

Saját eredmények

Dávid Levente - Átfedő önaffin szőnyegek
gyenge szeparációs feltételekkel

January 3, 2025

Diagonális önaffin halmazokról eddig a szakirodalomban vagy szigorú szeparációs feltétellel, vagy tipikus esetekre vonatkozó eredmények születtek. Ezekkel szemben mi az alábbiakkal járultunk hozzá a diagonális önaffin halmazok ismeretéhez:

- Formulát adtunk a diagonális önaffin szőnyegek Hausdorff- és box-dimenziójának kiszámítására, feltéve hogy ezek x - és y -tengelyre vett vetületei kielégítik a gyenge szeparációs feltételt, valamint homogén kontrakcióval rendelkeznek az x - és y -tengelyek mentén.
- Formulákat bizonyítottunk a felső-box dimenzióra azon esetben is, amikor nem feltételezzük a kontrakciók homogenitását az x - és y -tengelyek mentén.
- A dolgozatban két példán keresztül bemutattuk, hogy a dolgozat formulái alkalmazhatók. A példákban meghatározott dimenziók értékei korábban ismeretlenek voltak.

Magyar rezümé

Dávid Levente - Átfedő önaffin szőnyegek gyenge szeparációs feltételekkel

A diagonálisan önaffin szőnyegek tanulmányozása központi szerepet játszik az önaffin halmazok vizsgálatában, mivel ezek a halmazok egyszerű példát nyújtanak olyan esetekre, ahol a box- és a Hausdorff-dimenzió eltér egymástól – ez általában ritka jelenség (lásd Falconer tétele). Átfedés mentes esetben már számos eredmény született, lásd Bedford, McMullen, Barański, Bárány, Feng és Wang, Kolossváry, Gatzouras és Lalley stb. Fraser és Shmerkin átfedő Bedford-McMullen szőnyeget vizsgált tipikus paraméterválasztás mellett.

Ezt követve a jelen dolgozatban mi is engedélyezünk bizonyos átfedéseket, azzal a megkötéssel, hogy az iterált függvényrendszer (IFS) x - és y -tengelyre vetített képei kielégítik a gyenge szeparációs feltételt.

A gyenge szeparáció feltétel (WSC) eredetileg önhasznós halmazokra definiált tulajdonság, mely engedi a különböző cylinderhalmazok egymásba metszését úgy, hogy a nem egzaktul átfedő cylinderek végpontjainak távolsága a cylinderek méretével arányos marad.

Dolgozatunkban formulát adunk a diagonálisan önaffin szőnyegek Hausdorff- és box dimenziójának kiszámítására, feltéve, hogy ezek x - és y -tengelyre vett vetülete kielégíti a gyenge szeparációs feltételt, valamint homogén kontrakcióval rendelkeznek az x - és y -tengelyek mentén. Emellett különféle formulákat bizonyítunk a felső-box dimenzióra azon esetben, amikor a kontrakciók homogenitását az x - és y -tengelyek mentén nem feltételezzük.

Ezen eredmények bizonyításainak általános módja, hogy a felső becslés maga a rendszer fedése/önaffin mértéke, míg az alsó becslést egy megfelelően szétválasztott alrendszer fedése/önaffin mértéke adja. Ezeket megfelelően konstruálva a gyenge szeparáció tulajdonsága miatt határértékben egymáshoz tartanak. Másban a különböző állítások bizonyításai jelentősen különböznek. A box és felső-box dimenzió fedések konstruálásával kapható, míg a Hausdorff dimenzióhoz megfelelő mértékek kellenek.

A dolgozatban két példán is meg mutatjuk, hogy a dolgozat formulái használhatóak is. A példákon meghatározott dimenziók értékei eddig ismeretlenek voltak.

Mesterséges Intelligencia használata

Dávid Levente - Átfedő önaffin szőnyegek
gyenge szeparációs feltételekkel

January 3, 2025

A dolgozat matematikai állításaihoz, bizonyításaihoz mesterséges intelligenciát nem használtam! De tipográfiához igen:

- Helyesírás és nyelvhelyesség javítására *Grammarly*-t és *AI Grammar Checker & Paraphraser – LanguageTool* Mozilla Firefox kiegészítőt használtam.
- Ábrákhoz és LaTeX trükkökhöz ChatGPT-t használtam.
- A TDK, OTDK-hoz mint eseményhez kapcsolódó anyagokat, mint például: rezümé, 3 oldalas magyar összefoglaló, előadás beamer-e, ChatGPT segítségével szerkesztettem.
- ChatGPT-t nyelvhelyesség és helyesírás ellenőrzésére, fogalmazási tisztaság fentartására is alkalmaztam.

Gyengén szeparált átfedő önaffin szőnyegek

Dávid Levente

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2024. november

Bevezetés

Az önaffin szőnyegek a fraktálgeometria fontos objektumai, amelyeket olyan iterált függvényrendszerek (IFS) generálnak, melyek függvényei mind egy a standard bázisban lévő diagonális mátrixszal való szorzásként leírhatók. Általánosan egy IFS véges sok kontrakció halmaza: $\mathfrak{F} := \{S_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}_{i=1}^m$, ez egy kompakt nemüres halmazt: Λ , az attraktort definiál az alábbi képlettel:

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^m S_i(\Lambda).$$

Az attraktor önhasznós, ha a függvények hasonlóságokat, önaffin, ha azok affinitásokat tartalmaznak. E munka célja az önaffin szőnyegek dimenzióinak meghatározása gyenge szeparáció fogalmának alkalmazásával.

Történeti áttekintés

Az önaffin szőnyegek tanulmányozása jelentős múltra tekint vissza. Bedford és McMullen elsőként definiálták a szőnyeget rácsszerkezetű IFS-ekkel, és meghatározták azok Hausdorff- és dobozszámláló dimenzióját. Gatzouras és Lalley általánosították ezt a modellt, inhomogén hengerhalmazokat is figyelembe véve. Később Baranski, valamint Feng és Wang tovább finomították a módszereket. Megengedve a részleges átfedéseket, Fraser és Shmerkin jelentős előrelépést értek el az átfedő struktúrák vizsgálatában, de csak tipikus eredmények erejéig.

Mi hasonlóképpen megengedünk majd átfedéseket a hengerhalmazok között.

Dimenziófogalmak és módszerek

Két alapvető dimenziófogalomra adunk formulát, és így ezek definíciója:

- **Hausdorff-dimenzió:** A legkisebb s -érték, amelyre az $\mathcal{H}^s(E)$ s -dimenziós Hausdorff mérték 0.

$$\dim_{\mathbb{H}}(E) := \inf \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(E) = 0\}, \quad \text{ahol}$$

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i \in I} |U_i|^s \mid |U_i| \leq \delta, \bigcup_{i \in I} U_i \supseteq E, I \text{ megszámlálható} \right\}$$

- **Box dimenzió:** Exponenciális növekedési rátája a halmaz lefedéséhez szükséges δ méretű dobozok számának. (Ha nem biztos, hogy létezik, akkor $\liminf$ alsó- és $\limsup$ felső-box dimenziót definiál.)

$$\overline{\dim}_B(E) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta}, \quad \underline{\dim}_B(E) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta},$$

$$N_\delta(E) := \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, x_2, \dots, x_m : E \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta) \right\}.$$

A gyenge szeparáció feltétel (WSC) eredetileg önhasonló halmazokra definiált tulajdonság, mely engedi a különböző cylinderhalmazok egymásba metszését úgy, hogy a nem egymást átfedő cylinderek végpontjainak távolsága a cylinderek méretével arányos marad.

További jelölések

Legyen az IFS-ünk:

$$\mathfrak{F} := \left\{ S_i(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} r_{i,1} & 0 \\ 0 & r_{i,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{i,1} \\ t_{i,2} \end{bmatrix} \right\}_{i=1}^m,$$

ennek vetített IFS-ei:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F} &:= \{ |S_i(x_2) := r_{i,2}x_2 + t_{i,2} \}, \\ \underline{\mathfrak{F}} &:= \{ \underline{S}_i(x_1) := r_{i,1}x_1 + t_{i,1} \}, \end{aligned}$$

magasabb szintű függvények családjai:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_n &:= \{ S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n} \mid i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\} \}, \\ \mathbb{G}_n^1 &:= \{ S_i \in \mathbb{G}_n \mid |r_{i,1}| > |r_{i,2}| \}, \quad \mathbb{G}_n^2 := \mathbb{G}_n \setminus \mathbb{G}_n^1, \\ |\mathbb{G}_n &:= \{ |S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n} \mid i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\} \}, \end{aligned}$$

illetve $R_{|S_i} := \{ S \mid \text{proj}_2 \circ S = |S_i \}$.

Eredmények

Dolgozatunkban formulát adtunk a diagonálisan önaffin szőnyegek Hausdorff- és box dimenziójának kiszámítására, feltéve, hogy ezek x- és y-tengelyre vett vetülete kielégíti a gyenge szeparációs feltételt, valamint homogén kontrakcióval rendelkeznek az x- és y-tengelyek mentén. Emellett különféle formulákat bizonyítottunk a felső-box dimenzióra azon esetben, amikor a kontrakciók homogenitását az x- és y-tengelyek mentén nem feltételezzük. Ezeket foglaló tételeket most modjuk ki:

Tétel 0.1 (Theorem 2.1) *Ha $\text{conv}(|\Lambda), \text{conv}(\underline{\Lambda}) = [0, 1]$, és $|\mathfrak{F}$ és $\underline{\mathfrak{F}}$ kielégítik a gyenge szeparáció feltételeit, akkor*

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B \Lambda &= \max\{\bar{d}_*^1, \bar{d}_*^2\}, \quad \text{ahol} \\ 1 &= \sum_{S_i \in \mathbb{G}_n^1} \left(\frac{|r_{i,1}|}{|r_{i,2}|} \right)^{\dim_B \text{proj}_1(\Lambda)} |r_{i,2}|^{\bar{d}_n^1}, \quad \bar{d}_*^1 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_n^1 \\ 1 &= \sum_{S_i \in \mathbb{G}_n^2} \left(\frac{|r_{i,2}|}{|r_{i,1}|} \right)^{\dim_B \text{proj}_2(\Lambda)} |r_{i,1}|^{\bar{d}_n^2}, \quad \bar{d}_*^2 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_n^2. \end{aligned}$$

Tétel 0.2 (Theorem 2.2) *Ha $\text{conv}(|\Lambda|), \text{conv}(\underline{\Lambda}) = [0, 1]$, $|\mathfrak{F}$ és $\underline{\mathfrak{F}}$ kielégítik a gyenge szeparáció feltételeit, illetve $\forall i : |r_{i,1}| = |r_1| < |r_2| = |r_{i,2}|$ akkor*

$$\dim_{\text{B}}(\Lambda) = \dim_{\text{B}}(|\Lambda|) \left(1 - \frac{\log |r_2|}{\log |r_1|} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\log (\#\mathbb{G}_n)}{\log |r_1|}.$$

Tétel 0.3 (Theorem 2.3) *Ha $\text{conv}(|\Lambda|), \text{conv}(\underline{\Lambda}) = [0, 1]$, $|\mathfrak{F}$ és $\underline{\mathfrak{F}}$ kielégítik a gyenge szeparáció feltételeit, illetve $\forall i : |r_{i,1}| = |r_1| < |r_2| = |r_{i,2}|$ akkor*

$$\dim_{\text{H}}(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log_{|r_2|} \left\{ \sum_{|S_i| \in |\mathbb{G}_n} (\#R_{|S_i|})^{\log_{|r_1|} |r_2|} \right\} \right\}.$$

Bizonyításokról

Ezen eredmények bizonyításainak általános módja, hogy a felső becslés maga a rendszer fedése/önaffin mértéke, míg az alsó becslést egy megfelelően szétválasztott alrendszer fedése/önaffin mértéke adja. Ezeket megfelelően konstruálva a gyenge szeparáció tulajdonsága miatt határértékben egymáshoz tartanak. Másban a különböző állítások bizonyításai jelentősen különböznek. A box és felső-box dimenzió fedések konstruálásával kapható, míg a Hausdorff dimenzióhoz megfelelő mértékek kellenek.

Példák és alkalmazások

Két konkrét, eddig módszerrel nem számolható példán meg is mutatjuk, hogy a mi eredményink alkalmazhatóak. Az egyik esetben a Hausdorff, a másik esetben a box dimenzió számolásához segéd mátrix/operátort definiálunk, majd Perron-Frobenius tétel segítségével, illetve hasonló állítással belátjuk, hogy ezen objektumok könnyen számolható legnagyobb sajátértékének egyszerű függvénye a dimenzió.