

Renormálási csoport alkalmazása véges hőmérsékletű kvantumtérelméleti modelleken

Nyergesy Eszter Napsugár

Fizika BSc
3. évfolyam

Témavezetők:

Dr. Márián István Gábor
adjunktus

Szilárdtest Fizikai Tanszék

Dr. Nándori István
egyetemi docens

Kísérleti Fizikai Tanszék

Debreceni Egyetem, Természettudományi és Technológiai Kar
2024.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Kvantumtérelmélet	3
2.1. Fizikai modellek	3
2.2. Klasszikus térelmélet	3
2.3. Pályaintegrálok	4
2.4. Generáló funkcionál és az effektív hatás	5
3. Renormálási csoport módszer	6
3.1. Skálafüggés szemléltetése Ising és ϕ^4 modellekkel	6
3.2. Wetterich RG egyenlet	11
3.3. Regulátor függvények	15
4. Renormálási csoport alkalmazása véges hőmérsékleten	18
4.1. Véges hőmérsékletű kvantumtérelmélet	18
4.2. Kvantumos és klasszikus fázisátalakulások	19
4.3. Termális RG bemutatása ϕ^4 modellen keresztül	20
5. Einstein-Hilbert csonkolt gravitáció véges hőmérsékleten	24
5.1. Aszimptotikusan biztonságos gravitáció	24
5.2. Einstein-Hilbert csonkolás	25
5.3. ASG termális evolúciója	27
5.4. Eredmények összefoglalása	29
Köszönetnyilvánítás	30
Saját eredmények	31
Irodalomjegyzék	32

1. fejezet

Bevezetés

Jelen munkám célja, hogy vizsgáljam a módosított termális Renormálási Csoportot (RG), melynek számos alkalmazása lehetséges kozmológiai [1], részecske fizikai, illetve statisztikus mechanikai kérdésekben is [2]. A tanulmányozást a ϕ^4 skalártér elmélet [3], illetve Einstein-Hilbert csonkolt gravitáció modelljén [4] végzem.

A $T = 0$ hőmérsékletű kvantumtérelmélet (QFT) termális kiterjesztését alkalmazom, azáltal, hogy bevezetek egy felső korlátot a képzetes idő dimenzióra. Ez egyenértékű azzal, hogy a QFT-t euklideszi metrikában egy R képzetes idő sugarú hengeren vizsgálom, mely az inverz hőmérséklet szerepét játssza, tehát $c = \hbar = k_B = 1$ természetes egységekben $T = 1/R$ összefüggés adódik. Ezen eljárást számos fizikai rendszer vizsgálatokhoz hasznosították [5–7], azonban a véges hőmérsékletű QFT és a renormálási csoport módszer ötvözése különleges figyelmet igényelhet.

Kvantumkorrekciók nélkül a dimenziós csatolásokat mindig úgy választjuk, hogy azok az RG transzformációk során állandóak legyenek, így a dimenziótlan csatolások kvantumkorrekciók nélkül triviális RG skálázással rendelkeznek. A csatolások azonban nem mérhetők közvetlenül, ellentétben a hőmérséklettel, amelynek fizikai jelentése van. Felmerülhet a kérdés, hogy a dimenziós, vagy a dimenziótlan hőmérsékletet kell állandóan tartani az RG folyás során. Ennek eldöntésére tisztázni kell, hogy melyik mérhető közvetlenül. A későbbiekben amellet fogunk érvelni, hogy a dimenziótlan hőmérséklet lesz a megfigyelhető fizikai mennyiség, melyet konstanson kell tartani RG transzformációk során [2].

A wilsoni RG [8, 9] (nem-perturbatív) módszer a durva szemcsésítés elképzelésén alapul, mely RG skálatranszformációval valósul meg. Ezen durvítást $d = 2$ dimenziós spinmodellen fogom szemléltetni, ahol a kezdeti rács a rácsállandóval rendelkezik, a spin blokkosítás pedig a' rácsállandót eredményez. Amennyiben a blokkosítási eljárás során adott dimenziós mennyiség változatlan marad, az skálázást generál. Például $a' = 2a$ esetén L mennyiség változása $L = 10a = 5a'$ módon valósul meg. Ez a változás

nem fizikai, hiszen csak a rácsállandóhoz képesti hossz módosul. Ennek elkerüléséhez L -nek is skálázódnia kell L' -re, hogy $L/a = L'/a' = 10$ állandó legyen. Ezen eljárást véges hőmérsékleten henger felületén kell végrehajtani. A henger sugarának dimenziós mivolta miatt $R'/a' = R/a = \text{áll. hányados}$ nak megfelelően kell R -nek skálázódnia, tehát a hőmérséklet is skálafüggő lesz. A k impulzusskála fordítottan aránylik az a hosszskálához, így $T = \tau k$ összefüggés adódik, ahol τ dimenziótlan arányossági tényező. Itt T adja meg a termális, k pedig a kvantum fluktuációk levágását, melyeket a későbbiekben ismertetek. A wilsoni RG-ben $k \rightarrow 0$ határérték vétele szükséges, így T nem játszhatja a hőmérséklet szerepét, ez τ dimenziótlan hőmérséklet feladata lesz.

2. fejezet

Kvantumtérelmélet

2.1. Fizikai modellek

Fizikai folyamatok vizsgálata során a kísérleti tapasztalatok magyarázatára modelleket állíthatunk fel, melyekkel matematikai úton adunk leírást a különböző jelenségekről. Azonban bizonyos fizikai modellek korlátozott érvényességi tartománnyal rendelkeznek, hiszen a newtoni mechanika megfelelő leírást ad kis sebességű, nagy méretű testek mozgására gyenge gravitációs mezőben. Amennyiben fénysebességet megközelítő rendszerről beszélünk a speciális relativitáselmélet nyújt segítséget. Erős gravitációs mezők jelenlétékor az általános relativitáselmélet, kis méretű objektumok esetén pedig a kvantummechanika eszközeivel végezzük a rendszer tanulmányozását.

Az elemi részecskék vizsgálatakor a relativisztikus és a kvantumos effektusokat is figyelembe kell venni, erre a célra a kvantumtérelmélet (QFT) szolgál, mely a részecskékhez mezőket rendel. Ezen tárgyalásmódban a tömegpont leírás helyett a mezők, terek alkalmasak folyamatok megfogalmazására.

2.2. Klasszikus térelmélet

A ϕ mező egy olyan mennyiség, mely a tér és idő minden pontjában definiálva van [10], azaz négyesvektoros jelöléssel: $\phi(x^\mu)$. Itt x^μ a négyes helyzetvektor, melynek komponensei $c = 1$ egységben (t, x, y, z) , az indexelés pedig $\mu = (0, 1, 2, 3)$ módon történik. A továbbiakban $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ jelölést alkalmazzuk.

A fizikai mező dinamikáját az $\mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial_\mu \phi(x^\mu), x^\mu)$ Lagrange-sűrűség (vagy röviden Lagrange) határozza meg, melynek térfogatintegráljával kapjuk a Lagrange függvényt [11]

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial_\mu \phi(x^\mu), x^\mu) . \quad (2.1)$$

A tömegpontrendszeres leíráshoz hasonlóan itt is definiálhatjuk a hatást

$$S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L} , \quad (2.2)$$

amely a mező funkcionálja. A funkcionál tehát függvényekhez számot tud rendelni, ez megvalósulhat határozott integrál alakjában. A hatás extrémuma kiválasztja a ténylegesen beteljesülő, fizikai mezőkonfigurációt, vagyis a mezőnek fizikailag megvalósuló változása mentén a hatás variációja nulla, $\delta S = 0$.

A mozgásegyenleteink a mezőkre vonatkozó Euler-Lagrange egyenletek, melyeket megoldva adódik a fizikai mezőkonfiguráció a téridőben.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (2.3)$$

2.3. Pályaintegrálok

A klasszikus mezők kvantálása történhet kanonikus kvantálással, ahol a mezők operátorok lesznek, vagy pedig pályaintegrálos módon. Utóbbit úgy tesszük meg, hogy a klasszikus nézőponttal szemben – ahol csak egy trajektóriát tekintettünk – figyelembe vesszük az összes lehetséges pályát, melyet a részecske megtehet egy kezdő, és egy végpont között, továbbá mindegyik út hozzájárul a teljes valószínűségi amplitúdóhoz.

A hullámfüggvény a végső helyen és időpontban a következőképp számolható:

$$\psi(q_v, t_v) = \langle q_v, t_v | \psi \rangle = \int dq_k \langle q_v, t_v | q_k, t_k \rangle \langle q_k, t_k | \psi \rangle = \int dq_k K(q_v, t_v; q_k, t_k) \psi(q_k, t_k). \quad (2.4)$$

Itt minden q_k helyen figyelembe vesszük a $\psi(q_k, t_k)$ köztes állapotot K faktoral, és $\psi(q_v, t_v)$ -t ezek szuperpozíciójából (integráljából) kapjuk. A K -t propagátornak nevezzük, és tulajdonképpen azt fejezi ki, hogy $\psi(q_k, t_k)$ milyen valószínűséggel propagál $\psi(q_v, t_v)$ állapotba.

A propagálást egy pályaintegrál adja meg, ahol az összes lehetséges pályára történik az integrálás

$$K(q_v, t_v; q_k, t_k) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \quad (2.5)$$

módon, melyben $\mathcal{N}$ normálási tényező, és az időtengelyt feldarabolva $\prod dq = \mathcal{D}q$ jelenik meg. Tehát míg klasszikusan az extrémális hatás választotta ki a megvalósuló pályát, itt minden lehetséges trajektóriát figyelembe kell venni $e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}$ súllyal.

Térelméltre való általánosítás során a szabadsági fokok az általános koordináták helyett mezők lesznek ($q \rightarrow \phi$), Lagrange függvényt a sűrűség váltja le ($L \rightarrow \int d^3x \mathcal{L}$), és az idő helyett a téridőt osztjuk darabokra ($\prod_t = \mathcal{D} \rightarrow \prod_{t,x} = \mathcal{D}$).

2.4. Generáló funkcionál és az effektív hatás

A kvantumtérelméletben [12,13] létezik egy olyan funkcionál, mely a pályaintegrál által van definiálva [14],

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (2.6)$$

ahol $c = \hbar = 1$, és megtettük az áttérést Minkowskiról euklideszi metrikára, azaz $t \rightarrow -it_E$ Wick-forgatással képzetes időre váltottunk. A hatás¹ $S[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} d^d x \mathcal{L}$ formájú, míg (2.5) esetén t_k és t_v az integrálás határai.

A generáló funkcionál tartalmazza az összes információt a hatás által leírt modellről, akár csak a statisztikus fizikából ismert partíciós függvény. Z funkcionális deriváltjaiból különböző fizikai mennyiségek származtathatóak, például korrelációs függvények, átmeneti amplitúdók, és hatáskeresztmetszetek. A funkcionál általánosítható úgy, hogy egy J forrás tagot írunk a hatásba,

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + \int d^d x J(x) \phi(x)} \quad (2.7)$$

hogy aszerint végezzük el a funkcionális deriválást, majd $J = 0$ behelyettesítést alkalmazzunk. Hasznos a természetes alapú logaritmusát képezni,

$$W[J] \equiv \ln Z[J] \quad (2.8)$$

mert például $W[J]$ J szerinti funkcionális deriváltja a mező várható értékét adja

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J(x)} = \langle \phi \rangle_J = \varphi, \quad (2.9)$$

a második funkcionális deriválttal pedig a propagátort kapnánk. Azonban egy olyan funkcionállal szeretnénk dolgozni, amely fizikai mennyiségtől függ, nem pedig a fiktív J forrástól, hiszen az csak egy eszköz volt arra, hogy generáljuk az előbbi, úgynevezett n-pont korrelációs függvényeket.

A $W[J]$ Legendre-transzformációjával elvégezhetjük ezt a változócsere, és így a mező várható értékétől függő mennyiséget származtathatunk,

$$\Gamma[\varphi] = -W[J_\varphi] + \int d^d x J_\varphi(x) \varphi(x) \quad (2.10)$$

ahol J_φ az a forrás, melyre ϕ mezőnek φ várható értéke van. A $\Gamma[\varphi]$ funkcionált effektív hatásnak nevezzük, és a későbbiekben fontos szerepe lesz.

¹A hatást ezúttal tetszőleges d dimenzióra írtuk fel.

3. fejezet

Renormálási csoport módszer

3.1. Skálafüggés szemléltetése Ising és ϕ^4 modellekkel

A különböző kvantumtérelméleti modelleket a Lagrange-sűrűsége jellemzi, melyeknek általános alakja $\mathcal{L} = T - V$, azaz a kinetikus és a potenciális tagok különbsége. Ezekben felfedezhetünk olyan paramétereket, melyeket a jól ismert fizikai állandókkal szokás azonosítani, mint például a tömeg és a töltés. Ezeket csatolási paramétereknek nevezzük, és azt tapasztaljuk, hogy értékük nem állandó, hanem függ attól, hogy milyen energiaskálán (azaz méretskálán) vizsgáljuk a rendszert. Mivel a csatolások meghatározzák, hogy milyen szorzó szerepel a V -ben lévő mezők közötti interakciók előtt, így különböző energiákon ez is módosulni fog, a kölcsönhatások erőssége megváltozik.

Például a ϕ^4 modell Lagrange euklideszi téridőben ($\mathcal{L} = T + V$) a következő:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{g_2}{2}\phi^2 + \frac{g_4}{4!}\phi^4 \quad (3.1)$$

Itt a potenciál Taylor sorfejtését ϕ^4 tagig végeztük, és csak a páros hatványokat vettük figyelembe, hiszen a $V(\phi)$ potenciálnak alulról korlátosnak kell lennie, és tükrözési szimmetriával (Z_2) rendelkezőt vizsgálunk. A g_2 és g_4 a fent említett csatolások, melyek függnek a méretskálától.

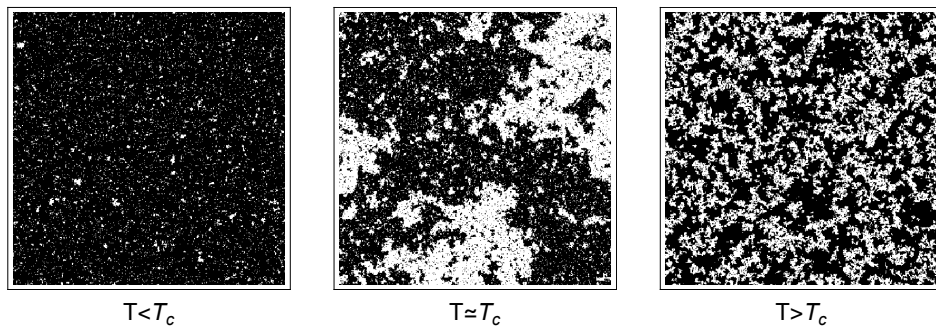
A továbbiakban segítségünkre van, hogy a ϕ^4 kvantumtérelméleti modell és a statisztikus fizikából ismert Ising-spinmodell között létezik egy kölcsönös megfeleltetés, és az Ising által szemléletesebben bemutatható a rendszer különböző méretskálákon való megnyilvánulása.

Az Ising-modell olyan spineket ír le, melyeknek két állapota van, egy felfele (+1), és egy lefele (-1) irányuló. Ezek a spinvektorok elhelyezkedhetnek vonal mentén ($d = 1$), rácson ($d = 2$), és tetszőleges d dimenzióban is.

Az Ising-modell Hamilton függvénye [14] (J csatolás, és $h = 0$ külső mágneses tér esetén),

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j \quad (3.2)$$

ahol $S_n \in \{-1, +1\}$, és az összegzés szomszédos spinekre történik. A fenti egyenlet jól szemlélteti, hogy az lesz energetikailag kedvezőbb a rendszernek, ha a spinek megegyező irányba mutatnak, hiszen ekkor $S_i S_j = 1$, tehát $J > 0$ esetén $H < 0$.

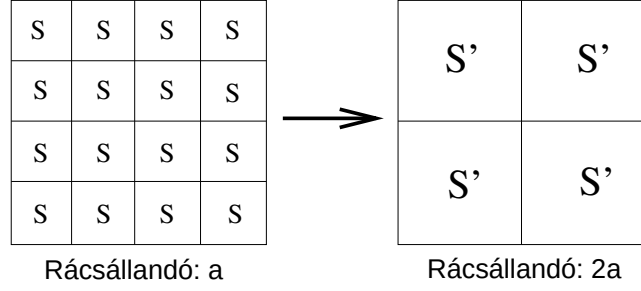


3.1. ábra. A spinmodell rácsa különböző hőmérsékleteken.

Ehhez hasonló rendet el tudunk képzelni $T = 0$ hőmérsékleten, ha beszíneznénk a felfele néző spineket feketére, a lefele állókat pedig fehérre, akkor $T = 0$ esetén csak egyszínű (például fekete) rácsot tapasztalnánk (3.1 ábra). A hőmérséklet növelése "szétrázza" az egy irányba mutató vektorokat, elegendő energiát közlünk velük az átforduláshoz. $T \rightarrow \infty$ felé haladva azt látjuk, hogy apró fekete és fehér pontok sokasága véletlenszerűen kitölti a rácsunkat, megszűnt az egyszínű rendezett állapot. Azonban ezt a rendezetlen rendszert tekinthetjük szimmetrikusnak, hiszen ha a fekete és fehér színeket megcserélnénk (felfele néző spinből lefelét csinálunk, és fordítva), akkor a kapott képet nem tudnánk megkülönböztetni az átfordítás előttiétől. A $T = 0$ egyszínű rendszerre visszatérve pedig azt látjuk, hogy az lesérti a tükrözési szimmetriát, feketéből fehér színű rácsot kapunk a spinek tükrözésével.

Ezen fázisok között találunk egy köztes állapotot valamely $T = T_c$ kritikus hőmérsékleten. Itt a rácsot megfigyelve azt tapasztaljuk, hogy önazonos, azaz fraktál szerkezettel rendelkező rendszert kaptunk. Tehát akármilyen messziről nézünk rá, nem fogunk új képet látni. Ezen vizsgálódást elvégezhetjük a többi fázisban is.

Az eddig emlegetett rács rendelkezik valamilyen a rácsállandóval. Ha kétszer olyan messziről akarunk ránézni, az megfelel annak, hogy növeljük a rácsállandót, $a' = 2a$. A nagyobb rácson lévő blokkosított szabadsági fokokat (S' spineket) az eredetiek (S spinek) kiátlagolásából kapjuk, azaz pontosabban megfogalmazva, az eredeti partíciós függvény némely szabadsági fokát ki kell integrálni, ezzel új blokkosított spint kreálva. Ezt nevezzük Wilson-Kadanoff blokkosítási eljárásnak [8, 9] (3.2 ábra).



3.2. ábra. Spinek blokkosítása rácsállandó növelésével. [14]

Ezt végrehajtva a rendszeren észrevehetjük, hogy a nagyrészt fekete rács még inkább egyszínű lett, magas hőmérsékleten rendezetlen állapotból még rendezetlenebbet kaptunk. Kritikus hőmérsékleten pedig nem történik szerkezeti változás a blokkosítás után sem a fraktál struktúra miatt.

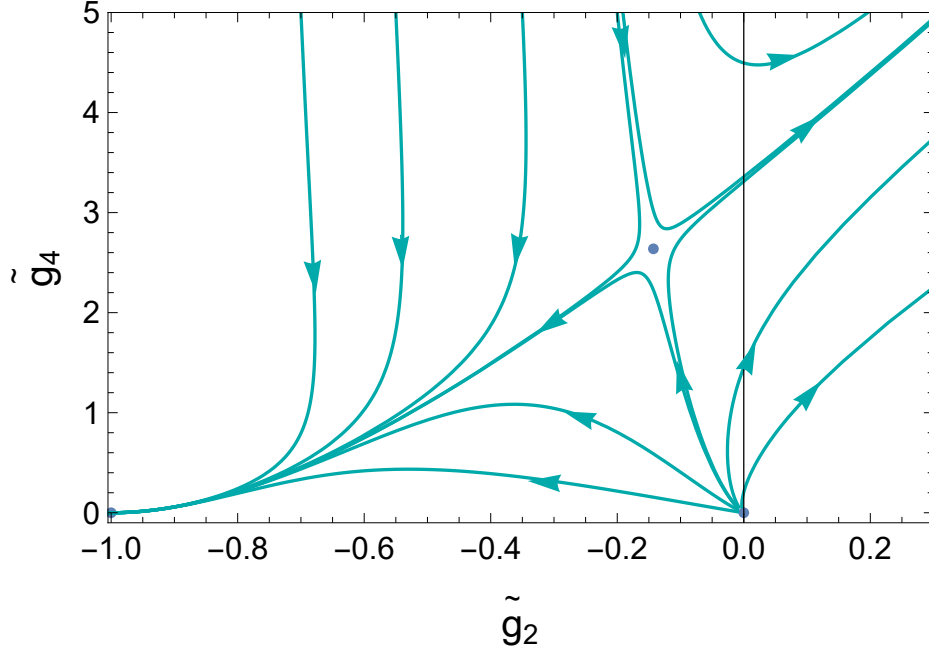
A hosszskála helyett használhatjuk a k energia-, illetve impulzusskálát ($c = 1$ egységben az energia és az impulzus megegyezik), a kettő között pedig fordított arányosság van ($k \sim \frac{1}{a}$). Tehát a nagy (kis) impulzusskálához kicsi (nagy) méretskála tartozik.

Mivel az Ising-spinmodell leképezhető a kvantumtérelméleti ϕ^4 modellre, érdemes a különböző fázisokat megvizsgálni a ϕ^4 segítségével. A korábban emlegetett csatolások függni fognak az impulzusskálától: $g_2(k)$, $g_4(k)$. Ahhoz, hogy megfigyeljük a csatolások skálafüggését dimenziótlanítani kell őket (jelölés: $\tilde{g}_2(k)$, $\tilde{g}_4(k)$), hiszen a dimenziós mennyiségek már rendelkeznek egy triviális skálafüggéssel. Tehát a csatolás számértéke természetes módon megváltozik, ha a hosszúságegységet a -ról a' -re változtatjuk [15]. Annak érdekében, hogy ezt a dimenzióból eredő skálafüggést figyelmen kívül hagyjuk, dimenziótlan mennyiségekkel kell dolgozni, és rajtuk már megfigyelhetjük a nem triviális energiaskála függést.

A későbbiekben taglalt módon megkapható egy differenciálegyenlet rendszer a csatolásokra, melyeket Renormálási Csoport (RG) egyenleteknek hívunk.

$$\begin{aligned} k\partial_k \tilde{g}_2(k) &= \beta_2(\tilde{g}_2(k), \tilde{g}_4(k)) \\ k\partial_k \tilde{g}_4(k) &= \beta_4(\tilde{g}_2(k), \tilde{g}_4(k)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ezeket megoldva, és a csatolásokat ábrázolva megkapható a ϕ^4 modell fázisdiagramja, melyet 3.3 ábrán tüntettem fel. A fázisdiagram görbéi mutatják meg, hogy a paramétertér egy pontjáról, azaz bizonyos kezdeti g_2 , g_4 értékekről indulva azok hova fognak befutni k változtatásával. Az egymás utáni renormálási transzformációk a csatolások által meghatározott pontot a nagyobb rácsállandóhoz ($k \rightarrow 0$) tartozó irányba viszik. Erre renormálási csoport folyásként (RG flow) hivatkozhatunk [15].



3.3. ábra. A ϕ^4 modell fázisdiagramja.

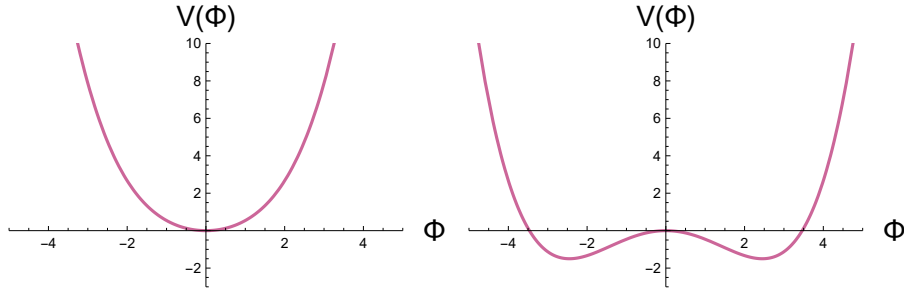
A 3.3 ábrán különböző fixpontokat figyelhetünk meg. Például a taszító nagy energiás (UV) fixpontból induló balra kanyarodó görbék a vonzó alacsony energiás (IR) fixpontba futnak bele. Megjelenik egy olyan fixpont is, mely egyik irányban attraktív, másikban pedig repulzív jelleggel bír, ezt nevezzük nyeregpontnak, vagy Wilson-Fisher fixpontnak. Ezeket a fixpontokat megtalálhatjuk, ha megkeressük hol tűnnek el az FRG egyenletek jobb oldalán lévő béta függvények, azaz $\beta_2 = 0$, $\beta_4 = 0$ teljesülése esetén. Látható, hogy mivel a deriváltak nullák, a csatolások a fixpontban nem függenek k -tól. Tehát a fixpont skálainvariáns rendszert ír le.

Amennyiben a $(g_2, g_4) = (0, 0)$ pont kielégíti az előbbi feltételt, ezt gaussi fixpontnak nevezzük. Mivel itt a csatolások nullák, a Lagrange kölcsönhatásokat kifejező tagjai eltűnnek, csak a szabad mező marad.

Beszélhetünk releváns, irreleváns, illetve marginális csatolási állandókról is. A relevánsak $k \rightarrow 0$ (durvuló hosszskála mentén) nőnek a fixpont közelében, az irrelevánsak csökkennek, a marginálisok pedig változatlanok maradnak.

A fázisdiagram további elemzésével észrevehetjük, hogy a különböző fázisok jól elhatárolódnak, léteznek kritikus trajektóriák (szeparátrixok), melyek elválasztják őket egymástól. A flow diagram gaussi fixpontjából jobbra futó trajektóriák esetén $g_2 > 0$, $g_4 > 0$ teljesül, tehát $V(\phi)$ potenciál U alakú, és szimmetrikus állapotban van a rendszer. Ez felel meg az Ising-modell rendezetlen spinekből álló, de tükrözési szimmetriával rendelkező fázisának.

Amennyiben a gaussi fixponttól $g_2 < 0$ tartományba menő trajektóriákat követjük $V(\phi)$ potenciál W-re emlékeztet, és spontán szimmetriasértett állapothoz tartozik (3.4 ábra), melyre analóg az Ising-modell alacsony hőmérsékleten lévő, egyszínű spinekből álló rácsa, ahol szintén sérült a Z_2 szimmetria.



3.4. ábra. A ϕ^4 modell szimmetrikus és szimmetriasértett fázisának potenciálja. Ez a kvalitatív kép egyaránt igaz dimenziós és dimenziótlan potenciálra is.

3.2. Wetterich RG egyenlet

Korábbi fejezetben láthattuk, hogy $S[\phi]$ klasszikus hatásból kiindulva, a pályaintegrál segítségével figyelembe vett kvantumfluktuációkkal származtathatunk egy $\Gamma[\varphi]$ effektív hatást, melyből mérhető fizikai mennyiségek kaphatóak. Mivel a modellünkben szereplő csatolások eltérő energiákon felvett értékére vagyunk kíváncsiak, szeretnénk egy $\Gamma_k[\varphi]$ skálafüggő effektív hatásra szert tenni, illetve látni fogjuk, hogy felírható rá az FRG, vagy más néven Wetterich egyenlet [16].

Első lépésként írjuk fel a ϕ mezőt a várható értékének és az átlag körüli χ fluktuációs tagnak az összegeként [14, 17, 18]

$$\phi = \varphi + \chi. \quad (3.4)$$

Így (2.7), (2.8) és (2.10) egyenleteket felhasználva a generáló funkcionál felírható a fluktuáló mező integráljaként

$$Z[J] = e^{W[J]} = e^{-\Gamma[\varphi] + \int J\varphi} \stackrel{!}{=} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + \int J\phi} = \int \mathcal{D}\chi e^{-S[\varphi+\chi] + \int J(\varphi+\chi)}. \quad (3.5)$$

Az $e^{\int J\varphi}$ -vel való egyszerűsítést elvégezve, és alkalmazva, hogy a Legendre-transzformáció miatt $J = \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi}$ teljesül, a következőt kapjuk:

$$e^{-\Gamma[\varphi]} = \int \mathcal{D}\chi e^{-S[\varphi+\chi] + \int \chi \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi}}. \quad (3.6)$$

Ezen pályaintegrált nyeregponthoz közelítéssel megoldva, az effektív hatás alakja

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi^2} \right] + \dots, \quad (3.7)$$

ahol a trace alatt impulzustérfogat integrálra kell gondolni. Azonban szeretnénk, ha megjelenne a k futó impulzusskála is. Ez megtehető, ha a pályaintegrálási mértéket megváltoztatjuk oly módon, hogy a hatásból új tagot adunk

$$\mathcal{D}\chi \rightarrow \mathcal{D}\chi e^{-\Delta S_k[\chi]}. \quad (3.8)$$

Itt k egy infravörös levágást jelent, vagyis úgy kell majd megadnunk $\Delta S_k[\chi]$ alakját, hogy a k -nál kisebb módusok elnyomódjanak, a nagyobbak pedig ki tudjanak integrálódni. Tehát egy tömegtagként tekinthetünk rá, és

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) R_k(-\partial^2) \phi(x) \quad (3.9)$$

formában adjuk meg. Itt $-\partial^2$ a Laplace operátor, mely impulzus reprezentációban $-\partial^2 \rightarrow p^2$. Az $R_k(p)$ függvényt regulátornak nevezzük. Ahhoz, hogy a kívánt eredményt elérjük a regulátornak a következő feltételnek kell megfelelnie [19]:

$$R_k(p \rightarrow 0) > 0, \quad R_{k \rightarrow 0}(p) = 0, \quad R_{k \rightarrow \Lambda}(p) = \infty. \quad (3.10)$$

Itt $k \rightarrow \Lambda$ nagy impulzus levágást jelent. Az első feltétel azért szükséges, hogy elkerüljük az infravörös ($p \rightarrow 0$) divergenciákat, hiszen például a következő propagátor esetén a hozzáadott regulátor

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 + m^2 + R_k(p)} \quad (3.11)$$

alakban nyilvánul meg, és ha $p \rightarrow 0$ esetén a regulátor pozitív, akkor biztos nem kapunk nullát a nevezőben. Regulátor hatását tömegmentes propagátorra 3.6 ábra jobb oldalán szemléltetjük.

A (3.10) második feltétele is fontos, ugyanis ha $k \rightarrow 0$ esetén a regulátor eltűnik éppen visszkapjuk $\Gamma_{\text{eff}} \equiv \Gamma$ effektív hatást. Az utolsó megkötés pedig azért kell, hogy ne legyen megengedve a módusok propagálása nagy ($k \rightarrow \Lambda$) impulzuskálákon. Ezen skálán lévő effektív hatást jelölhetjük Γ_Λ -val, ez a kezdeti, csupasz hatás, ahol még nem vettük figyelembe a kvantum fluktuációkat.

A (3.6) és (3.8) felhasználásával a következőt kapjuk:

$$e^{-\Gamma_k[\varphi]} = \int \mathcal{D}\chi e^{-S[\varphi+\chi] - \Delta S_k[\chi] + \int \chi \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi}}. \quad (3.12)$$

A (3.7) megoldáshoz hasonlóan nyert kifejezés a skálafüggő effektív hatásra

$$\Gamma_k[\varphi] = S_\Lambda[\varphi] + \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left[R_k(p) + S_\Lambda^{(2)}[\varphi] \right] + \dots, \quad (3.13)$$

ahol $S_\Lambda^{(2)}[\varphi] \equiv \frac{\delta^2 S_\Lambda[\varphi]}{\delta \varphi^2}$. A $k \rightarrow \Lambda$ limeszben a regulátor végtelenbe tart, az azt tartalmazó tagok mezőfüggetlenek lesznek, ezért figyelmen kívül lehet hagyni őket, és $\Gamma_\Lambda = S_\Lambda$, mely éppen a klasszikus hatás.

Tehát mindkét határértéket megvizsgálva arra juthatunk, hogy a Γ_k skálafüggő effektív hatás interpolál a nagy impulzuskálán megadott S_Λ eredeti hatás és az összes kvantumos tulajdonságot figyelembe vevő Γ_{eff} effektív hatás között.

Ha (3.13) mindkét oldalát differenciáljuk a k futó skála szerint [19], és beszorozzuk őket k -val, akkor

$$k \partial_k \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{k \partial_k R_k(p)}{R_k(p) + S_\Lambda^{(2)}[\varphi]} \quad (3.14)$$

összefüggés írható. A $S_\Lambda^{(2)} \rightarrow \Gamma_k^{(2)}$ csere végrehajtása a Wetterich egyenletet [16, 20] eredményezi

$$\boxed{k\partial_k \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{k\partial_k R_k(p)}{R_k(p) + \Gamma_k^{(2)}[\varphi]}} \longleftrightarrow \boxed{k\partial_k \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{k\partial_k R_k(p)}{R_k(p) + \Gamma_k^{(2)}[\varphi]}}. \quad (3.15)$$

Az így kapott FRG egyenlet egy nemlineáris integro-differenciálegyenlet, mely funkcionálokra vonatkozik, így nem lehetséges általános megoldást találni. Az összefüggés egzakt, hiszen a levezetéshez nem használtunk közelítéseket², azonban a megoldáshoz szükséges alkalmazni őket.

A levezetés során nem kicsi paraméter szerint végezzük a sorfejtést, hanem a paraméterteret szűkítjük. Ez többek között megvalósítható a skálafüggő effektív hatás gradiens (derivatív) sorfejtésével [21, 22]

$$\Gamma_k[\varphi] = \int d^d x \left(V_k(\varphi) + \mathcal{Z}_k(\varphi) \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \dots \right), \quad (3.16)$$

ahol a $\mathcal{Z}_k(\varphi)$ hullámfüggvény renormálási együttható a kinetikus tag csatolása. Amennyiben az elsőrendű tagig fejtünk sort lokális potenciál approximációról (LPA) beszélünk, és $\mathcal{Z}_k(\varphi) \equiv 1$ teljesül. Pontosabb közelítést ad az LPA', ahol $\mathcal{Z}_k(\varphi) \equiv \mathcal{Z}_k$ mezőfüggetlen futó csatolás.

További közelítések használata is indokolt lehet, ekkor a $V_k(\varphi)$ potenciál Taylor, vagy Fourier sorba fejthető

$$V_k(\varphi) = \sum_{n=1}^{N_{\text{cut}}} \frac{g_{2n}(k)}{(2n)!} \varphi^{2n}, \quad V_k(\varphi) = \sum_{n=1}^{N_{\text{cut}}} u_n(k) \cos(n\beta\varphi). \quad (3.17)$$

Itt N_{cut} fejezi ki a levágást, azaz hanyad rendig szeretnénk tagokat figyelembe venni. A k skálától való függés a $g_{2n}(k)$, illetve $u_n(k)$ csatolásokban nyilvánul meg.

A (3.15) Wetterich egyenletbe visszaírva (3.16) kifejtésből kapott $\Gamma_k^{(2)}[\varphi]$ második funkcionálderiváltat, és $\varphi(x) = \varphi$ állandó mezőkonfigurációt tekintve a kapott összefüggés [19]

$$k\partial_k V_k(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{k\partial_k R_k(p)}{p^2 + V_k''(\varphi) + R_k(p)} \quad (3.18)$$

alakú, ahol $V_k''(\varphi) \equiv \partial_\varphi^2 V_k(\varphi)$ jelöléssel élünk.

²Bár (3.14) kifejezést huroksorfejtés eredményezte, az $S_\Lambda^{(2)} \rightarrow \Gamma_k^{(2)}$ áttérés az egzakt alakot adja. Ez a lépés inkább szemléletes, mintsem pontos levezetés, de belátható, hogy a Wetterich egyenlet közelítések nélkül származtatható.

A regulátor általánosan $R_k(p) = p^2 r(p^2/k^2) = p^2 r(y)$ alakban írható $y \equiv \frac{p^2}{k^2}$ változóval, és $r(y)$ a dimenziótlan regulátor. A (3.18) egyenletben $k\partial_k R_k(p)$ szerepel, tehát ezt elvégezve $k\partial_k R_k(p) = -2y^2 k^2 r'$ adódik, ahol $r' \equiv \frac{dr}{dy}$.

Ahhoz, hogy könnyebb legyen megoldani (3.18) egyenletet, érdemes az impulzustérfogati integrálról átváltani d dimenzióra általánosított polárkoordinátákra. Akárcsak három dimenzióban, ahol a három hosszintegrált felváltja két polárszög és egy sugárirányú integrál, d dimenziós esetben a következőképpen járunk el:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} &= \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dp p^{d-1} = \frac{\Omega_d}{2(2\pi)^d} \int_0^\infty dp 2p p^{d-2} = \\ &= \frac{\Omega_d}{2(2\pi)^d} \int_0^\infty dp^2 (p^2)^{\frac{d}{2}-1} = \frac{\Omega_d}{2(2\pi)^d} \int_0^\infty k^2 dy (k^2 y)^{\frac{d}{2}-1} = \\ &= \frac{k^d \Omega_d}{2(2\pi)^d} \int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}-1}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

ahol $\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ a d dimenziós egységgömb felülete, és $\Gamma(d/2)$ a Gamma-függvény. Alkalmazzuk ezentúl $\alpha_d \equiv \frac{\Omega_d}{2(2\pi)^d}$ jelölést. Az előbbi $k\partial_k R_k(p)$ behelyettesítésével:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} k\partial_k R_k(p) &= \frac{k^d \alpha_d}{2} \int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}-1} (-2y^2 k^2 r') = \\ &= -\alpha_d k^d \int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}+1} k^2 r'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ezeket felhasználva megkapható (3.18) egyszerűsített alakja:

$$k\partial_k V_k(\varphi) = -\alpha_d k^d \int_0^\infty dy \frac{r'(y) y^{\frac{d}{2}+1}}{[1 + r(y)] y + \frac{V_k''(\varphi)}{k^2}}. \quad (3.21)$$

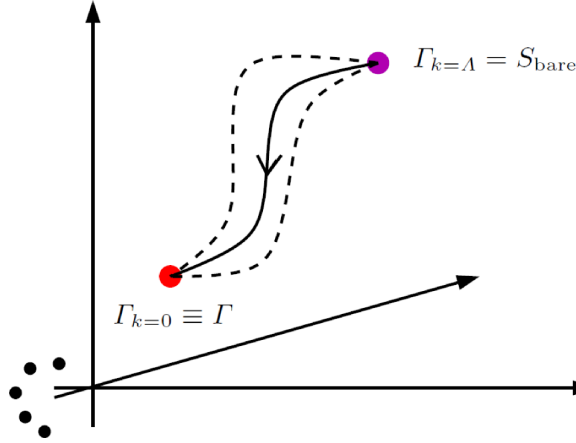
Azonban korábban kiderült, hogy dimenziótlan mennyiségekkel kell dolgozni, ha a csatolások nem-triviális skálafüggésének tanulmányozása a cél.

A (3.21) összefüggés dimenziótlan verziója [19]:

$$\left(d - \frac{d-2}{2} \tilde{\varphi} \partial_{\tilde{\varphi}} + k\partial_k \right) \tilde{V}_k(\tilde{\varphi}) = -\alpha_d \int_0^\infty dy \frac{r'(y) y^{\frac{d}{2}+1}}{[1 + r(y)] y + \tilde{V}_k''(\tilde{\varphi})}. \quad (3.22)$$

3.3. Regulátor függvények

Az FRG egyenlet egzakt mivolta miatt az általa nyújtott fizikai eredmények nem függenek a regulátorfüggvény alakjától [23–25], vagyis a Γ_k skálafüggő effektív hatás UV és IR határértékei jóldefiniáltak. A paramétertér RG folyása különböző regulátorok használatával eltérően nézhet ki [14], de a kezdeti UV és a végső IR értékek regulátorfüggetlenek, a fázistér azonos pontjába érkezünk (3.5 ábra). Viszont a közelítések használatának szükségessége magával vonja a renormálási sémától, azaz regulátortól való függést, ekkor az IR, illetve UV határértékek is változhatnak.



3.5. ábra. RG trajektóriák regulátorfüggése a paramétertérben. [14]

A (3.10) pontban ismertetett feltételeket szem előtt tartva különböző regulátor függvényeket alkalmazhatunk (3.6 ábra). Az éles levágást adó sharp regulátor

$$r_{\text{sharp}}(y) = \frac{1}{\Theta(y-1)} - 1 \quad (3.23)$$

formát ölt. Az alacsony módusok elnyomását a $\Theta(y-1)$ Heaviside lépcsőfüggvény biztosítja, mely 0, ha $y < 1$, és $y \geq 1$ esetén 1. Bár (3.22) integrált sokszor csak numerikusan lehetséges kiszámolni, sharp regulátorral analitikusan is megoldható. Hátránya, hogy LPA-n túli magasabb rendű tagokat nem lehet egyértelműen meghatározni.

Beszélhetünk még exponenciális regulátorról [16], melynek optimális paraméterei $a = 1$, $c_2 = \ln 2$, illetve $b = 1.44$.

$$r_{\text{exp}}(y) = \frac{a}{\exp(c_2 y^b) - 1} \quad (3.24)$$

Ezzel a regulátorral az impulzusintegrált csak numerikusan lehet elvégezni, így számolni kell azzal, hogy a végeredmény függhet a választott felső integrálási határtól [19].

Hatványfüggvény regulátorral [20] viszont létezik analitikus megoldás, azonban csak LPA-ban. Az optimális értékek ezúttal $a = 1$ és $b = 2$.

$$r_{\text{pow}}(y) = \frac{a}{y^b} \quad (3.25)$$

A derivatív sorfejtéssel való kompatibilitás $b \geq 1$ esetén teljesül. Hátulütője, hogy $b = 1$ esetén bizonyos dimenziókban UV divergencia lép fel. Az analitikusság itt is elveszik LPA-n túli közelítésekben [19].

Láthattuk, hogy az UV limeszbeni biztonság, illetve az integrálási határ választásának kérdése gyakran felmerült. Ezt képes kezelni az (általános) optimalizált, más néven Litim regulátor [23]

$$r_{\text{opt}}^{\text{gen}}(y) = a \left(\frac{1}{y^b} - 1 \right) \Theta(1 - y^b) , \quad (3.26)$$

a kedvező paraméterek pedig $a = 1$ és $b = 1$. A Litim egy véges tartományú, folytonos függvény, azonban nem minden pontban differenciálható, ezért a gradiens sorfejtés magasabb rendű tagjaival nem kompatibilis. Viszont LPA-ban bármely d -re analitikus megoldást biztosít.

Az utóbbi három regulátort³ különböző határesetekben egyetlen függvény is képes reprodukálni. Ezt nevezzük CSS (Compactly Supported Smooth) regulátornak [26], melynek formája exponenciális normában

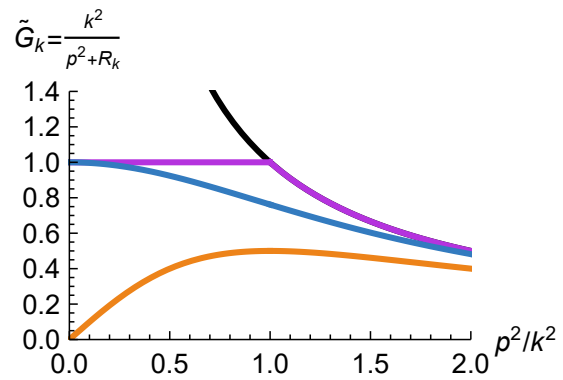
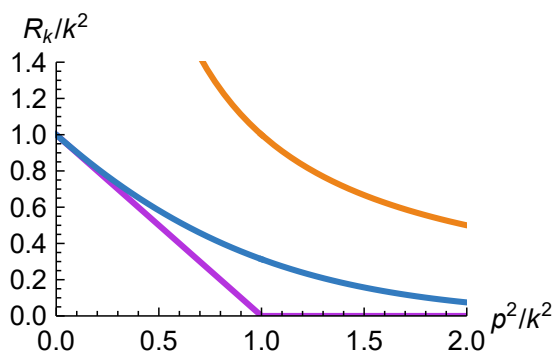
$$r_{\text{CSS}}^{\text{norm}}(y) = \frac{\exp[\ln(2) c] - 1}{\exp\left[\frac{\ln(2) cy^b}{1 - hy^b}\right] - 1} \Theta(1 - hy^b) = \frac{2^c - 1}{2^{\frac{cy^b}{1 - hy^b}} - 1} \Theta(1 - hy^b) . \quad (3.27)$$

Ezen CSS függvény határértékei a következők:

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0, h \rightarrow 1} r_{\text{CSS}}^{\text{norm}}(y) &= r_{\text{opt}}^{\text{gen}}(y) \Big|_{a=1} , \\ \lim_{c \rightarrow 0, h \rightarrow 0} r_{\text{CSS}}^{\text{norm}}(y) &= r_{\text{pow}}(y) \Big|_{a=1} , \\ \lim_{c \rightarrow 1, h \rightarrow 0} r_{\text{CSS}}^{\text{norm}}(y) &= r_{\text{exp}}(y) \Big|_{a=1, c_2=\ln 2} . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Mivel a CSS regulátor egy sima, végtelenszer differenciálható függvény, ezért használatával a gradiens sorfejtés magasabb rendű tagjait is figyelembe vehetjük, így "Litim határértéket" (kicsi, de nem nulla c paramétert) tekintve a Litim LPA-n túli kiterjesztéseként kezelhető.

³Mindnek az optimális paraméterekre vett alakját.



3.6. ábra. A bal oldali képen különböző regulátorokat ábrázoltunk. A lila szín a Litim, a kék az exponenciális, a narancs pedig a hatványfüggvény regulátort jelzi. Jobb oldalt tömegmentes propagátorra vett hatásukat látjuk, melyben a fekete függvény regulátor nélküli. [14]

4. fejezet

Renormálási csoport alkalmazása véges hőmérsékleten

4.1. Véges hőmérsékletű kvantumtérelmélet

A kvantumtérelmélet formalizmusa $T = 0$ hőmérsékleten van megfogalmazva, így változtatásokat kell eszközölni, ha kvantumos és véges hőmérsékletű effektusokat is figyelembe kívánunk venni. A gyorsítóknál lezajló folyamatok során korlátozott számú részecskét veszünk figyelembe, a $T = 0$ kvantumtérelmélet ad rájuk megfelelő leírást. Viszont a korai Univerzum, mint forró, sűrű plazma, már véges hőmérsékletű QFT-t igényel [1].

Tekintsünk hőmérsékleti egyensúlyban lévő, rögzített térfogatú és részecskeszámú rendszert termodinamikai limeszben⁴. Ekkor levezethető [14] az alábbi kanonikus partíciós függvény

$$Z(\beta, V, N) = \sum_i e^{-\beta E_i} , \quad (4.1)$$

ahol $\beta = \frac{1}{T}$ az inverz hőmérséklet $k_B = 1$ egységben, E_i pedig a rendszer összenergiája az i . mikroállapotban. A partíciós függvény és a (2.6) pontban látott generáló funkcionál között megfeleltetés tehető.

Ahhoz, hogy ezt tisztábban lássuk írjuk fel a diszkrét kvantummechanikai kanonikus együttes partíciós függvényét [27, 28]

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle , \quad (4.2)$$

melyben $\hat{H}$ a Hamilton-operátor, és az n -re való összegzés magában foglalja a rendszer

⁴A részecskeszámra és térfogatra $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ teljesül, miközben $\frac{N}{V} =$ állandó.

összes lehetséges energia sajátállapotát a Hilbert-téren. Folytonos esetre áttérve az összegből integrál lesz, és $|\phi\rangle$ sajátállapotokhoz tartozó energia E_ϕ , így

$$Z = \int d\phi \langle \phi | e^{-\beta \hat{H}} | \phi \rangle = \int d\phi e^{-\beta E_\phi} . \quad (4.3)$$

A kapott kitevőt összevetve (2.6) exponensével látható, hogy az inverz hőmérséklet a képzetes idő szerepét játssza, azaz $\beta = it = t_E$. Minkowskiból euklideszbe való áttérés a hatást a következőképp transzformálja [28]:

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L} = \int_0^t dt \int d^{d-1} x \mathcal{L} \rightarrow \int_0^\beta dt_E \int d^{d-1} x \mathcal{L}(t \rightarrow -it_E) . \quad (4.4)$$

A termális kvantumtérelméletben a bozonikus mezők képzetes időben periodikusak β periódussal. Ezen mezők Fourier sorba fejthetők

$$\phi(t_E) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_n e^{-i\omega_n t_E} \phi(i\omega_n) \longleftrightarrow \phi(i\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^\beta dt_E e^{i\omega_n t_E} \phi(t_E) , \quad (4.5)$$

$\phi(i\omega_n)$ Fourier együtthatóval. A ω_n bozonikus frekvenciákat Matsubara frekvenciáknak [29] nevezzük, és a sorfejtés miatt

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta} = 2n\pi T \quad (4.6)$$

formában állnak elő. Láthattuk, hogy (4.4) áttéréskor a d dimenziós integrál egyikét helyettesíthetjük olyannal, melyben a képzetes idő integrál β euklideszi ideig tart. Ekkor még nulla hőmérsékletű határesetről volt szó, hiszen $\beta \rightarrow \infty$ teljesül és Matsubara szummázás ekvivalens a képzetes frekvencia integrállal.

Amennyiben véges hőmérsékletű esetet szeretnénk vizsgálni, meg kell tartani az összegzést. Így az eredeti d dimenziós impulzustérfogati integrált oly módon kell változtatni, hogy az egyiket Matsubara szummára cseréljük [30]

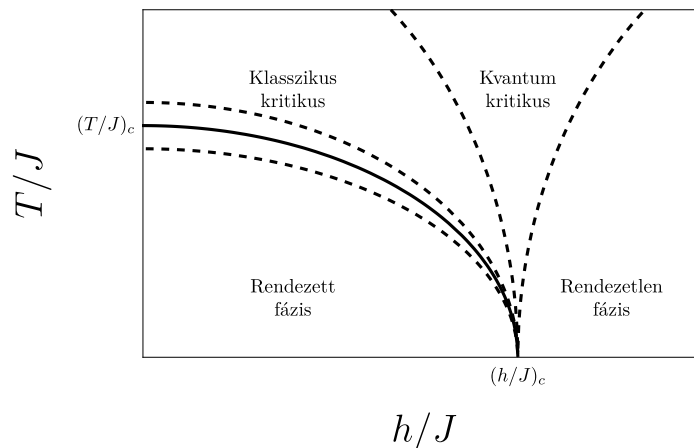
$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \rightarrow T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^{d-1} p}{(2\pi)^{d-1}} . \quad (4.7)$$

4.2. Kvantumos és klasszikus fázisátalakulások

Míg $T \neq 0$ hőmérsékleten klasszikus (termális) fázisátalakulásokat vizsgálhatunk (Classical Phase Transition – CPT), nulla hőmérsékletű rendszerben lehetséges kvantum fázisátalakulásról (Quantum Phase Transition – QPT) beszélni, mely kvantum kritikus pontban megy végbe [3]. Ennek során a kvantumfluktuációk miatt

kvantum állapotok közötti fázisátalakulás lép fel, mely megvalósulhat egy fizikai paraméter változtatásával, ilyen a nyomás és a mágneses mező is.

Véges, de alacsony hőmérsékleten kvantumos és hőmérsékleti ingadozások is előfordulnak, "versengenek" egymással [3]. Ábrázolhatjuk a rendszer QPT-CPT diagramját (4.1 ábra), ahol a rendezett és rendezetlen fázisok jól elkülönülnek egy kritikus vonal által, mely a kvantumos és a klasszikus kritikus pontot kapcsolja össze.



4.1. ábra. Az Ising-modell QPT-CPT diagramja.

4.3. Termális RG bemutatása ϕ^4 modellen keresztül

A korábbi $\beta = it$ megfeleltetéskor figyelembe kell venni, hogy egyensúlyi állapotokat tekintünk, azaz olyan átmeneti amplitúdókat, melyeknél a kezdő és végállapot megegyezik, más szóval periodikus határfeltételt szabunk. Ez azt eredményezi, hogy azt a dimenziót feltekerjük (kompakttá tesszük), az euklideszi idő periódust pedig β inverz hőmérséklet adja. A periodikus határfeltétel felhasználásával származtattunk Matsubara frekvenciákat, melyek hőmérsékletfüggők [28]. Tehát a hőmérséklet frekvenciaskála, azaz impulzusskála függő. Ezt a relációt perturbatív leírásakor

$$T = \frac{1}{2\pi} \mu \quad (4.8)$$

formában szokás megadni, ahol μ a perturbatív renormálási skála, mely kapcsolatba hozható a fentiekben taglalt k nem-perturbatív skálával.

Nem-perturbatív tárgyalásmódban T -t rögzített Λ impulzusskálához szokás kapcsolni [30]

$$T = \tau \Lambda \quad (4.9)$$

módon, ahol τ egy változó dimenziótan paraméter. Ez azzal indokolható, hogy a Wilsoni RG megközelítésben vennünk kell a $k \rightarrow 0$ határértéket ahhoz, hogy az összes kvantumos tulajdonságot figyelembe vevő Γ effektív hatást kapjuk. Így indokolt lehet a hőmérsékletet rögzített Λ impulzushoz kötni, azonban ezen módszer hátránya, hogy az RG flow egyenletekben explicit k skálától való függés fedezhető fel, nem lehetséges nem-triviális fixpontokat találni.

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha az alábbi megfeleltetést tesszük [1–3]:

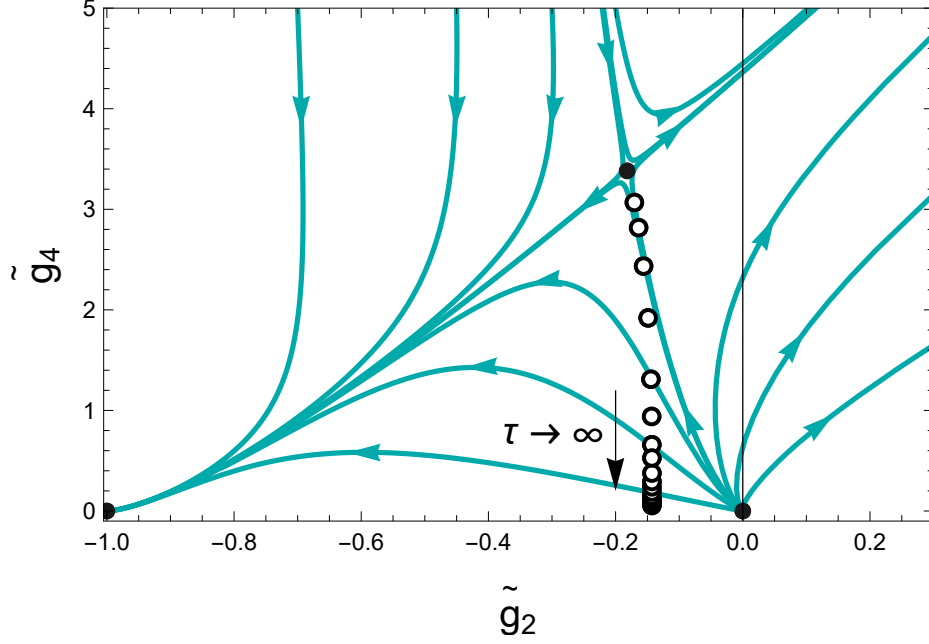
$$T = \tau k, \quad (4.10)$$

ahol T és k szolgál a termális és kvantumos fluktuációk futó levágásaként. Itt τ dimenziótlan hőmérsékletet állandóan tartjuk az RG transzformációk alatt, tehát τ kapcsolja egymáshoz a T paramétert és a k skálát. Ebben a formában T nem azonosítható a hőmérséklettel, hiszen szükségszerű $k \rightarrow 0$ limeszt venni. Így a hőmérséklet azonosítása τ dimenziótlan mennyiség által történik.

Korábban láttuk, hogy a (3.15) Wetterich egyenlet euklideszi téridőben, nulla hőmérsékletű QFT keretein belül van megfogalmazva. A véges hőmérsékletre való általánosításhoz első lépésként a korábban látott (4.7) integrál cserét kell eszközölni, majd bevezetni a $\tau = T/k$ dimenziótlan hőmérsékletet. Ezt elvégezve észrevehetjük, hogy különböző τ értékeken változik a ϕ^4 modell fázisdiagramja, a Wilson-Fisher fixpont $\tilde{g}_4$ koordinátája növekvő τ értékekkel csökken (4.2 ábra), tehát a fázisokat elválasztó kritikus trajektória meredeksége is. Ez azt jelenti, hogy a szimmetriasértett fázis "kiszorul", azaz $\tau \rightarrow \infty$ esetén a gaussi fixpont körül nem találunk olyan pontot, melyből indítva a görbét az a szimmetriasértett fázisba érkezik [3].

A 4.1 ábrán megfigyelhettük az Ising-modell QPT-CPT diagramját, ahol T/J a termikus, $\hbar/J$ pedig kvantum fázisátalakulást vezérlő paraméter. Ismert, hogy az Ising leképezhető ϕ^4 kvantumtérelméleti modellre, így indokolt megvizsgálni milyen QPT-CPT diagram kapható ϕ^4 esetén. Ehhez ismét szükségünk lesz a modell valamely kvantum paraméterére, azaz $\tilde{g}_2, \tilde{g}_4$ csatolásokra. Hőmérsékleti paraméternek pedig válasszuk a bevezetett τ dimenziótlan mennyiséget, amely képes megmutatni, hogy a termális fluktuációk hogyan viszonyulnak a kvantumosakhoz. Ezt abból láthatjuk, hogy véges, de alacsony hőmérsékleten a klasszikus termikus fluktuációk ($\sim k_B T$), illetve a $\hbar\omega$ kvantum ingadozások azonos nagyságrenden vannak, és a kvantum oszcillációk frekvenciáját az RG módszerben a levágási skálával hozzuk kapcsolatba, vagyis $\omega = k$ teljesül⁵. Tehát $\tau = \frac{T}{k} = \frac{T}{\omega}$, azaz τ megmutatja, hogy a termális és a kvantumfluktuációk közül melyik dominál. Amennyiben $\tau < 1$ a kvantumos, $\tau > 1$ esetén pedig a termális fluktuációk uralkodnak [3].

⁵Itt visszaváltottunk $c = \hbar = k_B = 1$ természetes egységekre.



4.2. ábra. A Wilson-Fisher fixpont vándorlása τ növelésével.

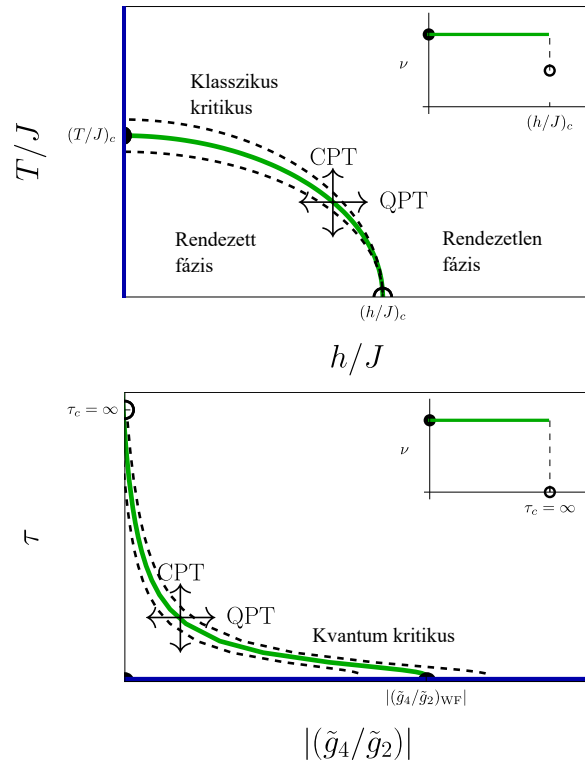
Mivel τ az utóbbi tulajdonsággal rendelkezik, értékének változtatásával termális fázisátalakulás alakul ki. Tehát, ha veszünk egy $(\tilde{g}_2, \tilde{g}_4)$ pontot a fázistérből, akkor az τ növelésével a szimmetriasértettből át tud kerülni a szimmetrikus fázisba. Ezt a ϕ^4 modell QPT-CPT diagramjából is leolvashatjuk (4.3 ábra alja).

A 4.3 ábrán azt figyeljük meg, hogy mindkét modellben jól elkülönülnek egymástól a rendezetlen (szimmetrikus), és a rendezett (szimmetriasértett) fázisok, a kék tengely pedig jelzi a $h = 0$ Ising és a $\tau = 0$ ϕ^4 közötti leképezést. Ha kiindulunk a fekete ponttal jelzett értékekből, azaz $(T/J)_c$ kritikusból, és $|(\tilde{g}_4/\tilde{g}_2)_{WF}|$ nyeregpont koordinátájából, akkor azt vesszük észre, hogy a zöld görbe mentén a különböző modellek kritikus exponensei megegyeznek egymással.

Az Ising-modell kritikus vonalának $T = 0$ -ban szakadása van, ez a ϕ^4 modellben $\tau_c = \infty$ pontban teljesül. Azonban ha a kvantum paraméter eltűnik ($|(\tilde{g}_4/\tilde{g}_2)_{WF}| = 0$), akkor az eredeti Lagrange egy tömeges, kölcsönhatásmentes mezőt⁶ ír le, melyben nincs fázisátalakulás, így ezen pontban $\tau = 0$ adódik.

A ϕ^4 skalármező-elmélet klasszikus és a kvantum fázisátalakulásainak vizsgálata számos kérdéskörben indokolt lehet, például a hierarchia problémában. Korábban kimutatták, hogy hierarchia probléma, valamint az elektromágneses vákuum metastabilitása felfogható úgy, mint a Higgs-potenciál kvantum fázisátalakuláshoz közeli állapota [31, 32].

⁶Klein-Gordon mezőegyenlet: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$



4.3. ábra. Az Ising és a ϕ^4 modell QPT-CPT diagramjának sematikus ábrái. [3]

5. fejezet

Einstein-Hilbert csonkolt gravitáció véges hőmérsékleten

A korábbi szekciókban ismertetett apparátussal rendelkezve elkezdhetjük a vizsgálódást az Einstein-Hilbert csonkolt gravitáció modelljén. Az ezen fejezetben szereplő végeredmények és ábrák a saját kutatómunkám részét képezték.

5.1. Aszimptotikusan biztonságos gravitáció

A nagy méretű (makroszkópikus) testek gravitációs kölcsönhatásának leírására az általános relativitáselmélet Einstein téregyenletei alkalmasak. Azonban a kis méretű objektumok (elemi részecskék) gravitációs kölcsönhatásának perturbatív leírásának megkísérlése számos problémát vet fel. A G Newton-"állandó" – mint skálafüggő csatolás – ultraibolya energiákat megközelítve⁷ felrobban, ennél fogva a modell nem képes predikciókra [33].

Viszont, ha létezik a fázistérben egy nem-triviális UV fixpont [34], akkor tudunk olyan kritikus trajektóriát találni, melynek mentén⁸ a gaussi fixpontból indulva ezen nem-gaussi fixpontban (NGFP) – más néven Reuter-fixpontban – találjuk magunkat. Amennyiben a modell tartalmazza ezt a fixpontot aszimptotikusan biztonságos gravitációnak (ASG) nevezzük [35, 36]. Tehát míg az elmélet perturbatív értelemben nem renormálható, a renormálási csoport módszer keretében (azaz nem-perturbatív módon) képesek lehetünk a csatolási paraméterek fázisterének feltérképezésére.

⁷Itt G irreleváns csatolás, hiszen IR felé csökken.

⁸Azaz RG folyással szemben megyünk.

5.2. Einstein-Hilbert csonkolás

Az általános relativitás elméletben az Einstein egyenleteket az Einstein-Hilbert (EH) [37] hatás származtatja, mely

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} (2\Lambda - \mathcal{R}) \quad (5.1)$$

formában áll elő. Itt G a Newton gravitációs állandó, Λ a kozmológiai konstans, $g = \det(g_{\mu\nu})$ a metrikus tenzor determinánsa, $\mathcal{R}$ pedig a Ricci skalár⁹.

Amint azt korábban láttuk a (3.15) Wetterich egyenlet egzakt megoldása nem lehetséges, így az elméletek terét szűkíteni kell [36]. Ez úgy valósul meg, hogy egy jól megfontolt becslés alapján Γ_k skálafüggő effektív hatásra olyan alakot írunk fel, melyben véges sok skálafüggő csatolás szerepel. Ezt Wetterich egyenletbe beírva megkapjuk a fázistér¹⁰ alakját megadó csatolt differenciálegyenlet rendszert.

Az általam használt módszert Einstein-Hilbert csonkolásnak [36, 38] nevezik. Ebben az esetben Λ_k kozmológiai konstans, illetve G_k Newton állandó skálafüggő csatolásokká válnak. Jelölje $g_{\mu\nu}$ a metrikus tenzort, $\bar{g}_{\mu\nu}$ pedig a háttér metrikát. A Γ_k alakja [36]:

$$\Gamma_k[g; \bar{g}] = \frac{1}{16\pi G_k} \int d^4x \sqrt{g} (2\Lambda_k - \mathcal{R}) + \textit{klasszikus mérték rögzítés}. \quad (5.2)$$

Ezen becslést visszahelyettesítve a Wetterich egyenletbe a csatolások flow egyenletei levezethetőek. A számolásokat dimenziótlan mennyiségekkel végeztem, melyek alakja $d = 4$ dimenzióra:

$$g_k = k^2 G_k, \quad \lambda_k = k^{-2} \Lambda_k. \quad (5.3)$$

Az így származtatott béta-függvények a következők [36]:

$$\begin{aligned} \beta_\lambda(\lambda, g) &= -(2 - \eta)\lambda + \frac{1}{8\pi} g [40\Phi_2^1(-2\lambda) - 32\Phi_2^1(0) - 20\eta\Psi_2^1(-2\lambda)] \\ \beta_g(\lambda, g) &= (2 + \eta) g. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Az η anomális dimenzió megkapható

$$\eta(g, \lambda) = \frac{gB_1(\lambda)}{1 - gB_2(\lambda)} \quad (5.5)$$

⁹A Ricci skalár a téridő görbületét adja meg.

¹⁰Ez a fázistér az eredetinek egy altere.

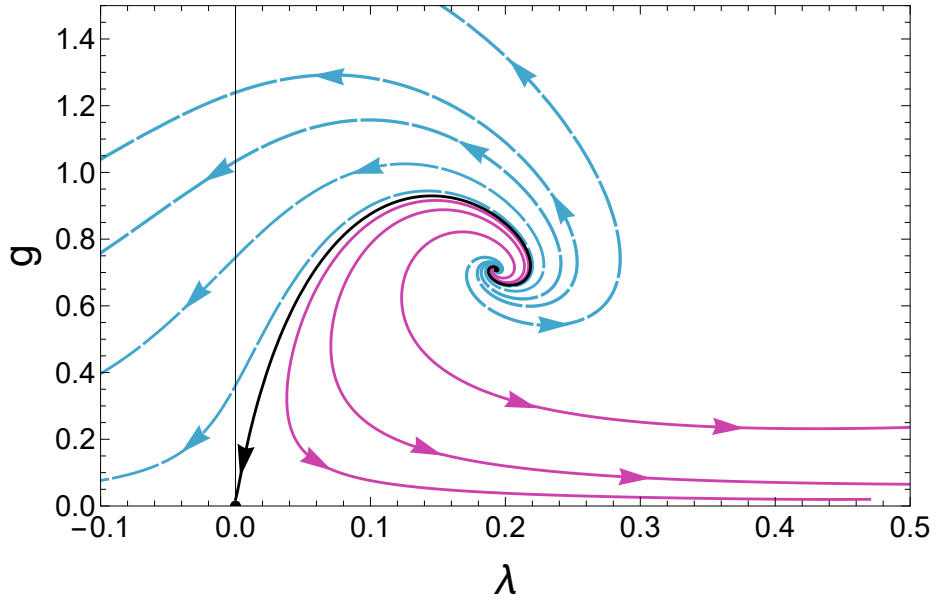
formában, ahol B_1 és B_2 függvények számolási módja [36]:

$$\begin{aligned} B_1(\lambda) &= -\frac{1}{3\pi} [-5\Phi_1^1(-2\lambda) + 4\Phi_1^1(0) + 18\Phi_2^2(-2\lambda) + 6\Phi_2^2(0)] \\ B_2(\lambda) &= \frac{1}{6\pi} [-5\Psi_1^1(-2\lambda) + 18\Psi_2^2(-2\lambda)] . \end{aligned} \quad (5.6)$$

A fentiekben felhasznált küszöbfüggvények [36] hozzák be az $R(y)$ regulátorfüggést, melyek

$$\begin{aligned} \Phi_n^l(w) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dy y^{n-1} \frac{R(y) - yR'(y)}{(y + R(y) + w)^l} \\ \Psi_n^l(w) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dy y^{n-1} \frac{R(y)}{(y + R(y) + w)^l} , \end{aligned} \quad (5.7)$$

alakban írhatók fel. A számolást (3.26) Litim regulátorral végeztem. Az így felírt differenciálegyenlet rendszerből sikeresen megkaptam a skálafüggő csatolásokat, melyek fázisterét 5.1 diagramon ábrázoltam.



5.1. ábra. Az Einstein-Hilbert csonkolt gravitáció paramétertere. Lilával a szimmetriasértett, kékkel pedig a szimmetrikus fázist jelöltem. Megfigyelhető feketével a fázisokat elválasztó szeparátrix is, melynek kiindulópontja az NGFP, $k \rightarrow 0$ limeszben pedig a gaussi fixpontba tart.

A nem-gaussi fixpont helyének közelítőleg $(\lambda, g) = (0.19, 0.71)$ pontot kaptam. A "csigás" szerkezet azért adódik, mert a differenciálegyenlet rendszer NGFP-beli Jacobi-mátrixának sajátértékei képzetesek.

5.3. ASG termális evolúciója

Miután megbizonyosodtam róla, hogy a várt eredményt kaptam az Einstein-Hilbert csokolt ASG modellre, megkíséreltem a véges hőmérsékletre való általánosítást.

Láttuk, hogy ehhez első lépésként (4.7) integrál cserét kell eszközölni. A küszöbfüggvények megfeleltethetők a $d/2$ dimenziós polárkoordináta integráloknak, viszont a Matsubara szumma bevezetését impulzustérfogati integrálra írtam fel. Így (3.19) átalakítást visszafelé végrehajtva származtattam olyan alakot, melybe egyszerűbb bevezetni a hőmérsékletet. Ezután ismét polárkoordinátás felírást alkalmaztam, hogy az integrál könnyebben elvégezhető legyen. Alkalmaztam a korábban ismertetett (4.6) Matsubara frekvenciát, ezúttal $\omega_m = 2m\pi T$ jelöléssel, illetve a (4.10) pontban vizsgált τ dimenziótlan hőmérséklet alakját is.

A véges hőmérsékletre származtatott küszöbfüggvények formájára a következőket kaptam:

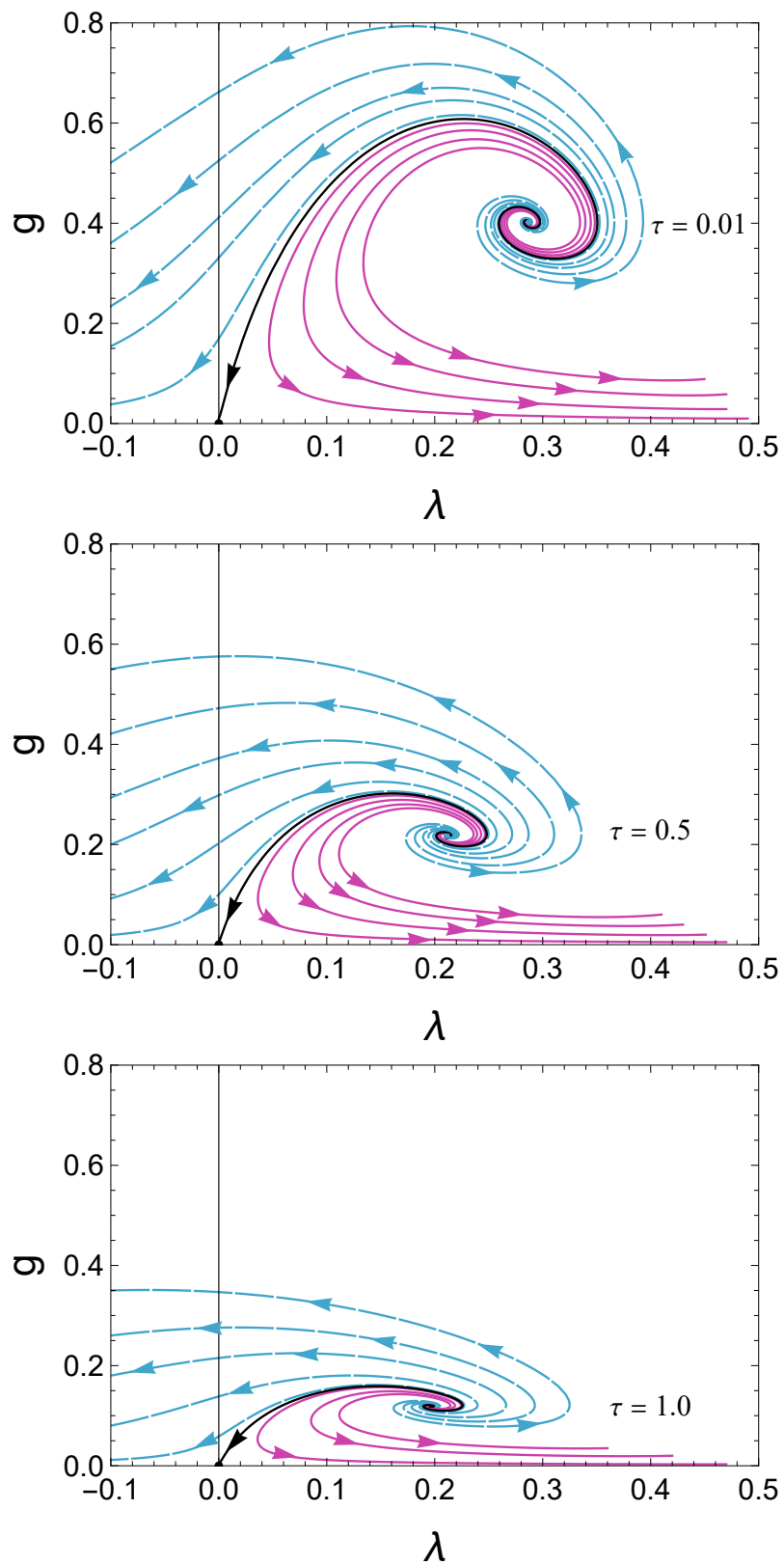
$$\begin{aligned}\Phi_n^l(w) &= \frac{2\tau\sqrt{\pi}}{\Gamma(n - \frac{1}{2})} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dy y^{n-\frac{3}{2}} \frac{R(y) - yR'(y)}{(y + (2m\pi\tau)^2 + R(y) + w)^l} \\ \Psi_n^l(w) &= \frac{2\tau\sqrt{\pi}}{\Gamma(n - \frac{1}{2})} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dy y^{n-\frac{3}{2}} \frac{R(y)}{(y + (2m\pi\tau)^2 + R(y) + w)^l}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Az egyenletek megoldásához ismét Litim regulátort használtam. Ábrázoltam a csatolásokat, és megvizsgáltam miként változik a fázisdiagram τ paraméter változtatásával.

Fontos megjegyezni, hogy a nulla hőmérsékletű QFT modell és véges hőmérsékletű verziójának $\tau \rightarrow 0$ limesze nem mutat egzakt egyezést, hiszen a véges hőmérsékletű esetben anizotróp regulátort használtunk, azaz míg az (5.8) összegzés $-\infty$ és ∞ között történik, az integrál felső határa valamely konkrét értéknél levág.

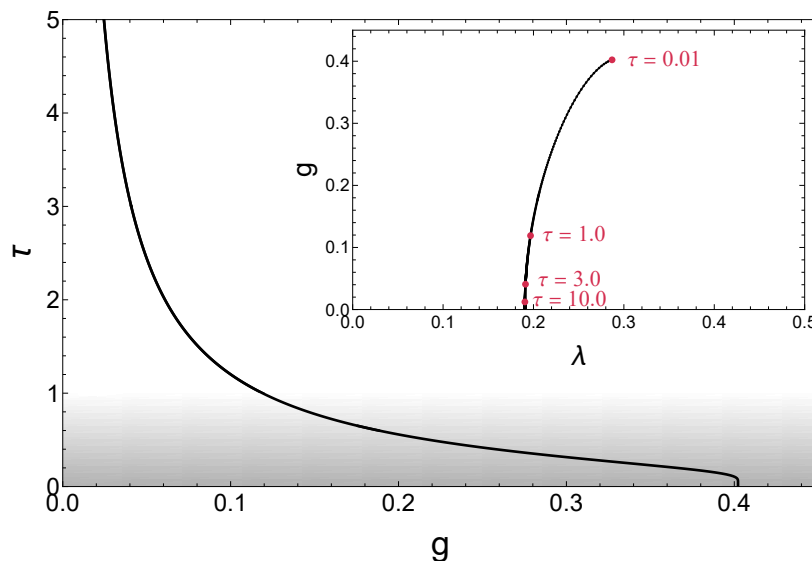
Az 5.2 ábrán látható, hogy τ értékét növelve a Reuter-fixpont g koordinátája nullába tart, a szimmetriasértett fázis egyre jobban "beszorul". Tehát $\tau \rightarrow \infty$ határesetben a nem-gaussi fixpontból induló, szimmetriasértett fázishoz tartozó görbék hamar elhalnak, nem tudnak kiszabadulni az NGFP környezetéből, csak a szimmetrikus fázis marad meg. Ez $\langle g_{\mu\nu} \rangle = 0$ degenerált geometria [36, 39, 40] megszűnését jelenti, és nagy távolságokon $\langle g_{\mu\nu} \rangle \sim \delta_{\mu\nu}$ euklideszi sík geometria lép fel az erős csatolású tartományban.

Ezen fázisdiagram evolúció párhuzamba állítható a ϕ^4 modell 4.2 ábrája kapcsán látottakkal, ahol a szimmetriasértett fázis hasonló sorsra jutott. A Reuter-fixpont vándorlását 5.3 ábrán tüntettem fel.



5.2. ábra. A véges hőmérsékletű ASG fázisdiagramjának evolúciója növekvő τ értékekkel.

Ismét fázisátalakulások tanulmányozása a cél, így ebben az esetben is ábrázoltam a modell QPT-CPT diagramját. Itt g csatolás a kvantum, τ pedig a termális paraméter. A kapott diagram összhangban van a ϕ^4 modellben látottakkal.



5.3. ábra. Az ábrán a QPT-CPT diagram látható, jobb felső sarkában ábrázoltam a növekvő τ hatására változó Reuter-fixpont helyzetét.

5.4. Eredmények összefoglalása

A (4.10) pontban ismertetett $T = \tau k$ megfeleltetésben T játszotta a termális fluktuációk, k pedig a kvantumfluktuációk levágását. Így τ dimenziótlan hőmérsékletre fázisátalakulást kontrolláló paraméterként is tekinthetünk.

A fázisátalakulások vizsgálata kozmológiai szempontból is jelentős lehet, τ dimenziótlan mennyiségre a kozmikus plazma hőmérsékleteként is gondolhatunk. Továbbá inflációs modellekben szintén indokolt a véges hőmérsékletre való általánosítás tanulmányozása.

Jelen munkámban azt találtam, hogy a dimenziótlan $g(\tau)$ Newton állandó, illetve dimenziótlan $\lambda(\tau)$ kozmológiai konstans τ -evolúciója megmutatja, hogy $\tau \rightarrow \infty$ határesetben csak a szimmetrikus fázis marad meg, melynek erős csatolású része nagy távolságokon sima geometriát okoz.

A kapott eredmény összhangban van a vártakkal, hiszen nagyon magas hőmérsékleten azt feltételezzük, hogy nem képes rendezett (szimmetriasértett) fázis megmaradni [4], a modell a szimmetrikus fázisában marad.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Márián István Gábornak és Dr. Nándori Istvánnak a rengeteg segítséget, magyarázatot, illetve figyelmet, melyet ezen terület tanulmányozása során kaptam. Sokat jelentett, hogy szüntelenül fordulhattam hozzájuk kérdésekkel, melyekre mindig készséggel válaszoltak. Hálás vagyok azért is, amiért bármikor meghallgatták a témához való hozzáfűznivalóimat és mindig azt éreztem, hogy én is a csapat része lehetek. Köszönettel tartozom, amiért a tanulást ilyen örömteli, kedves és támogató környezetben végezhettem mindvégig és folytathatom a jövőben is.

Saját eredmények

A kutatómunkám során elvégzett önálló feladataim:

1. Az [arXiv:2501.02878] kézirat első szerzője vagyok, amelyben számolások túlnyomó részét magam végeztem és az ábrákat én készítettem. Ennek megfelelően az 5. fejezet eredményei is saját munkám részét képezték.
2. Wolfram Mathematica-val végzett számolások:
 - Renormálási csoport (RG) egyenletek származtatása, Litim regulátor használata
 - Véges hőmérsékletre származtatott küszöbfüggvények alakjának kiszámítása
 - Termális RG egyenletek megoldása a származtatott küszöbfüggvények segítségével
 - Csatolt parciális differenciálegyenletek és fixpont egyenletek megoldása
3. A ϕ^4 modell szimmetrikus és szimmetriasértett fázisbeli potenciáljának ábrázolása
4. Ismert ϕ^4 , illetve aszimptotikusan biztonságos gravitáció (ASG) modell fázisdiagramjának reprodukálása ellenőrzés céljából
5. Véges hőmérsékletre általánosított ASG modell fázisdiagramjának megalkotása, különböző τ dimenziótlan hőmérsékleteken való ábrázolása
6. Termális ASG modell Reuter fixpontjának hőmérsékletfüggésének kiszámítása, illetve változását szemléltető ábra megalkotása
7. Termális ASG modell QPT-CPT diagramjának elkészítése

Irodalomjegyzék

- [1] I. G. Márián, A. Trombettoni és I. Nándori, Time Evolution and Thermal Renormalization Group Flow in Cosmology, Phys. Lett. B 858 139051, (2024).
- [2] I. G. Márián, J. Darai, J. J. Flórez Rodas, A. Trombettoni és I. Nándori, Phase Transition of the Sine-Gordon Model at Finite Dimensionless Temperature [Előkészítés alatt].
- [3] I. G. Márián, A. Trombettoni és I. Nándori, Thermal and Quantum Phase Transitions of the ϕ^4 Model, arXiv:2407.20704 [hep-th], (2024).
- [4] E. Nyergesy, I. G. Márián, E. Meskhi, Y. Turovtsi-Shiutev, I. Nándori, Thermal RG Flow of AS Quantum Gravity, arXiv:2501.02878 [gr-qc], (2025).
- [5] J. W. Negele, H. Orland, Quantum many-particle systems (Reading, Perseus, 1998).
- [6] J. I. Kapusta, Finite-temperature field theory: principles and applications (Cambridge, Cambridge University Press, 2023).
- [7] S. Sachdev, Quantum phase transitions (Cambridge, Cambridge University Press, 2011).
- [8] K. G. Wilson, Physical Review B 4, 3174 (1971): K. G. Wilson, Physical Review B 4, 3184 (1971).
- [9] L. P. Kadanoff, Statistical physics: statics, dynamics and renormalization, Singapore, World Scientific (2000).
- [10] D. Tong, Quantum Field Theory (Cambridge, 2006).
- [11] Z. Trócsányi, Alapvető kölcsönhatások egyetemi jegyzet (Debrecen, 2021).
- [12] J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Oxford, Clarendon (1989).

- [13] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An introduction to quantum field theory (Reading, Addison-Wesley, 1995).
- [14] I. G. Márián, Optimization and Applications of the Functional Renormalization Group (Debrecen, University of Debrecen, 2020).
- [15] K. Sailer, Renormálási csoport a kvantumelméletben (Debrecen, Kossuth Lajos Tudományegyetem, 1997), <https://www.phys.unideb.hu/dtp/hu/jegyzetek>
- [16] C. Wetterich, Phys. Lett. B 301, 90 (1993); C. Wetterich, Nucl. Phys. B 352, 529 (1991).
- [17] A. Codello, et al., Eur. Phys. J. C 76, 226 (2016).
- [18] N. Defenu, Application of functional renormalization group approach to spin systems and long range models PhD thesis, SISSA (2017).
- [19] I. Nándori, Non-perturbative renormalization of sine-Gordon type models (Debrecen, Debreceni Egyetem, 2023).
- [20] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys. A 9, 2411 (1994).
- [21] J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich, Phys. Rep. 363, 223–386 (2002).
- [22] B. Delamotte, An Introduction to the Nonperturbative Renormalization Group, in Springer Notes in Physics vol. 852, J. Polonyi, A. Schwenk (Eds.), pp. 49–85, Springer (Heidelberg), 2012. Lásd még e-print cond-mat/0702365.
- [23] D. F. Litim, Phys. Lett. B 486, 92 (2000); Phys. Rev. D 64, 105007 (2001); JHEP 0111, 059 (2001).
- [24] L. Fister, J. M. Pawłowski, Phys. Rev. D 92, 076009 (2015).
- [25] J. M. Pawłowski, Ann. Phys. 322, 2831 (2007).
- [26] I. Nándori, JHEP 1304, 150 (2013).
- [27] E. Meskhi, Cosmological Discussion of the Early Universe (Debrecen, University of Debrecen, 2024).
- [28] M. G. Mustafa, An Introduction to Thermal Field Theory and Some of its Application, Eur.Phys.J.ST 232 9, 1369-1457, (2023).
- [29] T. Matsubara, A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics. Progress of Theoretical Physics, 14(4), 351–378, (1955).

- [30] N. Tetradis és C. Wetterich, Nucl. Phys. B 398, 659 (1993).
- [31] T. Steingasser, arXiv:2405.02415, DOI: <https://doi.org/10.22323/1.463.0150>
- [32] T. Steingasser, David I. Kaiser, Phys. Rev. D 108, 095035 (2023).
- [33] F. E. Gégény, Funkcionális renormálási csoport módszer alkalmazása a kvantumelméletben (Debrecen, Debreceni Egyetem, 2024).
- [34] S. Weinberg, Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation, Part of General Relativity : An Einstein Centenary Survey, 790-831, (1980).
- [35] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. Phys. Rev., D57:971–985, (1998).
- [36] M. Reuter és F. Saueressig, Renormalization group flow of quantum gravity in the Einstein-Hilbert truncation, Physical Review D, Volume 65, 065016 (2002).
- [37] D. Hilbert, "Die Grundlagen der Physik" [Foundations of Physics], Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen – Mathematisch-Physikalische Klasse (in German), 3: 395–407, (1915).
- [38] M. Reuter és H. Weyer, Background Independence and Asymptotic Safety in Conformally Reduced Gravity, Phys.Rev.D79:105005, (2009).
- [39] S. Nagy, J. Krizsán és K. Sailer, Infrared fixed point in quantum Einstein gravity, JHEP 07 102, (2012).
- [40] A. Bonanno és F. Guarnieri, Universality and symmetry breaking in conformally reduced quantum gravity, Phys. Rev. D 86, 105027, (2013).