

Összefonódott qubitek és a hiperbolikus geometria kapcsolata

OTDK DOLGOZAT

VELICH CSABA

TÉMAVEZETŐ: DR. LÉVAY PÉTER

Tudományos főmunkatárs

BME TTK Fizikai Intézet

Elméleti Fizika Tanszék



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2025

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Két összefonódott qubit	5
2.1. Az összefonódott állapotok leírása	5
2.2. A kevert állapotok párhuzamossága	6
2.3. Az Uhlmann anholonómia meghatározása két összefonódott qubitre	8
2.4. A Bures-Uhlmann metrika	12
2.5. A Bures-Uhlman metrika két összefonódott qubit esetében	14
3. Több összefonódott qubit	18
3.1. Speciális sűrűségmátrixok	18
3.2. A Thomas-forgatások kiterjesztése	19
3.3. A Bures-Uhlmann metrika kiszámítása	22
3.4. Az Uhlmann konnexió meghatározása	23
3.5. Az Uhlmann konnexió és a mágneses monopólusok kapcsolata	25
4. Összefoglalás és kitekintés	28
A. Saját eredmények	29

1. Bevezetés

Mivel a modern számítástechnikai eszközök már méreteik elvi határát súrolják, napjaink egyre csak növekvő számítási igényét klasszikus megoldásokkal csak mennyiségbeli skálázással tudjuk kielégíteni. A hatalmas szuperszámítógépek azonban rendkívül költségesek, valamint rengeteg energiát használnak. Erre a problémára kínál alternatív megoldást egy kvantumszámítógép, mely nagyfokú párhuzamosítást tesz lehetővé, jelentős mennyiségi skálázás nélkül.

Annak ellenére, hogy a kvantumszámítógépek, az egyik fő kutatási terület a modern fizikában, még nem sikerült olyat építeni, amely beváltaná a hozzá fűzött reményeket. Ennek fő oka a kvantum állapotok dekoherenciája, mely ellehetetleníti a hatékony számítások elvégzését. A probléma egy ígéretes megoldásának tűnik egy holonomikus kvantumszámítógép[12], melyben az állapotok topológiailag védettek.

A kvantummechanikai jelenségek mélyebb geometriai vizsgálata az M. V. Berry által bevezetett Berry-fázistól[3] indult ki, mely alapján egy egydimenziós altér, az időfejlődése alatt, felszed egy $U(1)$ fázis faktort, mely geometriai eredettel rendelkezik. A technika általánosítható degenrált alterekre amikor, a fázis helyett egy a degenerált altérben forgató unitér mátrix jelenik meg, ezt nevezik nem-abeli Berry-fázisnak. A holonomikus kvantumszámításban a különböző kvantum kapukat pontosan ezzel az effektussal lehet megvalósítani.

A Berry-fázis kevert állapotokra való kiterjesztésében A. Uhlmann végzett úttörő munkát[8], melynek eredményeként a tiszta állapotokra ismert technikák alkalmazhatóvá váltak kevert állapotokra is. A kevert állapotok geometriai vizsgálatának legfontosabb eszközei a Bures-metrika, és az állapotok párhuzamos áthelyezését leíró, úgynevezett Uhlmann konnexió. A kvantum-információelmélet megjelenésével követően a kutatások fókuszába az összefonódottság és a geometria kapcsolata került, a kevert állapotokon és az Uhlmann fázison keresztül.

Ismeretes, hogy két összefonódott qubit esetén, az egy qubit Bures-metrika konform ekvivalens a $3+1$ dimenziós Minkowski tér-időbe beágyazott, kétköpenyű hiperboloid felső levelének metrikájával. Az Uhlmann parallel áthelyezés fizikáját pedig, a relativitáselméletből ismert, Thomas-forgatások útrendezett szorzataként érthetjük meg[7].

A bevezetés után, dolgozatom 2. fejezetében, ismertetem a két összefonódott qubitre vonatkozó eredményeket. Ebben a fejezetben található továbbá, egy matematikai összefoglaló, is melyben bemutatom a fontosabb kvantum-információelméleti fogalmakat.

A már ismert eredmények után, a 3. fejezetben több, speciálisan összefonódott qubitet tanulmányozok és megmutatom, hogy a Bures geometria ebben az esetben is konform ekvivalens a hiperbolikus geometria megfelelő modelljével. Ezt követően bizonyítom, hogy az általam vizsgált speciális esetben az Uhlmann parallel áthelyezést szintén a Thomas-forgatások generálják. Végezetül megmutatom, hogy az Uhlmann konnexió, a fizikából

már ismert magasabb dimenziós mágneses monopólusokkal[4] kapcsolatos konnexióból származtatható. Zárásként, a konklúziók és lehetséges kitekintések a 4. fejezetben találhatóak.

2. Két összefonódott qubit

2.1. Az összefonódott állapotok leírása

A kvantummechanika furcsaságai közül talán a legérdekesebb jelenség az összefonódottság. Ezt a jelenséget matematikailag úgy kezelhetjük, hogy az egész rendszert a rész rendszerek Hilbert-terének tenzorszorzat terében írjuk le. A továbbiakban csak olyan eseteket fogunk vizsgálni, amikor két Hilbert-tér tenzorszorzatát tekintjük.

Az összefonódott állapotok leírásához azonban, egy, a hullámfüggvényeknél absztraktabb fogalomra van szükségünk, a redukált sűrűségoperátorokra. A ρ sűrűségoperátor egy a megfigyelhető mennyiségek algebráján értelmezett funkcionál: $A \mapsto \text{Tr } A\rho$. Ahhoz, hogy ρ tényleg egy sűrűségoperátor legyen a következőknek is teljesülnie kell:

$$\rho^\dagger = \rho \quad \rho \geq 0 \quad \text{Tr } \rho = 1. \quad (1)$$

Ha ezentúl a $\rho^2 = \rho$ feltétel is teljesül, egy tiszta állapotról beszélünk, egyébként pedig egy kevert állapotról van szó. Vegyük észre, hogy a $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ konstrukcióval egy hullámfüggvényből egy sűrűségoperátort készíthetünk, mely egy tiszta állapotot ír le. A dolgozat további részében csak maximális rangú sűrűségoperátorokkal fogok foglalkozni, ezek terét jöljük $\mathcal{D}$ -vel, tehát $\rho \in \mathcal{D}$

Tekintsünk most egy két komponensből álló rendszert. Ahogy azt említettük, ezt a tenzorszorzat térben tudjuk leírni. Egy tenzorszorzat térbeli elem azonban nem feltétlenül áll elő az alrendszerekben található vektorok tenzor szorzataként. Viszont a részrendszerek bázis vektorainak tenzorszorzata bázist alkot a szorzattérben. Felhasználva, hogy $|i\rangle_1 \in \mathcal{H}_1$ illetve $|j\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$ teljes ortonormált bázist alkotnak az adott Hilbert-térben:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} W_{ij} |i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2 \quad |\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \quad W \in M(n, \mathbb{C}). \quad (2)$$

Fordítsuk figyelmünket most az egyik részrendszer felé, ha ez kölcsönhatásban áll a többi alrendszerrel, akkor egy összefonódott állapotról beszélünk, melyet az adott Hilbert-térben nem egy hullám függvénnyel, hanem egy redukált sűrűségoperátorral tudunk leírni

Természetesen felmerül a kérdés, hogy mi a kapcsolat ρ és $|\Psi\rangle$ között? Ennek megválaszolásához meg kell ismerkednünk a parciális nyommal és a purifikációval.

Vegyük egy $O \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ operátort, ennek a második Hilbert-térre vett parciális nyoma egy $\text{Tr}_2 : \mathbb{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}_1)$ leképezés, melynek hatását a következőképpen definiálhatjuk $\text{Tr}_2 O = \sum_j \langle j|_2 O |j\rangle_2$.

Legyen $\rho \in \mathcal{D}$ egy redukált sűrűségoperátor. A purifikáció folyamata során hozzáveszünk a rendszerünkhöz egy másik Hilbert-teret ($\mathcal{H}^*$) az ancillát. Sok eljárás létezik, de mi most tekintsük azt, amikor $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}^*$, ebben az esetben a 2. egyenletben

szereplő indexek mindegyike egytől $\dim \mathcal{H}$ -ig fut. Ekkor azt mondjuk hogy a $|\Psi\rangle$ tiszta állapot ρ purifikációja ha

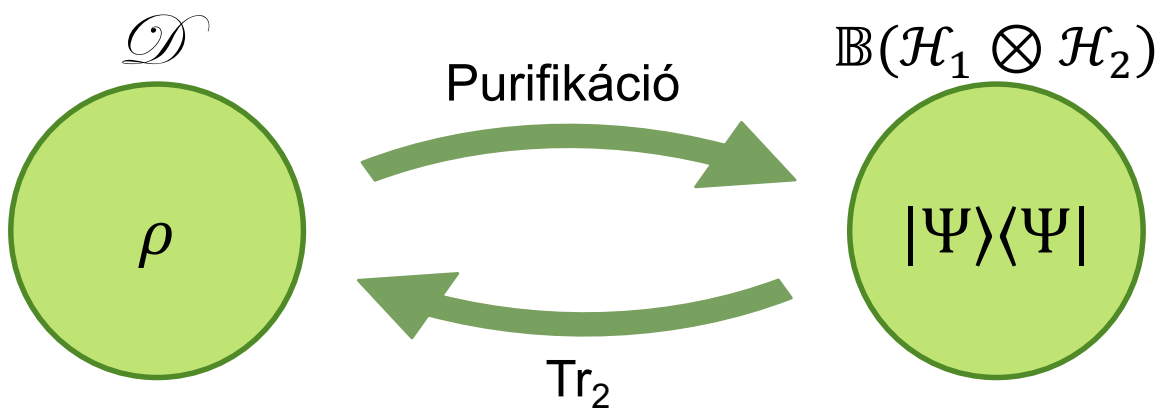
$$\text{Tr}_2 |\Psi\rangle \langle \Psi| = \rho \quad \text{Tr} |\Psi\rangle \langle \Psi| = 1. \quad (3)$$

Következő lépésként határozzuk meg a parciális nyomot, amihez használjuk fel hogy $|\Psi\rangle$ a 2. egyenletben lévő alakban írható fel

$$\begin{aligned} \text{Tr}_2 |\Psi\rangle \langle \Psi| &= \sum_{\gamma} \langle \gamma |_2 |\Psi\rangle \langle \Psi | \gamma \rangle_2 = \sum_{\gamma, a, \alpha, b, \beta} W_{a\alpha} \bar{W}_{b\beta} \langle \gamma |_2 (|a\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2) (\langle b |_1 \otimes \langle \beta |_2) | \gamma \rangle_2 = \\ &= \sum_{\gamma, a, \alpha, b, \beta} W_{a\alpha} \bar{W}_{b\beta} |a\rangle_1 \langle b |_1 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} = \sum_{a, b} |a\rangle_1 \langle b |_1 \sum_{\gamma} W_{a\gamma} \bar{W}_{\gamma b} = \\ &= \sum_{a, b} |a\rangle_1 \langle b |_1 (WW^\dagger)_{ab} = WW^\dagger = \rho. \end{aligned} \quad (4)$$

Tehát, ha a $|\Psi\rangle$ állapot ρ purifikációja, melyet a W mátrix ír le, akkor mivel invertálható sűrűségoperátorokkal foglalkozunk, tudjuk, hogy $W \in Gl(n, \mathbb{C})$. Valamint a sűrűségoperátor felírható $\rho = WW^\dagger$ alakban, a továbbiakban majd csak ilyen purifikációkat tanulmányozunk.

Vagyis a purifikáció folyamán, az összefonódott rendszerünket egy nagyobb rendszer részeként írjuk le, amely rendszerben az állapotunk egy tiszta állapot. A tiszta állapotunkból pedig a parciális nyommal tudjuk visszakapni az eredeti redukált sűrűségoperátorunkat. A két művelet közötti kapcsolat az alábbi ábrán látható.



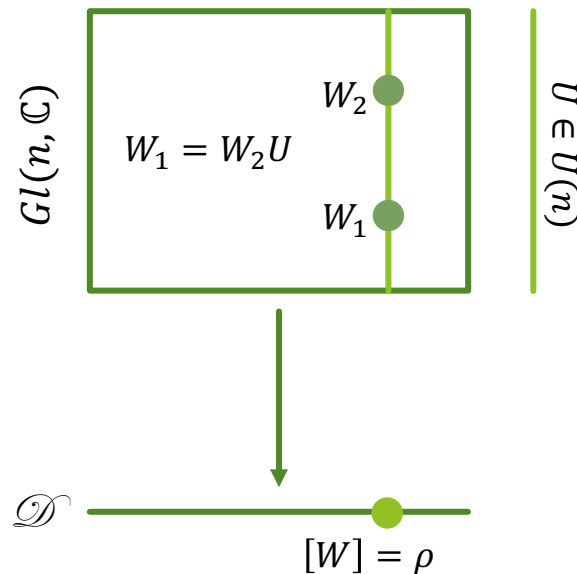
1. ábra. A parciális nyom és a purifikáció kapcsolata.

2.2. A kevert állapotok párhuzamossága

A. Uhlmann munkásságát követve [8], a kevert állapotok anholonómiáját az invertálható pozitív definit sűrűségoperátorok terében élő $\rho(t)$ görbének a purifikációk terébe

történő alkalmas kiemelésével kaphatjuk. A kiemelést, úgy végezzük el, hogy a kiemelt görbe elemei mindig párhuzamosak legyenek.

Mielőtt rátérnénk a párhuzamosság fogalmának definiálására, vizsgáljuk meg a tereket, amelyekben dolgozunk. Látható, hogy W és WU ugyanannak a ρ állapotnak a purifikációja, amennyiben $U \in U(n)$ egy unitér operátor. Topológiai szempontból, tehát a purifikációk tere $(GL(n, \mathbb{C})$ egy nyalábtér a sűrűségoperátorok $(\mathcal{D})$ tere fölött, egy $U(n)$ fibrummal. Ezt a konstrukciót nevezzük Hilbert-Schmidt nyalábnak.



2. ábra. A Hilbert-Schmidt nyaláb szerkezete

A topológiai elrendezés tisztázása után térjünk rá a párhuzamosság kérdésnek vizsgálatára. Fontos megemlíteni, hogy mind a párhuzamosságot, mind a távolságot a $W \in GL(n, \mathbb{C})$ vektortéren értelmezett $\langle A|B \rangle_{HS} = \text{Tr}(A^\dagger B)$ Hilbert-Schmidt skalárszorzat indukálja. Uhlmann definíciója szerint W_1 és W_2 párhuzamos akkor, és csak akkor ha

$$W_1^\dagger W_2 = W_2^\dagger W_1 > 0. \quad (5)$$

A definíció fizikai motivációja, hogy két állapot akkor párhuzamos, ha a közöttük lévő interferencia maximális. Megmutatható, hogy adott ρ_1 és ρ_2 sűrűségmátrixok esetén, a fenti összefüggést teljesítő purifikációk maximalizálják az interferenciát: $\|W_1 + W_2\|_{HS}$. A bizonyításhoz vegyük a purifikációk poláris felbontását: $W_i = \sqrt{\rho_i} U_i$. Ekkor a következő állítást fogalmazhatjuk meg:

$$\max_{U_1, U_2} |\langle \sqrt{\rho_1} U_1 | \sqrt{\rho_2} U_2 \rangle_{HS}| = \max_{U_1, U_2} |\text{Tr} U_1^\dagger \sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_2} U_2| = F(\rho_1, \rho_2). \quad (6)$$

Ahol bevezettük a 7. egyenlet által definiált, úgynevezett Uhlmann fidelity-t mely pontosan a fenti tulajdonsággal bír, a bizonyítás tárgyalása a [2] 9.4-es fejezetében található.

$$F(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}}. \quad (7)$$

Az egyszerűség kedvéért bevezetjük az $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2)$ mennyiséget, amely az Uhlmann fidelity a nyom kiszámítása előtt, azaz

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \implies \text{Tr} \mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_1, \rho_2). \quad (8)$$

Az 5. összefüggésben definiált párhuzamosság alapján belátható, hogy a $W_1 = \sqrt{\rho_1} U_1$ és a $W_2 = \sqrt{\rho_2} U_2$ purifikációk unitér részei között a következő összefüggésnek kell teljesülnie:

$$Y_{21} = U_2 U_1^\dagger = \rho_2^{-1/2} \rho_1^{-1/2} \mathcal{F}(\rho_2, \rho_1). \quad (9)$$

Ezen dolgozatnak nem célja az Uhlmann konnexió levezetése, azonban megmutatható, hogy két párhuzamos állapot közötti fázist megkaphatjuk, mint az őket összekötő, a Bures metrika szerint rövidebb, geodetikus menti párhuzamos eltolás.

A $\rho(t) \subset \mathcal{D}$ görbével kapcsolatos anholonómiát, úgy kaphatjuk meg, ha a görbét infinitezimális geodeti-kusokkal(s_i) közelítjük. Ez alapján egy kiindulási purifikáció adott görbe mentén történő párhuzamos eltolás után az anholonómia azalábbi formulából kapható[8]:

$$W_1 W_0^\dagger = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_1^{1/2} Y_{1,s_1} Y_{s_1,s_2} \dots Y_{s_m,0} \rho_0^{1/2}. \quad (10)$$

Itt W_0 a kiindulási és W_1 a végállapotú purifikáció. Az általános eredmény után egy konkrét eset vizsgálata a következő fejezetben olvasható.

2.3. Az Uhlmann anholonómia meghatározása két összefonódott qubitre

A következőkben vizsgáljuk meg azt, a talán a legegyszerűbb rendszert, mely két összefonódott qubitet tartalmaz. Ez egy igen speciális eset, mert a 2×2 -es mátrixok sok szép tulajdonsággal rendelkeznek. Azonban hasznos elvégezni mert jó bepillantást nyújt az Uhlmann fázis működésébe, és viszonylag könnyen, zárt alakban megadható eredményre juthatunk. A számolás a témavezetőm munkáját követi [7].

Az egész rendszerünk ekkor természetesen a két qubitből álló rendszer, melynek állapotai a tenzorszorzat Hilbert-terében léteznek $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^* \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Mivel, mi egy összefonódott állapotot vizsgálunk emiatt $|\Psi\rangle$ nem egy szorzat állapot, de ettől még kifejezhető egy alkalmas bázisban:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} W_{ij} |i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2 \quad W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Ebben a leírásmódban a $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$ feltétel ekvivalens a $\text{Tr } WW^\dagger = 1$ feltétellel, és mivel összefonódott állapotokat vizsgálunk, $\text{Det } W \neq 0$. Természetesen a korábban tárgyaltakkal összhangban a redukált sűrűségmátrixunkat a parciális nyom kiszámításával kaphatjuk meg: $\rho_1 = \text{Tr}_2 |\Psi\rangle \langle \Psi| = WW^\dagger$ illetve $\rho_2 = \text{Tr}_1 |\Psi\rangle \langle \Psi| = \overline{W^\dagger W}$.

A továbbiakban szemeljük ki az egyik qubitet, és vizsgáljuk azt. Mivel $\rho = WW^\dagger$ egy önadjungált 2×2 egységnyi nyomú mátrix, felírható az egység mátrix és a Pauli-mátrixok lineáris kombinációjaként:

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{u}\boldsymbol{\sigma}). \quad (12)$$

A $\rho > 0$ feltételből kiindulva könnyen megmutatható, hogy $|\mathbf{u}| \leq 1$ azonban összefonódott állapotokra $|\mathbf{u}| < 1$. Tehát a sűrűségoperátorainkat leíró $\mathbf{u}$ vektorok a háromdimenziós egységgömb belsejét adják. Ez alapján a sűrűségmátrixaink tere($\mathcal{D}$) izomorf a Bloch-gömb belsejével(Int $\mathcal{B}$).

Két qubit összefonódottságának jó mérőszáma a konkurencia, melyet a következőképpen számolhatunk ki, és amely részletes tárgyalása megtalálható [2] 15.2-es fejezetében:

$$0 \leq \mathcal{C} = |ad - bc| \leq 1. \quad (13)$$

A 12. egyenletben tárgyalt parametrizációt komponensenként kiírva, és a fenti definícióba behelyettesítve látható, hogy $\mathcal{C} = \sqrt{1 - |\mathbf{u}|^2} = 2\sqrt{\text{Det } \rho}$, mivel azonban $|\mathbf{u}| < 1 \Rightarrow \mathcal{C} > 0$. Ebből a megfogalmazásból az is szépen látszik, hogy a maximálisan összefonódott állapot a Bloch-gömb közepén, míg a tiszta állapotok a felszínén találhatók.

További számításainkhoz érdemes bevezetni a sűrűségoperátorok hiperbolikus paraméterezését, amihez használjuk a rapiditást $0 \leq \theta_{\mathbf{u}} < \infty$, melynek értékét $\mathbf{u}$ hosszából a következőképpen $|\mathbf{u}| = \tanh \theta_{\mathbf{u}}$ definiálhatjuk. Ezeket felhasználva a sűrűségoperátorunk a következő alakot ölti:

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{u}\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \tanh \theta_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}). \quad (14)$$

A két qubit rendszer megoldásának egyik sarokköve a Cayley-Hamilton tétel, amely értelmében minden négyzetes mátrix kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét. A 2×2 mátrixokra ez a következő jelenti:

$$M^2 - M \text{Tr } M + \text{Det } M = 0. \quad (15)$$

Az összefüggés jelentősége, hogy lehetőséget ad egy mátrix gyökének viszonylag egyszerű kiszámítására, a következő módon:

$$\sqrt{M} = \frac{M + \sqrt{\text{Det } M} \mathbb{I}}{\sqrt{\text{Tr } M + 2\sqrt{\text{Det } M}}}. \quad (16)$$

Számítsuk ki először ennek segítségével a sűrűségoperátorunk gyökét, és használjuk ki hogy $\text{Tr } \rho = 1$ valamint $2\sqrt{\text{Det } \rho} = \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{\rho} &= \frac{\rho + \frac{\mathcal{C}}{2}\mathbb{I}}{\sqrt{1 + \mathcal{C}}} = \frac{\frac{1}{2}\mathcal{C}(\cosh \theta_{\mathbf{u}}\mathbb{I} + \sinh \theta_{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}\sigma) + \frac{\mathcal{C}}{2}\mathbb{I}}{\sqrt{1 + \mathcal{C}}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{1 + \mathcal{C}}} ((1 + \cosh \theta_{\mathbf{u}})\mathbb{I} + \sinh \theta_{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}\sigma) = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{C} \cosh \frac{\theta_{\mathbf{u}}}{2}}{\sqrt{1 + \mathcal{C}}} (\cosh \frac{\theta_{\mathbf{u}}}{2}\mathbb{I} + \sinh \frac{\theta_{\mathbf{u}}}{2}\hat{\mathbf{u}}\sigma) = \\ &= \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{2}} (\cosh \frac{\theta_{\mathbf{u}}}{2}\mathbb{I} + \sinh \frac{\theta_{\mathbf{u}}}{2}\hat{\mathbf{u}}\sigma) = \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{2}} L(\theta_{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}).\end{aligned}\quad (17)$$

Ahol $L(\theta_{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}})$ a $\hat{\mathbf{u}}$ irányba mutató, $\theta_{\mathbf{u}}$ rapiditású boosthoz tartozó Lorentz-transzformáció a spinor reprezentációban. Következő lépésnek próbáljuk meg meghatározni a 9. egyenletben definiált $Y_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} - t$, a sűrűségoperátorokra definiált geometriai átlagot. Ehhez először határozzuk meg $\mathcal{F}$ -et a 16. egyenlet alapján:

$$\mathcal{F} = \sqrt{\sqrt{\rho_{\mathbf{v}}}\rho_{\mathbf{u}}\sqrt{\rho_{\mathbf{v}}}} = \frac{\rho_{\mathbf{v}}^{1/2}\rho_{\mathbf{u}}\rho_{\mathbf{v}}^{1/2} + \mathbb{I}\sqrt{\text{Det}(\rho_{\mathbf{v}}^{1/2}\rho_{\mathbf{u}}\rho_{\mathbf{v}}^{1/2})}}{\sqrt{\text{Tr}\left(\rho_{\mathbf{v}}^{1/2}\rho_{\mathbf{u}}\rho_{\mathbf{v}}^{1/2}\right) + 2\sqrt{\text{Det}(\rho_{\mathbf{v}}^{1/2}\rho_{\mathbf{u}}\rho_{\mathbf{v}}^{1/2})}}}. \quad (18)$$

Kihasználva a nyom ciklikusságát illetve hogy $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B)$ a fenti egyenlet nevezőjének a négyzete a következő alakban írható fel:

$$\text{Tr}(\rho_{\mathbf{v}}\rho_{\mathbf{u}}) + 2\sqrt{\text{Det } \rho_{\mathbf{v}}}\sqrt{\text{Det } \rho_{\mathbf{u}}} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathcal{C}_{\mathbf{u}}\mathcal{C}_{\mathbf{v}}) = F(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (19)$$

Ezután fordítsuk figyelmünket a számláló felé. $Y_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$ meghatározásához, szorozzuk be $\rho_{\mathbf{u}}^{-1/2}\rho_{\mathbf{v}}^{-1/2}$ -vel, ekkor a következő összefüggésre jutunk:

$$\rho_{\mathbf{u}}^{1/2}\rho_{\mathbf{v}}^{1/2} + \frac{\mathcal{C}_{\mathbf{v}}\mathcal{C}_{\mathbf{u}}}{4}\rho_{\mathbf{u}}^{-1/2}\rho_{\mathbf{v}}^{-1/2} = \frac{\sqrt{\mathcal{C}_{\mathbf{u}}\mathcal{C}_{\mathbf{v}}}}{2}(L(\theta_{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}})L(\theta_{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}) + L(\theta_{\mathbf{u}}, -\hat{\mathbf{u}})L(\theta_{\mathbf{v}}, -\hat{\mathbf{v}})). \quad (20)$$

Használjuk ki, hogy két Lorentz-transzformáció szorzata egy harmadik Lorentz-transzformáció és egy Thomas-forgatás. Ezt felhasználva az előbb megkapott összefüggést tovább alakíthatjuk:

$$L(\theta_{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}})R(\alpha, \hat{\mathbf{n}}) + L(\theta_{\mathbf{w}}, -\hat{\mathbf{w}})R(\alpha, \hat{\mathbf{n}}) = 2\cosh \frac{\theta_{\mathbf{w}}}{2}R(\alpha, \hat{\mathbf{n}}). \quad (21)$$

Ahol $R(\alpha, \hat{\mathbf{n}}) = \mathbb{I}\cos \frac{\alpha}{2} + \hat{\mathbf{n}}\sigma \sin \frac{\alpha}{2}$ a Thomas-forgatás spinor reprezentációban. A Lorentz-transzformációk kiírásával megmutatkozik, hogy a paramétereit a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{(1 + \mathcal{C}_{\mathbf{u}})(1 + \mathcal{C}_{\mathbf{v}}) + \mathbf{u}\mathbf{v}} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}. \quad (22)$$

Érdemes megfigyelni, hogy $R(\alpha, \hat{\mathbf{n}})$ normálvektorának az előjele nem változik, ha megváltoztatjuk u és v előjelét, azonban $L(\theta_{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}})$ -é igen. Amire még szükségünk van az $\theta_{\mathbf{w}}$ értéke, ehhez használjuk ki a hiperbolikus koszinusz tételt, mely a koszinusz tétel hiperbolikus általánosítása:

$$\cosh \theta_{\mathbf{w}} = \cosh \theta_{\mathbf{u}} \cosh \theta_{\mathbf{v}} + \sinh \theta_{\mathbf{u}} \sinh \theta_{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{v}} = \frac{1 + uv}{\mathcal{C}_{\mathbf{u}} \mathcal{C}_{\mathbf{v}}}. \quad (23)$$

Ebből következik, hogy $\cosh \frac{\theta_{\mathbf{w}}}{2} = \sqrt{\frac{F(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\mathcal{C}_{\mathbf{u}} \mathcal{C}_{\mathbf{v}}}}$. Ezt illetve a 19, a 20, valamint 21 egyenleteket felhasználva a következő eredményre juthatunk:

$$Y_{\mathbf{uv}} = \rho_{\mathbf{u}}^{-1/2} \rho_{\mathbf{v}}^{-1/2} \sqrt{\rho_{\mathbf{v}}^{1/2} \rho_{\mathbf{u}} \rho_{\mathbf{v}}^{1/2}} = R(\alpha, \hat{\mathbf{n}}). \quad (24)$$

Tehát az Uhlman anholonómia két összefonódott qubit esetén felírható mint Thomas-forgatások útrendezett szorzata. Bár ez egy egzakt eredmény, egy új paraméterezés további érdekességekhez vezet.

Vizsgáljuk a $(\cosh \theta_u, \sinh \theta_u \hat{\mathbf{n}})$ vektort, mely eleme a $3+1$ dimenziós Minkowski tér-időbe beágyazott hiperboloidnak. A hiperboloidból egy szterografikus projekcióval konstruálható a hiperbolikus geometria egy másik modelje a Poincare labda, ha ezt a transzformációt alkalmazzuk az általunk tárgyalt vektorra a következőt kapjuk:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}}{1 + \mathcal{C}_{\mathbf{u}}} = \tanh \frac{\theta_{\mathbf{u}}}{2} \hat{\mathbf{u}} \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}}{1 + \mathcal{C}_{\mathbf{v}}} = \tanh \frac{\theta_{\mathbf{v}}}{2} \hat{\mathbf{v}}. \quad (25)$$

A konstrukciójuk miatt ezek a vektrok a háromdimenziós Poincaré labda elemei, azonban, mivel $\tanh \frac{\theta}{2} < 1$, az általuk definiált sűrűségoperátorok a Bloch-gömb belsejéhez is tartoznak. Így van értelme az Uhlman anholonómiájuk vizsgálatának. Az ehhez szükséges Thomas-forgatások a következő alakot öltik:

$$R(\alpha, \hat{\mathbf{n}}) = R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{(1 + \mathbf{ab})\mathbb{I} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\sigma}{\sqrt{1 + 2\mathbf{ab} + |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2}}. \quad (26)$$

Vezessük be a hiperbolikus translációt, mely a geodetikusok menti eltolást írja le. Esetünkben a transzformációt a következő módon definiálhatjuk:

$$\tau_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) \equiv \frac{(1 - |\mathbf{a}|^2) \mathbf{b} + (1 + 2\mathbf{ab} + |\mathbf{b}|^2) \mathbf{a}}{1 + 2\mathbf{ab} + |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2}. \quad (27)$$

A transzformációt behelyettesítve a 26. egyenletbe Ungar munkássága [9] alapján megmutatható:

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = R(\tau_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}), \mathbf{b}) = R(\mathbf{a}, \tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})). \quad (28)$$

Összegezve ha alkalmazzuk a 25. összefüggésben szereplő transzformációt, mely a Bloch-gömb egy automorfizmusa, akkor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok a hiperbolikus geometria Poin-

caré labda modeljének elemeinek lesznek tekinthetők. Továbbá az Uhlmann anholonómia invariáns az átmérők mint hiperbolikus geodetikuskok menti hiperbolikus transzlcziókra. A hiperbolikus és Bures-Uhlmann geometria további kapcsolatát a 2.5 fejezetben vizsgáljuk mélyebben.

2.4. A Bures-Uhlmann metrika

Ebben a fejezetben figyelmünket a Bures-Uhlmann metrika felé fordítjuk és elsődleges célunk a Bures-Uhlmann metrikus tenzor(g_{ab}^{BU}) meghatározása. Ehhez először is definiáljuk a távolságot. A tiszta állapotokra értelmezett, Fubini-Study távolsághoz hasonlóan, a Bures-Uhlmann távolság szintén egy minimalizációs probléma amely az Uhlmann fidelity alkalmazásával jelentősen egyszerűsödik:

$$D_{BU}(\rho_1, \rho_2) = \min_{U_1, U_2} \|\sqrt{\rho_1}U_1 - \sqrt{\rho_2}U_2\|_F = 2(1 - F(\rho_1, \rho_2)). \quad (29)$$

Ezt a mennyiséget nevezzük két sűrűségoperátor Bures-Uhlmann távolságnak, és jól látszik, hogy bár a purifikációk terének a skalárszorzata indukálja, független a purifikációkban használt uniterektől. A metrikus tenzor meghatározásához gondolkozzunk lokálisan:

$$ds_{BU}^2 = D_{BU}^2(\rho(\lambda), \rho(\lambda + d\lambda)) = g_{ab}^{BU} d\lambda^a d\lambda^b = 2 - 2F(\rho(\lambda), \rho(\lambda + d\lambda)). \quad (30)$$

Látható, hogy ρ függés csak F -en keresztül jelenik meg, így figyelmünket fordítsuk erre a mennyiségre. A 7. definícióból kiindulva tekintjük ezt először a nyom kiszámítása előtt. A legfeljebb másodrendű tagokat figyelembe véve ekkor írhatjuk, hogy:

$$\mathcal{F} = \sqrt{\sqrt{\rho(\lambda)}\rho(\lambda + d\lambda)\sqrt{\rho(\lambda)}} = \rho + A_a d\lambda^a + B_{ab} d\lambda^a d\lambda^b. \quad (31)$$

Ennek nyomára pedig adódik:

$$F = \text{Tr } \mathcal{F} = 1 + \text{Tr}(A_a) d\lambda^a + \text{Tr}(B_{ab}) d\lambda^a d\lambda^b. \quad (32)$$

Ezekkel a mennyiségekkel felírva a 31. egyenletben definiált távolságot:

$$ds_{BU}^2 = 2(1 - 1 - \text{Tr}(A_a) d\lambda^a - \text{Tr}(B_{ab}) d\lambda^a d\lambda^b) = -2\text{Tr}(A_a) d\lambda^a - 2\text{Tr}(B_{ab}) d\lambda^a d\lambda^b. \quad (33)$$

A célunk tehát A_a és B_{ab} meghatározása. Ehhez egyrészt dolgozzunk a $p|j\rangle = p_j|j\rangle$, $\sum_j p_j = 1$ sajátbázisban, másrészt fejtsük sorba $\rho(\lambda + d\lambda)$ -t másodrendig:

$$\rho(\lambda + d\lambda) = \rho(\lambda) + (\partial_a \rho) d\lambda^a + \frac{1}{2}(\partial_a \partial_b \rho) d\lambda^a d\lambda^b. \quad (34)$$

Érdemes megjegyezni, hogy $\text{Tr } \rho(\lambda) = \text{Tr } \rho(\lambda + d\lambda) = 1$, emiatt a nem nulladrendű tagok nyoma pontosan nulla. Vizsgáljuk most a 31. egyenletben felírt $\mathcal{F}$ mennyiség négyzetét:

$$\begin{aligned} & \rho^2 + \sqrt{\rho}(\partial_a \rho)\sqrt{\rho} d\lambda^a + \frac{1}{2}\sqrt{\rho}(\partial_a \partial_b \rho)\sqrt{\rho} d\lambda^a d\lambda^b = \\ & = \rho^2 + (\rho A_a + A_a \rho) d\lambda^a + (\rho B_{ab} + B_{ab} \rho + \frac{1}{2}(A_a A_b + A_b A_a)) d\lambda^a d\lambda^b, \end{aligned} \quad (35)$$

ahol a fenti egyenletet a 34-es összefüggés balról illetve jobbról való $\sqrt{\rho}$ -val való szorzással, az alsót pedig a 31. egyenlet négyzetre emelésével és a legfeljebb másodrendű tagok megtartásával kaptuk. Vizsgáljuk először az elsőrendű tagok egyenlőségét:

$$\begin{aligned} \rho A_a + A_a \rho &= \sqrt{\rho}(\partial_a \rho)\sqrt{\rho} \\ \langle j | \rho A_a + A_a \rho | k \rangle &= \langle j | \sqrt{\rho}(\partial_a \rho)\sqrt{\rho} | k \rangle \\ (p_j + p_k)(A_a)_{jk} &= \sqrt{p_j p_k}(\partial_a \rho)_{jk} \\ (A_a)_{jk} &= \frac{\sqrt{p_j p_k}}{p_j + p_k}(\partial_a \rho)_{jk}. \end{aligned} \quad (36)$$

Ebből azonban következik, hogy $\text{Tr } A_a = 0$ mert $\text{Tr}(A_a) \frac{1}{2} \text{Tr } \partial_a \rho = 0$ korábban tárgyalt okok miatt. Tekintsük ezután a másodrendű tagokat

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{\rho}(\partial_a \partial_b \rho)\sqrt{\rho} &= \rho B_{ab} + B_{ab} \rho + \frac{1}{2}(A_a A_b + A_b A_a), \\ \frac{1}{2}\langle j | \sqrt{\rho}(\partial_a \partial_b \rho)\sqrt{\rho} | k \rangle &= \langle j | (\rho B_{ab} + B_{ab} \rho + \frac{1}{2}(A_a A_b + A_b A_a)) | k \rangle, \\ \frac{1}{2}\sqrt{p_j p_k}(\partial_a \partial_b \rho)_{jk} &= (p_j + p_k)(B_{ab})_{jk} + \frac{1}{2}[(A_a)_{jl}(A_b)_{lk} + (A_b)_{jl}(A_a)_{lk}]. \end{aligned} \quad (37)$$

Bennünket azonban elsősorban $\text{Tr } B_{ab}$ érdekel ehhez azonban csak a $(B_{ab})_{jj}$ elemekre van szükségünk, tehát tekintsük a $j = k$ esetet

$$\begin{aligned} 4(B_{ab})_{jj} + \frac{1}{p_j}[(A_a)_{jl}(A_b)_{lj} + (A_b)_{jl}(A_a)_{lj}] &= (\partial_a \partial_b \rho)_{jj} \\ 2 \text{Tr } B_{ab} &= -\frac{1}{2} \sum_j \frac{1}{p_j}[(A_a)_{jl}(A_b)_{lj} + (A_a)_{jl}(A_b)_{lj}]. \end{aligned} \quad (38)$$

Ahol kihasználtuk, hogy $\text{Tr}(\partial_a \partial_b \rho) = 0$. Ezután $(A_a)_{jl}$ helyére behelyettesítve a 36. egyenlet eredményét, majd rövid átalakításokat elvégezve:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{j,l} \frac{p_l}{(p_l + p_j)^2} [(\partial_a \rho)_{jl}(\partial_b)_{lj} + (\partial_b \rho)_{jl}(\partial_a)_{lj}] = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{j,l} \frac{p_l}{(p_l + p_j)^2} (\partial_a \rho)_{jl}(\partial_b)_{lj} + \frac{1}{2} \sum_{j,l} \frac{p_j}{(p_l + p_j)^2} (\partial_a \rho)_{jl}(\partial_b)_{lj} = \frac{1}{2} \sum_{j,l} \frac{(\partial_a \rho)_{jl}(\partial_b)_{lj}}{p_j + p_l}. \end{aligned} \quad (39)$$

Itt a második lépésben szétbontottuk a szummát két külön összegzésre, majd a másodikban elvégeztük az $l \leftrightarrow k$ index cserét és újra összevontuk a szummákat. Eredményünket

összevetve a 30., a 33. és a 38. egyenletekkel a metrikus tenzorra a következő összefüggés adódik:

$$g_{ab}^{BU} = \frac{1}{2} \sum_{jl} \frac{(\partial_a \rho)_{jl} (\partial_b \rho)_{lj}}{p_j + p_l}. \quad (40)$$

mely jól látható módon csak a sűrűségoperátoroktól függ, és nem a purifikációtól. Összegezve tehát, a nyalábtér skaláris szorzatából kiindulva sikeresen definiáltunk egy metrikát az alaptéren.

2.5. A Bures-Uhlman metrika két összefonódott qubit esetében

Az általános eset tárgyalása után vizsgáljunk egy konkrét példát. Ehhez tekintsük a 2.3. fejezetben már tárgyalt két összefonódott qubit esetét, mely matematikailag rendkívül kényelmes mégis igen szép eredményre juthatunk.

Tudjuk, hogy ebben az esetben a redukált sűrűségmátrixunkat ($\rho \in \mathcal{D} \cong \text{Int } \mathcal{B}$) paraméterezhetjük egy $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ vektorral, melyre igaz, hogy $|\mathbf{u}| < 1$. A rendszerünknek ekkor $\mathbf{u}$ három komponense a három szabad paramétere (u_i), tehát:

$$\rho(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{u}\sigma) \implies \partial_{u_i} \rho(\mathbf{u}) = \partial_i \rho(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sigma_i. \quad (41)$$

Ebből a Bures-Uhlmann metrikus tenzort a 40. egyenlet alapján a következőképpen kaphatjuk meg:

$$g_{ab}^{BU} = \frac{1}{8} \sum_{jl} \frac{(\sigma_a)_{jl} (\sigma_b)_{lj}}{p_j + p_l}. \quad (42)$$

Fontos azonban, hogy $\sigma_i \notin \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ ugyanis a Pauli-mátrixokat nem a kanonikus bázisban, hanem a sűrűségoperátor saját bázisában kell vennünk. g_{ab}^{BU} meghatározására ekkor két lehetőségünk van. Az első technikához írjuk ki explicit $\rho(\mathbf{u})$ -t:

$$\rho(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + u_3 & u_1 - iu_2 \\ u_1 + iu_2 & 1 - u_3 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Ezután vegyük a $\rho(u) = UDU^\dagger$ dekompozícióját, ahol D egy diagonális mátrix, U pedig a megfelelő unitér transzformáció. Ekkor a Pauli-mátrixok a saját bázisban kifejezhetőek a következő alakban: $\sigma_1 = U^\dagger \sigma_x U$, $\sigma_2 = U^\dagger \sigma_y U$ illetve $\sigma_3 = U^\dagger \sigma_z U$. Felhasználva továbbá, hogy $p_1 = p_+ = (1 + |\mathbf{u}|)/2$ valamint $p_2 = p_- = (1 - |\mathbf{u}|)/2$ a 42 összegzés elvégezhető. A számolás azonban hosszadalmas és nehezen terjeszhető ki magasabb dimenziókba, ehelyett tekintsünk egy másik megközelítést.

A második megközelítéshez szükségünk van egy kis alapozásra, de utána maga a számolás már rendkívül rövid lesz. Először is vezessük be a $\{1, 2\} \rightarrow \{+, -\}$ indexeket,

majd próbáljuk meg meghatározni a $\sigma \hat{\mathbf{n}}$ operátor saját állapotait. Ehhez használjuk a következő ansatzot:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{2} N_{\pm} (\mathbb{I} \pm \sigma \hat{\mathbf{n}}) |\kappa\rangle. \quad (44)$$

Ahol $|\kappa\rangle$ egy tetszőleges vektor, $\hat{\mathbf{n}}$ pedig egy egységvektor. Helyettesítsük is be az ansatzunkat és használjuk, ki hogy $(\sigma \hat{\mathbf{n}})(\sigma \hat{\mathbf{n}}) = \mathbb{I}$, ekkor:

$$\sigma \hat{\mathbf{n}} |\pm\rangle = \sigma \hat{\mathbf{n}} \frac{1}{2} N_{\pm} (\mathbb{I} \pm \sigma \hat{\mathbf{n}}) |\kappa\rangle = \frac{1}{2} N_{\pm} (\sigma \hat{\mathbf{n}} \pm \mathbb{I}) |\kappa\rangle = \pm |\pm\rangle. \quad (45)$$

Válasszunk most egy tetszőleges $|\kappa\rangle$ vektort, nekünk a legkényelmesebb a $|\kappa\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ választás volt, azonban léteznek más konvenciók is. Ekkor a $|\pm\rangle$ sajátvektor a következő alakban írható:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{2} N_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \pm n_3 & \pm(n_1 - in_2) \\ \pm(n_1 + in_2) & 1 \mp n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} N_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \pm n_3 \\ \pm(n_1 + in_2) \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Melyből a $\langle \pm | \pm \rangle = 1$ normálási feltételt, illetve a $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$ feltételt kihasználva a normálási faktorra következik hogy:

$$N_{\pm} = \sqrt{\frac{2}{1 \pm n_3}} \implies |\pm\rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1 \pm n_3}} \begin{pmatrix} 1 \pm n_3 \\ \pm(n_1 + in_2) \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Írjuk fel az $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ egységvektort gömbi koordináták segítségével ekkor a sajátvektorok a következő alakot öltik:

$$|+\rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \vartheta}} \begin{pmatrix} 1 + \cos \vartheta \\ \sin \vartheta (\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Hasonlóan a másik sajátvektorra:

$$|-\rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \vartheta}} \begin{pmatrix} 1 - \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta (\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\vartheta}{2} \\ -\cos \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Ezekkel a vektorokkal határozzuk meg a $\langle + | \sigma_x | + \rangle$ mennyiséget:

$$\left(\cos \frac{\vartheta}{2}; \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \sin \vartheta \cos \varphi = n_x. \quad (50)$$

Hasonló számításokkal megmutatható, hogy $\langle \pm | \sigma_i | \pm \rangle = \pm n_i$. Mivel $\mathbf{u} = |\mathbf{u}| \hat{\mathbf{n}}$, könnyen megmutatható, hogy a fenti érvelés működik a $\mathbf{u} \sigma$ operátorra is, csak ekkor $\langle \pm | \sigma_i | \pm \rangle = \pm u_i$. Ezt felhasználva 42. már könnyen kiszámolható.

$$\begin{aligned}
 g_{ab}^{BU} &= \frac{1}{8} \sum_{jl} \frac{(\sigma_a)_{jl}(\sigma_b)_{lj}}{p_j + p_l} = \frac{1}{8} \left[\frac{\langle +|\sigma_a|+ \rangle \langle +|\sigma_b|+ \rangle}{1 + |\mathbf{u}|} + \frac{\langle -|\sigma_a|- \rangle \langle -|\sigma_b|- \rangle}{1 - |\mathbf{u}|} \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left[\frac{\langle -|\sigma_a|+ \rangle \langle +|\sigma_b|- \rangle}{2} + \frac{\langle +|\sigma_a|- \rangle \langle -|\sigma_b|+ \rangle}{2} \right] = \frac{u_a u_b}{4(1 - u^2)} + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left[\frac{\langle -|(\sigma_a \sigma_b)|- \rangle - \langle -|\sigma_a|- \rangle \langle -|\sigma_b|- \rangle}{2} + \frac{\langle +|(\sigma_a \sigma_b)|+ \rangle - \langle +|\sigma_a|+ \rangle \langle +|\sigma_b|+ \rangle}{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{1 - u^2} - 1 \right) u_a u_b + \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_a \sigma_b) \right] = \frac{1}{4} \left[\delta_{ab} + \frac{u^2}{1 - u^2} u_a u_b \right], \tag{51}
 \end{aligned}$$

ahol először is kihasználtuk, hogy $(\sigma_a \sigma_b)_{++} = (\sigma_a)_{++}(\sigma_b)_{++} + (\sigma_a)_{+-}(\sigma_b)_{-+}$ továbbá, hogy $(\sigma_a \sigma_b)_{--} = (\sigma_a)_{--}(\sigma_b)_{--} + (\sigma_a)_{-+}(\sigma_b)_{+-}$ ami csak a mátrixszorzás kiírva a $\{+, -\}$ indexekkel. Illetve a $\text{Tr}(\sigma_a \sigma_b) = 2\delta_{ab}$ azonosságot, mely tulajdonképpen a Pauli-mátrixok ortogonalitása. Mindezt felhasználva tehát, az ívelemnégyszet a következő alakot ölti:

$$ds_{BU}^2 = g_{ab}^{BU} du_a du_b = \frac{1}{4} \left[\delta_{ab} + \frac{u^2}{1 - u^2} u_a u_b \right] du_a du_b = \frac{1}{4} \left[(d\mathbf{u})^2 + \frac{(\mathbf{u} d\mathbf{u})^2}{1 - u^2} \right]. \tag{52}$$

Paraméterezzük az $\mathbf{u}$ vektort ismét a már tárgyalt $\mathbf{u} = \tanh \theta_{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{n}}$ hiperbolikus módon ekkor a megváltozása a következő lesz:

$$d\mathbf{u} = \frac{d\theta_{\mathbf{u}}}{\cosh \theta_{\mathbf{u}}} \hat{\mathbf{n}} + \tanh \theta_{\mathbf{u}} d\hat{\mathbf{n}}. \tag{53}$$

Használjuk ki továbbá, hogy $\hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}} = 0$, ekkor az 52. összefüggésben szereplő tagok a következő alakot öltik:

$$(\mathbf{u} d\mathbf{u})^2 = \frac{\tanh^2 \theta_{\mathbf{u}}}{\cosh^4 \theta_{\mathbf{u}}} d\theta_{\mathbf{u}}^2, \quad (d\mathbf{u})^2 = \frac{d\theta_{\mathbf{u}}^2}{\cosh^4 \theta_{\mathbf{u}}} + \tanh^2 \theta_{\mathbf{u}} (d\hat{\mathbf{n}})^2. \tag{54}$$

Ezeket visszahelyettesítve az ívelem a következő adódik:

$$\begin{aligned}
 ds_{BU}^2 &= \frac{1}{4} \left[\frac{d\theta_{\mathbf{u}}^2}{\cosh^4 \theta_{\mathbf{u}}} + \tanh^2 \theta_{\mathbf{u}} (d\hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{1}{1 - \tanh^2 \theta_{\mathbf{u}}} \frac{\tanh^2 \theta_{\mathbf{u}}}{\cosh^4 \theta_{\mathbf{u}}} d\theta_{\mathbf{u}}^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{d\theta_{\mathbf{u}}^2}{\cosh^4 \theta_{\mathbf{u}}} \frac{1}{1 - \tanh^2 \theta_{\mathbf{u}}} + \frac{\sinh^2 \theta_{\mathbf{u}}}{\cosh^2 \theta_{\mathbf{u}}} (d\hat{\mathbf{n}})^2 \right] = \frac{1}{4 \cosh^2 \theta_{\mathbf{u}}} \left[d\theta_{\mathbf{u}}^2 + \sinh^2 \theta_{\mathbf{u}} (d\hat{\mathbf{n}})^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{4 \cosh^2 \theta_{\mathbf{u}}} ds_{\mathcal{H}^3}^2.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Ahol $ds_{\mathcal{H}^3}^2$ a $3 + 1$ dimenziós Minkowski téridőbe beágyazott kétköpenyű hiperboloid felső levelének a metrikája. Mivel $\frac{1}{\cosh^2 \theta_{\mathbf{u}}}$ egy pozitív monoton függvény, a Bures-Uhlmann metrika konform ekvivalens a $\mathcal{H}^3$ metrikájával.

Ebben a fejezetben bemutattam a már ismert technikát két összefonódott qubit esetére. A következő fejezetben pedig egy általánosabb qubit rendszert fogok vizsgálni.

3. Több összefonódott qubit

A több összefonódott qubit tanulmányozásához először bemutatom az általam tanulmányozott speciális sűrűségmátrixokat, majd ezekre kiterjesztem az előző fejezetben alkalmazott módszereket. Végezetül pedig, megvizsgálom az Uhlmann konnexió és a mágneses monopólusok kapcsolatát.

3.1. Speciális sűrűségmátrixok

A dolgozat hátralevő részében az 56. egyenletben látható sűrűségmátrixokat fogok tanulmányozni. Bár ezek a sűrűségmátrixok nem fedik le az összes $2n \times 2n$ dimenziós sűrűségmátrixot, de vizsgálatuk érdekes és messzemenő eredményekre vezet.

$$\rho = \frac{1}{2^n}(\mathbb{I} + \mathbf{u}\Gamma), \quad \mathbf{u}\Gamma := u^j \Gamma_j, \quad (56)$$

ahol $u \in \mathbb{R}^{2n+1}$ és $|u| < 1$, más szóval u a $2n$ dimenziós egységgömb belsejében található ($u \in \text{int } \mathbb{B}^{2n}$). $\mathbb{I}$ a $2n \times 2n$ egységmátrix, valamint a $2n \times 2n$ dimenziós gamma mátrixok Clifford-algebrát alkotnak azaz:

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{I}. \quad (57)$$

Tetszőleges $2n + 2$ dimenzióban, a Γ mátrixok egy alkalmas családját, a következő rekurzióval kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \sigma_1 \otimes \mathbb{I}_{2^n}, \\ \Gamma_i &= \sigma_2 \otimes \Sigma_k, \\ \Gamma_{2n} &= \sigma_3 \otimes \mathbb{I}_{2^n}. \end{aligned} \quad (58)$$

Ahol $\Sigma_k = \tilde{\Gamma}_{k-1} \in Gl(2^n, \mathbb{C})$ a $2n$ dimenziós Γ mátrixok. Az $n = 1$ esetben pedig $\Gamma_1 = \sigma_x$, $\Gamma_2 = \sigma_y$ és $\Gamma_3 = \sigma_z$. A konstrukcióból jól látszik, hogy 2^{n+1} dimenzióban, pontosan $2n + 1$ darab gammamátrix létezik.

Vizsgáljuk meg most ρ sajátértékeit. Tudjuk, hogy $\rho|I\rangle = \lambda_I|I\rangle$, $I \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$, azonban mivel $(n\Gamma)^2 = \mathbb{I}$ azt kapjuk, hogy

$$\lambda_a = \frac{1}{2^n}(1 + |u|), \quad \lambda_\alpha = \frac{1}{2^n}(1 - |u|), \quad a, \alpha \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}. \quad (59)$$

Más szóval, a $|a\rangle$ és a $|\alpha\rangle$ két, 2^{n-1} szeresen degenerált altér. A továbbiakban a görög ábécé betűivel a $\lambda_\alpha = (1 - |u|)/2^n$, míg a latin ábécéivel a $\lambda_a = (1 + |u|)/2^n$ alterek sajátvektorait és sajátértékeit indexeljük.

3.2. A Thomas-forgatások kiterjesztése

Tudjuk, hogy a $SO(n,1)$ csoport elemei az $n+1$ dimenziós Minkowski téridő pszeudoortogonális transzformációi. Ennek a csoportnak $\binom{n}{1}$ boost és $\binom{n}{2}$ valós forgatás generátora van. Az $SO(3,1)$ csoport Lorenz-transzformációnak spinor reprezentálását, és ennek kapcsolatát az Uhlman fázishoz a 2.3. fejezetben fejtettük ki, ennek a fejezetnek a témája pedig, a technika kiterjesztése $SO(n,1)$ esetére. Könnyen belátható, hogy

$$\varrho_v^{1/2} = \frac{L(v)}{\sqrt{2^N \cosh \frac{\beta_v}{2}}}, \quad L(v) := \cosh \frac{\beta_v}{2} \mathbb{I} + \sinh \frac{\beta_v}{2} (\hat{\mathbf{v}} \boldsymbol{\gamma}) \gamma^0. \quad (60)$$

ahol $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\gamma} \gamma^0$ valamint, igaz, hogy $\{\gamma^\nu \gamma^\mu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{I}$. Ebből az antikommutációs relációból már következnek a γ mátrixok további tulajdonságai, nevezetesen, hogy

$$(\gamma^0)^2 = -\mathbb{I}, \quad (\gamma^k)^2 = \mathbb{I}, \quad (\gamma^0)^\dagger = -\gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = \gamma^k. \quad (61)$$

$L(v)$ további vizsgálatához használjuk fel a következő azonosságot:

$$L(v) \gamma^\nu L^{-1}(v) = \Lambda_\mu{}^\nu(v) \gamma^\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, 2N+1 \quad (62)$$

ahol

$$\begin{aligned} \Lambda_0{}^0(v) &= \cosh \beta_v, \\ \Lambda_0{}^k(v) &= \Lambda_k{}^0(v) = -\sinh \beta_v \hat{v}^k, \\ \Lambda_k{}^j(v) &= \delta_k^j + (\cosh \beta_v - 1) \hat{v}_k \hat{v}^j. \end{aligned} \quad (63)$$

A bizonyításhoz először is vegyük észre, hogy $L(v)^{-1} = L(-v)$, ezt egyszerű algebrai átalakításokkal beláthatjuk. Következő lépésnek írjuk ki a $L(v) \gamma^\nu L^{-1}(v) = L(v) \gamma^\nu L(-v)$ szorzatot, mely néhány apróbb egyszerűsítés után a következő alakot ölti:

$$L(v) \gamma^\nu L(-v) = ch^2 \frac{\beta}{2} \gamma^\nu + \frac{1}{2} sh \beta (\hat{v}^k \gamma^k \gamma^0 \gamma^\nu - \hat{v}^j \gamma^\nu \gamma^j \gamma^0) - sh^2 \frac{\beta}{2} \hat{v}^j \hat{v}^k \gamma^k \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^j \gamma^0. \quad (64)$$

Először, vizsgáljuk a $\nu = 0$ esetet, a 61. egyenletben szereplő azonosságokat, és az antikommutációs összefüggést használva az egyenlet sokat egyszerűsödik.

$$ch^2 \frac{\beta}{2} \gamma^0 + \frac{1}{2} sh \beta (-\hat{v}^k \gamma^k - \hat{v}^j \gamma^j) - sh^2 \frac{\beta}{2} \hat{v}^j \hat{v}^k \gamma^k \gamma^j \gamma^0 = ch \beta \gamma^0 - sh \beta \hat{v}^k \gamma^k, \quad (65)$$

itt kihasználtuk továbbá, hogy $\hat{v}^j \hat{v}^k \gamma^k \gamma^j = \mathbb{I}$. A fenti összefüggésből már könnyen azonosíthatjuk a $\Lambda_0{}^0 = ch \beta$ és a $\Lambda_k{}^0 = -sh \beta \hat{v}^k$ együtthatókat. Ezután tekintsük a $\nu = l$ esetet:

$$ch^2 \frac{\beta}{2} \gamma^l + \frac{1}{2} sh \beta (\hat{v}^k \gamma^k \gamma^0 \gamma^l - \hat{v}^j \gamma^l \gamma^j \gamma^0) - sh^2 \frac{\beta}{2} \hat{v}^j \hat{v}^k \gamma^k \gamma^0 \gamma^l \gamma^j \gamma^0. \quad (66)$$

Vizsgáljuk először a $sh\beta$ -val arányos tagot:

$$\hat{v}^k \gamma^k \gamma^0 \gamma^l - \hat{v}^j \gamma^l \gamma^j \gamma^0 = \hat{v}^k \gamma^k \gamma^0 \gamma^l - \hat{v}^k (2\delta_{lk} - \gamma^k \gamma^l) \gamma^0 = -\delta_{lk} \hat{v}^k \gamma^0 = -\hat{v}^l \gamma^0. \quad (67)$$

Ebből már könnyen leolvashatjuk a $\Lambda_0^k = -sh\beta \hat{v}^k$ együtthatót. Következőnek tekintsük a $sh^2 \frac{\beta}{2}$ -vel arányos tagot:

$$-\hat{v}^j \hat{v}^k \gamma^k \gamma^0 \gamma^l \gamma^j \gamma^0 = \hat{v}^j \hat{v}^k \gamma^k \gamma^l \gamma^j = \hat{v}^j \hat{v}^k \gamma^k (2\delta_{lj} - \gamma^j \gamma^l) = 2\hat{v}^j \hat{v}^k \delta_{lj} \gamma^k - \gamma^l = 2\hat{v}^l \hat{v}^k \gamma^k - \gamma^l. \quad (68)$$

A tagok összeszedése után a következőt kapjuk:

$$ch^2 \frac{\beta}{2} \gamma^l + 2sh^2 \frac{\beta}{2} \hat{v}^l \hat{v}^k \gamma^k - sh^2 \frac{\beta}{2} \gamma^l = \gamma^l + (ch\beta - 1) \hat{v}^l \hat{v}^k \gamma^k. \quad (69)$$

Amiből már adódik, hogy $\Lambda_k^j = \delta_k^j + (\cosh \beta_v - 1) \hat{v}_k \hat{v}^j$, és ezzel meghatároztuk az utolsó Λ_μ^ν együtthatót is.

Eddig nem pontosítottuk, hogy a 60. egyenletben definiált $L(v)$ objektum pontosan mi is. Ennek tisztázásához, először is vegyük észre, hogy:

$$L(\mathbf{v}) \equiv L(\beta_v, \hat{\mathbf{v}}) = \exp\left(\frac{\beta_v}{2} (\hat{\mathbf{v}} \boldsymbol{\gamma}) \gamma^0\right). \quad (70)$$

Mivel $(\gamma^k \gamma^0)^\dagger = (\gamma^0)^\dagger (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^0 \gamma^k = \gamma^k \gamma^0$ és $\text{Tr} \gamma^k \gamma^0 = 0 \Rightarrow \text{Det} L(v) = 1$, kijelenthetjük tehát, hogy $L(v) \in SU(2^n)$. A 62. összefüggés alapján valamint, hogy pontosan $2n+1$ független $L(v)$ létezik, kijelenthetjük, hogy az $L(v)$ operátorok az $SO(2n+1, 1)$ csoport boost generátorai spinor reprezentációban.

A 61., 62. összefüggések és $L(v)$ definíciója alapján könnyen beláthatjuk a következő azonosságokat:

$$\begin{aligned} L(v) \gamma^0 &= \gamma^0 L(v)^{-1}. \\ L^2(u) \gamma^0 &= \cosh \beta_u \gamma^0 - \sinh \beta_u (\hat{\mathbf{u}} \boldsymbol{\gamma}). \\ -L(v) L^2(u) \gamma^0 L^{-1}(v) \gamma^0 &= \cosh \beta_u (-L(v) \gamma^0 L^{-1}(v)) \gamma^0 + \sinh \beta_u L(v) (\hat{\mathbf{u}} \boldsymbol{\gamma}) L^{-1}(v) \gamma^0. \end{aligned} \quad (71)$$

Ezeket felhasználva már kiszámíthatjuk a következő kifejezést:

$$\begin{aligned} L(v) L(u)^2 L(v) &= -L(v) L^2(u) \gamma^0 L^{-1}(v) \gamma^0 = \\ &= \{\cosh \beta_u \cosh \beta_v + \sinh \beta_u \sinh \beta_v (\hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{v}})\} \mathbb{I} + \\ &+ \{\cosh \beta_u \sinh \beta_v \hat{\mathbf{v}} + \sinh \beta_u (\cosh \beta_v - 1) (\hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}} + \sinh \beta_u \hat{\mathbf{u}}\} \boldsymbol{\gamma} \gamma^0 = \\ &= \cosh \beta_w \mathbb{I} + \sinh \beta_w (\hat{\mathbf{w}} \boldsymbol{\gamma}) \gamma^0 = L(w)^2. \end{aligned} \quad (72)$$

Ezeket az eredményeket, továbbá azt felhasználva, hogy $2 \cosh(\beta_w/2)L(w) - \mathbb{I} = L(w)^2$ a következő összefüggésre jutunk:

$$L^{-1}(u)L^{-1}(v)(L(v)L(u)L(u)L(v))^{1/2} = L^{-1}(u)L^{-1}(v)L(w) = \frac{L^{-1}(u)L^{-1}(v) + L(u)L(v)}{2 \cosh \frac{\beta_w}{2}}. \quad (73)$$

Ezután már könnyen kiszámíthatjuk a 9. egyenletben bevezetett geometriai átlagot:

$$\begin{aligned} Y_{uv} &= \rho_u^{-1/2} \rho_v^{-1/2} (\rho_v^{1/2} \rho_u \rho_v^{1/2})^{1/2} = L^{-1}(u)L^{-1}(v)(L(v)L(u)L(u)L(v))^{1/2} = \\ &= \frac{L^{-1}(u)L^{-1}(v) + L(u)L(v)}{2 \cosh \frac{\beta_w}{2}}. \end{aligned} \quad (74)$$

A Lorentz-transzformációkat kiírva az összefüggés tovább egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} Y_{uv} &= \frac{L^{-1}(u)L^{-1}(v) + L(u)L(v)}{2 \cosh \frac{\beta_w}{2}} = \frac{(\cosh \frac{\beta_u}{2} \mathbb{I} - \sinh \frac{\beta_u}{2} (\hat{\mathbf{u}} \boldsymbol{\gamma}) \gamma^0)(\cosh \frac{\beta_v}{2} \mathbb{I} - \sinh \frac{\beta_v}{2} (\hat{\mathbf{v}} \boldsymbol{\gamma}) \gamma^0)}{2 \cosh \frac{\beta_w}{2}} + \\ &+ \frac{(\cosh \frac{\beta_u}{2} \mathbb{I} + \sinh \frac{\beta_u}{2} (\hat{\mathbf{u}} \boldsymbol{\gamma}) \gamma^0)(\cosh \frac{\beta_v}{2} \mathbb{I} + \sinh \frac{\beta_v}{2} (\hat{\mathbf{v}} \boldsymbol{\gamma}) \gamma^0)}{2 \cosh \frac{\beta_w}{2}} = \\ &= \frac{\cosh \frac{\beta_u}{2} \cosh \frac{\beta_v}{2} + \sinh \frac{\beta_u}{2} \sinh \frac{\beta_v}{2} (\hat{\mathbf{u}} \boldsymbol{\gamma})(\hat{\mathbf{v}} \boldsymbol{\gamma})}{\cosh \frac{\beta_w}{2}}. \end{aligned} \quad (75)$$

Ne feledkezzünk meg, arról, hogy $\cosh(\beta_w/2)$ kifejezhető, β_u és β_v segítségével. Érdemes bevezetnünk a következő paraméterezést:

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\delta}{2} \right) &= \frac{\cosh \left(\frac{\beta_u}{2} \right) \cosh \left(\frac{\beta_v}{2} \right) + \sinh \left(\frac{\beta_u}{2} \right) \sinh \left(\frac{\beta_v}{2} \right) (\hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{v}})}{\cosh \left(\frac{\beta_w}{2} \right)}, \\ \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) &= \sqrt{1 - (\hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{v}})^2} \frac{\sinh \left(\frac{\beta_u}{2} \right) \sinh \left(\frac{\beta_v}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\beta_w}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (76)$$

Használjuk fel továbbá, hogy $\gamma^j \gamma^k = \delta_{jk} \mathbb{I} + [\gamma^j, \gamma^k]/2$, mivel $\gamma^j \gamma^k = \mathbb{I}$ és ha $j \neq k$ akkor $[\gamma^j, \gamma^k] = \gamma^j \gamma^k - \gamma^k \gamma^j = 2 \gamma^k \gamma^j$ ha ezen kívül még bevezetjük a $\Sigma_{jk} = [\gamma^j, \gamma^k]/4$ jelölést akkor a 26. egyenlet a következő egyszerű alakot ölti:

$$Y_{uv} = \cos \left(\frac{\delta}{2} \right) \mathbb{I} + \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) \frac{2 \hat{u}^j \hat{v}^k \Sigma_{jk}}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{v}})^2}}. \quad (77)$$

Definiáljuk a következő mennyiséget:

$$iB = \frac{2\hat{u}^j \hat{v}^k \Sigma_{jk}}{\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}})^2}}. \quad (78)$$

Felhasználva, hogy $B^2 = \mathbb{I}$ a 77. kifejezés a következő egyszerű alakot ölti:

$$Y_{uv} = e^{i(\delta/2)B}. \quad (79)$$

Könnyen megmutatható, hogy $B^\dagger = B$, valamint $\text{Tr } B = 0 \Rightarrow \text{Det } Y_{uv} = 1$ tehát $Y_{uv} \in SU(2^n)$. A 77. kifejezést tanulmányozva belátható, hogy pontosan $\binom{2n+1}{2}$ független mennyiséget tartalmaz melyek pontosan az $SO(2n+1,1)$ csoport forgatásgenerátorai spinor reprezentációban.

Általános esetben tehát, Y_{uv} szintén egy forgatás, hasonlóan a 2.3. fejezetben tárgyaltakhoz. Szóval, az Uhlmann anholonómia 56. alakú sűrűségmátrixok esetében is Thomas-forgatások útrendezt szorzata.

3.3. A Bures-Uhlmann metrika kiszámítása

Az anholonómia meghatározása után fordítsuk, figyelmünket a metrikus tenzorra, mely a 40. egyenlet alapján a következő alakot ölti:

$$g_{ab}^{BU} = \frac{1}{2} \sum_{jl} \frac{(\Gamma_a)_{jl}(\Gamma_n)_{lj}}{p_j + p_l}. \quad (80)$$

Az összegzés elvégzéséhez, hasonlóan a két qubithez, bevetünk egy trükköt. Defináljuk a két degenerált altérre vetítő projektorokat:

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} \pm \hat{\mathbf{n}}\Gamma). \quad (81)$$

Könnyen látható, hogy ekkor $P_{\pm}^2 = P_{\pm}$ és $P_{\pm}P_{\mp} = 0$, valamint $P_{+} + P_{-} = \mathbb{I}$. Továbbá, a spektrális felbontás miatt, $\rho = P_{+}(1 + |\mathbf{u}|)/2^n + P_{-}(1 - |\mathbf{u}|)/2^n$. Vezessük be ezután a két altérhez tartozó saját vektorokat:

$$|U_{+}\rangle = N_{+}P_{+}|\uparrow\rangle, \quad |U_{-}\rangle = N_{-}P_{-}|\uparrow\rangle. \quad (82)$$

Mivel, $P_{\pm}$ projektorok és $|U_{\pm}\rangle$ a hozzájuk tartozó alterek $P_{\pm}|U_{\pm}\rangle = |U_{\pm}\rangle$, valamint $P_{\pm}|U_{\mp}\rangle = 0$. Nézzük meg, hogy ezek a vektorok, hogyan hatnak a Γ_{μ} operátorra!

$$\langle U_{\pm} | \Gamma_{\mu} | U_{\pm} \rangle = \langle U_{\pm} | P_{\pm} \Gamma_{\mu} P_{\pm} | U_{\pm} \rangle = \langle U_{\pm} | \Gamma_{\mu} P_{\mp} P_{\pm} \pm u_{\mu} \mathbb{I} | U_{\pm} \rangle = \pm u_{\mu}. \quad (83)$$

Ahol kihasználtuk, hogy $\{\Gamma_{\mu}, \Gamma_{\nu}\} = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{I} \Rightarrow (\Gamma_{\nu}u_{\nu})\Gamma_{\mu} = -\Gamma_{\mu}(\Gamma_{\nu}u_{\nu}) + 2u_{\mu}\mathbb{I}$. Az antikommutációs relációból kiindulva belátható, hogy $\langle a | \Gamma_{\mu} | b \rangle = u_{\mu}\delta_{ab}$ hasonlóan $\langle \alpha | \Gamma_{\mu} | \beta \rangle = u_{\mu}\delta_{\alpha\beta}$. Ezekkel az eszközökkel felfegyverkezve, már könnyen kiszámíthatjuk a 80. összegzést.

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{ij} \frac{(\Gamma_\mu)_{ij}(\Gamma_\nu)_{ji}}{p_i + p_j} = \frac{1}{2^{2n+1}} \left[2^{n-1} \sum_{ab} \frac{(\Gamma_\mu)_{ab}(\Gamma_\nu)_{ba}}{1 + |\mathbf{u}|} + 2^{n-1} \sum_{\alpha\beta} \frac{(\Gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\Gamma_\nu)_{\beta\alpha}}{1 - |\mathbf{u}|} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2^{2n+1}} \left[2^{n-1} \sum_{a\beta} (\Gamma_\mu)_{a\beta}(\Gamma_\nu)_{\beta a} + 2^{n-1} \sum_{\alpha b} (\Gamma_\mu)_{\alpha b}(\Gamma_\nu)_{b\alpha} \right]. \quad (84)$$

A második két tag kiértékeléséhez, írjuk ki a $\Gamma_\mu \Gamma_\nu$ mártix szorzást komponensenként, ebből adódik, hogy $(\Gamma_\mu \Gamma_\nu)_{aa} = (\Gamma_\mu)_{ab}(\Gamma_\nu)_{ba} + (\Gamma_\mu)_{a\beta}(\Gamma_\nu)_{\beta a}$, illetve $(\Gamma_\mu \Gamma_\nu)_{\alpha\alpha} = (\Gamma_\mu)_{\alpha b}(\Gamma_\nu)_{b\alpha} + (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\Gamma_\nu)_{\beta\alpha}$. Ezeket az összefüggéseket felhasználva, a fenti egyenlet a következő alakra hozható:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2^{n+2}} \left[\left(\frac{1}{1 + |\mathbf{u}|} - 1 \right) \sum_{ab} (\Gamma_\mu)_{ab}(\Gamma_\nu)_{ba} + \left(\frac{1}{1 - |\mathbf{u}|} - 1 \right) \sum_{\alpha\beta} (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\Gamma_\nu)_{\beta\alpha} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2^{n+2}} \left[\sum_a (\Gamma_\mu \Gamma_\nu)_{aa} + \sum_{\alpha b} (\Gamma_\mu \Gamma_\nu)_{\alpha\alpha} \right] = \frac{1}{2^{n+2}} \left[2^n \frac{|\mathbf{u}|^2}{1 - |\mathbf{u}|^2} u_\mu u_\nu + \text{Tr}(\Gamma_\mu \Gamma_\nu) \right] = \quad (85)$$

$$= \frac{1}{4} \left[\delta_{\mu\nu} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{1 - |\mathbf{u}|^2} u_\mu u_\nu \right].$$

Látható, hogy formailag ez teljesen megegyezik az 51. egyenletben szereplő kifejezéssel, azzal az apró különbséggel, hogy $\mathbf{u}$ nem egy háromdimenziós vektor. Újra bevezetve a hiperbolikus paraméterezést majd a 2.5 fejezetben tárgyalt számolást megismételve az infinitezimális távolságra adódik:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu = \frac{1}{4 \cosh \theta_{\mathbf{u}}} (d\theta_{\mathbf{u}}^2 + \sinh^2 \theta_{\mathbf{u}} (d\hat{\mathbf{n}})^2) = \frac{1}{4 \cosh \theta_{\mathbf{u}}} ds_{\mathcal{H}^{2n-1}}^2. \quad (86)$$

Vagyis amennyiben 81. alakú speciális sűrűségmátrixokat vizsgálunk, a rajtuk értelmezett Bures-Uhlmann metrika szintén konform ekvivalens az $2n$ dimenziós Minkowski téridőbe beágyozott kétköpenyű hiperboloid felső levelével.

3.4. Az Uhlmann konnexió meghatározása

A metrika meghatározása után vizsgáljuk meg a párhuzamos eltolást leíró Uhlmann konnexiót! X. Wang és társainak munkássága[10], alapján ennek a visszahúzottja a következő 1-forma:

$$\mathcal{A} = - \sum_{I \neq J} \frac{(\sqrt{\lambda_I} - \sqrt{\lambda_J})^2}{\lambda_I + \lambda_J} |I\rangle \langle I| d|J\rangle \langle J|, \quad d \equiv dx^j \partial_j. \quad (87)$$

Vizsgáljuk először a kifejezés sajátértékeket tartalmazó részét! Amennyiben $|I\rangle$ és $|J\rangle$ ugyanabban az altérben van, akkor a hozzájuk tartozó sajátértékek megegyeznek, emiatt $\mathcal{A} = 0$. Tehát, elég csak az $I \in \{\alpha\}, J \in \{b\}$ és $I \in \{a\}, J \in \{\beta\}$ eseteket tekinteni ekkor:

$$\frac{(\sqrt{\lambda_I} - \sqrt{\lambda_J})^2}{\lambda_I + \lambda_J} = 1 - \sqrt{1 - |\mathbf{u}|^2}, \quad (88)$$

ami egy, indexektől független mennyiség, tehát a 87. egyenlet a következő alakot ölti:

$$\mathcal{A} = (\sqrt{1 - |\mathbf{u}|^2} - 1) \left[\sum_{\alpha, b} |\alpha\rangle \langle \alpha| d|b\rangle \langle b| + \sum_{a, \beta} |a\rangle \langle a| d|\beta\rangle \langle \beta| \right]. \quad (89)$$

Az összefüggés kiértékeléséhez használjuk a 81. egyenletben definiált projektorokat. Tudjuk, hogy $P_-|\beta\rangle = |\beta\rangle$ és $P_+|b\rangle = |b\rangle$ amiből következik, hogy $dP_-|\beta\rangle + P_-d|\beta\rangle = d|\beta\rangle$. Használjuk továbbá a projektorok spektrális felbontását, nevezetesen, hogy $\sum_a |a\rangle \langle a| = P_+$ és $\sum_\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = P_-$. Ezek alapján:

$$\sum_{a, \beta} |a\rangle \langle a| d|\beta\rangle \langle \beta| = P_+ d|\beta\rangle \langle \beta| = P_+ dP_-|\beta\rangle \langle \beta| + P_+ P_- d|\beta\rangle \langle \beta| = P_+ dP_- P_-, \quad (90)$$

valamint

$$\sum_{\alpha, b} |\alpha\rangle \langle \alpha| d|b\rangle \langle b| = P_- dP_+ P_+. \quad (91)$$

Mindent összevetve:

$$\mathcal{A} = (\sqrt{1 - |\mathbf{u}|^2} - 1) [P_+ dP_- P_- + P_- dP_+ P_+]. \quad (92)$$

Abból, hogy $P_+ P_- = 0$, következik, hogy $dP_- P_+ + P_- dP_+ = 0$. Továbbá, felhasználva, hogy $P_\pm^2 = P_\pm$, az összefüggés a következő kompakt alakot ölti

$$\mathcal{A} = (1 - \sqrt{1 - |\mathbf{u}|^2}) [dP_+ P_- + dP_- P_+]. \quad (93)$$

Kiindulva a $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm \hat{\mathbf{n}}\Gamma)$ definícióból, könnyen kiszámíthatjuk, hogy $dP_\pm = \pm \frac{1}{2} d\hat{\mathbf{n}}\Gamma$. Ezeket visszaírva:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 - |\mathbf{u}|^2} - 1) (d\hat{\mathbf{n}}\Gamma)(\hat{\mathbf{n}}\Gamma). \quad (94)$$

Tekintsük most csak a Γ mátrixokat tartalmazó tagokat:

$$(d\hat{\mathbf{n}}\Gamma)(\hat{\mathbf{n}}\Gamma) = \frac{1}{2} [\Gamma_j, \Gamma_k] dn^j n^k + \frac{1}{2} \{\Gamma_j, \Gamma_k\} dn^j n^k = -[\Gamma_k, \Gamma_j] n^k dn^j = -[\hat{\mathbf{n}}\Gamma, d\hat{\mathbf{n}}\Gamma]. \quad (95)$$

Mivel $\frac{1}{2}\{\Gamma_j, \Gamma_k\}dn^j n^k = d\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} = 0$ az anti-kommutációs reláció és n normáltsága miatt. Az Uhlmann konnexió tehát a következő alakot ölti

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{1 - |\mathbf{u}|^2})[\hat{\mathbf{n}}\Gamma, d\hat{\mathbf{n}}\Gamma]. \quad (96)$$

Ha most újra használjuk a $\tanh \beta = |\mathbf{u}|^2$ hiperbolikus paraméterezést:

$$1 - \sqrt{1 - u^2} = 1 - \frac{1}{\cosh \beta} = \frac{2 \sinh^2 \frac{\beta}{2}}{\cosh \beta} = \tanh \frac{\beta}{2} \tanh \beta. \quad (97)$$

Mindent összevetve az Uhlmann konnexió végleges formája a következő:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \tanh \frac{\beta}{2} \tanh \beta [n\Gamma, dn\Gamma]. \quad (98)$$

Felmerül a kérdés, hogy ennek a kifejezésnek van-e valamilyen fizikai értelmezése? Ahogy azt a következő fejezetben kifejtem, ezt a mértékteret magasabb dimenziós monopólusok vagy insztantonok vektorpotenciáljaként értelmezhetjük.

3.5. Az Uhlmann konnexió és a mágneses monopólusok kapcsolata

Ahhoz hogy megértsük az Uhlmann konnexió és a mágneses monopólusok kapcsolatát, először bevezetünk egy új konvenciót. A továbbiakban az 56. egyenletben definiált sűrűségmátrixok helyett a következő alakúakat fogjuk vizsgálni:

$$\rho = \frac{1}{2^n}(\mathbb{I} - \mathbf{r}\Gamma) = \frac{1}{2^n}(\mathbb{I} - \tanh \beta \hat{\mathbf{n}}\Gamma). \quad (99)$$

A magasabb dimenziós mágneses monopólusokhoz való kapcsolat megértéséhez először ρ purifikációit tanulmányozzuk, ehhez vezessük be a következő koordinátákat:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{n}}, \quad \tau = \frac{\sin \chi}{\cosh \beta + \cos \chi}, \quad r = \frac{\sinh \beta}{\cosh \beta + \cos \chi}. \quad (100)$$

Itt, $\hat{\mathbf{n}} \in S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, valamint $\chi \in [0, 2\pi]$ és $\beta \in [0, \infty[$. Ezekkel a mennyiségekkel definiáljuk a következő mátrixot:

$$W := \frac{1}{\sqrt{2^N(1 + \tau^2 + r^2)}} [(1 + i\tau)I - r\hat{\mathbf{n}}\Gamma]. \quad (101)$$

Megmutatható, hogy $\text{Det } W \neq 0$ szóval $W \in Gl(2n)$, továbbá, hogy:

$$\varrho = WW^\dagger = \frac{1}{2^N}(I - \tanh \beta \hat{\mathbf{n}}\Gamma) = \frac{1}{2^N \cosh \beta} e^{-\beta H(n)} = \frac{e^{-\beta H(n)}}{\text{Tr}(e^{-\beta H(n)})}, \quad (102)$$

ahol $H(n) = \hat{\mathbf{n}}\Gamma$ egy $\hat{\mathbf{n}}$ által paraméterezett Hamilton-operátor. A 102. egyenletnek két fontos jelentése is van, egyrészt, hogy W purifikációja ρ -nak. Másrészt látszik, hogy ρ felírható, mint egy termális állapot.

A 100. egyenletben bevezett koordináták jobb megértéséhez tekintsük a következő paraméterezést:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\sin \chi}{\cosh \beta} = \frac{2\tau}{1 + \tau^2 + r^2}, \\ \mathbf{X} &= \tanh \beta \hat{\mathbf{n}} = \frac{2\mathbf{r}}{1 + \tau^2 + r^2} = \frac{2r\hat{\mathbf{n}}}{1 + \tau^2 + r^2}, \\ X_{2N+2} &= \frac{\cos \chi}{\cosh \beta} = \frac{1 - \tau^2 - r^2}{1 + \tau^2 + r^2}. \end{aligned} \quad (103)$$

Könnyen belátható, hogy $X_0^2 + |\mathbf{X}|^2 + X_{2N+2}^2 = 1$, tehát $\vec{X} = (X_0, \mathbf{X}, X_{2N+2}) \in S^{2N+2} \subset \mathbb{R}^{2N+3}$. Rövid algebrai átalakításokkal megmutatható, hogy:

$$\tau = \frac{X_0}{1 + X_{2N+2}}, \quad \mathbf{r} := r\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{X}}{1 + X_{2N+2}}. \quad (104)$$

Tehát, τ és $\mathbf{r}$ az $\vec{X} \in S^{2N+2}$ vektor sztereografikus projekciói a déli sarkról az X_{2N+2} egyenlítői síkra ($\mathbb{R}^{2N+2}$). A továbbiakban érdemes τ -ra és X_0 -ra úgy tekinteni, mint Wick forgatott idő koordináták. Ebben a szemléletben a $\tau = X_0 = 0$ feltétel egy Statikus Met-szetre (ESS)¹ való megszorítás, mely topológiai szempontból $S^{2N+1} \subset S^{2N+2}$.

Vezessük be a következő $2^{N+1} \times 2^{N+1}$ unitér operátort, melyet $\vec{X}$ parametrizál:

$$U(\vec{X}) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + X_{2N+2})}} \begin{pmatrix} (1 + X_{2N+2})\mathbb{I} & -X_0\mathbb{I} + i\mathbf{X}\Gamma \\ X_0\mathbb{I} + i\mathbf{X}\Gamma & (1 + X_{2N+2})\mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (105)$$

Az egyszerűség kedvéért használjuk a következő jelölést:

$$\begin{aligned} Q_0 &:= \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 + r^2}}\mathbb{I} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + X_{2N+2})}\mathbb{I}, \\ Q_1 &:= \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 + r^2}}(\tau\mathbb{I} + ir\hat{\mathbf{n}}\Gamma) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + X_{2N+2})}}(X_0\mathbb{I} + i\mathbf{X}\Gamma). \end{aligned} \quad (106)$$

Itt felhasználtuk a 104. egyenletben található összefüggéseket. A fenti jelölésekkel $U(\vec{x})$ a következő egyszerű alakot ölti:

$$U = \begin{pmatrix} Q_0 & -Q_1^\dagger \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix}. \quad (107)$$

Figyeljük meg, hogy $U(\vec{X})$ oszlopai 2 csoport $2N + 1$ komponensű vektort tartalmaznak, melyek bázist alkotnak $\mathbb{R}^{2N+1}$ -ben. Ha kiszámítjuk az $U(\vec{X})$ -hez kapcsolódó Maurer-Cartan 1-formát akkor a következőre jutunk:

¹Euclideanized "static slice" (ESS)

$$\omega = U^\dagger dU = \begin{pmatrix} A_+ & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & A_- \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Ahol a diagonálisban szereplő mértékterek, [6] alapján:

$$\begin{aligned} A_- &= \frac{XdX^\dagger - dXX^\dagger}{4(1 + X_{2N+2})} = \frac{\text{Im}(XdX^\dagger)}{2(1 + X_{2N+2})}, \\ A_+ &= \frac{X^\dagger dX - dX^\dagger X}{4(1 + X_{2N+2})} = \frac{\text{Im}(X^\dagger dX)}{2(1 + X_{2N+2})}, \end{aligned} \quad (109)$$

itt, most $X = X_0\mathbb{I} - i\mathbf{X}\mathbf{\Gamma}$, ekkor felismerhetjük a magasabb dimenziós, $\mp 2^{N-1}$ monopólus töltéssel rendelkező mágneses monopólusok vektor potenciálját[4]. A vektor potenciálok kiszámításához első lépésként könnyen megkapjuk, hogy $dX = IdX_0 - \Gamma_\mu dX_\mu$ és $dX^\dagger = IdX_0 + \Gamma_\mu dX_\mu$ ezt felhasználva $A_\pm$ már adódik hogy:

$$A_\pm = \frac{[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]X^\nu dX^\mu \pm 2ir(\mathbf{X}\mathbf{\Gamma} + dX^0 - X^0\mathbf{\Gamma}d\mathbf{X})}{4(1 + X_{2N+2})}. \quad (110)$$

Bővítjük a fenti egyenletet $(1 + X_{2N+2})/(1 + X_{2N+2})$ -vel, majd használjuk a 103. és a 104. összefüggéseket :

$$A_\pm = \frac{2}{1 + r^2 + \tau^2}(r^2[n\Gamma, dn\Gamma] \pm 2ir(n\Gamma d\tau - \tau\Gamma dn)). \quad (111)$$

Mely $n = 1$ esetben éppen az insztanton²[5] vektorpotenciál. Ha bevezetjük az $x^2 := \tau^2 + r^2$, illetve a $g := \tau\mathbb{I} - i\mathbf{r}\mathbf{\Gamma}$ jelöléseket, akkor $A_\pm$ az irodalomból ([1], 496. oldal) ismerős kifejezésre hozható, nevezetesen:

$$A_+ = \frac{x^2}{1 + x^2}g^\dagger dg, \quad A_- = \frac{x^2}{1 + x^2}gdg^\dagger. \quad (112)$$

Szorítsuk meg a vektorpotenciált a $\tau = \chi = 0$ altérre, ami pontosan egy ESS. Ha most használjuk a 100. egyenletben szereplő szög szerinti paraméterezést a következőre jutunk:

$$\begin{aligned} A_\pm|_{\chi=0} &= \frac{\cosh \beta + 1}{4 \cosh \beta} \frac{\sinh^2 \beta}{(\cosh \beta + 1)^2} [n\Gamma, dn\Gamma] = \frac{\sinh \beta}{4(\cosh \beta + 1)} \tanh \beta [n\Gamma, dn\Gamma] = \\ &= \frac{1}{4} \tanh \frac{\beta}{2} \tanh \beta [n\Gamma, dn\Gamma]. \end{aligned} \quad (113)$$

Mely tökéletesen megegyezik a 98. egyenletben szereplő Uhlmann konnexióval. Tehát, kijenthetjük, hogy az Uhlmann konnexió megkapható, mint a mágneses monopólusok vektorpotenciáljának megszorítása.

²Az isnatntonok az euklédészi $SU(2)$ mértékelmélet térben és időben egyaránt lokalizált megoldásai.

4. Összefoglalás és kitekintés

A dolgozatomban először, a [2.](#) fejezetben, bemutattam a már ismert eredményeket, majd a [3.](#) fejezetben összefoglaltam az általánosabb qubit elrendezésekre vonatkozó munkámat.

A [3.2.](#) fejezetben megmutattam, hogy az Uhlmann anholonómia több összefonódott qubit esetén is Thomas-forgatások sorozataként értelmezhető. Ennek jelentősége, az analitikus eredményeken túl, az hogy, mivel a Thomas-forgatásokra, mint $SU(2^n)$ kvantum kapukra is tekinthetünk, az Uhlmann anholonómia felhasználható holonómikus kvantumszámítási módszerek konstruálására.

Továbbá, a [3.3.](#) fejezetben sikeresen meghatároztam a Bures-Uhlmann metrikát, és beláttam, hogy hasonlóan a két qubit esetéhez, a geometria konform ekvivalens a kétköpenyű hiperboloid felső levelének geometriájával. Az Uhlmann anholonómia és a Thomas-forgatások kapcsolata mögött is ez a hiperbolikus geometriához való viszony áll.

Miután kiszámítottam az Uhlmann konnexit, a [3.5.](#) fejezetben megmutattam a az insztantonokkal és magasabb dimenziós mágneses monopólusokkal való kapcsolatát. Az $n = 1$ esetben az Uhlmann konnexit az insztanton konnexit alkalmas megszorítása. Ismeretes, hogy az insztantonok az eukleidészi $SU(2)$ mértékelméletben jelennek meg. Ezek a megfelelő kvantumtérelméletben fontos szerepet töltenek be. Nevezetesen, az insztantonok különböző topológikus töltéssel rendelkező vákumállapotok közötti alagúteffektus megjelenéséért felelősek. Érdekes, hogy a kvantumtérelméleteknél jóval egyszerűbb, nem relativisztikus kvantummechanikai összefüggésben, a két qubit kevert állapotok geometriájában is ezek jelennek meg. Rámutattam arra is, hogy az insztantonok magasabb dimenziós általánosításai (magasabb dimenziós monopólusok) a qubitek számának növekedésével állnak elő.

A dolgozatban pusztán olyan esetekkel foglalkoztam, amikor $\hat{\mathbf{n}} \in S^{2n}$, azonban a továbbiakban tervezzük az $\hat{\mathbf{n}} \in S^{2n+1}$ esetek vizsgálatát is. Továbbá, a [102.](#) egyenletben láttuk, hogy az általunk vizsgált összefonódott állapotok felírhatóak, mint egy termális állapot. Ebből kiindulva, a jövőben a qubitek számának növelésével ($n \mapsto \infty$) szeretnénk tanulmányozni a termodinamikai limeszt is. Ez végtelen spinláncokkal kapcsolatos anholonómiai effektusok vizsgálatát jelenti³. Az ilyen effektusok fontos szerepet tölthetnek be az egyszerűsített holografikus modellek megértésében.

³A végtelen spinláncok ilyen szellemében történő vizsgálatához lásd E. Witten dolgozatát[\[11\]](#).

A. Saját eredmények

Vizsgált és megválaszolt kérdések:

- Milyen módon általánosíthatóak a $(\mathbb{I} + \mathbf{u}\sigma)/2$, melyek analitikus számításokat tesznek lehetővé?
- Ezekben az esetekben mi lesz a Bures-Uhlmann metrika, illetve az Uhlmann metrika?
- Mi lesz az Uhlmann konnexió, illetve, hogy van-e kapcsolat az Uhlmann konnexió és valami más fizikai mennyiség között?

Az általam kapott eredmények:

- Sikeresen általánosítottam a $(\mathbb{I} + \mathbf{u}\sigma)/2$ állapotokat gammamátrixokkal, így több qubit összefonódását is tudtam vizsgálni.
- Beláttam, hogy az Uhlmann anholonómia ebben az esetben is Thomas-forgatások útrendezt szorzata.
- Levezettem, hogy Bures-Uhlmann metrika konform ekvivalens a hiperbolikus geometria megfelelő modelljével.
- Megmutattam, hogy az Uhlmann konnexió megkapható mint mágneses monopólusok vektor potenciáljának a megszorítása.

Az általam alkalmazott módszerek:

- A dolgozat eredményeit kizárólag analitikus úton értem el, amelyhez több különböző technikát alkalmaztam. Ezek a teljesség igénye nélkül a következők:
 - Kvantum-információelmélet
 - Differenciálgeometria
 - Clifford algebrák
 - Csoport- és reprezentáció elmélet

Hivatkozások

- [1] Alfred Actor. “Classical solutions of $SU(2)$ Yang—Mills theories”. *Rev. Mod. Phys.* 51 (3 1979. júl.), 461–525. old. DOI: [10.1103/RevModPhys.51.461](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.51.461). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.51.461>.
- [2] Ingemar Bengtsson és Karol Zyczkowski. “Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement”. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement* (2006. jan.). DOI: [10.1017/CB09780511535048](https://doi.org/10.1017/CB09780511535048).
- [3] M. V. Berry. “Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 392.1802 (1984), 45–57. old. ISSN: 00804630. URL: <http://www.jstor.org/stable/2397741> (elérés dátuma 2024. 05. 29.).
- [4] Zalán Horváth és László Palla. “Spontaneous compactification and “monopoles” in higher dimensions”. *Nuclear Physics B* 142.3 (1978), 327–343. old. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(78\)90208-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(78)90208-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321378902080>.
- [5] R. Jackiw, C. Nohl és C. Rebbi. “Conformal properties of pseudoparticle configurations”. *Phys. Rev. D* 15 (6 1977. márc.), 1642–1646. old. DOI: [10.1103/PhysRevD.15.1642](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.1642). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.1642>.
- [6] Péter Lévy. “Non-Abelian Born-Oppenheimer electric gauge force and the natural metric on Hilbert subspaces”. *Phys. Rev. A* 45 (3 1992. febr.), 1339–1346. old. DOI: [10.1103/PhysRevA.45.1339](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.1339). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.1339>.
- [7] Péter Lévy. “Thomas rotation and the mixed state geometric phase”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 37.16 (2004. ápr.), 4593–4605. old. ISSN: 1361-6447. DOI: [10.1088/0305-4470/37/16/009](https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/16/009). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/37/16/009>.
- [8] Armin Uhlmann. “Parallel transport and “quantum holonomy” along density operators”. *Reports on Mathematical Physics* 24.2 (1986), 229–240. old. ISSN: 0034-4877. DOI: [https://doi.org/10.1016/0034-4877\(86\)90055-8](https://doi.org/10.1016/0034-4877(86)90055-8). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0034487786900558>.
- [9] Abraham A. Ungar. “The Hyperbolic Geometric Structure of the Density Matrix for Mixed State Qubits”. *Foundations of Physics* 32 (11 1992. febr.), 1671–1699. old. DOI: [10.1023/A:1021446605657](https://doi.org/10.1023/A:1021446605657). URL: <https://doi.org/10.1023/A:1021446605657>.

- [10] Xin Wang és tsai. “Uhlmann phase of coherent states and the Uhlmann-Berry correspondence”. *SciPost Physics Core* 6.1 (2023. márc.). ISSN: 2666-9366. DOI: [10.21468/SciPostPhysCore.6.1.024](https://doi.org/10.21468/SciPostPhysCore.6.1.024). URL: <http://dx.doi.org/10.21468/SciPostPhysCore.6.1.024>.
- [11] Edward Witten. “Why does quantum field theory in curved spacetime make sense? And what happens to the algebra of observables in the thermodynamic limit?”: 2022. DOI: [10.1007/978-3-031-17523-7_11](https://doi.org/10.1007/978-3-031-17523-7_11). arXiv: [2112.11614](https://arxiv.org/abs/2112.11614) [hep-th].
- [12] Paolo Zanardi és Mario Rasetti. “Holonomic quantum computation”. *Physics Letters A* 264.2 (1999), 94–99. old. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(99\)00803-8](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(99)00803-8). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960199008038>.