOS GRAVITÁCIÓBAN

Nagy József
Fizikus MSc

OTDK dolgozat

Témavezető:
DR. SAILER KORNÉL



Debreceni Egyetem
Elméleti Fizikai Tanszék
Debrecen, 2024.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés [1],[2]	1
1.1. Az Univerzum dinamikája	3
1.2. Skalármező által vezérelt kozmológiai infláció	6
1.3. Kvantumeffektusok (fluktuációk) figyelembevétele	7
2. Numerikus eredmények	10
2.1. Kvantumeffektusok nélküli (klasszikus) kozmológiai infláció	10
2.2. Kvantumeffektusokkal terhelt kozmológiai infláció	12
2.2.1. UV szakasz	12
2.2.2. Átmeneti szakasz	13
2.2.3. IR szakasz	16
2.2.4. További vizsgálatok	16
2.3. Klasszikus és a kvantum-feljavított infláció összehasonlítása	19
2.3.1. Dimenziótlan változók terében	21
3. Összegzés	23
A. függelék: az első -UV- szakasz analitikusan közelített összefüggései	24

1. Bevezetés [1],[2]

A standard kozmológiai modell, a Λ CDM szerint a Planck-korszakból kiemelkedő Világegyetem közel exponenciális mértékű tágulást, úgynevezett kozmológiai felfúvódást (inflációt) szenvedett el. Ennek egyik lehetséges magyarázata, hogy jelen volt egy skalármező, az inflatonmező, amelynek hatására úgynevezett lassú-gördüléssel felfúvódás jött létre. A Λ CDM ugyanakkor nem veszi figyelembe azt, hogy a Nagy Bumm után és talán még a felfúvódás kezdetén is a gravitáció és a kvantumfizika egyaránt fontos szerepet játszott. A kvantumgravitációs hatások figyelembevételének egyik lehetséges módja, hogy a kozmológiai fejlődést leíró egyenletekben a gravitációs csatolásokat, azaz a newtoni gravitációs állandót és a kozmológiai állandót az energiaskálától függő csatolásokra cseréljük, amelyeket az einsteini gravitáció (pályaintegrálosan kvantált) elméletének a renormálási csoport módszerével történő vizsgálatával határoztak meg. A jelen dolgozatban az a célom, hogy a világegyetem egy erősen leegyszerűsített modellje keretében megmutassam egyrészt, hogy fennáll az inflatonmező által vezérelt, a kozmológiai megfigyelésekkel összeegyeztethető kb. e^{60} -szoros mértékű lassú gördüléssel felfúvódás lehetősége. Másrészt, össze kívánom hasonlítani a realiztikus felfúvódás kezdetének idejét és időtartamát a kvantum-feljavított és a klasszikus esetben.

A dolgozat egy olyan világegyetem felfúvódásának a vizsgálatáról szól, a melyről az alábbiakat tesszük fel: (1) térben homogén és izotróp és zérus térgörbülettel rendelkezik, (2) jelen van benne a newtoni gravitációs vonzás mellett a kozmológiai csatolás által képviselt gravitációs taszítás is, (3) továbbá a világegyetemet egy nem-önkölcsonható φ skalármező uralja, az úgynevezett inflatonmező. A vizsgálatot két esetben végzem el; a klasszikus jól ismert esettel fogom kezdeni: a Planck2018 adatok alapján becsült kezdeti feltételek és m paraméterérték felhasználásával meghatározom a Friedmann-egyenleteknek a realiztikus felfúvódást reprodukáló megoldását. Ezt követően térek rá a kvantum-feljavított eset vizsgálatára. A kvantum-feljavítás során a Friedmann-egyenletekben kicserélem kozmológiai és gravitációs állandókat a nekik megfelelő energia-skálafüggő társaira, amelyeket a szakirodalomból ismerünk. Az energiaskála időfüggésének meghatározása céljából további feltételként megkövetelem a skalármezőre vonatkozó Klein-Gordon egyenlet (így a vele ekvivalens kontinuitási egyen-

let) érvényességét. Az inflatonmező potenciáljának a legegyszerűbb

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

alakot választom.

A klasszikus modellben a lassú-gördüléssel felfűvódás olyan esetben jelentkezik a későbbi fejlődés során, amikor az inflatonmező kinetikus energiasűrűsége a Nagy Bumm után közvetlenül lényegesen meghaladja az inflatonmező potenciális energiasűrűségét. A kvantum-feljavított esetben ezt munkahipotézisként fogadtam el, ami lehetővé tette, hogy meghatározzam a dinamikai egyenleteknek a szingularitást közvetlenül követő időszakra vonatkozó, közelítő analitikus megoldását. Végül a dinamikai egyenletek numerikus megoldásához a kezdeti feltételeket ezen analitikus becslés alapján határoztam meg.

A dolgozatban az elméleti bevezetés után ismertetem a saját eredményeimet klasszikus, és a kvantum-módosított elméletben is, majd összehasonlítom a két eredményt.

1.1. Az Univerzum dinamikája

Az Univerzum dinamikáját leíró egyenletek az *Einstein-egyenletek*¹:

$$\boxed{G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}. \quad (1.1.1)$$

ahol

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

az

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta$$

gömbületi tenzorból képzett Einstein-tenzor,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Ricci-skalár,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})$$

Christoffel-szimbólumok, $g_{\mu\nu}$ metrikus tenzor és a $T_{\mu\nu}$ az energia-impulzus tenzor, illetve $(\dots)_{,\mu} = \frac{\partial(\dots)}{\partial x^\mu}$. A kozmológia szempontjából az ideális folyadék energia-impulzus tenzorát vesszük figyelembe:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (1.1.2)$$

ahol ρ energiasűrűség, p nyomás és u^μ az áramlás négyes-sebessége.

Ahhoz, hogy megoldjuk az Einstein-egyenleteket koordináta-rendszert kell bevezetnünk. Ha az Univerzumot nagy méretskálán homogénnek és izotrópnak tekintjük, akkor a 3-dimenziós tér görbülete állandó. Lehet $k = 0$ sík, $k = +1$ pozitív és zárt, $k = -1$ negatív és nyílt. Ezen megszorítások mellett az invariáns ívhossznégyszet:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + \Phi^2(\chi)d\Omega^2], \quad (1.1.3)$$

ahol $d\Omega = d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2$, $\Theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$,

$$\Phi^2(\chi) = \begin{cases} \sinh^2 \chi, & \text{ha } k = -1, \\ \chi^2, & \text{ha } k = 0, \\ \sin^2 \chi, & \text{ha } k = +1. \end{cases}$$

¹A dolgozatban $c = \hbar = G_0 = 1$ egységekben dolgozok.

$$\chi = \begin{cases} \arcsin^{-1}(r), & \text{ha } k = -1, \\ r, & \text{ha } k = 0, \\ \arcsin(r), & \text{ha } k = +1. \end{cases}$$

és $r \in [0, \infty)$. Ezt a metrikát *Robertson-Walker-féle-metrikának* (RW) nevezzük. A dolgozatban a $k = 0$ sík geometriát használom mindenhol.

A fentiek figyelembe vételével az Einstein-egyenletekből két csatolt, nem-lineáris differenciálegyenlet-rendszert kapunk, amit *Friedmann-egyenleteknek* nevezünk ($k = 0$ lapos térgeometria esetén):

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &\equiv H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \\ \dot{H} &= -4\pi G(\rho + p) \end{aligned}} \quad (1.1.4)$$

ahol " a " a skálafaktor, és a pont a kozmológiai idő szerinti deriválást jelenti.² Esetünkben a fenti módon felírt Friedmann-egyenletekben a ρ energiasűrűség az teljes egészében a skalármező energiasűrűségével (ρ^φ) egyenlő. A (1.1.4). egyenletekből levezethető a kontinuitási egyenlet:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.1.5)$$

Az Univerzum Planck-korszak utáni fejlődése az általános relativitáselmélettel írható le, amelyekben szerepel az anyag energia-impulzus tenzora. Ehhez azonban fizikai mezők dinamikai egyenleteire és részecskék mozgásegyenleteire van szükség (ez utóbbi kiváltható homogén, izotróp Világegyetem esetén az állapotegyenlet parametrizálásával ha az anyagot együttmozgó folyadéknak feltételezzük). Tehát ahhoz, hogy megoldjuk az Einstein-egyenleteket kezdőfeltételekre van szükség. Azonban, ha azt feltételezzük, hogy a kezdőfeltételt meghatározó időpillanattól kezdve az Univerzum a Friedmann-féle tágulással fejlődik, akkor bizonyos problémákkal terhelt az elmélet:

1. Kezdeti homogenitás

Az anyag térbeli eloszlását az energiasűrűséggel és nyomással jellemezzük, mint

²Amikor az egyenletekben G (Λ) szerepel indexek nélkül, akkor ezalatt a gravitációs (kozmológiai) paramétert értem, mivel a kvantum-feljavított esetben lesz olyan, amikor $G \neq G_0$ ($\Lambda \neq \Lambda_0$), ahol G_0 (Λ_0) a Newtoni gravitációs (kozmológiai) állandó.

a koordináták függvénye: $\rho(x), p(x)$. A dolgozat során az a feltételezés, hogy az Univerzum homogén³ és izotrop nagy méretskálákon⁴, ami egyáltalán nem rossz feltételezés, hiszen megfigyelések megmutatták, hogy az Univerzum korai szakaszában az inhomogenitás még kisebb volt, mint napjainkban. Ez azonban azért meglepő, mert a Nagy Bumm elmélet alapján az Univerzum korai szakaszában számos kauzálisan-szeperált tartományokból tevődött ki. Ezt a homogenitási problémát **horizont problémának** is nevezzük. A horizont problémának a Nagy Bumm elmélet nem tud magyarázatot adni.

2. Kezdeti sebességek

Ahhoz, hogy megadjuk a kezdeti anyageloszlást a tér minden pontjában szükségünk van a sebességek ismeretére, hiszen az ideális folyadék energia-impulzus tenzora szerepel az Einstein-egyenletekben. Ha a kezdeti sebességeket túl kicsinek választjuk meg, akkor az Univerzum a másodperc töredéke alatt összezuhan, azonban ha túl nagyok akkor az Univerzum túl gyorsan tágul, és hamar üressé válik. Ezek szerint a kezdeti sebességeket szinte tökéletesen össze kell hangolni, hogy megkapjuk a mai Világegyetemi képet. Ezt a problémát a **laposság problémájának** is szokás nevezni.

Ahhoz, hogy megoldjuk ezeket a problémákat, a Friedmann-féle dinamikát módosítanunk kell úgy, hogy az Univerzum nagyon korai szakaszában nagyon rövid idő alatt hatalmas mértékben kellett tagulnia a Világegyetemnek. Ezt a korszakot nevezzük *felfúvódásnak* vagy *inflációnak*.

³Valójában a homogenitás átlagosan teljesül, hiszen az őseredeti perturbációkból adódóan van egy relatív 10^{-5} hibája a homogenitásnak.

⁴Nagy méretskála alatt a 100Mpc távolságot értem.

1.2. Skalármező által vezérelt kozmológiai infláció

A legegyszerűbb inflációs modellben az Univerzumban egy nem kölcsönható, egykomponensű φ skalármező uralkodik (inflatonmező). A gravitáció által vezérelt skalármező hatás funkcionálja:

$$\boxed{S = S_{EH} + S_\varphi = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \right)}, \quad (1.2.1)$$

ahol $g = \det(g_{\mu\nu})$, S_{EH} az Einstein-Hilbert hatás. A skalármező mozgásegyenlete megkapható S_φ variálásából, vagy (ezzel ekvivalens módon) a skalármezőre vonatkozó

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\varphi}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_\varphi}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0,$$

Euler-Lagrange egyenletekből, ahol

$$\mathcal{L}_\varphi = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \right).$$

Így

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \varphi) + V_{,\varphi} = 0.$$

Azonban, ha a skalármező homogén ($\varphi(x, t) = \varphi(t)$), a térgeometria lapos, illetve ha a RW metrikát használjuk, akkor $g = \det(g_{\mu\nu}) = -a^6$. Ha az előbbieket figyelembe vesszük, akkor megkapjuk a skalármezőre érvényes Klein-Gordon egyenletet:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0.} \quad (1.2.2)$$

A fenti (1.2.2). egyenlet ekvivalens a (1.1.5). kontinuitási egyenlettel, hiszen skalármező esetén

$$\rho^\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (1.2.3)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi), \quad (1.2.4)$$

a fentieket beírva a kontinuitási egyenletbe, akkor adódik a (1.2.2). KG egyenlet. A felfúvódó Univerzum dinamikáját tehát a (1.1.4). és a (1.2.2). egyenletek írják le. Azonban a klasszikus esetben nincs szükség a három egyenletre, mivel a két Friedmann-egyenlet kombinálható a kontinuitási egyenletté, ami pedig ekvivalens a KG egyenlettel.

A második Friedmann-egyenlet kifejezhető az alábbi módon is:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = H^2 + \dot{H} = H^2(1 - \varepsilon), \quad (1.2.5)$$

ahol $\rho = \rho^\varphi + \rho^\Lambda$, és $\rho^\Lambda = \Lambda/(8\pi G)$. Továbbá bevezetésre került egy, az inflációt jellemző paraméter:

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (1.2.6)$$

Az ε segítségével eldönthető, hogy az Univerzum mikor tágul gyorsulva: $\varepsilon < 1 \rightarrow \ddot{a} > 0$. Ebből adódóan az infláció abban a t_f időpillanatban fejeződik be, amikor $\varepsilon(t_f) = 1$, hiszen ekkor $\ddot{a} = 0$, vagyis nem tágul gyorsulva a VE. Továbbá a (1.2.5). egyenletből adódik a felfúvódás egy feltétele, hiszen ha gyorsuló tágulást szeretnénk elérni, akkor $\ddot{a} > 0$. Ebben az esetben $\rho + 3p < 0$ kell teljesülnön, vagyis:

$$p < -\frac{1}{3}\rho. \quad (1.2.7)$$

A felfúvódás még jellemezhető az úgynevezett felfúvódási kitevővel (e-folding number), ami számolható a felfúvódás t_i kezdő és t_f végső pillanataival:

$$\mathcal{N} = \int_{t_i}^{t_f} H(t)dt, \quad (1.2.8)$$

és az alábbi összefüggés definiálja:

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \equiv e^{\mathcal{N}}. \quad (1.2.9)$$

Ahhoz, hogy a horizont és a laposság problémákat feloldjuk az $\mathcal{N}$ szám értékének nagyobbank kell lenni, mint 60, és a mérések is igazolták a felfúvódási kitevő 60 körüli voltát.

1.3. Kvantumeffektusok (fluktuációk) figyelembevétele

Eddig klasszikus elmélettel foglalkoztunk, amiben az Einstein-Hilbert hatás

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (1.3.1)$$

alakú. Ahhoz, hogy megpróbáljuk kvantálni ezt a mezőt, a Renormálási Csoport (RG) módszereket kell alkalmaznunk rajta. Ha alkalmazzuk az RG egyenleteket a (1.3.1).

hatáson, akkor ahhoz, hogy a fellépő divergenciákat kezeljük azt az árat kell megfizetni, hogy a $G = G(k)$ és $\Lambda = \Lambda(k)$ gravitációs és kozmológiai paraméterek a $k(t)$ energiaskálától nem lesznek függetlenek[3]:

$$G(k) = \begin{cases} G_0 & \text{ha } 0 \leq k \leq k_\Lambda \\ G_0 - b(k^2 - k_\Lambda^2) & \text{ha } k_\Lambda < k < k_G \\ g_* k^{-2} & \text{ha } k_G \leq k \end{cases} \quad (1.3.2)$$

$$\Lambda(k) = \begin{cases} \Lambda_0 & \text{ha } 0 \leq k \leq k_\Lambda \\ \Lambda_0 + c(k^4 - k_\Lambda^4) & \text{ha } k_\Lambda < k < k_G \\ \lambda_* k^2 & \text{ha } k_G \leq k \end{cases} \quad (1.3.3)$$

ahol $g_* \approx 0.707$, $\lambda_* \approx 0.193$, $k_\Lambda \approx 8.2 \cdot 10^{-31} m_{Pl}$ és

$$k_G = \left(\frac{3g_*}{G_0} \right)^{1/2}, \quad b = \frac{2G_0^2}{9g_*}, \quad c = \frac{\lambda_* G_0}{3g_*}.$$

Látható, hogy a kvantum-feljavítás során három szakasz jelent meg az Univerzum időbeli evolúciójában([4]-[7]): fizikailag valós RG trajektóriáknak három fő része van:

- UV-szakasz, amit a Reuter fixpont ural,
- átmeneti szakasz, ami a Gauss fixpont közelében ér véget,
- IR-szakasz, ahol a gravitációs csatolások szinte függetlenek lesznek a $k(t)$ skálától.

Az Univerzum fejlődése során a kozmológiai idő folyamatosan növekszik. A folyamatosan növekvő kozmológiai időhöz pedig csökkenő $k(t)$ energiaskála tartozik.

Az Univerzumot kitöltő mező kvantumfluktuációit elhanyagoljuk, így a homogén és izotróp Univerzum fejlődését a kvantum-módosított Friedmann-egyenletek, illetve a belőlük származó konzisztencia feltétel írja le. A kvantum-módosított Friedmann-egyenletekhez úgy jutunk, hogy a (1.1.4). egyenletekben a

$$G \rightarrow G(k) \quad \Lambda \rightarrow \Lambda(k)$$

helyettesítéseket elvégezzük. Az ilyen módon módosított Friedmann-egyenletek alakja:

$$\boxed{\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G(k)}{3} \rho^\varphi + \frac{\Lambda(k)}{3} \\ \dot{H} &= -4\pi G(k) \dot{\varphi}^2 \end{aligned}} \quad (1.3.4)$$

Látható, hogy ezt a problémát nem lehet megoldani, hiszen három ismeretlenünk van: k, H, φ ; két egyenletre. Ahhoz, hogy megoldható legyen a probléma, kell még egy egyenlet. Ezt az egyenletet megkaphatjuk úgy, hogy vesszük a módosított első Friedmann-egyenlet kozmológiai idő szerinti deriváltját:

$$H\dot{H} = \frac{4\pi}{3} \left(G\dot{\rho}^\varphi + \dot{G}\rho^\varphi \right) + \frac{\dot{\Lambda}}{6}. \quad (1.3.5)$$

A fentibe beírva a módosított második Friedmann-egyenletet:

$$0 = 4\pi G (3H(\rho^\varphi + p) + \dot{\rho}^\varphi) + 4\pi \dot{G}\rho^\varphi + \frac{\dot{\Lambda}}{2}, \quad (1.3.6)$$

ami nem más, mint a kvantum-módosított esetbeli kontinuitási egyenlet. Ahhoz, hogy többlet egyenletet kapjunk, egy feltevéssel élünk: elfogadjuk a klasszikus esetbeli kontinuitási egyenletet. Így a $3H(\rho^\varphi + p) + \dot{\rho}^\varphi = 0$ kifejezés miatt adódik egy harmadik független egyenlet:

$$\boxed{\rho^\varphi = -\frac{\dot{\Lambda}(k(t))}{8\pi\dot{G}(k(t))} = -\frac{\partial_k \Lambda \cdot \partial_t k}{8\pi \partial_k G \cdot \partial_t k}.} \quad (1.3.7)$$

Így a kvantum-effektusokkal terhelt Univerzum dinamikáját a (1.3.4). és a (1.3.7). egyenletek határozzák meg.

2. Numerikus eredmények

Ebben a fejezetben fogom ismertetni az általam kapott numerikus eredményeket a klasszikus, és a kvantum-módosított elméletben is. Az inflatonmező potenciáljaként egy egyszerű kvadratikus potenciált választottam:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \quad (2.0.1)$$

ahol m az inflaton tömege.

2.1. Kvantumeffektusok nélküli (klasszikus) kozmológiai infláció

A klasszikus esetben a tömeg-, gravitációs és kozmológiai paraméterek értéke:

$$m = 10^{-6}m_{Pl} \quad G = G_0 = 1 \quad \Lambda = \Lambda_0 = 10^{-122}m_{Pl}^2.$$

A klasszikus eset dinamikáját leíró egyenletek a Friedmann első egyenlete, illetve a skalármezőre vonatkozó KG egyenlet:

$$H^2 = \frac{8\pi G_0}{3}\rho^\varphi + \frac{\Lambda_0}{3} \quad (2.1.1)$$

$$0 = \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi}. \quad (2.1.2)$$

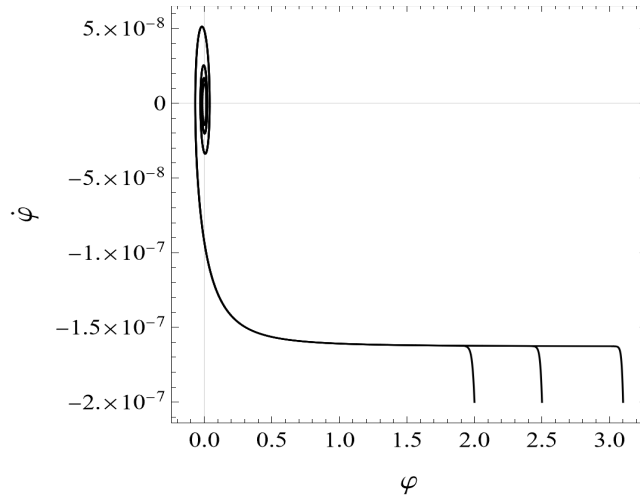
Az első Friedmann-egyenletből kifejezve H -t, és beírva a KG egyenletbe, majd figyelembe véve a (2.0.1). inflaton potenciált adódik φ -re egy másodrendű differenciálegyenlet:

$$\ddot{\varphi} + \kappa \left[\dot{\varphi}^2 + m^2\varphi^2 + \frac{\Lambda_0}{4\pi G_0} \right]^{1/2} \dot{\varphi} + m^2\varphi = 0, \quad (2.1.3)$$

ahol $\kappa = \sqrt{12\pi G_0}$. A fenti differenciálegyenlet megoldásához két kezdőfeltételre van szükség: φ és $\dot{\varphi}$ értékeire egy bizonyos időpillanatban. A kezdőfeltételeket az alábbi módon választottam:

$$\varphi(0) = 3.1m_{Pl} \quad \dot{\varphi}(0) = -2 \cdot 10^{-7}m_{Pl}^2.$$

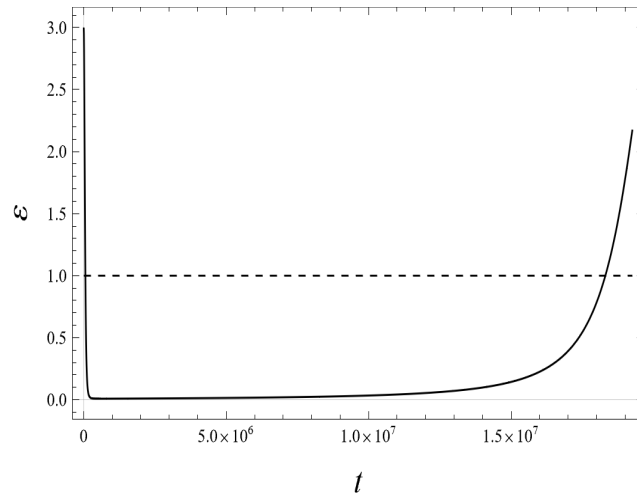
A fenti kezdőfeltételekkel a numerikus megoldást a $0s_{Pl} \leq t \leq 4 \cdot 10^7 s_{Pl}$ intervallumon indítottam el, azonban a szingularitás nem esett a nullába. Ahhoz, hogy megtaláljam a szingularitást, az integrációs intervallum kezdetét eltoltam, majd a program jelezte, hogy szingularitást talált a $t_{sz} = -260425s_{Pl}$ időpillanatban. Ettől kezdve ezt az időpillanatot tekintem a 0 időpillanatnak. Az 6. ábrán látható a megoldás különböző φ kezdőértékekkel indítva.



1. ábra. Klasszikus esetben $\{\varphi, \dot{\varphi}\}$ fázistér trajektóriák különböző φ kezdőértékek mellett.

A felfúvódás kezdeti pillanata az a t_i időpillanat, amikor a $\{\varphi, \dot{\varphi}\}$ fázistérben a trajektória ráfut az attraktorra (akkor amikor a φ csökkenni kezd, és a $\dot{\varphi}$ közel változatlan, a közel vízszintes szakasz). A felfúvódás vége pedig abban a t_f időpillanatban van, amikor

$$\varepsilon(t_f) = -\frac{\dot{H}(t_f)}{H^2(t_f)} = 1.$$



2. ábra. Klasszikus esetben $\varepsilon(t)$ folytonos vonallal, és a konstans "1" érték szaggatott vonallal ábrázolva.

Az általam meghatározott kezdeti és végső pillanatok:

$$t_i = 1.29 \cdot 10^5 s_{Pl} \quad \text{és} \quad t_f = 1.8 \cdot 10^7 s_{Pl}.$$

Így meghatározható a felfúvódási kitevő:

$$\mathcal{N} = \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt \approx 60.01.$$

2.2. Kvantumeffektusokkal terhelt kozmológiai infláció

A kvantumeffektusokkal bővített elméletben az Univerzum korai szakasza három részre vált szét: UV, átmeneti és IR. Minden szakaszhoz (1.3.3). alapján más és más dinamikai egyenletek tartoznak G és Λ miatt.

Első jogos kérdés az, hogy mi alapján adunk meg kezdőfeltételt az UV szakaszban? Ehhez azt használjuk ki, hogy kezdetben az skalármező kinetikus energia(sűrűség) tagja dominál, így adható egy analitikus becslés a Bagy Bumm (szingularitás) közelébe, ahonnan tudunk kezdőfeltételt megadni (ld. A függelék). Ha ez megvan, akkor a következő szakaszra érvényes differenciálegyenlethez a kezdőfeltételt az előző szakaszból lehet megadni ("összevarjuk a megoldásokat").

2.2.1. UV szakasz

Az első -UV- szakaszhoz tartozó tömeg, gravitációs és kozmológiai paraméterek:

$$m = 10^{-10} m_{Pl} \quad G(k) = g_* k^{-2} \quad \Lambda(k) = \lambda_* k^2. \quad (2.2.1)$$

Ha beírjuk a fenti kifejezéseket a (1.3.4). és (1.3.7). egyenletekbe, akkor megkapjuk az első szakaszra érvényes differenciálegyenlet-rendszert:

$$3H^2 = 8\pi\rho^{(\varphi)} g_* k^{-2} + \lambda_* k^2 \quad (2.2.2)$$

$$\dot{H} = -4\pi g_* \dot{\varphi}^2 k^{-2} \quad (2.2.3)$$

$$\rho^\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 = \frac{\lambda_*}{8\pi g_*} k^4. \quad (2.2.4)$$

A (2.2.4). egyenletből k^2 kifejezhető és beírható a (2.2.2). és (2.2.3). egyenletekbe, némi rendezés után H -ra és φ -re kapunk egy csatolt differenciálegyenlet-rendszert:

$$\boxed{3H^2 - 2\omega\sqrt{\rho^\varphi} = 0 \quad \dot{H}\sqrt{\rho^\varphi} + \frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^2 = 0} \quad (2.2.5)$$

ahol $\omega^2 = 8\pi g_* \lambda_*$ és $\rho^{(\varphi)} = (\dot{\varphi}^2 + m^2\varphi^2)/2$. Ezen csatolt differenciálegyenlet-rendszer megoldásához a kezdőfeltételt a t_k időpillanatban

$$H(t_k) = H_{est}(t_k) \quad \varphi(t_k) = \varphi_{est}(t_k)$$

módon adom meg, ahol

$$H_{est}(t_k) = \frac{2}{3t_k} \quad \text{és} \quad \varphi_{est}(t_k) = \frac{2\sqrt{2}}{3\omega} \frac{1}{t_k}$$

analitikusan közelített formulák⁵ a $t_k = 5 \cdot 10^{-11} s_{Pl}$ időpillanatban (lásd: A. függelék).

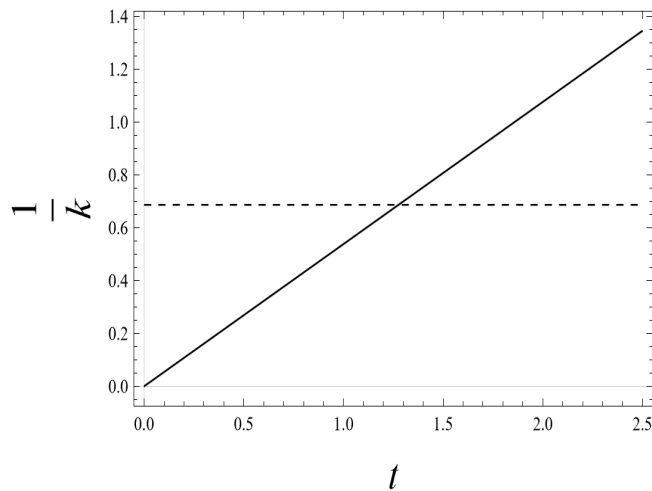
Az első szakasz abban a t_G időpillanatban végződik, amikor

$$k(t_G) = k_G = \left(\frac{3g_*}{G_0} \right)^{1/2} \approx 1.4563.$$

Numerikusan a $k(t)$ meghatározható a (2.2.4). egyenletből:

$$k = \left(\frac{8\pi g_*}{\lambda_*} \rho^\varphi \right)^{1/4} \rightarrow k^{-1} = \left(\frac{8\pi g_*}{\lambda_*} \rho^\varphi \right)^{-1/4}. \quad (2.2.6)$$

Technikailag a k^{-1} ábrázolásából könnyebb leolvasni a t_G időpillanatot:



3. ábra. Az UV szakaszban az $1/k$ az idő függvényében folytonos, $1/k_G$ szaggatott vonallal.

Az első szakasz végső időpillanatára a

$$t_G \approx 1.27 s_{Pl}$$

értéket határoztam meg.

2.2.2. Átmeneti szakasz

A második -átmeneti- szakaszhoz tartozó gravitációs és kozmológiai paraméterek:

$$G(k) = G_0 - b(k^2 - k_\Lambda^2) \quad \Lambda(k) = \Lambda_0 + c(k^4 - k_\Lambda^4). \quad (2.2.7)$$

⁵A pozitív ágat választottam φ -nél.

Ha beírjuk a fenti kifejezéseket a kvantum-feljavított egyenletekbe, akkor megkapjuk a második szakaszra érvényes differenciálegyenlet-rendszert:

$$3H^2 = 8\pi\rho^\varphi [G_0 - b(k^2 - k_\Lambda^2)] + \Lambda_0 + c(k^4 - k_\Lambda^4) \quad (2.2.8)$$

$$\dot{H} = -4\pi\dot{\varphi} [G_0 - b(k^2 - k_\Lambda^2)] \quad (2.2.9)$$

$$\rho^\varphi = \frac{c}{4\pi b} k^2. \quad (2.2.10)$$

Ha a (2.2.10). egyenletből elimináljuk k -t és beírjuk a másik két egyenletbe, akkor néhány rendezési lépés után megkapjuk a második szakaszt leíró differenciálegyenlet-rendszert:

$$3H^2 = \alpha (\rho^\varphi)^2 + \beta \rho^\varphi + \delta \quad (2.2.11)$$

$$\dot{H} = -\dot{\varphi}^2 \left[\alpha \rho^\varphi(t) + \frac{\beta}{2} \right], \quad (2.2.12)$$

ahol

$$\alpha = -\frac{16\pi^2 b^2}{c} \quad \beta = 8\pi(G_0 + bk_\Lambda^2) \quad \delta = \Lambda_0 - ck_\Lambda^4.$$

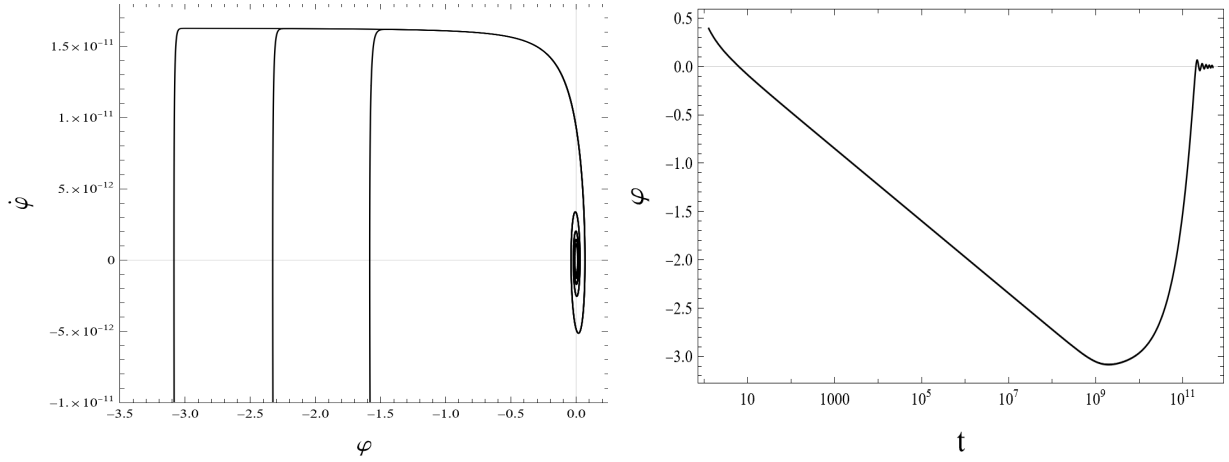
A kozmológiai idő szerint deriválva a (2.2.11). egyenletet, majd beírva a (2.2.11).-ből kifejezett H -t és a (2.2.12).-ből $\dot{H}$ -t, akkor kapunk φ -re egy másodrendű differenciálegyenletet:

$$\ddot{\varphi} + 3 \left[\frac{\alpha (\rho^\varphi)^2 + \beta \rho^\varphi + \delta}{3} \right]^{\frac{1}{2}} \dot{\varphi} + m^2 \varphi = 0. \quad (2.2.13)$$

Látható, hogy ez nem más, mint a (1.2.2). egyenlet. Tehát a kvantum-feljavításnak köszönhetően a KG-egyenlet abban változott, hogy a H Hubble-paraméter értéke erősen φ függővé vált. A fenti differenciálegyenlet megoldásához két kezdőfeltételre van szükség. A két kezdőfeltételt

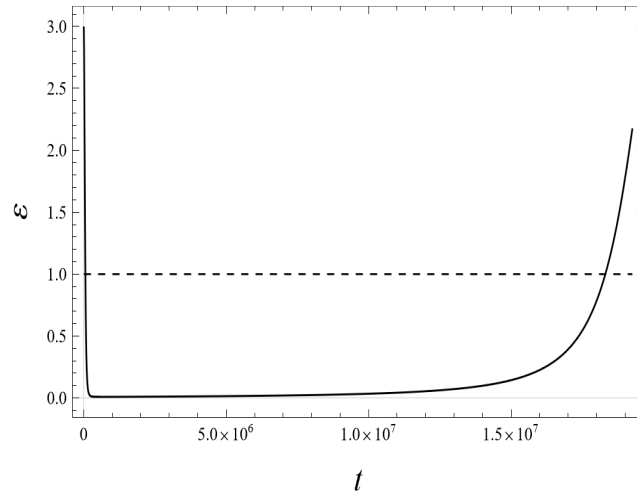
$$\varphi_{\text{első}}(t_G) = \varphi_{\text{második}}(t_G) \quad \dot{\varphi}_{\text{első}}(t_G) = \dot{\varphi}_{\text{második}}(t_G), \quad (2.2.14)$$

módon adom meg, ahol az "első" illetve "második" az adott szakaszhoz tartozó φ -t jelölik. Az előbbi ábrákon mutatom a megoldásokat:



4. ábra. A kvantum-módosított elméletben számolt fázistér különböző φ kezdőértékekkel (bal), és a φ az idő függvényében (jobb).

Az infláció kezdetét és végét a kalsszikus esethez hasonlóan lehet meghatározni, ehhez alább ábrázolom az $\varepsilon(t)$ függvényt is. Általam meghatározott időpillanatok az



5. ábra. Átmeneti szakaszban az $\varepsilon(t)$ függvény folytonos, "1" konstans pedig szaggatott vonallal ábrázolva.

infláció kezdetére és végére:

$$t_i \approx 2.3 \cdot 10^9 s_{Pl} \quad \text{és} \quad t_f \approx 1.8 \cdot 10^{11} s_{Pl}.$$

Az így meghatározott felfúvódási tényező:

$$\mathcal{N} = \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt \approx 60.05.$$

2.2.3. IR szakasz

A harmadik -IR- szakasz várhatóan $t_\Lambda \approx 10^{30} s_{Pl}$ körül kezdődne, azonban számunkra (vagyis a jelenlegi TDK dolgozat szempontjából) az Univerzum fejlődése a kozmológiai infláció végső pillanatától nem érdekes.

2.2.4. További vizsgálatok

Ebben a fejezetben a kvantum-módosított esetbeli felfúvódást vizsgálom tovább: megvizsgálom, hogy a kezdeti feltételektől illetve a tömegparaméter megválasztásától milyen mértékben függenek a megoldások, és hogy mennyire univerzális az a megoldás amit kaptam.

Az általam kapott megoldás univerzalitásának vizsgálata szempontjából érdemes megnézni az első szakaszra vonatkozó differenciálegyenlet-rendszer

$$3H^2 - 2\omega\sqrt{\rho^{(\varphi)}} = 0 \quad \dot{H}\sqrt{\rho^{(\varphi)}} + \frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^2 = 0 \quad (2.2.15)$$

kezdőfeltételi érzékenységet. Ehhez a fenti differenciálegyenlet-rendszert a

$$10^{-15} s_{Pl} \leq t_k \leq 10^{-10} s_{Pl}$$

időintervallumból választott t_k -hoz tartozó

$$\varphi_{est}(t_k) \quad H_{est}(t_k)$$

kezdőfeltételekkel oldottam meg, ahol az "est" az analitikusan közelített formulákat jelenti az Univerzum nagyon korai szakaszában (ld. A függelék) és a tömegparaméter $m = 10^{-10} m_{Pl}$ értékével dolgoztam, ami a felfúvódási kitevő kb. 60-as értékét adta.

Elsőként a különböző t_k időpillanatok mellett leolvastam a hozzá tartozó t_G időpillanatokot, és megnéztem a

$$\frac{t_G - t_G^{est}}{t_G^{est}}$$

relatív eltéréseket, ahol

$$t_G^{est} = \sqrt{\frac{2G_0}{9g_*\lambda_*}} \approx 1.2761 s_{Pl}$$

analitikusan becsült t_G . Az 1. táblázat tartalmazza az értékeket. A kapott eredményekből az következik, hogy a t_k *kezdőpillanattól független a megoldás*, ha a kezdőfeltételeket a

közelített formulákból választjuk ki, és nagyrészt a leolvasásból adódik a relatív eltérése a t_G -nek.

$t_k(s_{Pl})$	$t_G(s_{Pl})$	$\frac{t_G - t_G^{est}}{t_G^{est}}$
10^{-10}	1.2725	-0.0028
10^{-11}	1.2753	-0.0006
10^{-12}	1.2725	-0.0028
10^{-13}	1.2722	-0.0030
10^{-14}	1.2743	-0.0014
10^{-15}	1.2764	0.0002

1. táblázat. Különböző t_k -hoz tartozó t_G és relatív eltérései

A fentiekből az következik, hogy a numerikus eredmények az első -UV- szakaszra szépen visszaadják az analitikusan becsült formulákat. Tehát az UV szakaszban az Univerzum dinamikáját jól leírják az A függelékben megadott formulák.

Az előzőekben sikerült bizonyítani, hogy a t_k kezdőpillanattól független a numerikus megoldás, ha az analitikusan közelített formulákkal adjuk meg a kezdőfeltételek értékét t_k -ban. Ebben a fejezetben pedig arról lesz szó, hogy az m tömegparaméter értékétől mennyire függ az első szakasz, illetve a második szakaszban a felfúvódás.

Első lépésként megnéztem különböző m tömegparaméterek esetén a t_G időpillanatokot, majd a második szakaszban lezajló felfúvódás t_i , t_f időpillanatait és az azt jellemző $\mathcal{N}$ tényezőt (2. táblázat).

A táblázat adataiból az látszik, hogy az m paramétertől független a t_G , vagyis az első szakaszt az m paraméter értéke nem, az infláció dinamikáját pedig befolyásolja.

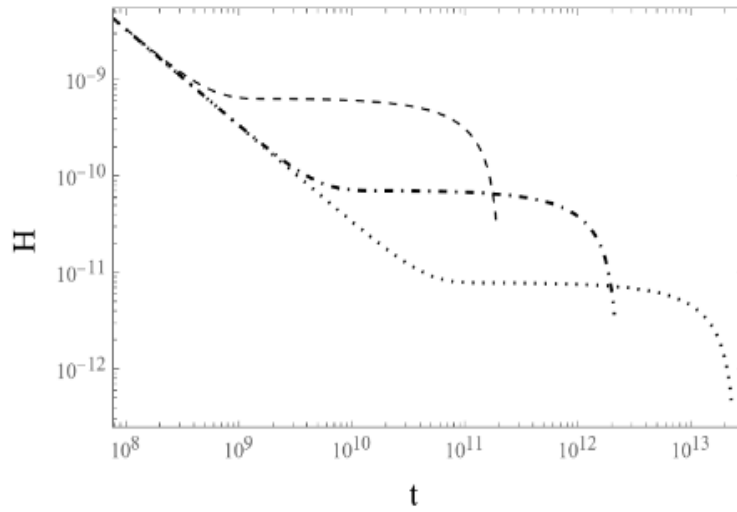
Az alábbi táblázat adataiból megadható a felfúvódási és tömegparaméter között egy kapcsolat (illesztéssel):

$$\mathcal{N}(m) = -0.5677 \ln m - 66.313. \quad (2.2.16)$$

$m(m_{Pl})$	$t_G(s_{Pl})$	$t_i(s_{Pl})$	$t_f(s_{Pl})$	$\mathcal{N}$
10^{-13}	1.2764	$1.72 \cdot 10^{12}$	$2.47 \cdot 10^{14}$	109.8
10^{-12}	1.2764	$2 \cdot 10^{11}$	$2.25 \cdot 10^{13}$	91.6
10^{-11}	1.2764	$2.26 \cdot 10^{10}$	$2.04 \cdot 10^{12}$	75.14
10^{-10}	1.2764	$2.3 \cdot 10^9$	$1.84 \cdot 10^{11}$	60.05
10^{-9}	1.2764	$2.25 \cdot 10^8$	$1.6 \cdot 10^{10}$	47
10^{-8}	1.2764	$2.55 \cdot 10^7$	$1.38 \cdot 10^9$	36
10^{-7}	1.2764	$3.3 \cdot 10^6$	$1.17 \cdot 10^8$	26
10^{-6}	1.2764	$3.3 \cdot 10^5$	$9.7 \cdot 10^6$	18

2. táblázat. Különböző m értékek mellett a $t_G, t_i, t_f, \mathcal{N}$

Érdemes még megnézni a $H(t)$ Hubble-paraméter viselkedését különböző m tömeg-paraméterek mellett. Látható hogy a Hubble paraméternek a felfúvódás alatt van egy



6. ábra. Különböző tömegparaméterekkel ábrázolva a Hubble paraméter a kvantum-módosított elméletben

jellegzetes szakasza: a felfúvódás alatt a Hubble paraméter értéke csak kicsit változik, és minden esetben megjelenik a görbében egy platós alak. Minden m esetén az ábrán látható csökkenő szakasz után, ahogy elkezdődik a plató, abban a pillanatban kezdődik a felfúvódás, majd amikor véget ér ez a szakasz, akkor fog végződni, majd a Hubble paraméter drasztikusabban elkezd csökkenni.

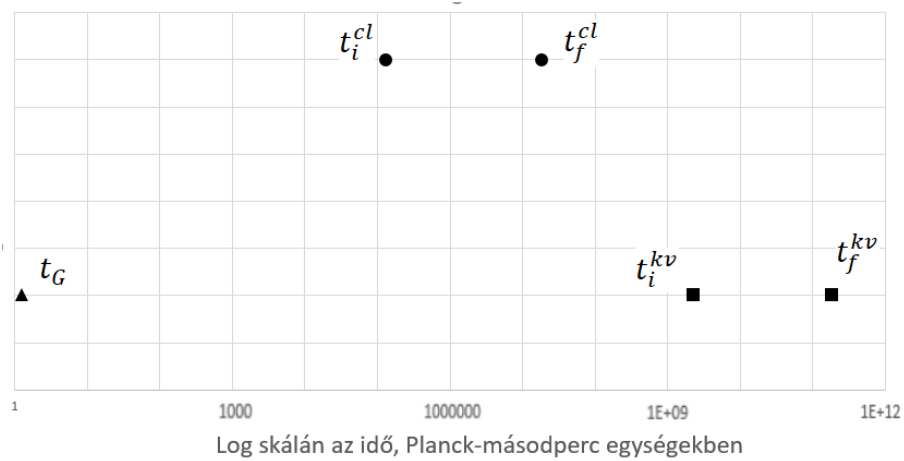
2.3. Klasszikus és a kvantum-feljavított infláció összehasonlítása

Az alábbi táblázatban összefoglalom a klasszikus és a kvantum-feljavított esetbeli felfúvódások jellegzetes időpillanatait:

	$t_G(s_{Pl})$	$t_i(s_{Pl})$	$t_f(s_{Pl})$	$t_f - t_i(s_{Pl})$
Klasszikus felfúvódás	-	$1.29 \cdot 10^5$	$1.8 \cdot 10^7$	$1.78 \cdot 10^7$
Kvantum-feljavított felfúvódás	1.27	$2.3 \cdot 10^9$	$1.823 \cdot 10^{11}$	$1.8 \cdot 10^{11}$

3. táblázat. A jellegzetes időpillanatok

Az alábbi ábrán ábrázolom a jellegzetes időpillanatokot:



7. ábra. A jellegzetes időpillanatok ábrázolva

A 7. ábrán a $t_i^{cl}, t_f^{cl}, t_i^{kv}, t_f^{kv}$ rendre a klasszikus esethez tartozó infláció kezdete és vége, illetve a kvantum-feljavított esethez tartozó infláció kezdete és vége.

- **A felfúvódás időbeli elhelyezkedése és időtartama:**

A klasszikus esetben a felfúvódás (nagyságrendekben) $10^5 s_{Pl}$ -tól $10^7 s_{Pl}$ -ig tartott, míg a kvantum-módosított esetben $10^9 s_{Pl}$ -tól $10^{11} s_{Pl}$ -ig. Látható, hogy a G gravitációs és Λ kozmológiai paraméterek időtől való függésének azaz eredménye, hogy a felfúvódás kezdete és vége is eltolódott 4 nagyságrenddel, továbbá a felfúvódás időtartama is 4 nagyságrenddel hosszabb lett a kvantum feljavított esetben.

- **A Világegyetem méretének változása a felfúvódás ideje alatt:**

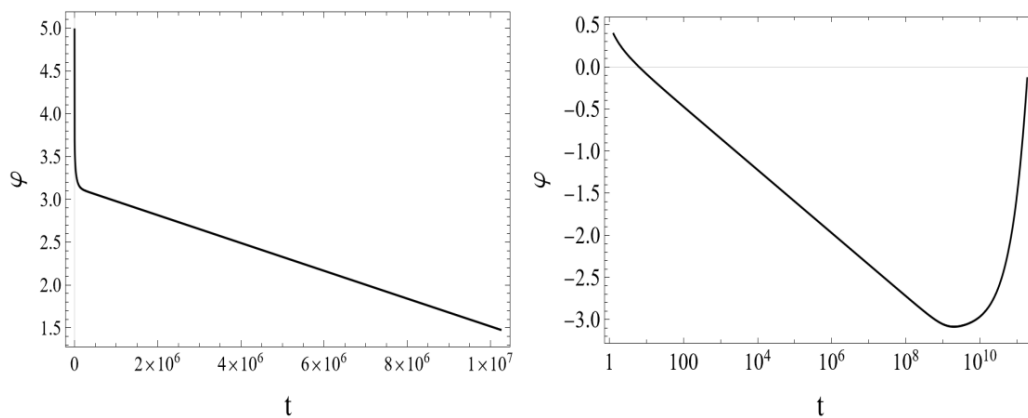
A Világegyetem mérete hasonlóképpen változott mindkét esetben (a kvantum feljavított esetben a megfelelő tömegparaméter választásával), hiszen a felfúvódási kitevő értéke a klasszikus és a kvantum-feljavított esetben is nagyon közel van a 60-hoz.

Érdekes hasonlóság még továbbá, hogy a $\{\varphi, \dot{\varphi}\}$ fázistérben a megoldások mindkét esetben a

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{m}{\sqrt{12\pi}}$$

attraktorra futnak rá (klasszikus esetben $m = 10^{-6}m_{Pl}$, kvantum-feljavított esetben $m = 10^{-10}m_{Pl}$), a kezdőfeltételektől függően ”+” vagy ”-” előjellel.

A klasszikus és kvantum-módosított elmélettel leírt kozmológiai inflációkban talán a leglényegesebb különbség az, hogy a kívánt $\mathcal{N} \approx 60$ értékhez tartozó tömegparaméter értéke 4 nagyságrendet csökkent a kvantum-módosítás hatására. Továbbá ami még láthatóan jellegzetesebb különbség az az, hogy a kvantum-módosított esetbeli felfúvódás során van még annyi többlet kinetikus energia, hogy a potenciál másik oldalára átlendüljön (a kvantum-módosított esetben történik a $\varphi(t)$ -ben egy előjel váltás), és majd ott egy maximum elérése után indul meg a lassú-gördülésszerű felfúvódás (8. ábra).



8. ábra. Klasszikus (bal) és kvantum-feljavított (jobb) $\varphi(t)$.

Megadhatóak mérhető mennyiségek, amelyek alapján még jobban összehasonlíthatóak az eredmények: skalár spektrális index és a skalár spektrális amplitúdó:

$$n_s = 1 - 2\varepsilon(t_i) \quad A_s = \frac{H^2(t_i)}{\pi\varepsilon(t_i)m_{Pl}^2}. \quad (2.3.1)$$

A fentiek numerikusan számolhatóak:

$$\begin{aligned} n_s^{cl} &= 0.983 & A_s^{cl} &= 1.4 \cdot 10^{-9} & \text{klasszikus} \\ n_s^{qi} &= 0.996 & A_s^{qi} &= 7 \cdot 10^{-17} & \text{kvantum-módosított} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

A fenti mérhető mennyiségekre becsült adatok a kvantum-módosított modellben a Planck2018 alapján nem helytállóak([8],[9]). Ennek az oka az lehet, hogy a kvantum-módosítás hatására a felfúvódás nagyon eltolódott, és a kvantumfluktuációk amplitúdója már túlságosan lecsökkent.

2.3.1. Dimenziótlan változók terében

Eddig dimenziós változók terében dolgoztam. Bevezethetők dimenziótlan változók is ([10]):

$$x^2 = \frac{\dot{\varphi}^2/2}{\rho_c}, \quad y^2 = \frac{\rho^\Lambda + V(\varphi)}{\rho_c}, \quad z^2 = \frac{V_{,\varphi}}{\kappa(\rho^\Lambda + V(\varphi))}, \quad (2.3.3)$$

ahol $\rho_c = \dot{\varphi}^2/2 + V(\varphi) + \rho^\Lambda$ kritikus energiasűrűség. A fenti dimenziótlan változók számolhatóak numerikusan az eddigi eredményekből egyszerű behelyettesítésekkel. A lassú-gördülés alatt megadható a dimenziótlan változók terében egy karakterisztikus görbe. Ehhez hanyagoljuk el a kinetikus tagot az első Friedmann-egyenlet jobb oldalán, illetve a $\ddot{\varphi}$ tagot a KG egyenletben, majd mindkét oldalt szorozzuk meg $\dot{\varphi}$ és osszuk el ρ_c -vel. Ekkor az alábbi összefüggések teljesülnek:

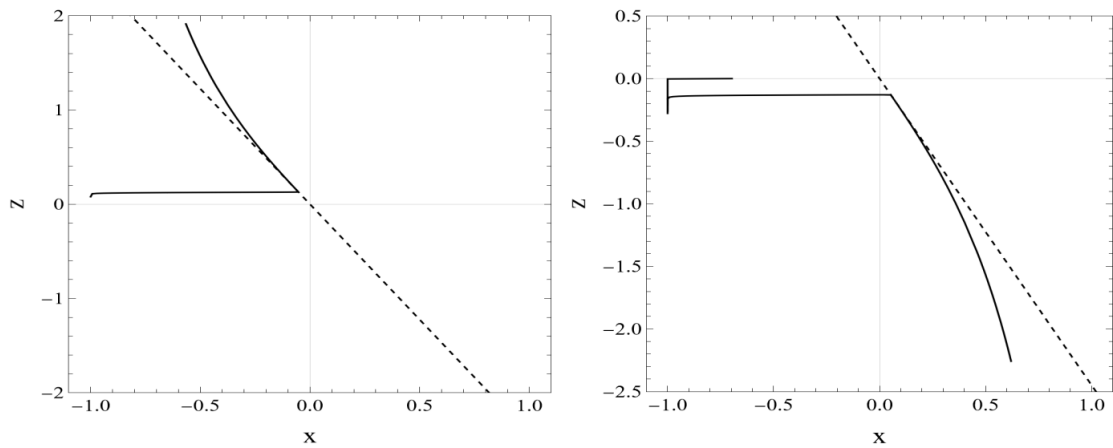
$$1 \approx y^2 \quad (2.3.4)$$

$$x(\sqrt{6}x + y^2z) \approx 0. \quad (2.3.5)$$

Továbbá feltéve, hogy a lassú-gördülés során $x \neq 0$, akkor megadható egy görbe az (x, z) síkon:

$$\sqrt{6}x + z \approx 0. \quad (2.3.6)$$

Az (x, z) síkon a fenti egyenes mentén fejlődik a rendszer a lassú-gördülés során. A 9. ábrán látható, hogy mindkét esetben ráfut a lassú-gördülési egyenesre a trajektória,



9. ábra. Klasszikus (bal) és kvantum-feljavított (jobb) (x, z) sík. Szaggatott vonallal pedig a $z = -\sqrt{6}x$ lassú-gördülési egyenes.

majd a lassú-gördülés után szépen eltart tőle. Különbség az Univerzum nagyon korai szakaszában jelenkezik, ahol máshogy futnak a trajektóriák. Kezdetben a klasszikus és a kvantum-feljavított esetben is a trajektória megközelíti az $x = 1$ -et. Ez nem meglepő, hiszen az x dimenziótlan változó tartozik a kinetikus energiához, ami dominál kezdetben.

3. Összegzés

A dolgozat során megvizsgáltam klasszikus esetben a felfúvódást, és visszakaptam az irodalomban is jól ismert eredményeket. Ezekután a kvantum-feljavított esetben, amikor a gravitációs és kozmológiai állandókat lecseréltem a nekik megfelelő energiaskála-függő társaikra, megvizsgáltam a felfúvódást egy alkalmasan megválasztott m tömegparaméter mellett. Számolások során sikerült lassú-gördüléssel felfúvódást találni, és vizsgálni azt, majd összehasonlítani a klasszikus esetbeli felfúvódással. Eredményül azt kaptam, hogy a kvantum-feljavított esetbeli felfúvódás később következett be, és hosszabb ideig is tartott, mint a klasszikus esetbeli, miközben a megfelelő tömegparaméternek köszönhetően az Univerzum méretének növekedésében nem történt változás.

A dolgozat során még a két esetbeli felfúvódás vizsgálata során fennmaradó nyitott kérdésekre sikerült választ adni a kvantum-feljavított esetbeli felfúvódás további vizsgálataiban: megvizsgáltam a kezdeti feltételekre való érzékenységet a numerikus pontosságnak, és megvizsgáltam az első és második szakaszban bekövetkező felfúvódásnak a tömegparamétertől való függését. Azt kaptam eredményként, hogy a kezdeti feltételektől független a megoldás, és a fellépő hibák a leolvasásból adódhatnak.

A felfúvódás és a tömegparaméter kapcsolatára azt kaptam, hogy a felfúvódás erősen függ a tömegparaméter megválasztásától, a kettő kapcsolatára ($\mathcal{N}(m)$) is sikerült egy analitikus formulát illeszteni, így ezzel az általam használt tömegparaméter választása indokolt az összehasonlítás során. Ismert volt még, hogy a Hubble-paraméter a felfúvódás ideje alatt csak nagyon kicsiny értéket változott, ezt is sikerült vizsgálni, és igazolni. Két mérhető mennyiségre is lehetett becslést adni, azonban a kvantum-módosítás rontott rajta annak köszönhetően, hogy a felfúvódás későbbre tolódott, és a kvantumfluktuációk amplitúdója tulságosan lecsengett addigra.

Végül összehasonlítottam a klasszikus és a kvantum-feljavított esetekben a dimenziótlan változók terében értelmezett (x, z) síkon a trajektóriákat.

A. függelék: az első -UV- szakasz analitikusan közelített összefüggései

A Világegyetem korai szakaszában a kinetikus tag dominált a potenciál felett:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \gg V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \quad (\text{A.0.1})$$

Ennek a kihasználásával az

$$3H^2 = 8\pi\rho^\varphi g_* k^{-2} + \lambda_* k^2 \quad (\text{A.0.2})$$

$$\dot{H} = -4\pi g_* \dot{\varphi}^2 k^{-2} \quad (\text{A.0.3})$$

egyenletekből

$$H_{est}^2 \approx \frac{2\lambda_* k_{est}^2}{3} \quad \dot{H}_{est} = -\lambda_* k_{est}^2 \quad (\text{A.0.4})$$

adódik, ahol az "est" felirat a közelített formulát jelenti. Az (A.0.4)-ből H -ra kapható egy analitikusan megoldható differenciálegyenlet:

$$-\frac{\dot{H}_{est}}{H_{est}^2} = \frac{3}{2}, \quad (\text{A.0.5})$$

amiből

$$\boxed{H = \frac{2}{3t + C}}, \quad (\text{A.0.6})$$

ahol C integrációs állandó, meghatározható a $H^{-1}(0) = 0$ kezdőfeltétellel: $C = 0$.

Illetve

$$\boxed{k_{est}(t) = \sqrt{\frac{3}{2\lambda_*}}, \quad H_{est}(t) = \sqrt{\frac{2}{3\lambda_*}} \frac{1}{t}, \quad \varphi_{est}(t) = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3\omega} \frac{1}{t}} \quad (\text{A.0.7})$$

ahol $\omega^2 = 8\pi g_* \lambda_*$. A t_G -re is lehet egy becslést adni:

$$\begin{aligned} k_{est}(t_G^{est}) &= k_G = \sqrt{\frac{3g_*}{G_0}} = \sqrt{\frac{2}{3\lambda_*}} \frac{1}{t_G^{est}} \\ t_G^{est} &= \sqrt{\frac{2G_0}{9g_*\lambda_*}} \approx 1.27 s_{Pl}. \end{aligned} \quad (\text{A.0.8})$$

Hivatkozások

- [1] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, (University Press, Cambridge, 2005).
- [2] D. Baumann, *TASI Lectures on Inflation*, arXiv:0907.5424.
- [3] S. Nagy and K. Sailer, *Interpolation formulas for asymptotically safe cosmology*, Universe 2023,9(4)184
- [4] M. Reuter, *Nonperturbative Evolution Equation for Quantum Gravity*, Phys. Rev. D 57, 971 (1998), arXiv:hep-th/9605030.
- [5] O. Lauscher and M. Reuter, *Ultraviolet Fixed Point and Generalized Flow Equation of Quantum Gravity*, Phys. Rev. D 65, 025013 (2001), arXiv:hep-th/0108040.
- [6] O. Lauscher and M. Reuter, *Is Quantum Einstein Gravity Nonperturbatively Renormalizable?*, 2002 Class. Quantum Grav. 19, 483 (2002), arXiv:hep-th/0110021.
- [7] M. Reuter and F. Saueressig, *Functional Renormalization Group Equations, Asymptotic Safety, and Quantum Einstein Gravity*, arXiv:0708.1317.
- [8] M. Forconi, W. Giarè, E. Di Valentino, and A. Melchiorri, Phys. Rev. D, **104**, 103528 (2021).
- [9] Y. Akrami et al., Astron. Astrophys., **641**, A10 (2020).
- [10] M. Hindmarsh, D. Litim, and C. Rahmede, JCAP **07**, 019 (2011), arXiv:1101.5401 [gr-qc].