

Szerző:
Hegedűs
Boldizsár

PRODUKTUM
DERIVÁLT ÉS A
FAKTORIÁLIS FÜGG-
VÉNY PARAMÉTERES KÖZELÍTÉSE

Konzulens:
Tasnádi
Tamás

Produktumderivált és a faktoriális függvény paraméteres közelítése

Hegedűs Boldizsár
Konzulens: Tasnádi Tamás

2025. január 8.

Tartalomjegyzék

Absztrakt	3
1. A produktumderivált és a produktumintegrál	4
1.1. A produktumderivált	4
1.1.1. A produktumderivált bevezetése	4
1.1.2. A produktumderivált definiálása	5
1.1.3. A produktumderivált ábrázolása	6
1.2. A hányadosgyökön értelmezett műveletek	6
1.3. Határérték és monotonitás	8
1.4. Konvexitás	9
1.5. A produktumintegrál	10
1.5.1. A produktumintegrál bevezetése	10
1.5.2. A produktumintegrál definiálása	11
1.5.3. A produktumintegrál kiszámítása	13
1.5.4. A produktumderivált és a produktumintegrál ábrázolása	14
2. A gamma függvényt közelítő p-formula	16
2.1. A Γ függvény	16
2.2. Γ függvényt közelítő függvények	20
2.2.1. A p-formula	22
2.2.2. A p-formula paramétert korrigáló $\Theta(x)$ függvény	25
3. Kitekintés	28
3.1. Alkalmazások	28
3.1.1. Határérték számítás	28
3.1.2. Paraméteres faktoriális közelítés	28
3.2. További kutatási területek	30
3.2.1. Produktumderivált és produktumintegrál kiterjesztése a komplex analízisre	30
3.2.2. A $\Theta(x)$ pontosabb vizsgálata	30
3.2.3. A Taylor-sor analógiája és a frakcionális produktumderivált	30
3.2.4. Egyéb függvények érintésének vizsgálata	31
Hivatkozások	33

Absztrakt

A matematika egyik célkitűzése ősidők óta, hogy mindent pontosan és precízen leírjanak számokkal és műveletekkel. Ez egy nemes cél, de nem mindig megvalósítható. Néha be kell érjünk közelítésekkel. A faktoriális függvény és kiterjesztése, a Γ függvény is csupán közelíthető nagy értékek esetén, mivel kiszámításuk lehetetlen feladat.

Ha egy új eszközzel nyúlunk a problémához, egy újféle derivált használatával, amit nevezzünk produktumderivátnak, akkor egy olyan általános faktoriálist közelítő függvényt kaphatunk, mellyel tetszőlegesen sok, lényegesen különböző közelítő függvény alkotható. Ezek között megtalálható a Stirling-formula is, de annál lényegesen precízebb, vagy lényegesen egyszerűbben differenciálható közelítés is alkotható a precizitás, illetve Occam borotvájának elvét követve.

A produktumderivált a Newton-Leibnitz féle deriválttal szemben nem a függvényt érintő lineáris függvény meredekségeként van definiálva, hanem a függvényt érintő¹ exponenciális függvény hatványalapjaként. Erre a produktumderiváltra definiálható műveletek, azonosságok és tételek leírása kifejtésre kerül. Ez sok feladat megoldásában tud segítséget jelenteni, amikor például különböző exponenciális folyamatokat, vagy valószínűségeket vizsgálunk.

Ez a dolgozat nem születhetett volna meg Volford Leventével folytatott hosszas beszélgetések nélkül, ezért külön köszönet neki!

¹két függvény akkor, és csak akkor érinti egymást, ha a megadott pontban azonos értéket vesznek fel, deriválhatóak, és deriváltjaik megegyeznek

Általános megjegyzés: A dolgozatban az $f(x)^c$ jelölés az $f(x)$ függvény c -edik hatványára referál. Másképp jelölve: $f^c(x)$ vagy $[f(x)]^c$. A dolgozatban **nem használjuk** a p -t, mint paraméter, csak mint a produktumderivált jelölése.

1. A produktumderivált és a produktumintegrál

1.1. A produktumderivált

1.1.1. A produktumderivált bevezetése

1.1. tétel: Egy valós függvényt egy adott x értéknél felvett y pontban legfeljebb egy exponenciális függvény érinthet.

Bizonyítás: Ennek bizonyításához írjuk fel az exponenciális függvény általános képletét $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterrel. Ekkor két feltételnek kell teljesülnie az érintéshez:

$$f(x) = a \cdot b^x \text{ és } f'(x) = \frac{d}{dx} a \cdot b^x$$

Ha a függvény x pontban nem deriválható, akkor a második feltétel semmilyen $(a; b)$ párosra nem teljesülhet, azaz a függvénynek nem létezik x pontban érintő exponenciális függvénye. A fenti két feltétel nem teljesülhet több egymástól különböző $(a; b)$ párosra, hiszen ha teljesülne, akkor

$$f'(x) = \frac{d}{dx} a_1 \cdot b_1^x = \frac{d}{dx} a_2 \cdot b_2^x$$

A logaritmus deriválási szabályait és az első feltételt használva:

$$a_1 \cdot b_1^x \cdot \ln b_1 = a_2 \cdot b_2^x \cdot \ln b_2$$

$$f(x) \cdot \ln b_1 = f(x) \cdot \ln b_2$$

$$b_1 = b_2 \text{ kikötve, hogy } b_1; b_2 > 0$$

Azaz, ha létezik legalább egy b , amire teljesülnek az eredeti feltételek valamilyen a mellett, akkor utóbbi mindenképpen egyértelműen meghatározható. Ebből bebizonyítható, hogy ekkor az a -k is egyértelműek:

$$a_1 \cdot b^x \cdot \ln b = a_2 \cdot b^x \cdot \ln b$$

$$a_1 = a_2$$

Ha az f függvény x értékben deriválható és $f(x) \neq 0$, akkor biztosan létezik pontosan egy $(a; b)$ páros, melyre az alapfeltétel teljesül, mivel ekkor a második feltétel szerint

$$f'(x) = \frac{d}{dx} a \cdot b^x = a \cdot b^x \cdot \ln b = f(x) \cdot \ln b$$

$$b = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

b értéke egyértelműen meghatározható (és korábban beláttuk, hogy ha létezik olyan b , ami kielégíti a feltételeket valamilyen a mellett, akkor az a is egyértelműen meghatározható).

1.2. tétel: Egy függvényt érintő exponenciális függvénynek a hatványalapja megegyezik a függvény logaritmikus deriváltjának exponenciális értékével (ha létezik).

Bizonyítás: A logaritmus és a deriválás szabályait kihasználva a fenti függvényt érintő exponenciális hatványalap b értéke kifejezhető az f függvény logaritmikus deriváltjából:

$$b = e^{\frac{d}{dx} \ln f(x)}$$

1.3. definíció: Ha $f(x)$ egy valós függvény, akkor nevezzük *hányadosgyöknek* (a differenciahányados mintájára) az alábbi értéket ($f(x_2) \neq 0$):

$$\lambda(x_1, x_2) = \left[\frac{f(x_1)}{f(x_2)} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}}$$

Ekkor az $x_1; x_2$ sorrendje nem befolyásolja a hányadosgyök értékét (ahogy a differenciahányados esetében sem):

$$\lambda(x_1, x_2) = \left[\frac{f(x_1)}{f(x_2)} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \left[\frac{f(x_2)}{f(x_1)} \right]^{-\frac{1}{x_1 - x_2}} = \left[\frac{f(x_2)}{f(x_1)} \right]^{\frac{1}{x_2 - x_1}} = \lambda(x_2, x_1)$$

1.4. tétel: A hányadosgyök függvénynek a határértéke minden valós x_1 -re (ha létezik a határérték) $x_1 \rightarrow x_2$ esetén megegyezik az f függvényt x_1 -ben érintő exponenciális függvény hatványalapjával.

Bizonyítás:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(x + a, x) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + a)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{a}} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[1 + \frac{a \cdot f'(x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{a}}$$

Felhasználva az Euler-féle exponenciális függvény definíciójából adódó összefüggést², a határérték felírható:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(x + a, x) = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = e^{\frac{d}{dx} \ln f(x)}$$

Ez a határérték az 1.2. tétel miatt tényleg megegyezik az $f(x)$ függvényt x pontban érintő exponenciális függvény alapjával.

1.1.2. A produktumderivált definiálása

A produktumderiváltra kettő ekvivalens definíció adható:

1.5. definíció I.: Nevezzük egy valós függvény *produktumderiváltjának* azt a függvényt, melyre igaz, hogy minden valós x értékben (ahol $f(x) \neq 0$) megadja az eredeti függvényt érintő exponenciális függvény alapját (1.2. tétel).

1.6. definíció II.: Nevezzük egy valós függvény *produktumderiváltjának* azt a függvényt, melyre igaz, hogy minden valós x értékben (ahol $f(x) \neq 0$) megegyezik az eredeti függvény hányadosgyökének $x_1 \rightarrow x$ határértékével (1.4. tétel).

A két definíció külön-külön kielégíti a produktumderivált feltételét, így egymással ekvivalensek.

² $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$

A második definíció (1.6.) miatt a produktumderivált felfogható a hányadosgyök $x_1 \rightarrow x$ határértékének, ezért minden hányadosgyökre igaz állítás biztosan igaz a produktumderiváltra is.

Jelölje $f(x)$ valós függvény produktumderiváltját $f^p(x)$, vagy $[f(x)]^p$ (ha egyértelmű, hogy milyen változó szerint produktumderiváljuk), vagy $\lambda_x f(x)$ (ha több változó szerint is produktumderiválhatnánk). Továbbá jelölje $f(x)$ valós függvény n -edik produktumderiváltját $f^{p[n]}(x)$, vagy $\lambda_x^n f(x)$.

1.1.3. A produktumderivált ábrázolása

A produktumderivált a második definíciója (1.6. definíció) és a hányadosgyök tulajdonsága (1.4. tétel) miatt felfogható úgy is, mint egy függvény logaritmusának deriváltjának exponenciális függvénye. Ebből alkotható az alábbi kommutatív diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\lambda_x} & f^p \\
 \downarrow \ln & & \uparrow \exp \\
 \ln f & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & \frac{d}{dx} \ln f
 \end{array}$$

Melyben minden nyíl helyettesíthető egy fordított irányú inverz művelettel, de ennek belátására és kifejtésére később kerül sor.

1.2. A hányadosgyökön értelmezett műveletek

1.7. tétel: Egy függvény hányadosgyöke nem változik konstanssal való szorzás esetében. Azaz a hányadosgyök semmilyen $x_1; x_2$ esetén nem változik, ha a függvény tetszőleges konstanssal megszorzásra kerül.

Bizonyítás: Legyen $f^*(x) = f(x) \cdot c$:

$$\lambda^*(x_1, x_2) = \left[\frac{f^*(x_1)}{f^*(x_2)} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \left[\frac{f(x_1) \cdot c}{f(x_2) \cdot c} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \left[\frac{f(x_1)}{f(x_2)} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \lambda(x_1, x_2)$$

Azaz $\lambda^*(x_1, x_2) = \lambda(x_1, x_2)$ tényleg igaz, ha $f^*(x) = f(x) \cdot c$.

1.8. tétel: Két függvény szorzatának hányadosgyöke megegyezik a két függvény hányadosgyökének szorzatával. Másképpen az eredeti hányadosgyök minden $x_1; x_2$ esetén megegyezik a két függvény hányadosgyökének szorzatával.

Bizonyítás:

$$\lambda_{f \cdot g}(x_1, x_2) = \left[\frac{f(x_1) \cdot g(x_1)}{f(x_2) \cdot g(x_2)} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \left[\frac{f(x_1)}{f(x_2)} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} \cdot \left[\frac{g(x_1)}{g(x_2)} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \lambda_f(x_1, x_2) \cdot \lambda_g(x_1, x_2)$$

Azaz $\lambda_{f \cdot g}(x_1, x_2) = \lambda_f(x_1, x_2) \cdot \lambda_g(x_1, x_2)$ tényleg igaz.

1.9. tétel: Egy függvény $k \in \mathbb{R}$ -adik hatványon vett hányadosgyöke megegyezik a függvény hányadosgyökének k -adik hatványával.

Bizonyítás: Ennek belátása a hányadosgyök definícióját használva (1.3):

$$\lambda_{f^k}(x_1, x_2) = \left[\frac{f(x_1)^k}{f(x_2)^k} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \left[\frac{f(x_1)}{f(x_2)} \right]^{\frac{k}{x_1 - x_2}} = \left[\left[\frac{f(x_1)}{f(x_2)} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} \right]^k = \lambda_f^k(x_1, x_2)$$

1.10. tétel: Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény egy másik $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényen értelmezett hatványának hányadosgyöke megegyezik az alap hányadosgyökének kitevőn értelmezett hatványának és az alapnak a kitevő különbséghányadosán³ értelmezett hatványának szorzatával. Jelölésekkel leírva: $\lambda_{f^g} = \lambda_f(x_1; x_2)^{g(x)} \cdot f(x)^{\varphi_g(x_1; x_2)}$.

Bizonyítás: Ennek bizonyításához ki kell használni azt a 1.3 definícióból fakadó tulajdonságot, hogy: $f(x_1) = f(x_2) + \varphi(x_1; x_2) \cdot (x_1 - x_2)$

$$\begin{aligned} \lambda_{f^g}(x_1, x_2) &= \left[\frac{f(x_1)^{g(x_1)}}{f(x_2)^{g(x_2)}} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \left[\frac{f(x_1)^{g(x_2) + \varphi_g(x_1; x_2) \cdot (x_1 - x_2)}}{f(x_2)^{g(x_2)}} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \\ &= \left[\frac{f(x_1)^{g(x_2)}}{f(x_2)^{g(x_2)}} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} \cdot \left[f(x_1)^{\varphi_g(x_1; x_2) \cdot (x_1 - x_2)} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \lambda_f(x_1; x_2)^{g(x)} \cdot f(x)^{\varphi_g(x_1; x_2)} \end{aligned}$$

1.11. tétel: Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melynek argumentuma egy másik $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (azaz f egy összetett függvény), annak a hányadosgyöke megegyezik a külső f g argumentumú függvény hányadosgyökének a belső, g függvény különbséghányadosával vett hatványával. Jelölésekkel leírva: $\lambda_{f \circ g}(x_1; x_2) = \lambda_f(g(x_1); g(x_2))^{\varphi_g(x_1; x_2)}$. Kihasználva, hogy $f(x_1) = f(x_2) \cdot \lambda(x_1; x_2)^{x_1 - x_2}$

$$\begin{aligned} \lambda_{f \circ g}(x_1; x_2) &= \left[\frac{f(g(x_1))}{f(g(x_2))} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \left[\frac{f(g(x_2) + \varphi_g(x_1; x_2) \cdot (x_1 - x_2))}{f(g(x_2))} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \\ &= \left[\frac{f(g(x_2)) \cdot \lambda_f(g(x_1); g(x_2))^{\varphi_g(x_1; x_2) \cdot (x_1 - x_2)}}{f(g(x_2))} \right]^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = \lambda_f(g(x_1); g(x_2))^{\varphi_g(x_1; x_2)} \end{aligned}$$

Ezek az állítások, kihasználva, hogy a produktumderivált a hányadosgyök határértéke (amikor $x_1 \rightarrow x_2$), igazak a produktumderiváltra is. Ezen szabályok összessége az alábbi táblában található:

³ $\varphi(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

$$\begin{aligned}
 [k \cdot f(x)]^p &= f^p(x) \\
 [f(x) \cdot g(x)]^p &= f^p(x) \cdot g^p(x) \\
 [f(x)^k]^p &= f^p(x)^k \\
 [f(x)^{g(x)}]^p &= f^p(x)^{g(x)} \cdot f(x)^{g'(x)} = f^p(x)^{g(x)} \cdot f(x)^{g(x) \cdot \ln g^p(x)} \\
 [f(g(x))]^p &= f^p(g(x))^{g'(x)} = f^p(g(x))^{g(x) \cdot \ln g^p(x)}
 \end{aligned}$$

Nevezetes produktumderiváltak:

$$\begin{aligned}
 [c]^p &= 0 \\
 [x^n]^p &= e^{\frac{n}{x}} \\
 [c^{\alpha \cdot x}]^p &= c^\alpha \\
 [x^{\alpha \cdot x}]^p &= (e \cdot x)^\alpha
 \end{aligned}$$

1.3. Határérték és monotonitás

1.12. tétel: Ha egy pozitív függvénynek z pontban a produktumderiváltja 1-nél nem kisebb (vagy szigorúan nagyobb), akkor a függvény z pontban (szigorúan) monoton nő.

Bizonyítás: Ekkor a függvénynek z pontban a produktumderiváltja:

$$f^p(z) = e^{\frac{f'(z)}{f(z)}}$$

ahol a kitevő mindenképp pozitív, vagy 0, azaz a kifejezés nagyobb, vagy egyenlő, mint 1.

1.13. tétel: Ha egy pozitív függvénynek z pontban a produktumderiváltja 1-nél nem nagyobb (vagy szigorúan kisebb), akkor a függvény z pontban (szigorúan) monoton csökken.

Bizonyítás: Ekkor a függvénynek z pontban a produktumderiváltja:

$$f^p(z) = e^{\frac{f'(z)}{f(z)}}$$

ahol a kitevő előjele mindenképp negatív, vagy 0, azaz a kifejezés kisebb, vagy egyenlő, mint 1.

1.14. tétel: Ha egy függvénynek z helyen a produktumderiváltja 1, akkor z értékben stationárius pontja (azaz vagy szélsőértéke, vagy inflexiós pontja) van.

Bizonyítás: Egy függvénynek akkor van z értékben stationárius pontja, ha a függvény deriváltja abban a pontban 0. Ekkor ha $f(z) \neq 0$, akkor:

$$f^p(z) = e^{\frac{f'(z)}{f(z)}} = 1$$

Ha $f(z)$ értéke 0, akkor az állítás nem igaz, emiatt az állítás csak az egyik irányba igaz.

1.15. tétel: Ha egy függvénynek z helyen a produktumderiváltja 1 és szigorúan monoton nő, akkor a függvénynek z pontban lokális minimuma van.

Bizonyítás: felhasználva a 1.12. tételt, és kihasználva, hogy ha egy függvénynek z pontban deriváltja 0 és szigorúan monoton nő, akkor a függvénynek z pontban lokális minimuma van, a derivált függvény és a produktumderivált függvény monotonitása ekvivalens. Azaz a tétel igaz.

1.16. tétel: Ha egy függvénynek z helyen a produktumderiváltja 1 és szigorúan monoton csökken, akkor a függvénynek z pontban lokális maximuma van.

Bizonyítás: Az előző tétel bizonyításával megegyezik.

1.4. Konvexitás

1.17. definíció: Legyen f egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy f függvény *szuperkonvex* (vagy *logaritmikusan konvex*) $[a; b]$ intervallumon, ha tetszőleges rögzített $x_3 \in [a; b]$ esetében $\lambda(x_1; x_3)$ monoton növekvő függvénye az $x_1 \in]x_3; b]$ -nek mint változónak (x_3 rögzített paraméter). Ekkor minden $x_1 > x_2 > x_3$ értékre igaz, hogy $\lambda(x_1; x_3) \geq \lambda(x_2; x_3)$.

1.18. tétel: Ez a definíció ekvivalens a logaritmusból levezetett definícióval, miszerint egy függvény akkor, és csak akkor szuperkonvex, ha a függvény logaritmusa konvex⁴.

Bizonyítás: Ennek bizonyítása a különbséghányados által definiált konvexitásból és a logaritmus azonosságából levezethető:

$$\varphi_{\ln f}(x_1; x_2) = \frac{\ln f(x_1) - \ln f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\ln \frac{f(x_1)}{f(x_2)}}{x_1 - x_2}$$

A hányadosgyök (1.3 definíció) definíciójából fakadóan: $\lambda(x_1; x_2)^{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1)}{f(x_2)}$. Az előbbi egyenletbe behelyettesítve

$$\frac{\ln \lambda_f(x_1; x_2)^{x_1 - x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2) \cdot \ln \lambda_f(x_1; x_2)}{x_1 - x_2} = \ln \lambda_f(x_1; x_2)$$

Ezt behelyettesítve a konvexitás definíciójába:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1; x_3) &\geq \varphi(x_2; x_3) \\ \ln \lambda(x_1; x_3) &\geq \ln \lambda(x_2; x_3) \end{aligned}$$

Mivel az $\ln$ egy monoton növekvő függvény $]0; \infty[$ intervallumon, ezért

$$\lambda(x_1; x_3) \geq \lambda(x_2; x_3)$$

Azaz ez a definíció tényleg ekvivalens a hányadosgyökből definiált 1.17 definícióval.

1.19. definíció: Legyen f egy valós függvény. Nevezzük az f függvényt *szigorúan szuperkonvexnek* (vagy *logaritmikusan konvexnek*) $[a; b]$ intervallumon, ha tetszőleges $x_3 \in [a; b]$ esetében

⁴Egy függvény akkor, és csak akkor konvex $[a; b]$ intervallumon, ha a $\varphi(x_1; x_3) \geq \varphi(x_2; x_3)$ egyenlőtlenség minden $x_1 > x_2 > x_3$ intervallumon belüli számhármásra igaz.

$\lambda(x_1; x_3)$ monoton növekvő függvénye a $x_1 \in]x_3; b]$ -nek mint változónak (x_3 rögzített paraméter). Ekkor minden $x_1 > x_2 > x_3$ értékre igaz, hogy $\lambda(x_1; x_3) > \lambda(x_2; x_3)$. Ez ekvivalens azzal a definícióval, hogy akkor, és csak akkor szigorúan szuperkonvex, ha a függvény logaritmus szigorúan konvex⁵.

Megjegyzés: mivel minden hányadosgyökre igaz állítás igaz a produktumderiváltra a 1.6. definíció miatt, így azt mondhatjuk, hogy egy függvény (szigorúan) szuperkonvex, ha produktumderiváltja (szigorúan) monoton növekvő függvény.

1.5. A produktumintegrál

1.5.1. A produktumintegrál bevezetése

1.20. definíció: Nevezzük egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény *produktumának* az alábbi értéket (ahol $x_1 - x_2$ többszöröse d -nek):

$$\Pi_f(x_1; x_2)_d = \prod_{n=0}^{\frac{x_1-x_2}{d}} f(n \cdot d + x_2)^d$$

Ahol $x_1; x_2$ valós értékek a függvény értelmezési tartományán belül (és a függvény végig értelmezhető $[x_2; x_1[$ intervallumon), d pedig egy paraméter.

1.21. tétel: Ha egy f függvény $[0; x_1[$ intervallumon értelmezhető, és végig pozitív valós értéket vesz fel, akkor f függvény d paraméter melletti 0-tól vett produktumának tetszőleges x és $x+d$ között ($x; x+d \in [0; x_1[$) számított hányadosgyöke az f függvénnyel egyenlő. Matematikai jelölésekkel leírva:

$$g(x) = \Pi_f(x; 0)_d$$

Ha az f függvény $[0; x_1[$ intervallumon végig pozitív értékeket vesz fel, akkor:

$$\lambda_g(x_1 + d; x_1) = f(x)$$

Bizonyítás: Ennek bizonyítása az 1.20-ös és az 1.3-as definíció alapján alapján:

$$\lambda_g(x + d; x) = \left[\frac{\Pi_f(x + d; 0)_d}{\Pi_f(x; 0)_d} \right]^{\frac{1}{d}} = \left[\frac{\prod_{n=0}^{\frac{x+d}{d}-1} f(n \cdot d)^d}{\prod_{n=0}^{\frac{x}{d}-1} f(n \cdot d)^d} \right]^{\frac{1}{d}} = \left[f\left(\frac{x}{d} \cdot d\right)^d \right]^{\frac{1}{d}} = f(x)$$

1.22. tétel: Két függvény szorzatának a produktuma megegyezik a két függvény produktumának a szorzatával.

$$\Pi_{f \cdot g}(x_1; x_2)_d = \prod_{x=0}^{\frac{x_1-x_2}{d}} (f(x \cdot d + x_2) \cdot g(x \cdot d + x_2))^d$$

Bizonyítás: A produktum (nem összekeverendő a függvény produktumával) tulajdonságából és a hatványozás azonosságából fakadóan az előbbi egyenlőség megegyezik:

$$\prod_{x=0}^{\frac{x_1-x_2}{d}} f(x \cdot d + x_2)^d \cdot \prod_{x=0}^{\frac{x_1-x_2}{d}} g(x \cdot d + x_2)^d = \Pi_f(x_1; x_2)_d \cdot \Pi_g(x_1; x_2)_d$$

⁵Egy függvény akkor, és csak akkor szigorúan konvex $[a; b]$ intervallumon, ha a $\varphi(x_1; x_3) > \varphi(x_2; x_3)$ egyenlőtlenség minden $x_1 > x_2 > x_3$ intervallumon belüli számhármásra igaz.

Azaz a $\Pi_{f \cdot g}(x_1; x_2)_d = \Pi_f(x_1; x_2)_d \cdot \Pi_g(x_1; x_2)_d$ azonosság tényleg igaz.

1.23. tétel: Egy függvény $k \in \mathbb{R}$ -adik hatványon vett produktuma megegyezik a függvény produktumának k -adik hatványával.

Bizonyítás: Ennek belátása a produktum definícióját (1.20. definíció) és a hatványozás azonosságait használva:

$$\Pi_{f^k}(x_1; x_2)_d = \prod_{x=0}^{\frac{x_1-x_2}{d}} (f(x \cdot d + x_2)^k)^d = \left[\prod_{x=0}^{\frac{x_1-x_2}{d}} f(x \cdot d + x_2)^d \right]^k = \Pi_f(x_1; x_2)_d^k$$

Azaz a $\Pi_{f^k}(x_1; x_2)_d = \Pi_f(x_1; x_2)_d^k$ azonosság tényleg igaz.

1.24. tétel: Ha egy $x \in [x_1; x_2[$ intervallumon igaz, hogy $0 < f(x) \leq g(x)$, akkor $\Pi_f(x_1; x_2)_d \leq \Pi_g(x_1; x_2)_d$.

Bizonyítás: Használva a 1.20. definíciót $\Pi_f(x_1; x_2)_d$ felírható az alábbi módon:

$$\Pi_f(x_1; x_2)_d = \prod_{n=0}^{\frac{x_1-x_2}{d}} f(n \cdot d + x_2)^d$$

Ha itt az f függvényt kicseréljük egy olyan függvényre, amelynek minden $x \in [x_2; x_1[$ értéke nagyobb, vagy egyenlő, mint f függvény ugyanazon pontjaiban vett értéke (g függvényre ez igaz), akkor ezek szorzata egy konstans (d) hatványon is nagyobb lesz, vagy egyenlő, mint ugyanez f függvényen (ha $a_1 \geq b_1$ és $a_2 \geq b_2$, akkor $a_1 \cdot a_2 \geq b_1 \cdot b_2$, kihasználva, hogy a és b pozitívak).

Azaz az alapállítás tényleg igaz.

1.25. tétel: tetszőleges f függvényre $(a; b)$ intervallumon igaz, hogy $\inf f^{b-a} \leq \Pi_f(a; b)_d \leq \sup f^{b-a}$.

Bizonyítás: Használva a monotonitás definícióját, $x \in [a; b[$ intervallumra igaz lesz, hogy $f(x) \geq \inf f$ és $f(x) \leq \sup f$. Ekkor alkalmazva a 1.24. tételt, és kihasználva, hogy egy konstans függvény produktuma c^{b-a} a 1.20. definíció miatt, felírható, hogy:

$$\inf f^{b-a} \leq \Pi_f(a; b)_d \leq \sup f^{b-a}$$

1.5.2. A produktumintegrál definiálása

A Riemann-integrálás elméletében szereplő *primitív függvény*, *integrálfüggvény*, *határozott*-, és *határozatlan integrál* fogalmának analógiájára bevezetjük a következő fogalmakat:

1.26. definíció I.: Nevezzük egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény *primitív produktumának* azt a függvényt, melyre igaz, hogy a produktumderiváltja az eredeti függvény.

1.27. definíció II.: Nevezzük egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény *határozatlan produktumintegráljának* a primitív produktumok összességét.

Jelölje ezt:

$$\prod f(t)^{dt}$$

Megjegyzés: Ezek egymásból egy pozitív konstanssal való szorzással állnak elő.

1.28. definíció III.: Nevezzük az $[x_0; x_1]$ intervallumon pozitív függvény *határozott produktumintegráljának* az $[x_0; x_1]$ intervallumon vett produktumának limeszét, ahol a d paraméter 0-hoz tart. (Másképp: n részre osztjuk az $[x_0; x_1]$ intervallumot, $n \rightarrow \infty$, $d = \frac{x_1 - x_0}{n} \rightarrow 0$.) Ha $x_0 = x_1$, akkor a határozott produktumintegrál értéke 1.

Jelölje ezt:

$$\prod_{x_0}^{x_1} f(t)^{dt}$$

1.29. definíció IV.: Nevezzük az $[x_0; x_1]$ intervallumon pozitív függvény *produktum-integrálfüggvényének* azt a függvényt, amely minden $x \in [x_0; x_1]$ értékben megegyezik az $[x_0; x]$ intervallumon vett határozott produktumintegrál értékével.

Jelölje ezt:

$$\prod_{x_0}^x f(t)^{dt}$$

A 1.28. definíció miatt minden produktumra értelmezett azonosság igaz a produktumintegrálra is.

1.30. tétel: Egy függvény $[x_2; x_1[$ intervallumon vett produktuma megegyezik a függvény $[m; x_1[$ illetve $[m; x_2[$ értékben vett produktumának hányadosával (ahol m egy tetszőleges $m < x_2 < x_1$ érték, és a függvény $[m; x_1[$ intervallumon végig pozitív értékeket vesz fel).

Bizonyítás: Ennek bizonyítása az 1.20. definíció alapján:

$$\Pi_f(x_1; x_2)_d = \prod_{x=0}^{\frac{x_1 - x_2}{d}} f(x \cdot d + x_2)^d = \frac{\prod_{x=0}^{\frac{x_1}{d}} f(x \cdot d)^d}{\prod_{x=0}^{\frac{x_2}{d}} f(x \cdot d)^d}$$

Ha a nevezőt és számlálót is bővítjük a függvény $[0; m[$ intervallumon vett produktumának reciprokával:

$$\frac{\left(\prod_{x=0}^{\frac{x_1}{d}} f(x \cdot d)^d \right)}{\left(\prod_{x=0}^{\frac{x_2}{d}} f(x \cdot d)^d \right)} = \frac{\Pi_f(x_1; m)_d}{\Pi_f(x_2; m)_d}$$

Ebből következik, hogy egy függvény határozott produktumintegrálja $x_2; x_1$ közt megegyezik az x_1 illetve x_2 értékben vett tetszőleges m -hez viszonyított határozott produktumintegrállal. Ennek speciális esete, amikor a 0-hoz képest vizsgáljuk ezt:

$$\prod_{x_2}^{x_1} f(z)^{dz} = \frac{\prod f(x_1)^{dx}}{\prod f(x_2)^{dx}}$$

1.5.3. A produktumintegrál kiszámítása

1.31. tétel: Egy függvény produktumintegrálja megegyezik a függvény e alapon vett logaritmikus integráljának konstansszorosával.

Állítás I.: Egy függvény határozatlan produktumintegrálja megegyezik a függvény logaritmikus integráljának exponenciálisának konstansszorosával.

$$\prod f(x)^{dx} = e^{\int \ln f(x) dx}$$

Bizonyítás I.: A határozatlan produktumintegrál a primitív produktumok összessége (1.27. definíció). A 1.26. primitív produktumra vonatkozó definíció miatt ha $\prod f(x)^{dx} = F(x)$, akkor $F^p(x) = f(x)$. Az 1.6. definíció miatt az F függvény produktumderiváltja felírható az alábbi módon:

$$f(x) = F^p(x) = e^{\frac{d}{dx} \ln F(x)}$$

Az egyenlet szélső két oldalának logaritmusára és integrálására után (c konstans):

$$\int \ln f(x) \cdot dx = \ln F(x) + c$$

Az egyenlet exponenciálisra emelés után és használva a hatványozás azonosságait (k konstans):

$$e^{\int \ln f(x) \cdot dx} = F(x) \cdot e^c = F(x) \cdot c$$

Emiatt a határozatlan produktumintegrál ténylegesen felfogható úgy is, mint a függvény logaritmikus integráljának exponenciálisa egy konstanssal megszorozva.

Állítás II.: Egy függvény határozott produktumintegrálja megegyezik a függvény logaritmikus határozott integráljának exponenciálisával.

$$\prod_{x_1}^{x_2} f(z)^{dz} = e^{\int_{x_1}^{x_2} \ln f(z) dz}$$

Bizonyítás II.: a 1.20. és a 1.29. definíciót használva:

$$\prod_{x_2}^{x_1} f(z)^{dz} = \Pi_f(x_1; x_2)_d = \lim_{d \rightarrow 0} \prod_{n=0}^{\frac{x_1-x_2}{d}} f(n \cdot d + x_2)^d$$

A két szélső oldal logaritmusát véve és tovább rendezve az egyenletet:

$$\ln \prod_{x_2}^{x_1} f(z)^{dz} = \lim_{d \rightarrow 0} \ln \prod_{n=0}^{\frac{x_1-x_2}{d}} f(n \cdot d + x_2)^d = d \cdot \sum_{n=0}^{\frac{x_1-x_2}{d}} \ln f(n \cdot d + x_2) = \int_{x_2}^{x_1} \ln f(z) dz$$

Mindkét oldal exponenciálisát véve:

$$\prod_{x_2}^{x_1} f(z)^{dz} = e^{\int_{x_2}^{x_1} \ln f(z) dz}$$

Ami miatt igaz lesz az eredeti tétel.

1.32. tétel: Ha $m(x)$ és $n(x)$ valós függvények egy x_k -n túl csak pozitív értékeket vesznek fel, és $\int_{x_k}^{\infty} \frac{n(x)}{m(x)} dx$ korlátos, akkor $\prod m(x)^{dx}$ és $\prod [m(x) + n(x)]^{dx}$ primitív produktumok egy nagyságrendbe tartoznak.

Bizonyítás: Kihasználva a logaritmusfüggvény érintőjéből fakadó $\ln(m(x) + n(x)) \leq \ln m(x) + \frac{n(x)}{m(x)}$ azonosságot tetszőleges $m(x)$ és $n(x)$ valós függvények esetén:

$$m(x) + n(x) \leq m(x) \cdot e^{\frac{n(x)}{m(x)}}$$

Felhasználva a 1.22., 1.24., 1.31. tételeket, és $m(x)$ és $n(x)$ függvények x_k -n túli pozitivitását, a reláció ezen függvények produktumaira, így határozott produktumintegráljaira is igaz lesz:

$$\prod_a^b m(x)^{dx} \stackrel{x \geq x_k}{\leq} \prod_a^b [m(x) + n(x)]^{dx} \stackrel{x \geq x_k}{\leq} \prod_a^b m(x)^{dx} \cdot e^{\int_a^b \frac{n(x)}{m(x)} dx}$$

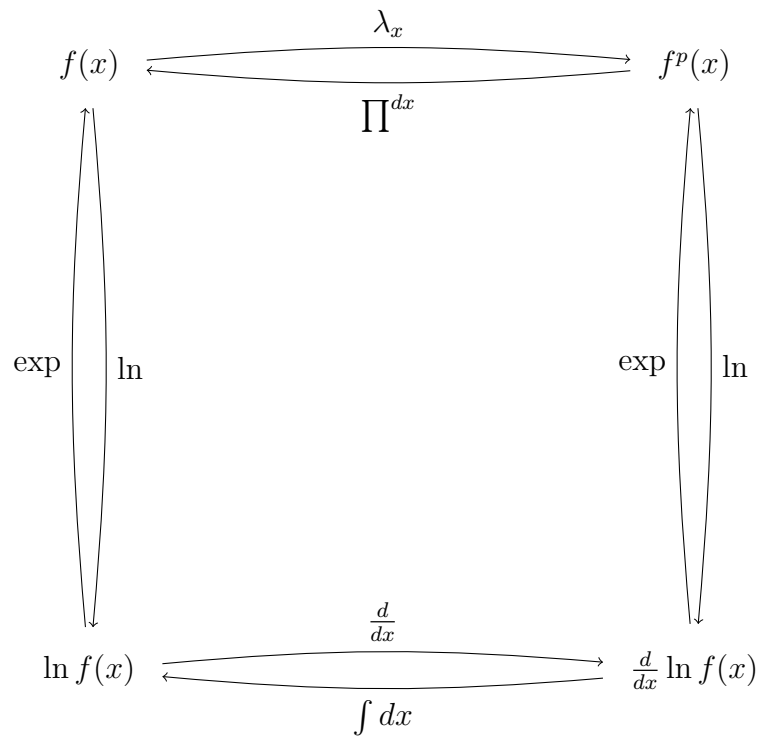
Ahol ha $\int_a^b \frac{n(x)}{m(x)} dx$ korlátos, akkor $e^{\int_a^b \frac{n(x)}{m(x)} dx}$ biztosan kisebb, mint egy konstans. Ekkor az egyenlőtlenség kiegészíthető:

$$\prod_a^b m(x)^{dx} \stackrel{x \geq x_k}{\leq} \prod_a^b [m(x) + n(x)]^{dx} \stackrel{x \geq x_k}{\leq} k \cdot \prod_a^b m(x)^{dx}$$

Azaz az állítás tényleg igaz.

1.5.4. A produktumderivált és a produktumintegrál ábrázolása

A korábbi kommutatív diagram kiegészíthető a produktumintegrállal, így már egy kétirányú teljes ábrát kapva:



2. A gamma függvényt közelítő p-formula

2.1. A Γ függvény

A Γ (gamma) függvény definíció szerint az a $D_\Gamma = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ intervallumon értelmezett egyértelműen meghatározható függvény, mely az alábbi három feltételt kielégíti:

1. Minden $x \in D_\Gamma$ értékben $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ értéket vesz fel.
2. A függvény a $]0; \infty[$ intervallumon szuperkonvex.
3. $\Gamma(1) = 1$

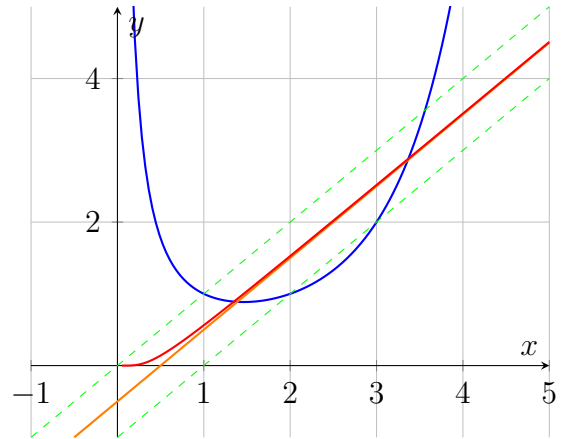
Az első és harmadik feltétel miatt minden $x \in \mathbb{N}$ értékben $\Gamma(x) = (x-1)!$

Belátható[2], hogy ezt a három feltételt egyedül az Euler féle Γ függvény elégíti ki, mely az alábbi módon írható fel:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$$

2.1. definíció: Legyen $\rho(x)$ a $\Gamma(x)$ produktumderiváltja. Ekkor $\rho(x)$ egy monoton növekvő függvény $]0; \infty[$ intervallumon a gamma függvény második kitétele, illetve az 1.17 miatt.

Az ábrán látható a Γ függvény (kék), annak a produktumderiváltja, a $\rho(x)$ (piros), illetve egy $f(x) = x - 0.5$ lineáris függvény (narancssárga), melyről később belátjuk, hogy tetszőleges ϵ -hoz létezik olyan küszöbindex, mely küszöbindexen túl minden $|\rho(x) - f(x)| < \epsilon$. Másképpen megfogalmazva, az utóbbi két függvény különbsége a 0-hoz konvergál.



2.2. tétel: $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \prod_{k=0}^n e^{-\frac{1}{k+x}}$ alakban felírható

Bizonyítás: A $\Gamma(x)$ függvény az alábbi határértékkel egyezik meg[2]:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x(\ln n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n})} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{\frac{x}{1}}}{1 + \frac{x}{1}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1 + \frac{x}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}$$

Ezt produktumderiválva (alkalmazva az 1.7., a 1.8. és a 1.9. tételt) az Euler-Mascheroni konstans⁶ használva:

$$\begin{aligned} \Gamma^p(x) = \rho(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-C} \cdot \left(e^{-\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{1}{1}} \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot e^{\frac{1}{n}} \right) \cdot \left(e^{-\frac{1}{1+x}} \cdot e^{-\frac{1}{2+x}} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{1}{n+x}} \right) \\ \rho(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-C} \cdot e^{C + \ln n} \cdot \prod_{k=0}^n e^{-\frac{1}{k+x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \prod_{k=0}^n e^{-\frac{1}{k+x}} \end{aligned}$$

⁶ $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right] \sim 0.5572$

Azaz a tétel tényleg igaz!

2.3. tétel: a $\rho(x)$ egy bizonyos $c \in \mathbb{R}$ -n túl szuperkonvex.

Bizonyítás: Ennek belátásához használjuk az 1.17. és a 2.2. tételt, és használjuk a konvexitás definícióját (egy függvény akkor és csak akkor konvex, ha deriváltja monoton nő):

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \prod_{k=0}^n e^{-\frac{1}{k+x}}$$

A $\rho(x)$ deriváltjának felírásához használjuk az 1.6. definíció rendezett formáját, miszerint $f'(x) = \ln f^p(x) \cdot f(x)$:

$$\rho'(x) = \ln \rho^p(x) \cdot \rho(x)$$

A ρ produktumderiváltja könnyen kiszámolható a 1.8. és 1.10. tételeket használva:

$$\rho^p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n e^{\frac{1}{(k+x)^2}}$$

Azaz:

$$\rho'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x) \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+x)^2} \quad (2.4.)$$

Vegyük észre, hogy ekkor a kifejezésben szerepel a $\psi^{(1)}(x)$ digamma függvény⁷:

$$\psi^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$$

Visszahelyettesítve:

$$\rho'(x) = \rho(x) \cdot \psi^{(1)}(x)$$

Ennek monotonitását a deriváltjával vizsgálva és használva a deriválási szabályokat és a 2.4. egyenletet:

$$\rho''(x) = \rho(x) \cdot \psi^{(2)}(x) + \rho(x) \cdot \psi^{(1)}(x)^2 = \rho(x) \cdot (\psi^{(2)}(x) + \psi^{(1)}(x)^2)$$

Kihasználva, hogy $\rho(x)$ egy pozitív függvény (hiszen egy valós függvény produktumderiváltja), így utóbbi csak akkor pozitív, ha $\psi^{(2)}(x) + \psi^{(1)}(x)^2$ pozitív. Felhasználva, hogy $\psi(x) = \ln x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$ ⁸ ([3]), így:

⁷ $\psi(x) = -C + \sum_{k=1}^{x-1} \frac{1}{k}$ ha $x \in \mathbb{N}$, vagy nem egész és negatív x esetén általánosabb formájában: $\psi(x) = -C + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x} \right)$ a $\psi^{(n)}(x)$ a digamma (ψ) függvény n -edik deriváltja $\psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^{n+1}}$ [1] [3]

⁸ $\psi(x) = \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta(1-n)}{x^n}$

$$\psi^{(1)}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + O\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

$$\psi^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

$$\psi^{(2)}(x) + \psi^{(1)}(x)^2 = \frac{1}{12x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

amely tényleg egy bizonyos c -n túl pozitív, azaz $\rho(x)$ tényleg konvex egy bizonyos c -n túl.

Megjegyzés: a tétel szigorúbban is igaz, a $\rho(x)$ függvény $]0; \infty[$ intervallumon is szuperkonvex, de ennek bizonyítása nem kerül kifejtésre a dolgozatban.

2.5. tétel: $\lim_{x \rightarrow \infty} [\rho(x) - (x - 0.5)] = 0$

Bizonyítás: A tétel belátásához először használjuk a 1.28. definíciót ($f(x+n) = f(x) \cdot \prod_x^{x+n} f(t)dt$):

$$\Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot \prod_x^{x+1} \rho(z)^{dz}$$

Valamint a gamma függvény definíciójából fakadóan:

$$\Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x$$

Ebből rendezve az egyenletet:

$$\prod_x^{x+1} \rho(z)^{dz} = x$$

Ezután meg kell mutassuk, hogy $x \geq \rho(x) \geq x-1$ (ábrán a zöld szaggatott lineárisok jelölik az $x-1$ -et, illetve az x -et). Ennek indirekt belátásához használjuk a Γ függvény 1. kitételét:

Ha feltesszük, hogy $\rho(z) < z-1$ igaz lenne, akkor ellentmondásra jutunk. Mivel ρ egy monoton növekvő függvény $]0; \infty[$ intervallumon, így a 1.25. tétel miatt tetszőleges pozitív x és $x+1$ -re igaz, hogy:

$$\prod_x^{x+1} \rho(z)^{dz} < \prod_x^{x+1} (z-1)^{dz} \leq \prod_x^{x+1} (x)^{dz} = x$$

Ami ellentmondásra vezet, mivel

$$\prod_x^{x+1} \rho(z)^{dz} = x$$

Ugyanígy, ha feltesszük, hogy $\rho(z) > z$ igaz lenne, ugyancsak ellentmondásra jutunk a ρ monotonitását és a 1.25. tételt kihasználva, mivel ekkor igaz lenne tetszőleges pozitív x és $x+1$ -re, hogy:

$$\prod_x^{x+1} \rho(z)^{dz} > \prod_x^{x+1} (z)^{dz} \geq \prod_x^{x+1} (x)^{dz} = x$$

Ami ugyancsak ellentmond azzal, hogy

$$\prod_x^{x+1} \rho(z)^{dz} = x$$

Felhasználva a 2.3. tételt ekkor igaz, hogy $\rho(x)$ és x különbsége biztosan egy konstanshoz konvergál a végtelenben (hiszen két lineáris közé esik). Ez a konstans csak és kizárólag 0.5 lehet, mivel $x - 0.5$ határozott n és $n+1$ közti produktumintegrálja n -hez tart⁹, és nem létezik másik konstans, amire ez igaz lenne:

$x + \alpha$ produktumintegrálja $c \cdot e^{-x} \cdot (x + \alpha)^{x+\alpha} \cdot c$. Ez belátható a 1.31. tétel alapján.

Ekkor utóbbi n és $n+1$ közti határozott produktumintegrálja:

$$\begin{aligned} \prod_n^{n+1} (x + \alpha)^{dx} &= \frac{e^{-n} \cdot (n + \alpha + 1)^{n+\alpha+1}}{e^{1-n} \cdot (n + \alpha)^{n+\alpha}} = e^{-1} \cdot (n + \alpha + 1) \cdot \left(\frac{n + \alpha + 1}{n + \alpha} \right)^{n+\alpha} = \\ &= n \cdot \left(e^{-1} \cdot \left(\frac{n + \alpha + 1}{n + \alpha} \right)^{n+\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\alpha + 1}{n} \right) \right) = n \cdot \left(e^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n + \alpha} \right)^{n+\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\alpha + 1}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy erről beláthassuk, hogy n -hez tart, a különbségüket kell vizsgáljuk. Ehhez egyszerűsítve a törtet:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot \left(e^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n + \alpha} \right)^{n+\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\alpha + 1}{n} \right) - 1 \right) \right] &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+\alpha} \right)^{n+\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\alpha+1}{n} \right)}{n^{-1}} \right] \end{aligned}$$

Ennek határértéke l'Hospital szabályt alkalmazva állapítható meg. Ehhez a tagok deriváltjait megállapítva:

$$\begin{aligned} \left[\left(1 + \frac{1}{n + \alpha} \right)^{n+\alpha} \right]' &= \left(1 + \frac{1}{n + \alpha} \right)^{n+\alpha} \cdot \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n + \alpha} \right) - \frac{1}{n + \alpha + 1} \right) \\ \left[1 + \frac{\alpha + 1}{n} \right]' &= -\frac{\alpha + 1}{n^2} \end{aligned}$$

⁹ f függvény akkor, és csak akkor tart g függvényhez, ha $f - g$ különbség 0-hoz tart.

$$[n^{-1}]' = -\frac{1}{n^2}$$

Ezekből kiszámítva az előbbi határérték értékét:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-n^2) \cdot e^{-1} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n+\alpha} \right)^{n+\alpha} \cdot \left(-\frac{\alpha+1}{n^2} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(1 + \frac{\alpha+1}{n} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+\alpha} \right)^{n+\alpha} \cdot \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n+\alpha} \right) - \frac{1}{n+\alpha+1} \right) \right) \right] = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+\alpha} \right)^{n+\alpha} \cdot \left(\alpha+1 - (n+\alpha+1) \cdot \left(n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n+\alpha} \right) - \frac{n}{n+\alpha+1} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Kihasználva, hogy $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ ¹⁰ és $\frac{1}{n+\alpha} \rightarrow 0$, valamint kihasználva, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+\alpha} \right)^{n+\alpha} = e$, az előbbi határérték értéke:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\alpha+1+n - n \cdot \left(\frac{n+\alpha+1}{n+\alpha} - \frac{n+\alpha+1}{2 \cdot (n+\alpha)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right] = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\alpha+1+n - n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+\alpha} - \frac{n+\alpha+1}{2 \cdot (n+\alpha)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right] = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha+1+n - n - 1 + 0.5] = \alpha + 0.5 \end{aligned}$$

Azaz csak az $\alpha = -0.5$ konstansra igaz az, hogy tetszőleges n és $n+1$ közti határozott produktumintegrálja n -hez tart. Mivel a $\rho(x)$ biztosan egy lineárishoz tart (mivel c -n túl szuperkonvex), és nem tarthat $x - 0.5$ -től eltérő egyenletű lineárishoz, ezért ahhoz kell tartania. Mivel $x - 0.5$ függvény n és $n+1$ közti produktumintegrálja alulról tart n -hez, így önmaga is alulról tart a $\rho(x)$ -hez.

Megjegyzés: bár matematikailag nem korrekt, de heurisztikusan is belátható a tétel. Ennek lényege, hogy a $\Gamma(x)$ függvény mindig x -szeresére nő x és $x+1$ között, és ekkor csak $x - 0.5$ -re lesz igaz, hogy annak "átlaga" (számtani középértéke) x lesz ezen az intervallumon.

2.2. Γ függvényt közelítő függvények

A Γ függvény közelítőfüggvényeinek előnye, hogy sokkal kevesebb számítási kapacitást igényelnek, de hátrányuk, hogy ezt a pontosság rovására teszik. Akkor jó egy közelítés a Γ függvényre, ha a közelítő függvény és a Γ függvény aszimptotikusan egyenlő.

2.6. tétel: Ha az f függvényre igaz, hogy produktumderiváltja $\rho(x)$ -el vett különbsége gyorsabban tart 0-hoz¹¹, mint $\ln^{-k} x$, ahol $k > 1$, akkor az f függvény azonos nagyságrendű¹² a Γ függvénnyel.

¹⁰ $\ln(1+x)$ Taylor sora $]-1; 1]$ intervallumra $\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot x^k}{k}$

¹¹ f függvény gyorsabban tart 0-hoz, mint g függvény, ha a két függvény pontonként vett hányadosa 0-hoz tart. Ezzel ekvivalens megfogalmazás a két függvény reciprokára, hogy f^{-1} nagyobb nagyságrendű, mint g^{-1}

¹²két függvény azonos nagyságrendű, ha hányadosuk egy küszöbindexen túl korlátos

Bizonyítás: A tétel bizonyításához felhasználva a 1.32. tételt:

$$\prod_a^b m(x)^{dx} \stackrel{x \geq x_k}{\leq} \prod_a^b [m(x) + n(x)]^{dx} \stackrel{x \geq x_k}{\leq} \prod_a^b m(x)^{dx} \cdot e^{\int_a^b \frac{n(x)}{m(x)} dx}$$

ahol $m(x) = \rho(x)$ és $n(x) = \ln^{-k} x$, így behelyettesítve, és használva a 2.5. tételt:

$$\Gamma(x) \stackrel{x \geq 1}{\leq} \prod_1^x [\rho(t) + \ln^{-k} t]^{dt} \stackrel{x \geq 1}{\leq} \Gamma(x) \cdot e^{\int_1^x \frac{\ln^{-k} t}{\rho(t)} dt} \stackrel{x \geq 1}{\leq} \Gamma(x) \cdot e^{\int_1^x \frac{\ln^{-k} t}{t+0.5} dt} \stackrel{x \geq 1}{\leq} \Gamma(x) \cdot e^{\int_1^x \frac{\ln^{-k} t}{t} dt}$$

Integrálási szabályokat alkalmazva, és egyszerűsítve a relációt:

$$\Gamma(x) \stackrel{x \geq 1}{\leq} \prod_1^x [\rho(t) + \ln^{-k} t]^{dt} \stackrel{x \geq 1}{\leq} \Gamma(x) \cdot e^{\frac{\ln^{1-k} x}{1-k}}$$

ahol $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^{1-k} x}{1-k} = 0$, ha $k > 1$, így:

$$\Gamma(x) \stackrel{x \geq 1}{\leq} \prod_1^x [\rho(t) + \ln^{-k} t]^{dt} \stackrel{x \geq 1}{\leq} \Gamma(x) \cdot c$$

Azaz a tétel tényleg igaz.

2.7. tétel: Az $f(x) = x - 0.5$ produktumintegrálja egy nagyságrendű a $\Gamma(x)$ függvénnyel.

Bizonyítás: Ennek belátásához használva a 2.6.-es tételt, elég azt belássuk, hogy $\rho(x) - x + 0.5$ gyorsabban tart nullához, mint $\ln^{-1} x$. Ehhez a $(\rho(x) - x + 0.5) \cdot \ln x$ szorzatról kell belátni, hogy 0-hoz tart. Mivel a tagonkénti határérték nem egzakt $(0 \cdot \infty)$, ezért a l'Hospital szabályt alkalmazva vizsgálhatjuk ennek határértékét:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{\rho(x) - x + 0.5}\right)} < \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{(\rho(x) - x + \frac{1}{2})^2}{x \cdot (\rho'(x) - 1)} \right) < \infty$$

Kihasználva, hogy a $\rho(x)$ az $x - 0.5$ lineárisához tart (felülről) a 2.5. tétel miatt és monoton nő (1.17. tétel szerint, mivel $\Gamma(x)$ superkonvex), így annak deriváltja 1-hez tart a végtelenben, valamint $\rho(x) - x + \frac{1}{2}$ mindig pozitív, monoton csökkenő, 0-hoz tartó függvény. Utóbbi miatt annak deriváltja, $\rho'(x) - 1$ végig negatív (hiszen egy monoton csökkenő függvény deriváltja csak negatív lehet). Emiatt $\rho'(x) - 1 < \rho(x) - x + \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{(\rho(x) - x + \frac{1}{2})^2}{x \cdot (\rho'(x) - 1)} \right) < \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{(\rho(x) - x + \frac{1}{2})^2}{x \cdot (\rho(x) - x + \frac{1}{2})} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{\rho(x) - x + \frac{1}{2}}{x} \right) = 0$$

Ahol már egy egzakt határértéket kapunk. Ezzel beláttuk, hogy az $x - 0.5$ produktumintegrálja egy nagyságrendben van a $\Gamma(x)$ függvénnyel.

2.8. tétel: Ha egy f függvény és egy g függvény különbsége jobban tart a 0-hoz, mint $\ln^{-1} x$, és $g(x)$ produktumintegrálja egy nagyságrendben van a Γ függvényvel, akkor $f(x)$ produktumintegrálja is egy nagyságrendben van a Γ függvényvel.

Bizonyítás: Adott, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\rho(x) - g(x)) \cdot \ln x = 0$$

és

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) \cdot \ln x = 0$$

Ekkor átrendezve a két egyenletet:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \cdot \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \cdot \ln x$$

Emiatt az alábbi egyenlőség is igaz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \ln x$$

Visszarendezeve az egyenletet megkapjuk, hogy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\rho(x) - f(x)) \cdot \ln x = 0$$

Ami a tétel igaz voltát bizonyítja.

2.2.1. A p-formula

A korábbi tételeket alkalmazva már végtelen sok olyan függvény alkotható, melyek egy nagyságrendűek a $\Gamma(x)$ függvényvel, azaz egy megfelelő konstanssal beszorozva egy vele aszimptotikusan egyenlő függvényt kaphatunk. Emiatt végtelen sok különböző közelítőfüggvény alkotható a Γ függvényre, ha tudunk alkotni egy olyan n paraméteres függvényt, melyre igazak az alábbi kitételek:

1. minden n esetében a függvény és $x - 0.5$ különbsége jobban tart a 0-hoz, mint $\ln^{-1} x$
2. a függvény egzaktan produktumintegrálható (azaz pozitív és folytonos), hogy meghatározható legyen a Γ függvényvel egy nagyságrendű produktumintegrál függvénye.

Kiindulva az $x - 0.5$ produktumintegráljából, és a Stirling¹³ formulából, alkotható egy olyan függvény, amelyről heurisztikusan megsejthető, hogy megfelel a fentebbi feltételeknek.

¹³Stirling-formula: $\sqrt{2\pi x} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^x \sim \Gamma(x+1)$

2.9. definíció: Nevezzük $P_n(x)$ -nek, vagy p -formulának az alábbi paraméteres függvényt:

$$P_n(x) = \sqrt{2\pi} \cdot \left(\frac{x+n}{e}\right)^{x+n} \cdot x^{0.5-n}$$

Fontos megjegyezni, hogy az egyszerűbb alak miatt ekkor a $P_n(x)$ függvény (ahogy később belátjuk) nem a $\Gamma(x)$ függvénnyel, hanem $x!$ szerint eggyel eltolt $\Gamma(x+1)$ függvénnyel lesz aszimptotikusan egyenlő. Értelemszerűen így $\Gamma^p(x+1) = \rho(x+1) \sim x+0.5$

2.10. tétel: Ennek a $P_n(x)$ paraméteres függvénynek a produktumderiváltja az $x+0.5$ lineárisához tart.

Bizonyítás: Legyen m a $P_n(x)$ és az $x+0.5$ különbségének határértéke:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} [P_n^p(x) - x - 0.5] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x+n) \cdot e^{\frac{0.5-n}{x}} - x - 0.5 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \cdot \left(e^{\frac{0.5-n}{x}} - 1 \right) + n \cdot e^{\frac{0.5-n}{x}} - 0.5 \right] \end{aligned}$$

Mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{0.5-n}{x}} = 1$, ezért a fenti határértékben a $0 \cdot \infty$ határérték esetével kell szembenéznünk, amely l'Hospital szabállyal átírható egyszerűbb alakra:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(e^{\frac{0.5-n}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{0.5-n}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{0.5-n}{x}} \cdot \frac{-(0.5-n)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 0.5 - n$$

Mely visszahelyettesítve az eredeti függvénybe:

$$m = 0.5 - n + n - 0.5 = 0$$

Azaz a $P_n(x)$ produktumderiváltja az $x-0.5$ -höz tart.

2.11. tétel: $P_n(x)$ a $\Gamma(x+1)$ függvénnyel azonos nagyságrendű.

Bizonyítás: a 2.7. tétel miatt elég annyit belássunk, hogy $P_n^p(x) - x - 0.5$ jobban tart nullához, mint $\ln^{-1} x$ Ehhez azt kell vizsgáljuk, hogy $(P_n^p(x) - x - 0.5) \cdot \ln x$ nullához tart-e:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+n) \cdot e^{\frac{0.5-n}{x}} - x - 0.5 \right) \cdot \ln x$$

Ha ennek a határértéke 0, a tétel igaznak bizonyul. Ennek belátásához először lássuk be, hogy $((x+n) \cdot e^{\frac{0.5-n}{x}} - x - 0.5) \cdot x$ véges (hiszen ebből következik előbbi). Ehhez felhasználva az ordó jelölést (big O notation [5]):

$$\left((x+n) \cdot e^{\frac{0.5-n}{x}} - x - 0.5 \right) \cdot x = x^2 \cdot \left(e^{\frac{0.5-n}{x}} - 1 \right) + x \cdot \left(n \cdot e^{\frac{0.5-n}{x}} - 0.5 \right)$$

Felhasználva az exponenciális Taylor-sorát $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$, behelyettesítve:

$$e^{\frac{0.5-n}{x}} = 1 + \frac{0.5-n}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{0.5-n}{x} + \frac{(0.5-n)^2}{2 \cdot x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Behelyettesítve az első tag helyére:

$$x^2 \cdot \left(e^{\frac{0.5-n}{x}} - 1 \right) = x \cdot (0.5 - n) + \frac{(0.5 - n)^2}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Behelyettesítve a második tag helyére:

$$x \cdot \left(n \cdot e^{\frac{0.5-n}{x}} - 0.5 \right) = x \cdot (n - 0.5) + n \cdot (0.5 - n) + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ezek összege:

$$x^2 \cdot \left(e^{\frac{0.5-n}{x}} - 1 \right) + x \cdot \left(n \cdot e^{\frac{0.5-n}{x}} - 0.5 \right) = \frac{(0.5 - n)^2}{2} + n \cdot (0.5 - n) + O\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{n^2}{2} + \frac{1}{8} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ahol ennek határértéke, kihasználva, hogy definíció szerint $\lim_{x \rightarrow \infty} O\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x + n) \cdot e^{\frac{0.5-n}{x}} - x - 0.5 \right) \cdot x = -\frac{n^2}{2} + \frac{1}{8}$$

Azaz a $P_n^p - x - 0.5$ zérushoz tartó függvény x -el megszorozva (n paramétertől függő) konstanshoz tart, azaz $\frac{1}{x}$ ugyanolyan gyorsan tart a nullához, mint $P_n^p - x - 0.5$. Azaz, ha utóbbi függvény $\ln x$ -el vett szorzatát vizsgáljuk x helyett, akkor annak határértéke 0 lesz (kihasználva, hogy x nagyobb nagyságrendű, mint $\ln x$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x + n) \cdot e^{\frac{0.5-n}{x}} - x - 0.5 \right) \cdot x = -\frac{n^2}{2} + \frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x + n) \cdot e^{\frac{0.5-n}{x}} - x - 0.5 \right) \cdot x \cdot \frac{\ln x}{x} = \left(-\frac{n^2}{2} + \frac{1}{8} \right) \cdot \frac{\ln x}{x} = 0$$

Azaz $P_n^p(x) - x - 0.5$ jobban tart a nullához, mint $\ln^{-1} x$, azaz annak produktumintegrálja ($P_n(x)$) azonos nagyságrendű a $\Gamma(x + 1)$ függvénnyel.

2.12. tétel: A $P_n(x)$ aszimptotikusan egyenlő a $\Gamma(x + 1)$ függvénnyel.

Bizonyítás: A [2] publikációban levezetett lépéseket felhasználva $P_0(x)$ -re az állítás igaz:

$$P_0(x) = \sqrt{2\pi} \cdot \left(\frac{x}{e} \right)^x \cdot x^{0.5}$$

mivel utóbbi megegyezik a Stirling-formulával, mely aszimptotikusan egyenlő a $\Gamma(x + 1)$ függvénnyel.

$P_n(x)$ akkor aszimptotikusan egyenlő $\Gamma(x + 1)$ -el, ha a kettő hányadosának határértéke 1. Ez direkt módon belátva:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{\Gamma(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{P_0(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \left(\frac{x+n}{e} \right)^{x+n} \cdot x^{0.5-n}}{\sqrt{2\pi} \cdot \left(\frac{x}{e} \right)^x \cdot x^{0.5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+n}{x} \right)^x \cdot \left(\frac{x+n}{e} \right)^n \cdot x^{-n}$$

A fenti határérték egyszerűsítve:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{\Gamma(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{n}{x}}{1} \right)^x \cdot \left(\frac{1 + \frac{n}{x}}{e} \right)^n = e^n \cdot \frac{1}{e^n} = 1$$

Azaz $P_n(x)$ tényleg aszimptotikusan egyenlő a $\Gamma(x+1)$ függvénnyel.

2.13. tétel: Tetszőleges n és m pozitív valós paraméterekre, ha $n \geq m$, akkor $P_n(x) \geq P_m(x)$ minden pozitív x értékben.

Bizonyítás: A tétel másképpen megfogalmazva: a $P_n(x)$ rögzített pozitív x esetén pozitív n -től függően monoton növekvő (azaz produktumderiváltja végig nagyobb, vagy egyenlő, mint 1).

$$P_n(x) = \sqrt{2\pi} \cdot \left(\frac{x+n}{e} \right)^{x+n} \cdot x^{0.5-n} = \sqrt{2\pi} \cdot (x+n)^{x+n} \cdot \left(\frac{1}{e} \right)^{x+n} \cdot x^{0.5} \cdot x^{-n}$$

Ennek n szerinti produktumderiváltja használva a 1.8., 1.10. tételeket:

$$\lambda_n P_n(x) = 1 \cdot (e \cdot (x+n)) \cdot \frac{1}{e} \cdot x^{-1} = 1 + \frac{n}{x} \geq 1$$

Azaz a tétel tényleg igaz!

2.2.2. A p-formula paraméterét korrigáló $\Theta(x)$ függvény

Megfigyelhető, hogy a $P_n(x)$ függvény paraméterét változtatva bizonyos pozitív x értékekben a $\Gamma(x+1)$ és a $P_n(x)$ értéke azonos lesz (azaz különbségfüggvényük zérust vesz fel).

2.14. definíció: Nevezzük a p-formula *paraméterét korrigáló Θ függvénynek* azt a x értéktől függő függvényt, melyre $P_{\Theta(x)}(x) = \Gamma(x)$ teljesül.

2.15. tétel: $\Theta(x)$ egy korlátos függvény.

Bizonyítás: Ehhez teljesülnie kell annak, hogy bizonyos intervallumon kívül a p-formula paramétere akármilyen értéket felvéve sose lesz egyenlő (pozitív x) értékben a $\Gamma(x)$ függvénnyel.

Ha feltesszük, hogy $\Theta(x) \geq 0.5$, akkor a 2.11. tételben szereplő $\left(-\frac{\Theta(x)^2}{2} + \frac{1}{8} \right)$ kisebb, vagy egyenlő lesz, mint 0, emiatt $\left(-\frac{\Theta(x)^2}{2} + \frac{1}{8} \right) \cdot \frac{\ln x}{x}$ is (pozitív x -ekre). Ezen kívül használva a 2.5. tételt, mely szerint $x - 0.5 < \rho(x)$:

$$P_{\Theta(x)}^p(x) \leq x + 0,5 < \rho(x+1)$$

A 1.24. tétel miatt ezek produktumintegráljaik is azonos relációban állnak:

$$P_{\Theta(x)}(x) < \Gamma(x+1)$$

Amivel ellentmondásra jutunk, azaz $\Theta(x)$ tényleg egy felülről korlátos függvény.

Azt is beláthatjuk, hogy $\Theta(x) > 0$ nem negatív $\Theta(x)$ esetén, mert a 2.13. tétel miatt ekkor $P_0(x) < P_{\Theta(x)}(x)$. Ekkor kihasználva, hogy a Stirling-formula szerint az alábbi módon fejezhető ki a Γ az ordó jelöléssel (lásd [2]):

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi \cdot x} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = P_0(x) \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Azaz:

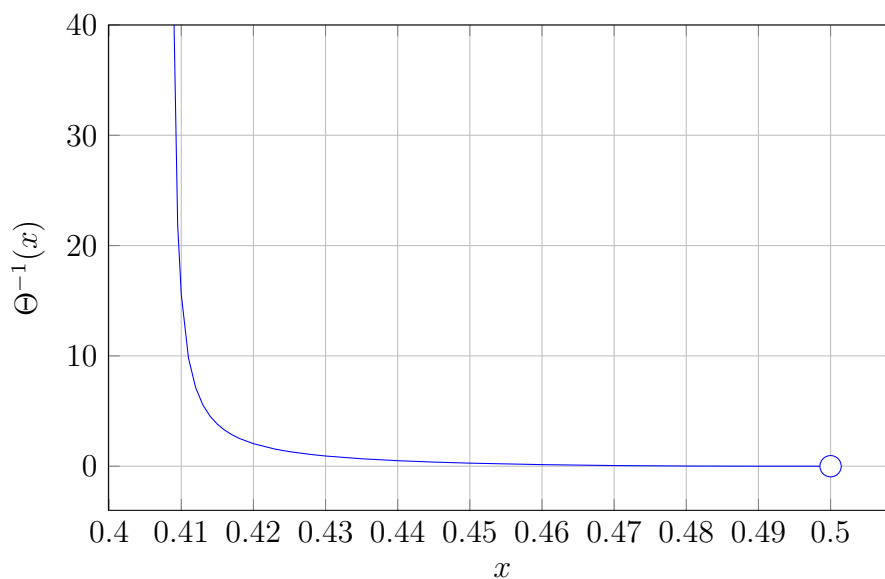
$$P_0(x) < \Gamma(x)$$

Emiatt $\Theta(x)$ tényleg nem veheti fel a 0 értéket.

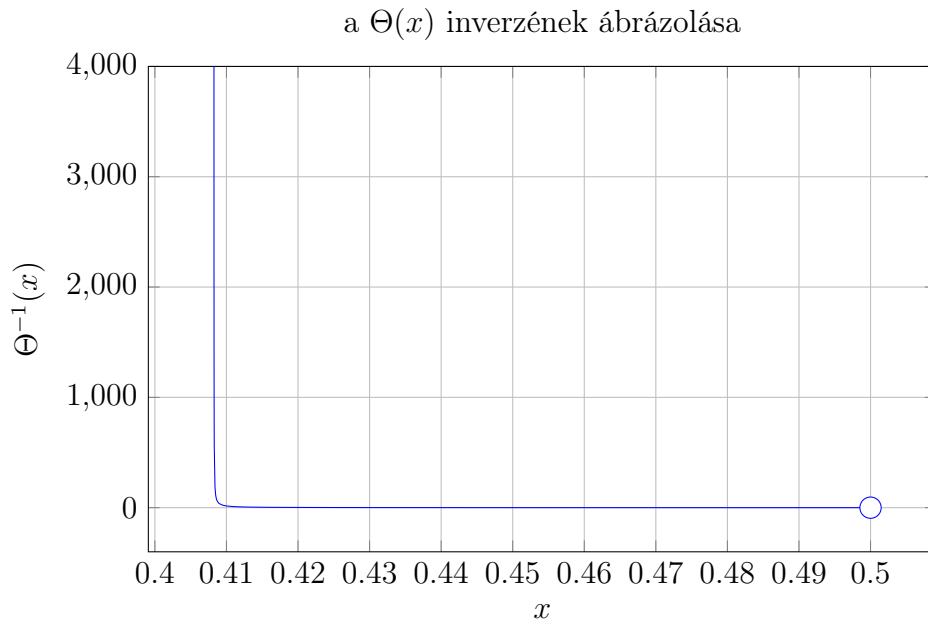
Megjegyzés: ennek jelentősége az, hogy ha feltesszük, hogy $\Theta(x)$ folytonos, akkor biztosan pozitív a Bolzano-tétel ¹⁴ miatt.

Numerikus módszerekkel a $\Theta(x)$ inverzét viszonylag könnyen meg lehet határozni, mivel a gyökkeresés a Bolzano-tételt kihasználva viszonylag egyszerűen megvalósítható. Ennek módszere: adott n paraméter mellett (vízszintes tengely) keressük, hogy milyen x -ben lesz gyöke a $P_n(x) - \Gamma(x+1)$ függvénynek (függőleges tengely).

a $\Theta(x)$ inverzének ábrázolása

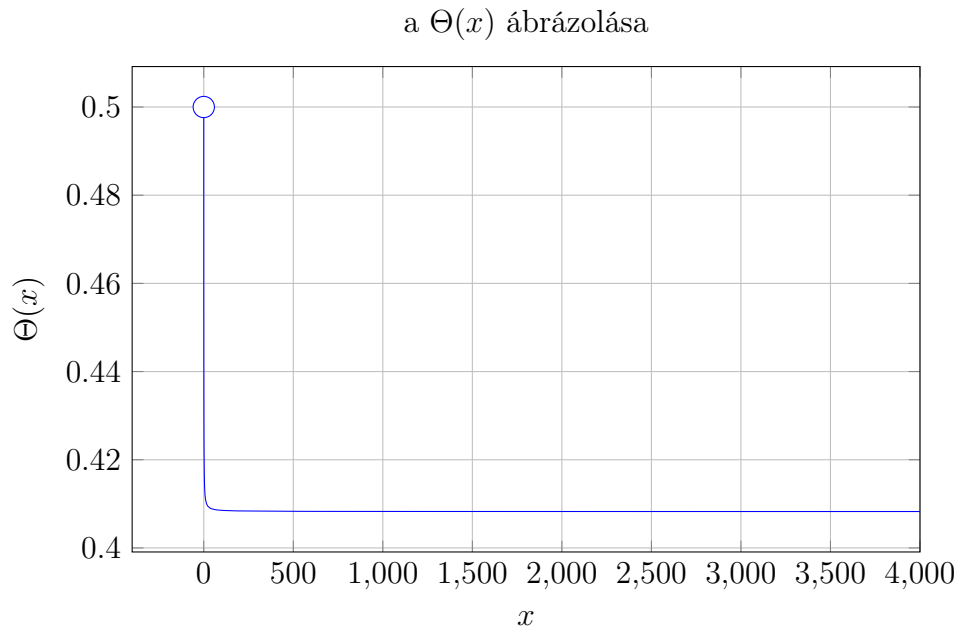


¹⁴A Bolzano-tétel szerint intervallumon értelmezett, negatív és pozitív értéket is felvevő, folytonos függvénynek van zérushelye.



2.16. definíció: Nevezzük *optimális paraméternek* a $\Theta(x)$ végtelenben vett határértékét. Jelölje ezt Θ_{op} .

Θ_{op} létezése nem triviális, mert ehhez belátandó, hogy Θ értelmezési tartományának torlódási pontja a végtelen, valamint hogy $\Theta(x)$ nem csak korlátos, hanem konvergál is a végtelenben egy értékhez (nem oszcillál). A dolgozatban ezek tüzetesebb vizsgálatára nem kerül sor, csupán annyit állíthatunk így, hogy ha létezik Θ_{op} , akkor az biztosan $0 < \Theta_{op} < 0.5$. Továbbá azt is állíthatjuk a numerikus számítások alapján, hogy $\Theta(x)$ függvény $]0; 4000]$ intervallumon folytonos (és monoton csökkenő), valamint $\Theta(4000) \approx 0.408256$.



Az ábra alapján feltehető, hogy Θ_{op} létezik, és $\Theta_{op} \approx \Theta(4000)$.

3. Kitekintés

3.1. Alkalmazások

3.1.1. Határérték számítás

A produktumderivált segítségével könnyen meghatározható egy függvény határértéke, vagy monotonitása.

Példa a határértékszámításra: Bizonyítsuk be, hogy a $P_n(x)$ függvénynek rögzített x és futó n esetében mindig $n = 0$ -ban lesz a (lokális) minimumértéke!

A 2.13. tétel bizonyításában szereplő egyenlet szerint

$$\lambda_n P_n(x) = 1 + \frac{n}{x}$$

ami csak $n = 0$ esetében 1. Ez a függvény monoton nő (hiszen $\frac{d}{dn} \lambda_n P_n(x) = \frac{1}{x}$, ami pozitív x -re egy pozitív konstans minden n -re) $n = 0$ pontban, azaz ez a függvény lokális minimuma.

Példa a monotonításra: Bizonyítsuk be, hogy a $P_n(x)$ függvénynek rögzített x és pozitív n esetében monoton nő!

A 2.13. tétel bizonyításában szereplő egyenlet szerint

$$\lambda_n P_n(x) = 1 + \frac{n}{x}$$

Mely nem negatív n és $x \neq 0$ esetében mindig nagyobb, vagy egyenlő, mint 0.

3.1.2. Paraméteres faktoriális közelítés

Példa a faktoriális kiszámítására: Adjuk meg $10000!$ értékét a Stirling-formulával, és a p-formulával Θ_{op} -t közelítve $\Theta(4000)$ -rel is, és hasonlítsuk össze az $10000!$ tényleges értékével ezeket:

$$10000! \approx 2.8462596809 \cdot 10^{35659}$$

Stirling formulával:

$$S(x) = \sqrt{2\pi \cdot x} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

$$S(10000) \approx 2.846238172 \cdot 10^{35659}$$

p-formulával az Θ_{op} -t közelítve (és feltéve, hogy létezik):

$$P_{\Theta_{op}}(x) = \sqrt{2\pi} \cdot \left(\frac{x + \Theta_{op}}{e}\right)^{x + \Theta_{op}} \cdot x^{0.5 - \Theta_{op}}$$

$$P_{\Theta_{op}}(10000) \approx 2.8462596815 \cdot 10^{35659}$$

Amíg a Stirling-formulával csupán az első 5 számjegy egyezik, úgy a p-formulával az első 10 (kerekítéssel, nem kerekítve 9). Ez a számjegyszám a Θ_{op} értékének pontos meghatározásával még pontosabb lehet.

3.2. További kutatási területek

3.2.1. Produktumderivált és produktumintegrál kiterjesztése a komplex analízisre

A produktumintegrál kizárólag pozitív értékészletű függvényekre definiált (hiszen a 1.31. tételben a logaritmus értelmezési tartománya valós számegyenesen csak a pozitívokra terjed ki). Ha megengedjük, hogy az eredeti függvény negatív értékeket is felvegyen, egy általánosabb műveletet kapunk, kihasználva, hogy:

$$\ln(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{ha } x > 0 \\ \ln(|x|) + \pi i & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ugyanígy definiálható komplex (nem nulla) függvényekre a produktumderivált művelet, használva a 1.6. definíciót.

Megjegyzés: bár műveletileg azonos eredményre jutunk, ha a $f^p(x) = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$, vagy a $f^p(x) = e^{\frac{d}{dx} \ln f(x)}$ képletet alkalmazzuk, de utóbbival negatív értékészletű függvények produktumderiváltjainak kiszámítása komplikáltabb, mivel a logaritmus maga is ekkor már komplex síkba mutat.

Példa: Legyen $f(x) = e^{i\pi x}$. Ennek produktumderiváltja a 1.6. tétel szerint $f^p(x) = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = e^{\frac{i\pi e^{i\pi x}}{e^{i\pi x}}} = e^{i\pi} = -1$. Ugyanez a másik képlet szerint $f^p(x) = e^{\frac{d}{dx} \ln f(x)} = e^{\frac{d}{dx} i\pi x} = e^{i\pi} = -1$. Visszafele vizsgálva a $g(x) = -1$ függvény produktumintegrálja a 1.31. tételt alkalmazva $\prod g(x)^{dx} = e^{\int \ln g(x) dx} = e^{\int i\pi dx} = e^{i\pi x}$. Ezek alátámasztják, hogy bár a tételek nem lettek általánosítva komplex függvényekre, azok kiterjeszthetők azokra.

3.2.2. Egyéb faktoriális közelítő függvények alkotása, $\Theta(x)$ vizsgálata és Θ_{op} pontos értékének meghatározása

Mivel a faktoriális, és a gamma függvény produktumderiváltja is lineárishez tart, annak minél pontosabb közelítésével egyre pontosabb faktoriálist, vagy gammát közelítő függvények alkothatók.

Ugyancsak a Θ_{op} minél pontosabb kiszámításával is optimalizálható a P-formula. Ezen kívül ugyancsak nyitott kérdés maradt Θ_{op} racionális volta, esetleges kapcsolata egyéb nevezetes konstansokkal.

A P-formula finomítására ugyancsak eszköz lehet a $\Theta(x)$ pontos leírása, hiszen ekkor minden x -hez ismernénk azt a paraméterértéket, mely mellett a P-formula pontosan közelíti a faktoriális és a gamma függvényt.

3.2.3. A produktumderivált Taylor-sor analógiájának vizsgálata, valamint a frakcionális produktumderivált definiálása

A [6] 2024-es TDK dolgozat a produktumderivált többdimenziós általánosításait, valamint különböző középértékeit, hibafüggvényeit vizsgálja tüzetesen, valamint bevezeti a Taylor-sor produktumderiváltra épülő analógiáját. Eszerint minden olyan függvény, melynek logaritmusát Taylor-sorba fejthetjük, az felírható exponenciális függvények szorzataként.

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} f^{p[n]}(0) \frac{x^n}{n!}$$

Ahol $f^{p[n]}(0)$ az f függvény n -ik produktumderiváltját jelöli $x = 0$ pontban.

Bár az idézett dolgozat erre nem tér ki, ez a fentebb említett elv szerint kibővíthető komplex függvényekre is.

Továbbá vizsgálhatók a nem egész rendű produktumderiváltak (frakcionális produktumderiváltak) a nem egész rendű deriváltak mintájára (azaz deriváltnál $\frac{d^n}{dx} f(x)$, produktumderiváltnál $\lambda_x^n f(x)$, ahol n akármilyen valós szám lehet). Ennek segítségével alkotható egy kiterjesztett produktumderivált Taylor-sor.

Példa: Tekintsünk egy tetszőleges $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fentebbi kritériumot kielégítő függvényt. Erre igaz lesz, hogy:

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} f^{p[n]}(0) \frac{x^n}{n!}$$

Ha ekkor nem csak az egész rendű (értsd: egészedik) produktumderiváltakat tekintjük, akkor ez kiegészíthető:

$$f(x) = \prod_0^{\infty} \left[f^{p[n]}(0) \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} \right]^{dn}$$

Megjegyzés 1.: a dolgozatban nincsen definiálva az $f^{p[n]}$ nem egész n -ekre (azaz a frakcionális produktumderivált), de ez például egy módja lehetne ennek.

Megjegyzés 2.: A fentebbi módszerrel bár nem kaphatók meg rögtön egy f függvényhez tartozó $x = 0$ pontban vett produktumderiváltak, de szabadon generálható egy f függvény a hozzá tartozó $x = 0$ pontban vett produktumderiváltjai alapján (és vegyük észre, akármelyik ponthoz tartozó produktumderiváltak alapján).

3.2.4. Egyéb függvények érintésének vizsgálata

A Newton-Leibnitz féle derivált az érintő lineáris meredekségével van definiálva, a produktumderivált az érintő exponenciális görbe alapjával, de miért ne lehetne alkotni más definíciót? Vajon milyen tulajdonságok állandóak ekkor?

Példa: Ha egy függvényt az azt érintő $\sinh$ függvénnyel jellemzünk, akkor egy ugyancsak exponenciális típusú jellemzést kapunk, csak általánosabban, mely rugalmasabban kezeli a 0 és a negatív értékeket (hiszen mind értelmezési tartománya, mind értékkészlete a teljes valós számegetes).

Ez alapján egy f függvényt x_0 pontban érintő és rásimító (azaz második deriváltjuk is azonos) $a \cdot \sinh(b \cdot x + c)$ függvény konstans szorzótagját (a -t) nevezhetnénk például hiperbolikus deriváltak. Ekkor a , ha létezik, egyértelműen meghatározható (3 egymásból $a \neq 0$ esetén nem kifejezhető egyenlet 3 ismeretlennel, $a = 0$ esetén a egyértelmű, b és c nem), hiszen:

$$\begin{aligned}f(x_0) &= a \cdot \sinh(b \cdot x_0 + c) \\f'(x_0) &= ab \cdot \cosh(b \cdot x_0 + c) \\f''(x_0) &= ab^2 \cdot \sinh(b \cdot x_0 + c)\end{aligned}$$

Ekkor ahogy a Newton-Leibnitz-féle deriválnál az e^x függvényre igaz, hogy deriváltja önmaga, produktumderiválnál az e^{e^x} -re, úgy ebben a rendszerben az x^2 -re lesz ez igaz. Ennek részleges bizonyítása (azzal nem törődünk, hogy tényleg egyértelmű-e a három konstans értéke), hogy ekkor $a = x^2$, $b = \frac{\sqrt{2}}{x}$, $c = \sinh^{-1}(1) - \sqrt{2} \approx -0.53284$ kielégíti a feltételeket:

$$f(x) = x^2 \cdot \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{x} \cdot x + \sinh^{-1}(1) - \sqrt{2}\right) = x^2$$

$$f'(x) = x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{x} \cdot \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{x} \cdot x + \sinh^{-1}(1) - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{2} = 2x$$

$$f''(x) = x^2 \cdot \frac{2}{x^2} \cdot \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{x} \cdot x + \sinh^{-1}(1) - \sqrt{2}\right) = 2$$

Melyek tényleg megadják az $f(x) = x^2$ függvényt, és annak első és második deriváltját.

Ez a most definiált hiperbolikus derivált kielégíti azt az elvárást is, hogy ha $f(x)$ -nek $g(x)$ a hiperbolikus deriváltja, $f(x+k)$ -nak $g(x+k)$ (azaz x tengely szerinti eltolásinvariancia teljesül). Ugyanúgy teljesül, hogy a $\sinh$ függvény hiperbolikus deriváltja 1.

Hivatkozások

- [1] Pairman, Eleanor (1919.) *Tables of the Digamma and Trigamma Functions*
- [2] Artin, Emil (1964.) *The Gamma Function*
- [3] Abramowitz, M. and Stegun, I. (1964.) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*
- [4] Rudin, Walter (1976.) *Principles of Mathematical Analysis*
- [5] Knuth, Donald (1997.) *The Art of Computer Programming. Vol. 1 (3rd ed.)*.
- [6] Volford Levente (2024.) *Produktum derivált TDK dolgozat*

