

OTDK magyar összefoglaló

Mészáros Bori Anna

2025

Háromtípusú véletlen sorozatok stabilizációs ideje

Bevezetés

A dolgozat célja a két- és háromtípusú véletlen sorozatok stabilizációs idejének vizsgálata és annak határeloszlásának meghatározása. A stabilizációs idő azt az evolúciós folyamatot írja le, amely során egy sorozat elemei diszkrét lépésekben csökkenő sorrendbe rendeződnek. Az ilyen típusú folyamatok alapvető jelentőséggel bírnak a valószínűségszámításban és a kombinatorikus modellekben, különösen olyan rendszerekben, ahol részecskék vagy elemek kölcsönhatásait vizsgáljuk.

A két típusú elemeket tartalmazó sorozatok esetén az evolúció folyamata jól ismert, és a diszkrét idejű TASEP (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process) modellként értelmezhető. Azonban három típusú elemek esetén az evolúciós szabályok általánosítása nem triviális, mivel az új típusú elemek bevezetése komplexebb interakciókat eredményez.

Vizsgált probléma

A dolgozatban a három típusú elemeket tartalmazó sorozatok stabilizációs idejét vizsgáljuk, különös tekintettel arra a speciális esetre, amikor a harmadik típusból csak egyetlen elem található a sorozatban. Ez a probléma különösen érdekes és nemtriviális, ugyanis a harmadik típusú elem bevezetése megváltoztatja az evolúció dinamikáját, amelynek következtében a stabilizáció ideje meghosszabbodik. A célunk az volt, hogy ezt a kiegészítő stabilizációs időt, az úgynevezett **többségi időt** (excess stabilization time) jellemezzük és annak határeloszlását különböző valószínűségi eloszlások mellett meghatározzuk.

A két típusú sorozatok stabilizációs idejére vonatkozó eredményekre támaszkodtunk, de azokat tovább általánosítottuk a három típusú esetekre. Az új megközelítéssel pontosan leírható, hogy a harmadik típusú elem hogyan befolyásolja a stabilizációs folyamatot, és milyen feltételek mellett alakul ki többségi idő.

Alkalmazott módszertan

A kutatás során valószínűségszámítási és sztochasztikus módszereket alkalmaztunk az evolúció modellezésére és elemzésére.

A legfontosabb módszerek a következők:

1. **Bolyongás (random walk):** Az evolúciós folyamatot véletlen bolyongásként modelleztük, ahol a sorozat elemei egymáshoz viszonyítva minden lépésben változnak.
2. **Brown-mozgás:** A határeloszlások meghatározására a véletlen bolyongások Brown-mozgással való kapcsolatát használtuk, többek között használtuk az erre vonatkozó Donsker tételt, illetve fontos szerepe volt a Brown-mozgás eloszlására vonatkozó első arkusszinusz tételnek is, továbbá a Brown-mozgás maximumhelyére vonatkozó szabályoknak is.
3. **Kritikus skálázás:** Megvizsgáltuk azokat az eseteket, amikor a valószínűségi paraméterek kritikus értékek környékén változnak, és kimutattuk, hogy az ilyen skálázásnál a többletidő valószínűsége pontosan a Brown-mozgás maximumhelyének eloszlásával fejezhető ki.

Kapott eredmények

A dolgozat fő eredményei a következők:

1. **Többletidő létezésének karakterizációja:** Ez a saját eredmény a dolgozat 4.4.-es Állításában (Proposition 4.4.) kerül kimondásra.
 - A többletidő létezése monoton függvénye az 1-es típusú elem kezdeti elhelyezkedésének.
 - A váltási hely (az a hely, amely előtt elhelyezkedve nincs többletidő, utána viszont van) karakterizálva lett. Ez a váltási hely legfeljebb $\sqrt{n}$ -es nagyságrendben térhet el a magasságfüggvény legbaloldalibb maximumhelyétől. Így az $\arg\max$ eloszlása közvetlenül megadja a többletidő valószínűségét.
2. **A többletidő határeloszlása különböző valószínűségek mellett:** Ez tekinthető a dolgozat egyik fő eredményének és a 4.2.-es és 4.3.-as Tételekben (Theorem 4.2., Theorem 4.3.) van precízen kimondva.

A következő konvergenciák teljesülnek a E_n (többletidő) valószínűségi változó eloszlására különböző p (2-es típus valószínűsége) értékek esetén:

- Ha $p > \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n = 1) = 1,$$

- Ha $p < \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n = 1) = 0,$$

- Ha $p = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n = 1) = \frac{1}{2},$$

- Ha $p = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n = 1) = \mathbb{E}[\operatorname{argmax}_{s \in [0,1]} B_s^\lambda].$$

3. **Két típusú esetekre vonatkozó új bizonyítás:** A két típusú sorozatok stabilizációs idejének határeloszlására vonatkozó ismert tételhez új, eltérő bizonyítást adtunk, amely a dolgozat függelékében található. Bár maga az eredmény nem új, a bizonyítás jelentősen különbözik az irodalomban találhatóától.

A célunk a régitől több elemben eltérő új bizonyítással a három típusos esetre való jobb általánosíthatóság volt, illetve a sorozat szintjén történő változások mélyebb megértése az evolúció során.

Következtetések és jövőbeli irányok

A dolgozat eredményei új megvilágításba helyezik a három típusú sorozatok stabilizációs folyamatát, és mélyebb betekintést nyújtanak a véletlen rendszerek dinamikájába. A többletidő karakterizációja és határeloszlása közötti kapcsolat, valamint a Brown-mozgás maximumhelyével való összefüggés új lehetőségeket nyit a több típusú rendszerek vizsgálatában az alkalmazott módszerek és eredmények alapjául szolgálók komplex rendszerek esetén, ahol különböző elemtípusok közötti interakciók játszanak szerepet.

A későbbiekben ezen kutatás több irányban is továbbfejleszthető, például több típusú sorozatok vizsgálatával.