



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK

TDK Dolgozat

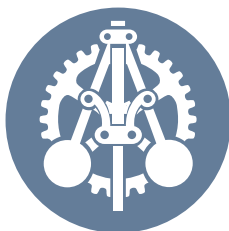
KAMMERER MÁRTON

Aszimmetrikus Poisson-tényezővel rendelkező hiperelasztikus
konstitutív modell fejlesztése polimer habokhoz

Konzulens:

Dr. Kossa Attila

egyetemi docens, tanszékvezető-helyettes



BUDAPEST, 2024

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretnék köszönetet mondani konzulensemnek, Kossa Attilának, akitől mindig pontos és precíz iránymutatást kaptam bármikor, amikor kérdéssel fordultam felé a dolgozat készítése során. Hálás vagyok, hogy iránymutatása révén lehetőségem nyílt megismerni a tudomány olyan oldalát amelyről korábban talán még álmodni sem mertem. Hálával gondolok arra az elmúlt immáron másfél évre, amelyet a mentorálása alatt tölthettem. Ezúton is szeretnék köszönetet mondani a Műszaki Mechanikai Tanszéknek, amiért megteremtette a lehetőséget a tudomány műveléséhez. Nagyra értékelem, hogy inspiráló és támogató környezetet biztosítottak és eszközökkel segítették a munkámat.

Hálás szívvel gondolok középiskolai szakmai tanáraimra is, akik elindítottak a gépészeti tudományok útján. Az ő elhivatott munkájuknak és ösztönző erejüknek köszönhető, hogy ma a Műegyetem tanulhatok. Szeretném megköszönni szüleimnek, hogy fáradhatatlan támogatásukkal és rendíthetetlen lelki támaszukkal segítettek át minden nehézségen, különösen a dolgozat kihívásokkal teli időszakában.

Hálás vagyok Bachrathy Dániel és Máté Péter szakmai tanácsaiért, az értékes beszélgetésekért és véleményekért. Továbbá köszönöm kollégiumi barátaimnak, hogy bármikor számíthattam támogatásukra és bátorító szavaikra; az ő segítségük nagyban hozzájárult a dolgozat megvalósulásához.

Jelen kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával valósult meg. Pályázati azonosító: FK 142457. Jelen TDK dolgozatban bemutatott tudományos eredmények az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatásával készültek.

Tartalomjegyzék

1. A dolgozat célkitűzése, probléma felvetés	1
2. Egyedi hajlítóberendezés tervezése	3
2.1. A mérés elrendezése	3
2.2. Reakció erőrendszer meghatározása nyúlásméréssel	4
2.3. A mérési eredmények	7
2.4. A deformált alak	9
3. Aszimmetrikus hiperelasztikus hab modell bevezetése	11
3.1. Elméleti összefoglaló	11
3.1.1. A kontinuum testek kinetikája	11
3.1.2. Feszültségek leírása	12
3.1.3. Hiperelasztikus modellek	13
3.1.4. Hyperfoam modell összenyomható anyagokra	15
3.2. Aszimmetrikus modell bevezetése	16
3.3. Feszültségmegoldások egytengelyű húzás és nyomás esetén	17
3.4. Analitikus megoldás a nyomaték – görbület összefüggésre	18
4. Anyagmodellek illesztése	22
4.1. Modellillesztési stratégiák	22
4.2. Egytengelyű húzó- és nyomóvizsgálat	23
4.3. Numerikus megoldás a nyomaték - görbület összefüggésre	30
4.4. A mért nyomaték-görbület összefüggés meghatározása	32
5. Végeselem számítások	35
5.1. A hajlítómérés végeselem modellje	35
5.2. UMAT fortran szubrutin	36
5.3. Szimulációs eredmények	39
5.3.1. Reakció erőrendszer	39
5.3.2. A keresztmetszet deformációja	40
6. Összegzés, konklúziók	43

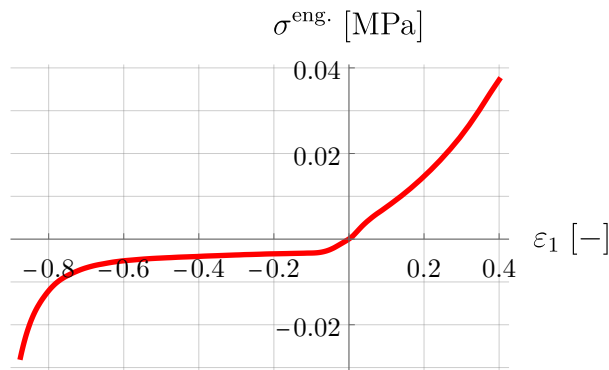
Absztrakt

A polimer habok viselkedése húzás és nyomás esetén jelentős eltérést mutat egytengelyű húzó- és nyomó igénybevétel esetén. Ez nem csupán az alakváltozás-feszültség kapcsolatban mutatkozik meg, drasztikus eltérés van a keresztirányú alakváltozásokban is. Ezeknek oka a különleges mikrostruktúrában keresendő, ahogy arra Gibson és Ashby munkájában rámutatott [1]. A gyakorlat azonban a mikromechanikai megközelítés bonyolultsága miatt inkább a kontinuum megközelítést alkalmazza habok konstitutív modellezésére, amely az anyagtörvényt főként fenomenológiai alapon fogalmazza meg. Alapvető problémája a gyakorlatban egyedülként alkalmazott modellnek, hogy míg a feszültséget kielégítő pontossággal leírja 3D esetben is, addig - a habok speciális mikrostruktúrájának következtében - a keresztirányú alakváltozásokban nagyot téved. Ezeknek az alakváltozásoknak a pontos modellezése elengedhetetlen és nagy jelentőséggel bírnak csúcstechnológiai alkalmazásokban, mint az autóülések szimulációja ütközések esetén, a repülőgép ülések [2] és orvosi ágyak tervezése. A dolgozat célja, hogy rámutasson egy újfajta anyagmodellezési stratégia szükségességére, és hogy ennek alkalmazásának irányába megtegye az első lépéseket.

A dolgozat a kereskedelmi végeselemes programokban legelterjedtebben használt hiperelasztikus hab anyagmodell, az Ogden–Hill-féle [3, 4] továbbfejlesztésével foglalkozik, melynek során kísérletet tesz a keresztirányú viselkedés pontosabb leírására aszimmetrikus anyagmodell alkalmazásával. A bevezetett konstitutív modell aszimmetriája a Poisson-tényező elkülönítéséből fakad húzás és nyomás esetére. Az eredeti és a módosított modellt analitikus és végeselemes számítások segítségével hasonlítottam össze. A számítások során azt a legegyszerűbb esetet vizsgáltam, amely során húzás és nyomás egyszerre figyelhető meg. Ez az eset a hajlítás. Annak érdekében, hogy a lehető legjobban elkerüljem az elmozdulások mérésében adódó pontatlanságokat, a hajlítómérést nagy méretben viteleztem ki, melyhez nagyméretű kísérleti berendezést terveztem és építettem. A konstitutív modellek paramétereinek illesztésére egytengelyű húzó- és nyomó mérések segítségével került sor.

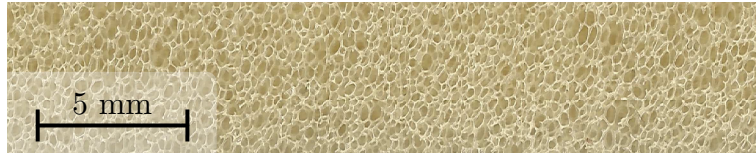
1. A dolgozat célkitűzése, probléma felvetés

Nyílt cellájú polimer habok viselkedése egytengelyű húzás és nyomás esetén rendkívül nagy eltérést mutat. Ez nem csupán a feszültség-alakváltozás kapcsolatban mutatkozik meg, drasztikus eltérés van az alakváltozásokban is. Egy ilyen, a dolgozat során vizsgált habnak a feszültség-alakváltozás kapcsolatát az 1.1 ábra mutatja mérési eredmények alapján¹. Nyomás esetén ($\varepsilon_1 < 0$) a nagy alakváltozások mellett is közel konstans feszültség



1.1. ábra. Mérnöki feszültség - alakváltozás diagram egy nyílt cellás habra.

ségen végbemenő alakváltozásnak (plató szakasznak) az oka a speciális mikrostruktúra (1.2 ábra). Ahogy azt Gibson és Ashby [1] megmutatta, ilyenkor az anyagban a cellaélek² kihajlanak, melyhez – a cellák hasonlóságának következtében – adott erő szükséges. Húzás esetén ($\varepsilon_1 > 0$) a cellaélek kihajlása nem várható, így 1.1 ábra is lényegesen kisebb nemlinearitásokat mutat ebben a szakaszban.



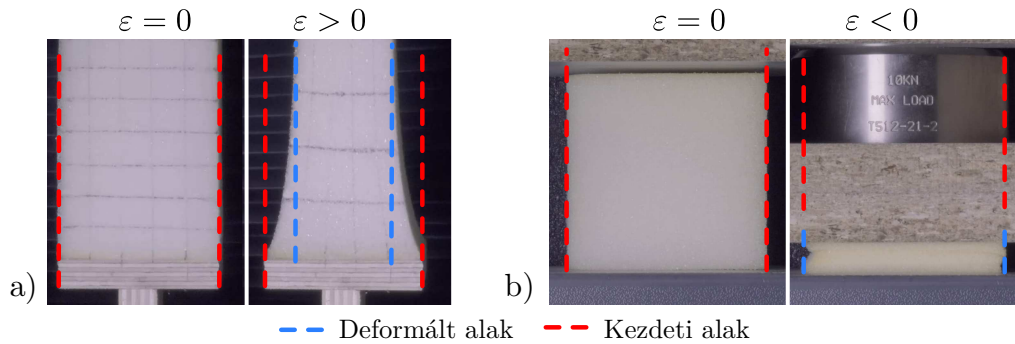
1.2. ábra. A vizsgált nyílt cellás polimer hab mikrostruktúrája.

Hasonlóképpen, mikromechanikai megközelítéssel a keresztirányú alakváltozások jellegét is megsejthetjük, amennyiben belátjuk, hogy nyomás esetén a kihajlások véletlenszerű irányban történnek: az eredő keresztirányú alakváltozás kellően nagy cellasűrűség esetén közelítőleg zérus (1.3 ábra). Ezt a közelítést a szakirodalom egységesen elfogadja és alkalmazza [5, 6]. Ugyanakkor, húzás esetén a keresztirányú elmozdulás minden cellában a cella belső tere felé irányul, tehát makroszkopikusan keresztirányú alakváltozást fogunk tapasztalni. A keresztirányú alakváltozásokat a rugalmasságtanban a Poisson-tényező segítségével, míg véges alakváltozások esetén Poisson-függvénnyel [7] szokták jellemezni.

Az Ogden–Hill-féle hiperelasztikus anyagmodellt használjuk térfogatilag összenyomható polimer habok konstitutív modellezésére. Ez a kereskedelmi végeelem szoftverekben alkalmazott legösszetettebb anyagmodell habokra. Mint azt látni fogjuk, létezik egy olyan

¹A dolgozat során decimális elválasztóként tizedes pontot alkalmazok a különböző szoftverekkel való konzisztencia miatt.

²Nyílt cellás habok esetén a cellafalak a felületi feszültség minimalizálásának következtében eltűnnek, a struktúrát a cellaélek alkotják.



1.3. ábra. Keresztirányú alakváltozások szemléltetése a) húzásra, b) nyomásra.

felírási módja, ahol a modellben egy megadott Poisson-tényezőt használunk az anyag leírására, azonban ez az egyszerűsített megközelítés nem képes reprodukálni a Poisson-tényező duális jellegét (másként viselkedik húzásra és nyomásra a leírt hab esetén). Ha a modellt tetszőlegesen magas rendben írjuk fel, az akkor sem lesz képes leírni ezt a duális jelleget. Ez egy olyan probléma, melyre eddig a szakirodalomban csak kevés utalást/megjegyzést tettek, *megoldást azonban még nem adtak*. A dolgozat elsődleges célja, hogy egy kísérleti modellt alkosson, mellyel a Poisson-tényező duális jellege leírható összenyomható polimer habokra. Az új, aszimmetrikus hiperelasztikus modell eredményeit összehasonlítom az eredeti, módosítatlan konstitutív modellel, hogy megállapítható legyen, mennyiben sikerült előrelépést elérni. Ennek érdekében a dolgozatban sor került

- kísérleti hajlítóberendezés tervezésére és építésére,
- a hajlítás során fellépő reakció-erőrendszer mérésére alkalmas műszerezésre,
- új, a Poisson-tényezőkben aszimmetrikus anyagmodell bevezetésére,
- egytengelyű húzó- és nyomómérésekre,
- anyagjellemzők paraméterillesztésére,
- végelem szimulációkra.

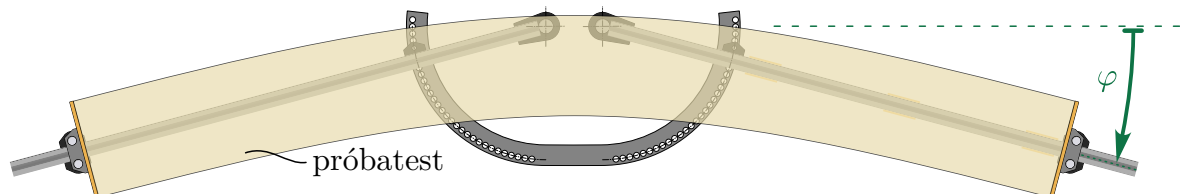
2. Egyedi hajlítóberendezés tervezése

Szükséges olyan méréseket végezni, amely során a módosított anyagmodell összehasonlítható az eredeti modellel. Egy ilyen mérésnek a Poisson-tényező duális jellegét megfelelően karakterizáló mérésnek kell lennie, húzásnak és nyomásnak egyszerre kell jelen lennie benne. Emellett szükséges a keresztirányú alakváltozások megfelelő mérhetőségét is biztosítani. Erre a célra a legegyszerűbb igénybevétel az egyenes hajlítás. Annak érdekében, hogy a keresztirányú alakváltozások könnyen mérhetőek legyenek, célszerű nagy próbatestet használni hajlításhoz, ugyanis így a keresztirányú elmozdulások a könnyedén mérhető, 1-10 mm nagyságrendbe esnek. Erre amiatt is szükség van, mert a próbatest anyagát nagyon könnyű véletlen mérés során összenyomni, ami pontatlan mérést eredményez. Ennek a hatása nagy méretű próbatest esetén elenyészik.

2.1. A mérés elrendezése

Hajlító mérések³ berendezéseit rendszerint úgy szokták megtervezni, hogy a próbatestben az igénybevétel tiszta hajlítás legyen. Ennek oka, hogy ilyenkor a mezőfüggvények (elmozdulás, alakváltozás, feszültség) legegyszerűsödnek, az analitikus megoldások zárt alakban röviden megadhatóak, az anyagjellemzők egyszerűen számíthatók. Fontos azonban hangsúlyozni, hogy ennek a mérésnek nem az anyagjellemzők meghatározása a célja, hanem kísérleti adatok felvétele, melyek segítségével a későbbiekben az anyagmodellek összehasonlíthatóak. Ezek szerint elég, ha megbízhatóan, megismételhetően, jól modellezhetően és mérhetően hozunk létre különböző alakváltozási állapotokat a próbatestünkben. Véges alakváltozásokra habok esetére nincsen általánosan alkalmazott hajlítóvizsgálati módszer. Ezeknek megfelelően egy hajlítómérési berendezést terveztem és építettem, melynek az alkatrészeit én gyártottam.

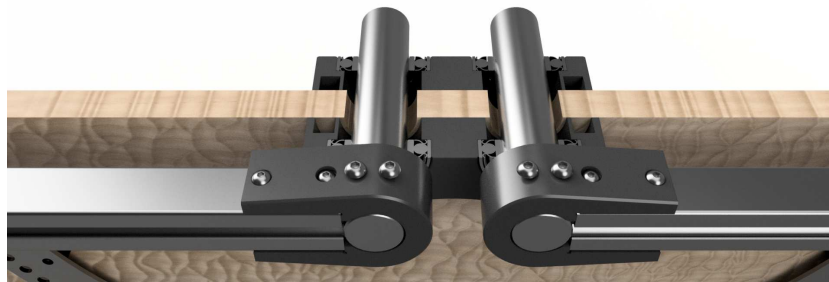
Ezeknek a követelményeknek megfelelő egy lehetséges és megépített mérési elrendezést a 2.4 ábra mutatja. A próbatest egy $200 \times 200 \times 2000$ milliméteres négyzet keresztmetszetű egyenes hasáb, amely nyílt cellás poliuretán tömbből lett kivágva. A befogott végkeresztmetszetek körív mentén, 3° -os osztással rögzíthetőek (melyet a φ szög jelöl a 2.1 ábrán), így adottak a kinematikai peremfeltételek; a végkeresztmetszet ismert helyzetbe kerül a mérés során. Ezek a kinematikai peremfeltételek könnyen megadhatóak végeselem szoftverekben is. A végkeresztmetszeteken ébredő reakció-erőrendszer megállapítására – kihasználva a mérési elrendezés szimmetriáját – nyúlásmérő bélyeg csoportok lettek elhelyezve a mérőgép egyik karján. Ezeknek kalibrálási módszerére a következő alfejezet tér ki.



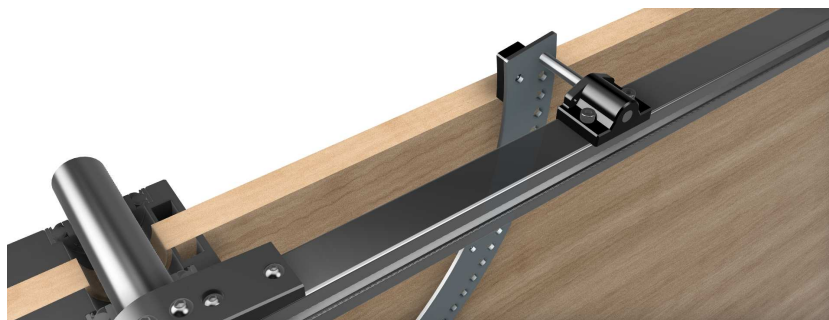
2.1. ábra. A hajlítógép vázlatos elrendezése, karok szöghelyezete φ -vel jellemezve.

³A hajlítóérések alapjait már az ókori Római Birodalom idején lefektették, amikor fából, kőből és kötélből készült szerkezeteket teherbírását vizsgálták. A modern hajlításelmélet kidolgozása azonban csak a 16-18. században kezdődött el Leonardo da Vinci, Galileo Galilei, a Bernoulli család és Leonhard Euler munkássága révén.

A berendezés karjain - szögállástól függően - különféle igénybevétel lép fel a kar önsúlyából, a próbatest önsúlyából és a reakció-erőrendszertől függően. Ezen karok a merevség és az egyszerű szerelhetőség érdekében *Bosch 3030 alumíniumprofilból* készültek. A merevséghez ilyen nagy, 1100 mm hosszú karok esetén elengedhetetlen volt a megfelelő csapágyazás. A karok 2-2 6006 számú mélyhornyú golyóscsapággal lettek ágyazva a 2.2 ábrán látható elrendezésben. A karok szakaszos rögzítésének kivitelezését a 2.3 ábra mutatja. A lézervágott furatos koszorú segítségével 3° -os osztással lehet a karokat rögzíteni. A gép váza – mivel csak csekély terhelés éri és nagy méretben készül – 13 mm-es falamezből készült. Számos alkatrész 3D nyomtatott, de a kívánt merevség elérése érdekében néhány alkatrész esetén karbonszálás poliamid alapanyagot is használtam. A nyúlásmérés adat-rögzítésre PC és Arduino segítségével került sor, melyek sorosporton kommunikáltak. A nyúlásmérő bélyeg csoportokon mérhető V_S jelfeszültség-változást *HX711* analóg-digitál konverter segítségével olvastam. Ezeket a konverter modulokat széles körben alkalmazzák súlymérési és nyúlásmérési feladatok megvalósítása során.



2.2. ábra. A hajlítógép karjainak csapágyazása metszetben ábrázolva

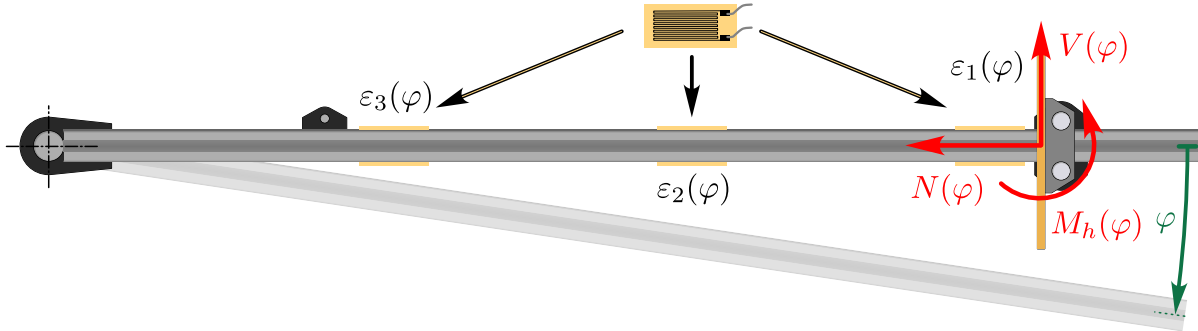


2.3. ábra. A hajlítógép karjainak szakaszos rögzítésének megoldása illesztett furatban csúszó csappal.

2.2. Reakció erőrendszer meghatározása nyúlásméréssel

A próbatest két vége befogott, így a reakció-erőrendszer általános: nyomaték és két, egymásra merőleges síkbeli koncentrált erő ébredhet, amennyiben síkfeladatként tekintünk rá. A nyúlásmérés célja ezeknek a meghatározása. Ennek a három független mennyiségnek a mérésére három nyúlásmérési adatra van szükség, így ez a három mérőcsoport a 2.4 ábrán látható módon lett elhelyezve. A mérési elrendezés alapján a geometriai adatok ismeretében meghatározható az egyes mérési helyeken mért alakváltozás és a reakció-erőrendszer közötti egyértelmű kapcsolat. Fontos továbbá megjegyezni, hogy minden összefüggés a

terhelő erőrendszer és az alakváltozások között lineáris. Ezt a továbbiakban fel lehet használni.

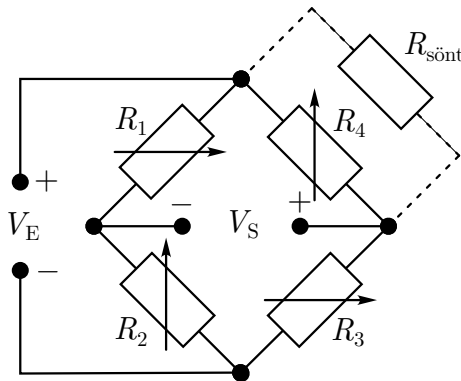


2.4. ábra. A hajlítógép egyik karjának ábrája feltüntetve a nyúlásmérés helyét. A hab próbatest eltávolítva, a reakció-erőrendszer jelölve.

Nyúlásmérő bélyegek kalibrálására két bevett módszert szoktak alkalmazni [8]:

1. Virtuális alakváltozás létrehozása söntellenállással (indirekt módszer),
2. Ismert erőrendszer hattatása a berendezésre (direkt módszer).

A legtöbb műszer rendeltetésszerű használata során nem lehetséges a kalibráció direkt módszerrel, mivel egy pontosan ismert terhelést sokszor nehéz vagy lehetetlen létrehozni (nyomás, nyomaték, stb.). A leginkább praktikus kalibrációs vagy validációs eljárás az indirekt módszer, amikor egy virtuális alakváltozást hozunk létre a nyúlásmérő bélyegen. Ezt a Wheatstone-hídba (2.5 ábra) párhuzamosan bekötött (söntölt) ismert ellenállással lehet a legkönnyebben elérni. Ezen módszerek közül a direkt módszert célszerű alkalmazni, amennyiben lehetséges, mivel itt a fizikai jellemző és a mért érték között közvetlen kapcsolatot állapíthatunk meg.



2.5. ábra. Wheatstone-híd, nyúlásmérő bélyegek változtatható ellenállásként jelölve.

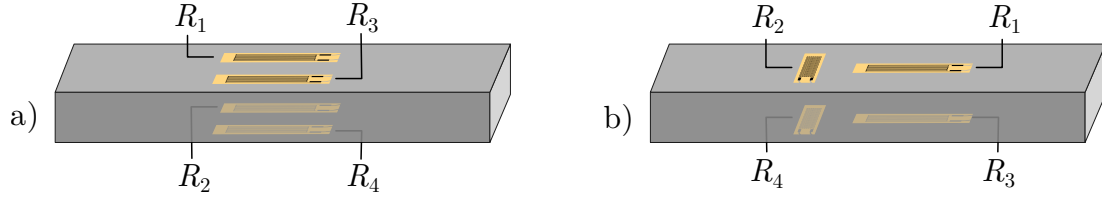
A Wheatstone-híd egyensúlyi állapotban van (azaz $V_S = 0$), ha

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}. \quad (2.1)$$

Amennyiben a híd nincsen egyensúlyban egy ΔR_i nagyságú ellenállás változás hatására, akkor

$$V_S = V_E \left(\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2} - \frac{R_4 + \Delta R_4}{R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4} \right) \quad (2.2)$$

nagyságú feszültség mérhető a híd két ága között. Az alkalmazott nyúlásmérő bélyeg csoport konfigurációkat a 2.6 ábra mutatja.



2.6. ábra. Nyúlásmérő bélyeg konfigurációk. a) 1-es és 3-as csoport, b) 2-es csoport.

A mérések során *KYOWA KFC-5-C1-11* nyúlásmérő bélyegek lettek alkalmazva, melyek névleges ellenállása $R_0 = 120 \pm 0.3 \Omega$, a gauge factor pedig $GF = 2.16 \pm 1\%$. A gauge factor megmutatja, hogy a bélyeg ellenállás-változása mekkora alakváltozásnak feleltethető meg:

$$GF = \frac{\Delta R/R}{\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Mivel minden egyes nyúlásmérő bélyeg azonos paraméterekkel rendelkezik és a konfigurációkat a 2.6 ábra szerinti, 2.2 egyenlet a következőre egyszerűsödik egyenes hajlításra a) konfigurációval:

$$V_S^{(a)} = V_E \frac{\Delta R}{R_0}, \quad (2.4)$$

ahol R_0 a névleges ellenállás. Tiszta húzásra és nyomásra a b) konfigurációból adódik, hogy

$$V_S^{(b)} = V_E \left(\frac{\Delta R(1 - \nu)}{2R_0 + \Delta R(1 - \nu)} \right), \quad (2.5)$$

ahol ν a kar anyagára jellemző Poisson-tényező. Belátható, hogy az a) konfiguráció esetén húzásra és nyomásra, míg b) konfiguráció esetén egyenes hajlításra nem mérhető V_S feszültség. Ennek figyelembevételével 2.4 ábrán látható 1-es és 3-as mérőcsoport a) típusú, míg a 2-es mérőcsoport b) típusú konfigurációban lett beépítve. Így a reakciókomponensek elméletileg elkülöníthetők egymástól és különböző nyúlásmérő bélyeg csoportokon mérhetők. A valóságban azonban az elemek rugalmasságából adódóan a normál igénybevétel nem lesz független a többi terheléstől.

Kifejezetten alkalmas ilyenkor a direkt kalibrálási módszeren belül illesztéssel kalibrálni. Ilyenkor az olvasott érték és a felhelyezett igénybevétel között keressük a kapcsolatot, az alapegyenletekből adódóan lineáris alakban. Így a kar anyagtulajdonságait, a geometriai méreteket, és a *HX711 AD konverternek* az átviteli függvényét implicit módon vesszük figyelembe. Keressük a kalibrációs konstansokat a mért értékek lineáris kombinációja alapján. A cél tehát meghatározni

$$\underbrace{\mathbf{F}}_{=[N \ V \ M_h]} = \mathbf{X} \underbrace{\mathbf{S}}_{=[S_1 \ S_2 \ S_3]} \quad (2.6)$$

egyenlet $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ konstans mátrixát felépítő elemeit. $\mathbf{F}$ vektort alkotják a létrehozott igénybevételek, $\mathbf{S}$ vektort pedig az egyes mérőcsoportokon olvasott értékek. Kifejthetjük 2.6 egyenletet első sorára a következőképpen is:

$$N = [S_1 \ S_2 \ S_3] \cdot [X_{11} \ X_{12} \ X_{13}]^T. \quad (2.7)$$

n darab mérési adat esetén a felírhatjuk 2.7 egyenletet mátrixos alakban is:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & S_{n3} \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{S}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{X}_1}. \quad (2.8)$$

Meghatározhatjuk tehát 2.8 egyenlet szerint X_{1i} , ($i = 1, 2, 3$) kalibrációs konstansokat, ha invertáljuk $\mathbf{S}_1$ mátrixot. Nemnégyzetes mátrixok invertálásához a *Moore-Penrose* pszeudoinverz számítást használhatjuk. Ennek jele egy tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^+$. Kiterjesztve ezt 2.6 egyenlet 2. és 3. sorára, $\mathbf{X}^T$ konstans mátrix oszlopai a következőképpen állnak elő:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{S}_1^+ \mathbf{N}, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{S}_2^+ \mathbf{V}, \quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{S}_3^+ \mathbf{M}. \quad (2.9)$$

Az így meghatározott $\mathbf{X}$ konstans mátrixot használhatjuk, hogy tetszőleges $\mathbf{S}$ mérési adat esetén meghatározzuk a reakció-erőrendszert 2.6 egyenlet szerint.

2.3. A mérési eredmények

A mérőrendszer kalibrálása után meg kell határozni még a kar önsúlyának hatását. A $\varphi = 0^\circ$ szögpozíciót referenciahelyzetnek tekintve felvettem az egyes $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$ intervallumon az önsúlyból adódó kimeneti jel értékeket. Mérés során hasonlóan, ha a $\varphi = 0^\circ$ pozíciót tekintjük referenciaállapotnak, akkor az egyes mért értékből az önsúly hatását levonva, megkapjuk az erőrendszer hatását. Kényelmi okokból ebből nem próbálom eliminálni az próbatest önsúlyának hatását, azt ugyanis a VEM szimuláció során figyelembe lehet venni.

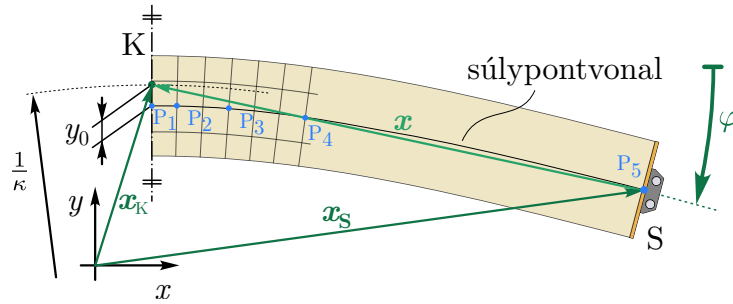
A mérés során (2.7 ábra) adott szöghelyzetben az adatrögzítés és a szöghelyzet-változtatás között min. 20 másodperc telt el. Az előzetes mérések alapján ekkor már – mivel csak kis szögváltozások voltak egyes mérések között – a feszültségrelaxáció hatása minimális. Az aktuális geometria meghatározására a mérés során nagyfelbontású (8K)



2.7. ábra. Hajlítómérés, $\varphi = 30^\circ$ -hoz tartozó deformált alak fényképe.

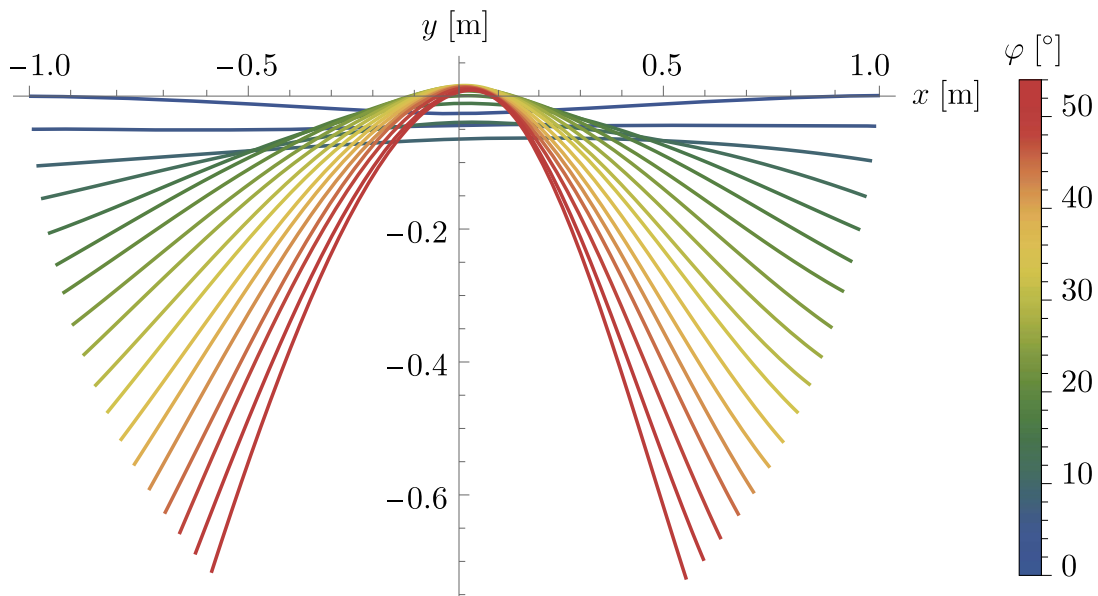
felvételeket készítettem *Fujifilm X-H2* videokamera, *FUJIFILM XF16-80mm f /4 R OIS WR* objektív és *Atomos Ninja Ultra* külső videójel rögzítőeszköz segítségével. A próbatestre készített háló segítségével a súlypontvonal (2.8 ábra) meghatározható, ám a semleges

szál nem, mivel az eltolódik a súlypontvonalhoz képest. Ez közvetlen következménye a feszültség-alakváltozás aszimmetrikus jellegének (1.1 ábra) húzás és nyomás esetén. A súlypontvonal számítások során használt P_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) pontjainak geometriai koordinátáit képfeldolgozás segítségével határoztam meg (*Inkscape*, *Python*, *Mathematica*). A megállapított pontok interpolációs görbéit a 2.9 ábra mutatja. A semleges szál helyzetét a K keresztmetszetben leíró $\mathbf{x}_K$ vektort csak akkor tudjuk meghatározni az ismert pontok segítségével, ha ismerjük az $y_0 = y_0(\kappa)$ semleges szál eltolódását leíró függvénykapcsolatot.



2.8. ábra. A hajlítómérés geometriai adatai.

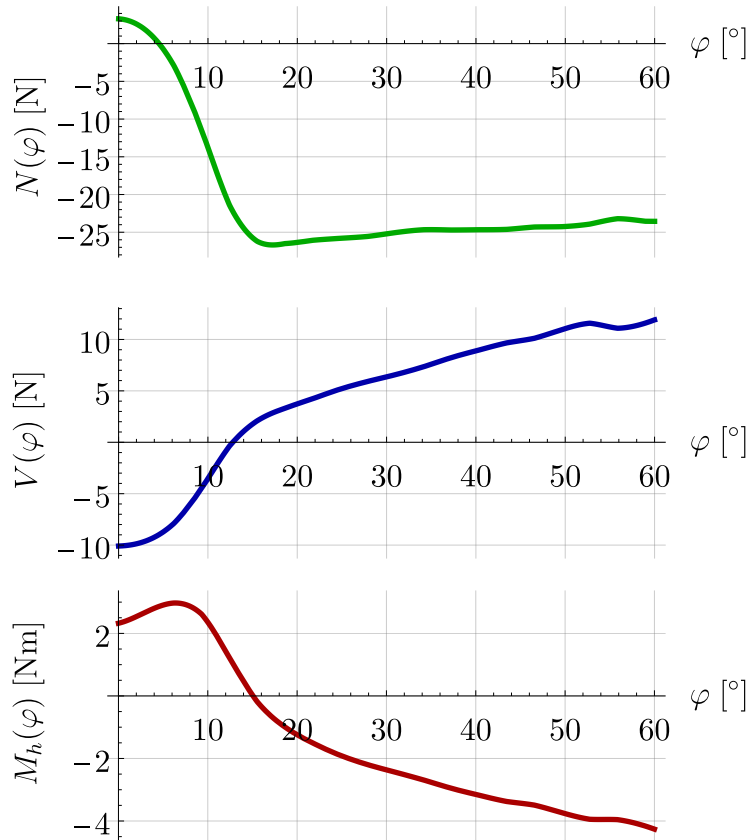
A nyomaték-görbület összefüggés előállításához elég, ha a gerenda mentén azt egy pontban határozzuk meg. Ennek következtében a teljes semleges szál alakját a későbbiekben nem határoztam meg, mivel erre nincs szükségem az anyagmodellek összehasonlítására. A nyomaték-görbület összefüggés meghatározásához az így egy adott keresztmetszetenél (célszerűen a gerenda középső keresztmetszetén) mérhető görbület és szögpozíció (φ) volt a bemenő adat.



2.9. ábra. Képfeldolgozással megállapított interpolációs súlypontvonalak.

A kiválasztott keresztmetszetben fellépő nyomaték – melynek pontos számítására csak később lesz lehetőség – a mérőgép által mért reakció-erőrendszer segítségével történik. Az elvégzett mérés alapján a kar önsúlyától függetlenül, ám a próbatest önsúlyát tartalmazó reakció-erőrendszer-szögpozíció kapcsolatát a 2.10 ábrák mutatják. A mért értékek

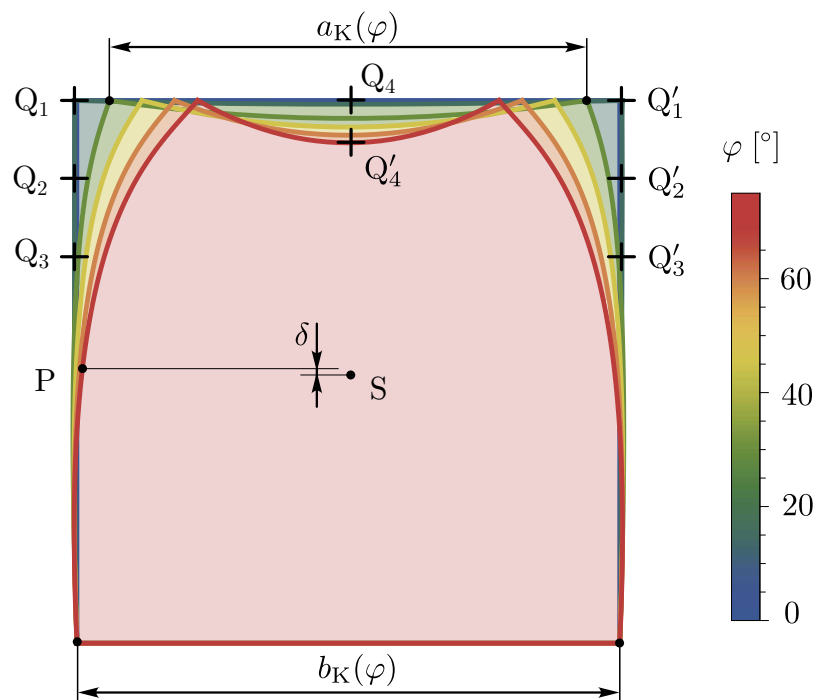
értelmezése nehézkes: több nemlineáris hatás rétegződik. Míg az anyagtulajdonság jelentősen nemlineáris, addig erre még ráakodik az önsúly miatt fellépő, a szögpozíció függvényében szinuszosan változó terhelés.



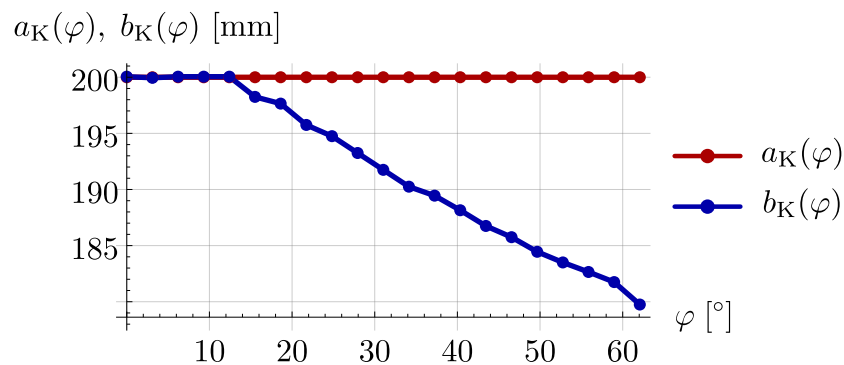
2.10. ábra. A hajlítómérés reakció-erőrendszere az alkalmazott φ szögelfordulás függvényében.

2.4. A deformált alak

A bevezetett hiperelasztikus aszimmetrikus anyagmodell pontosságának megállapítására felhasználtam a deformált K keresztmetszet geometriai alakját. A geometria meghatározására előre bejelölt pontok távolságát mértem le tolómérővel ($\overline{Q_i Q'_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$). A keresztmetszet jelleghelyes geometriáját a 2.11 ábra mutatja φ szögpozíció függvényében, ahol látható $a_K(\varphi)$ és $b_K(\varphi)$, a keresztmetszet jellemzésére használt méret is. Kvantitatívan ezeket az értékeket a szögelfordulás függvényében a 2.12 ábra mutatja. A mérések alapján $b_K(\varphi)$ közelítőleg konstans érték (ahogyan azt az ábra is mutatja), amely a keresztmetszet eredeti szélessége. Erre a jellemző méretre azért van szükség, mert mint azt látni fogjuk, ezt nem minden alkalmazott anyagmodell tudja reprodukálni. A keresztmetszetek geometriájának meghatározására a felvett pontokra interpolációs Bézier-görbéket illesztettem. Fontos hangsúlyozni, hogy nem a teljes görbe karakterisztikát használtam az összehasonlításhoz, hanem csak $a_K(\varphi)$ és $b_K(\varphi)$ jellemző méretet.

2.11. ábra. A K keresztmetszet jelleghelyes geometriája, elmozdulások $\times 4$ nagyítva.

Megjegyezendő, hogy a súlypontvonalak meghatározását hiba terheli. 2.11 ábrán jelölt P pont helye ugyanis a keresztmetszet jelentős torzulása esetén nem azonos magasságban található az aktuális keresztmetszet súlypontjával. Ez a hiba 2.11 ábrán δ -val van jelölve, melynek hatása (2.11 ábrán az elmozdulások nagyítása $\times 4$) elhanyagolható.

2.12. ábra. A K keresztmetszet jellemző méreteinek függése az elfordulási szögtől (φ).

Kis meghajlítási szögek esetén ($\approx 0-15^\circ$ tartományban) a K keresztmetszet deformációja nagyon kicsi. Itt a 2.12 ábrán látható módon a jellemző méretek változása nagyon nehezen mérhető továbbá elhanyagolható.

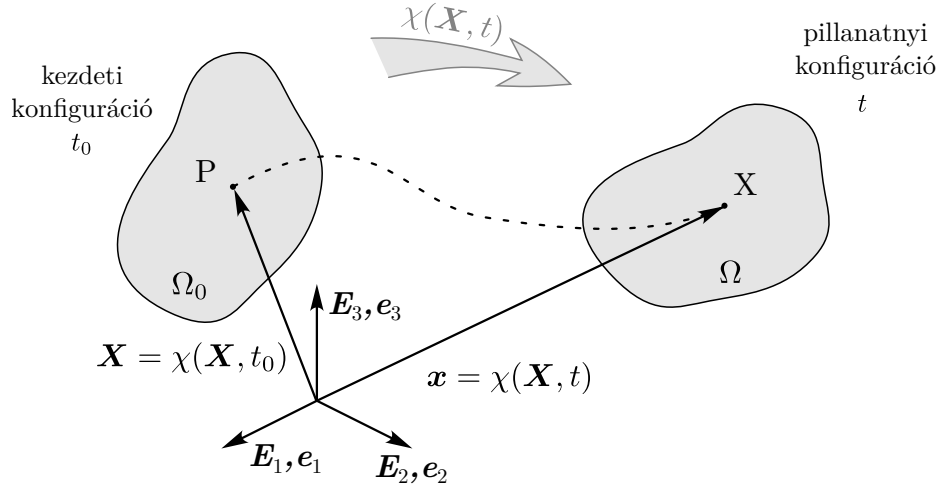
3. Aszimmetrikus hiperelasztikus hab modell bevezetése

3.1. Elméleti összefoglaló

A bevezetni kívánt asszimmetrikus hiperelasztikus anyagmodell tárgyalásához elengedhetetlen a kontinuummechanika releváns fejezeteinek rövid összefoglalása.

3.1.1. A kontinuum testek kinetikája

Polimer habok nagymértékű alakváltozást és deformációt szenvednek el használatuk során. Ilyen esetekben az alakváltozásnak (például húzás esetén) a megnyúlással a kapcsolata nemlineáris, leírására a kontinuummechanika eszközeit használhatjuk. Egy ilyen, kezdetben Ω_0 térrészt elfoglaló kontinuum számosságú részecskéből álló test általános mozgását mutatja a 3.1 ábra. A test egy adott P pontjába a kezdeti konfigurációban az $\mathbf{E}_i$ ortonor-



3.1. ábra. A kezdeti és a pillanatnyi konfiguráció szemléltetése.

mált bázissal megadott $\mathbf{X}$, míg a pillanatnyi konfigurációban az $\mathbf{e}_i$ ortonormált bázissal megadott $\mathbf{x}$ helyvektor mutat. A különböző konfigurációban használt bázisok célszerűen azonosak, azaz egymással. Bármely $\mathbf{X}$ helyvektorral megadott pontra a mozgást megadja a $\chi(\mathbf{X}, t)$ leképezés az idő függvényében. A pillanatnyi konfigurációban a testnek P pontját ezen leképezés segítségével tudjuk megadni:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t). \quad (3.1)$$

Ennek a kezdeti hely szerinti deriváltja központi szerepet tölt be a deformációk leírásában és alakváltozási gradiensnek nevezzük (deformation gradient):

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \mathbf{x} \otimes \nabla. \quad (3.2)$$

Belátható, hogy segítségével kapcsolat teremthető az infinitezimális vonalelemek, felületelemek és térfogatelemek között a kezdeti és pillanatnyi konfigurációban:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{A} = J\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{A}_0, \quad dV = JdV_0, \quad (3.3)$$

ahol J az alakváltozási gradiens determinánsa, a térfogati hányados. 3.3₂ egyenletet *Nanson*-formulának is szokás nevezni. Az infinitezimális vonalelem négyzetének segítségével bevezethető a jobb,- és a baloldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzor ($\mathbf{C}$ és $\mathbf{b}$):

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad (3.4)$$

Ezek a másodrendű tenzorok természetesen hely és időfüggők ($\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$). A Lagrange-i mennyiségek konzekvensen nagybetűvel, míg az Euleri mennyiségek kisbetűvel vannak jelölve. Bevezethetők $\tilde{\mu}_i$, ($i = 1, 2, 3$) mennyiségek, mint $\mathbf{C}$ és $\mathbf{b}$ deformációs tenzorok sajátértékei, melynek segítségével megadhatóak λ_i főnyúlások (principle stretches):

$$\lambda_i = \sqrt{\tilde{\mu}_i}. \quad (3.5)$$

Szokás definiálni λ_i főnyúlásokat $\mathbf{F}$ poláris felbontásából adódó $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ nyújtási tenzorok sajátértékeiként is. A nyúlás (fajlagos ívhossz változás) általánosan megadható ε mérnöki alakváltozás segítségével is,

$$\lambda = \varepsilon + 1. \quad (3.6)$$

Fel lehet bontani multiplikatív módon az alakváltozást egy térfogat-változás nélküli (izochor) és térfogatváltozást okozó részre:

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}. \quad (3.7)$$

Az izochor rész egységesen felülvonással van jelölve. Felírható továbbá az izochor főnyúlás is,

$$\bar{\lambda}_a = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

Ezeknek a mennyiségek a későbbiekben lesznek felhasználva a bevezetett aszimmetrikus hiperelasztikus anyagmodell UMAT implementálásához.

3.1.2. Feszültségek leírása

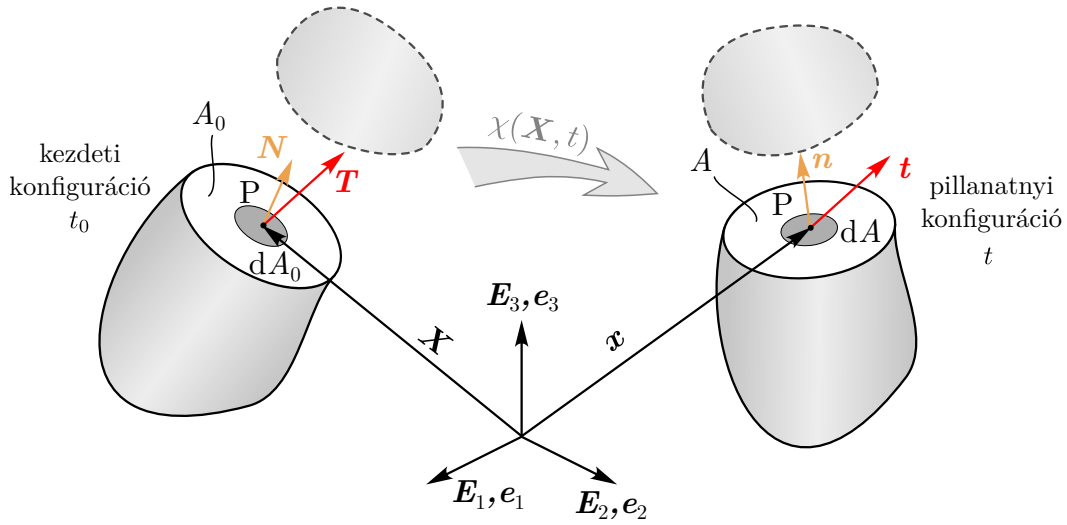
Kontinuum testek mozgása és deformációja hatására a testek és azok különböző récskéi között mechanikai kölcsönhatás lép fel. Az egyik következménye ezeknek a kölcsönhatásnak a mechanikai feszültség. A 3.2 ábrán látható vizsgált test a kezdeti konfigurációban ($t = 0$) Ω_0 térrészt foglal el. Vágjuk el ezt a testet a vizsgált P ponton átmenő, a testhez lokálisan rögzített $\mathbf{N}$ normálisú síkkal. A P pont körül a kezdeti konfigurációban kijelölhetünk egy dA_0 infinitezimális felületelemet, amely a $\chi(\mathbf{X}, t)$ leképezés hatására (ez jelen esetben egy működő erőrendszer hatására létrejövő mozgást és deformációt ír le térben és időben) dA felületelemmé megy át a pillanatnyi konfigurációban.

Ilyenkor az átvágással megszüntetett anyagi kapcsolatot a P pont körül helyettesíthetjük egy $d\mathbf{f}$ erővel a pillanatnyi konfigurációban, amely

$$d\mathbf{f} = t dA \quad (3.9)$$

alakban áll elő, ahol $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ a Cauchy-féle feszültségvektor. A Cauchy feszültségi tétel szerint létezik egy és csakis egy olyan $\boldsymbol{\sigma}$ másodrendű tenzormező, mellyel $\mathbf{t}$ feszültségvektor kifejezhető, mint

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \quad (3.10)$$



3.2. ábra. Feszültségvektorok.

ahol σ a Cauchy-féle feszültségi tenzor. Ehhez hasonlóan, analóg módon vezethető be $\mathbf{P}$ első Piola–Kirchhoff-féle feszültségi tenzor, amely a $d\mathbf{f}$ pillanatnyi konfigurációban értelmezett erővektor és a kezdeti konfigurációban értelmezett $\mathbf{N}$ normálisú síkon értelmezett dA_0 infinitezimális felületelem között teremt kapcsolatot:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P}N dA_0 = \mathbf{P}d\mathbf{A}_0, \quad \mathbf{t} = \mathbf{P}\mathbf{N}. \quad (3.11)$$

Az ilyen tenzorokat, amelyek egy koordináta-rendszerből egy másikba képeznek kétpont-tenzornak (two point tensor) nevezzük. Az első Piola–Kirchhoff-féle feszültségi tenzor mellett kétponttenzor $\mathbf{F}$ alakváltozási gradiens is. A Nanson-formula, 3.9, 3.10 és 3.11 egyenlet segítségével $\mathbf{P}$ és σ között kapcsolat teremthető, amennyiben a feszültségvektorokat integráljuk A_0 illetve A felületre. Így kapható az összefüggés, hogy

$$\mathbf{P} = J\sigma\mathbf{F}^{-T}. \quad (3.12)$$

Bevezethető továbbá a Kirchhoff-féle feszültségi tenzor is:

$$\boldsymbol{\tau} = J\sigma = \mathbf{P}\mathbf{F}^T. \quad (3.13)$$

3.1.3. Hiperelasztikus modellek

Néhány anyag, mint például a gumik vagy bizonyos habok nagy alakváltozásnak tehető ki, úgy, hogy az alakváltozás folyamata során csak rugalmas deformációt szenvednek. Amennyiben a terhelést eltávolítjuk, az alakváltozás teljesen visszaállítható maradó alakváltozás nélkül. Az ilyen anyagokat hiperelasztikusnak (vagy Green elasztikusnak) nevezzük. Gumik és bizonyos habok mellett számos biológiai szövet és természetes polimer is modellezhető hiperelasztikus anyagként.

Általánosságban egy hiperelasztikus anyagmodellt egy skalár értékű W alakváltozási energiasűrűség függvény ír le. A hiperelasztikus anyagok mechanikai reverzibilissége posztulálja, hogy ez az alakváltozási energiasűrűség kizárólag a deformáció gradiens függvénye (homogén anyag esetére) [9, c. 6.1]:

$$W = W(\mathbf{F}). \quad (3.14)$$

Mivel az első Piola-Kirchhoff feszültségi tenzor munka konjugáltja a deformáció gradiens, idő szerinti deriváltja:

$$\dot{W} = \mathbf{P} : \frac{d\mathbf{F}}{dt} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}. \quad (3.15)$$

Kiindulva az alakváltozási energiasűrűség definíciójából, az idő szerinti deriváltja felírható, mint

$$\dot{W}(\mathbf{F}) = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}}. \quad (3.16)$$

Összehasonlítva 3.15 és 3.16 egyenletet, állítható, hogy

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}. \quad (3.17)$$

Mivel W objektív (értéke független a vizsgált koordináta-rendszertől), a poláris felbontás segítségével írható, hogy

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{R}\mathbf{U}) = W(\mathbf{U}), \quad (3.18)$$

ahol $\mathbf{R}$ egy speciális ortogonális ("proper orthogonal", $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\det(\mathbf{R}) = +1$) forgatási mátrix és a $\mathbf{U}$ a jobboldali nyújtás tenzor. A deformáció gradienssel elméletileg tökéletesen és egyértelműen le tudnánk írni egy anyagmodell, ám a deformáció gradiens viselkedése sokszor nem intuitív (például összenyomható esetben), így hasznos lehet kifejezni W függvényt más alakváltozási tenzor függvényeként. Annak következtében, hogy $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, felírható egy $\tilde{W}$ alakváltozási energiasűrűség függvény, melyre

$$W(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{C}). \quad (3.19)$$

Belátható [9], hogy az energiasűrűség-függvény ekvivalens módon felírható $\mathbf{C}$ skalár invariánsaival *izotrop anyagokra*, melyek

$$I_1(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad (3.20)$$

$$I_2(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)), \quad (3.21)$$

$$I_3(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2. \quad (3.22)$$

Hasonló megfontolásból felírható az energiasűrűség-függvény a főnyúlások segítségével is (3.5 egyenlet). Ekkor az első Piola-Kirchhoff-féle főfeszültségek

$$P_i = \frac{\partial W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.23)$$

Ezek segítségével felírható az így adódó feszültségi állapot tenzoriális formában is,

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^3 P_i \hat{\mathbf{n}}_i \otimes \hat{\mathbf{N}}_i, \quad (3.24)$$

ahol $\hat{\mathbf{n}}_i$ a pillanatnyi, míg $\hat{\mathbf{N}}_i$ a kezdeti konfigurációban értelmezett főirányok egységvektorai.

3.1.4. Hyperfoam modell összenyomható anyagokra

Szilárd polimerek különböző tulajdonságairól általánosan elmondható, hogy jelentős nemlineárisokat tartalmaznak és számos vizsgálatnak alá kell vetni őket, hogy pontosan modellezni tudjuk. Polimer habok a speciális mikrostruktúra következtében méginkább nemlineárisan viselkednek. A nagy térfogati alakváltozások esetén viselkedésük megfelelően csak nagyon limitált számú hiperelasztikus modellel írható le. Jelenleg egy olyan térfogatilag összenyomható hiperelasztikus modell létezik, amelyet széleskörben elfogadottnak tekintenek polimer habon modellezésére, ez az (összenyomható) Ogden-Hill hiperelasztikus modell. Széles körben alkalmazzák polimer habok anyagmodelleként [10, 11], de alkalmazzák speciális anyagokra is, például a parafára [12] vagy agyi szövetek modellezésére [13]. Számos diszciplína alkalmazza az anyagmodellt, használják például az orvoslásban [14, 15] és a sportszerek tervezésénél [16, 17] is. A modellt R.W. Ogden alkotta meg 1984-ben [3], majd R. Hill [18] és Storåkers [4] pontosította⁴. A modell elnevezése nem egységes, az ABAQUS kereskedelmi végelem szoftver "hyperfoam" néven tartalmazza. A W alakváltozási energiasűrűség függvényét a következő formában adja meg [19, 20]:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 + \frac{1}{\beta_i} (J^{-\alpha_i\beta_i} - 1) \right), \quad (3.25)$$

ahol λ_j ($j = 1, 2, 3$) a főnyúlás, J a térfogati hányados, N az illesztés rendje, α_i, μ_i, β_i illesztési paraméter; α_i és β_i egyaránt mértékegység nélküli mennyiség. Különböző végelem szoftverekben az egyes paraméterek között kisebb eltérés lehet, ezekre mindenféleképpen különös figyelmet kell fordítani. Az ABAQUS β_i paraméter helyett ν_i paramétert használ a modell megadásánál, melynek a relációja β_i -vel

$$\nu_i = \frac{\beta_i}{1 + 2\beta_i}, \quad \beta_i = \frac{\nu_i}{1 - 2\nu_i}, \quad (3.26)$$

ahol $\nu_i = \nu$ esetén a Poisson-tényező. Az anyagi tulajdonságot jellemző paramétereket nem lehet tetszőlegesen megválasztani. A $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ körüli linearizálással a kis alakváltozásokra használt Hooke-törvényt kell kapnunk. Összevetve a linearizált modellt a Hooke-törvénnyel [20, 21], megállapítható, hogy

$$G = \sum_{i=1}^N \mu_i, \quad K = \sum_{i=1}^N 2\mu_i \left(\frac{1}{3} + \beta_i \right), \quad (3.27)$$

ahol G a csúsztató rugalmassági modulus, K pedig a térfogati rugalmassági modulus. Mivel linearizálás esetén ezeknek a paramétereknek pozitívnak kell adódnuk a következő feltételekkel szűkíthető a paraméterillesztési tartomány:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i > 0, \quad \sum_{i=1}^N 2\mu_i \left(\frac{1}{3} + \beta_i \right) > 0. \quad (3.28)$$

Egy egyszerűen alkalmazható feltételt kapunk, ha 3.28₂ egyenlőtlenséget úgy fogalmazzuk meg, hogy $\beta_i > -\frac{1}{3}$, azonban ekkor egy szükségtelenül szigorú feltételt kapunk.

⁴Az 1970-es években a gumyszerű anyagok mechanikai anyagmodellezése iránti igény számos hiperelasztikus anyagmodell megjelenését eredményezte. Az Ogden modell és annak továbbfejlesztése a hiperelasztikus anyagmodellek területén jelentős előrelépés volt. Kezdetben gumyszerű anyagokra lett bevezetve, majd kiterjesztették, mint például polimer habokra.

3.2. Aszimmetrikus modell bevezetése

Egytengelyű húzó- és nyomóvizsgálatok során azt állapíthatjuk meg polimer habokról, hogy míg nyomásra a Poisson-tényező közelítőleg zérus (1.3 ábra), addig húzásra közelítőleg konstans ν érték (ez a megfigyelés 4.2 fejezetben lesz alátámasztva). Ahogyan azt láthattuk, a Poisson-tényező fizikai tartalmát a *hyperfoam* modellbe csak akkor tudjuk beleépíteni, ha megkötjük, hogy $\nu_i \equiv \nu$. Ha húzás esetén $N = 1$ modellre szorítkozunk, ez a feltétel automatikusan teljesül. Mint látni fogjuk, húzás esetén $N = 1$ modellt alkalmazni több szempontból is célszerű választás. A Poisson-tényezők duális jelenségnek a leírására tetszőlegesen magas rend esetén sem képes a *hyperfoam* modell, ν paraméter (1D esetre szorítkozva) nem függ a λ_1 főnyúlástól. Célszerű lenne egy olyan modellt létrehozni ennek megoldására, amely ν paraméterében egy kapcsolót tartalmaz, így mind a nyomás, mind a húzás esetén tapasztalható jelenséget le tudná írni. Ennek a megfigyelésnek matematikai megfogalmazására részekben definiált függvényt hozhatunk létre, ahol W alakváltozási energiasűrűség függvényt különbözőképpen írjuk le. Így tehát a megfigyelésünket a következő formában fogalmazhatjuk meg:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} W^c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), & \psi < \psi_{\text{crit}}, \\ W^t(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), & \psi > \psi_{\text{crit}}, \\ \frac{1}{2} (W^c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + W^t(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)), & \psi = \psi_{\text{crit}}, \end{cases} \quad (3.29)$$

ahol a "c" index a nyomásra (compression), míg a "t" index a húzásra (tension) utal. ψ a feladat eldöntésére szolgáló skalárértékű állapotjellemző ("húzás" vagy "nyomás"). A függvény harmadik tagjának ($\psi = \psi_{\text{crit}}$) létjogosultsága az átmenettel kapcsolatos. Míg 1D esetben az átmenet matematikailag "sima", addig tetszőleges 3D feszültségi állapotban az átmenet történhet szakadással, melyet a harmadik tag a "kisimít". A ψ állapotjelző megválasztásának problémája analóg az egyenértékű feszültségek meghatározásának problémájával: egy másodrendű tenzorból ($\mathbf{F}$ és $\boldsymbol{\sigma}$) szeretnénk képezni egy skalárt (ψ és σ_{egy}), amelyet össze akarunk hasonlítani egy határértékkel (ψ_{crit} és σ_{meg}). Ennek a feladatnak nincsen egyértelmű megoldása. A következő lehetőségek adódnak, hogy eldöntsük, hogy a feladat húzás, vagy nyomás jellegű:

1. Mohr-féle egyenértékű feszültség (Tresca) alapján a legnagyobb főnyúlás (λ_1) és a legkisebb főnyúlás (λ_3) különbségének vizsgálata, tehát $\psi = \lambda_1 - \lambda_3$. Ekkor $\psi_{\text{crit}} = 0$. Amennyiben $\lambda_1 - \lambda_3 > 0$ a feladat húzás, amennyiben $\lambda_1 - \lambda_3 < 0$, a feladat nyomás.
2. $J = \det(\mathbf{F})$ térfogati hányados vizsgálata. Ekkor $\psi = J$ és $\psi_{\text{crit}} = 1$. Amennyiben $J > 1$, a feladat húzás, amennyiben $J < 1$ a feladat nyomás.

A dolgozat során a 2. pontban leírt, J -re felírt kritériumot fogom alkalmazni. Ekkor számos egyenlet leegyszerűsödik.

A válasszuk meg nyomás esetére a $\nu_i = \nu^c$ Poisson-tényezőt azonosan zérusnak. Ekkor 3.26₂ egyenlet szerint $\beta_i \equiv 0$ és 3.25 egyenlet jobboldalának térfogati részének határértéke⁵, amint $\beta_i \rightarrow 0$:

$$\lim_{\beta_i \rightarrow 0} \frac{1}{\beta_i} (J^{-\alpha_i \beta_i} - 1) = -\alpha_i \ln(J). \quad (3.30)$$

⁵Ez a határérték L'Hôpital szabály segítségével egyből belátható. A L'Hôpital szabályt a bevezetett modell numerikus implementációjánál célszerű használni a numerikus szingularitások elkerülése végett.

Így tehát felírható a nyomás esetén alkalmazott W^c alakváltozási energiasűrűség, mint

$$W^c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 - \alpha_i \ln(J)). \quad (3.31)$$

Húzás esetén ha elsőrendű modellt írunk fel, automatikusan teljesül, hogy $\nu_i = \nu$. Elsőrendű modell húzás esetére kielégítő módon le tudja írni a feszültségeket, itt csak csekély nemlinearitások találhatók (1.1 ábra). Általános 3D feszültségi állapotban elsőrendű modell használata jelentős limitációt jelenthet, azonban a dolgozatban vizsgált esetekben ez nem jelentkezik. Amennyiben szükséges volna, húzásra is definiálható N -edrendű modell, de ez a modellillesztés során nagyságrendekkel megnehezíti azt ([20, 22], 3.3 alfejezet). Ha $N = 1$ -re szorítkozunk, akkor

$$W^t(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{2\mu}{\alpha^2} \left(\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha + \lambda_3^\alpha - 3 + \frac{1}{\beta} (J^{-\alpha\beta} - 1) \right), \quad (3.32)$$

ahol β paraméter 3.26₂ egyenlet segítségével hozható kapcsolatba ν Poisson-tényezővel. Fontos megjegyezni, hogy W^t modellben alkalmazott α és μ paraméter nem feltétlen egyezik meg W^c modellben alkalmazott α_i és μ_i paraméterekkel. A két modell egy adott anyagra történő illesztése külön történik. Mindez után a felírt aszimmetrikus modell, melyet a dolgozat során alkalmazok

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 - \alpha_i \ln(J)), & J < 1, \\ \frac{2\mu}{\alpha^2} \left(\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha + \lambda_3^\alpha - 3 + \frac{1}{\beta} (J^{-\alpha\beta} - 1) \right), & J > 1, \\ \frac{1}{2} (W^c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + W^t(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)), & J = 1. \end{cases} \quad (3.33)$$

3.3. Feszültségmegoldások egytengelyű húzás és nyomás esetén

Egytengelyű igénybevételek esetére a feszültség megoldásokra szükség lesz mérések illesztésénél. A feszültségeket a 3.33 modell szerint külön-külön ki kell számítani húzásra és nyomásra, az aszimmetria miatt ezek nem egyeznek meg egymással. Egy tetszőleges, első Piola–Kirchhoff-féle főfeszültség a *hyperfoam* modell alapján általánosan

$$P_k = \frac{\partial W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_k} = \sum_{i=1}^N \frac{2}{\lambda_k} \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left(\lambda_k^{\alpha_i} - J^{-\alpha_i \beta_i} \right), \quad (k = 1, 2, 3). \quad (3.34)$$

Nyomás esetére, amennyiben tekintjük $\beta_i = 0$ esetet adódik

$$P_1^c = \sum_{i=1}^N \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} - 1). \quad (3.35)$$

Azonos eredményt kapunk akkor is, ha a 3.33 aszimmetrikus modell W^c komponensét parciálisan deriváljuk λ_1 főnyúlás szerint:

$$P_1^c = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i} \left(\lambda_k^{\alpha_i-1} - \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \lambda_1} \right). \quad (3.36)$$

Felhasználva, hogy

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_T \equiv 1, \quad (3.37)$$

a tengelyirányú első Piola-Kirchhoff főfeszültség

$$P_1^c = \sum_{i=1}^N \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} - 1). \quad (3.38)$$

Húzás esetére a megoldás már nem ennyire egyszerű, mivel a keresztirányú alakváltozások (λ_T) és az első főnyúlás (λ_1) közötti a kapcsolat meghatározása szükséges a J térfogati hányados megadásához. Ha a bevezetett modell szerint az anyagi viselkedést húzásra elsőrendű anyagmodellel kívánjuk leírni, akkor a kapcsolat egyértelműen meghatározható. Ilyenkor

$$J = \lambda_1 \lambda_T^2, \quad \lambda_T = \lambda_1^{-\nu}, \quad (3.39)$$

amely a pillanatnyi Poisson-tényező definíciójából következik. Felhasználva 3.26₂ egyenletet,

$$P_1^t = \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu}{\alpha} (\lambda_1^\alpha - \lambda_1^{-\alpha\nu}). \quad (3.40)$$

Fontos megjegyezni, hogy 3.39₂ egyenlet $\nu_i \equiv \nu$ esetén is *csak* $N = 1$ esetén alkalmazható, ellenkező esetben a $P_T = 0$ (keresztirányú feszültségek nagysága zérus) kritériumot illesztés során figyelembe kell venni [20]. Ez egy olyan kritérium, melynek teljesülni kell most is, tehát ellenőrizni kell 3.35 és 3.40 egyenletre is. Nyomás esetén mivel $\lambda_T \equiv 1$, a keresztirányú első Piola-Kirchhoff feszültség

$$P_T^c = \sum_{i=1}^N \frac{2}{\lambda_T} \frac{\mu_i}{\alpha_i} \underbrace{(\lambda_T^{\alpha_i} - 1)}_{=0} = 0 \quad (3.41)$$

feltétel automatikusan teljesül N -ed rendű modellre. Húzás esetén 3.40 egyenlet szerint megadott elsőrendű modellre a keresztirányú feszültség

$$P_T^t = \frac{2}{\lambda_T} \frac{\mu}{\alpha} (\lambda_T^\alpha - \lambda_1^{-\alpha\nu}) = \frac{2}{\lambda_T} \frac{\mu_1}{\alpha} \underbrace{(\lambda_1^{-\alpha\nu} - \lambda_1^{-\alpha\nu})}_{=0} = 0 \quad (3.42)$$

csakugyan automatikusan teljesül, viszont csak $N = 1$ modellre.

3.4. Analitikus megoldás a nyomaték – görbület összefüggésre

Oldjuk meg 3.33 aszimmetrikus modellt hajlítás során fellépő hajlítónyomaték – görbület összefüggésre. Amennyiben feltételezzük, hogy a nyírás mértéke elhanyagolható hajlítás során, akkor egy vizsgált K keresztmetszetben csak normálfeszültség fog ébredni: az igénybevétel egytengelyű lesz, ahol a semleges felület (elkövetkezőkben semleges szál) fogja elválasztani a húzott és a nyomott oldalt. Alkalmazhatjuk tehát az előző fejezetben levezetett feszültségi összefüggéseket. Ez alapján a feszültség minden esetben meghatározható, mint

$$P_1 = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} - 1) & J < 1, \\ \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu}{\alpha} (\lambda_1^\alpha - \lambda_1^{-\alpha\nu}) & J > 1, \\ \frac{1}{2} (P_1^t + P_1^c), & J = 1. \end{cases} \quad (3.43)$$

Mivel általános esetben kifejezhető a J térfogati hányados az egyes főnyúlások szorzataként is,

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (3.44)$$

Nyomásra $J = \lambda_1$, úgyhogy a kritérium helyettesíthető vele. Húzásra azonban az eddigi megkötésekkel $J = \lambda_1^{1-2\nu}$. Mivel értékéről csak el kell döntenünk, hogy nagyobb-e, mint 1, kritériumként helyettesíthetjük λ_1 -gyel. $J = 1$ kritérium hasonló megfontolással váltható $\lambda_1 = 1$ -re. Vegyük továbbá észre, hogy egytengelyű feszültségi állapotban $J = 1$ esetén az aszimmetrikus modell húzott és nyomott fele is azonosan zérus értéket ad, tehát a modellünk felírható a következő, egyszerűsített alakban:

$$P_1 = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} - 1) & \lambda_1 < 1, \\ \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu}{\alpha} (\lambda_1^\alpha - \lambda_1^{-\alpha\nu}) & \lambda_1 > 1, \\ 0, & \lambda = 1. \end{cases} \quad (3.45)$$

Vizsgáljuk egy hajlított gerenda egyensúlyát. Eltekintve az időtől való függéstől, a következő egyensúlyi egyenleteket tudjuk felírni síkbeli esetben:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_{Sz} = 0. \quad (3.46)$$

Tehát 3.3 ábra alapján az egyensúlyi egyenletek a következő integrálegyenletek formájában írhatók fel:

$$\int_{(A_0)} P_1 dA_0 = 0, \quad (3.47)$$

$$0 = 0, \quad (3.48)$$

$$M - \int_{(A_0)} P_1 y dA_0 = 0. \quad (3.49)$$

Mivel hajlítás esetén feltételezhetjük, hogy az 3.3 ábrán szereplő z tengely mentén a feszültségi állapot nem változik és, hogy a súlypontvonal oldallapon való eltolódását elhanyagoljuk (2.11 ábra, δ hiba elhanyagolható), a kiszámítandó felületi (vagy kettős) integrálokat átírhatjuk a következő alakra:

$$b \int_{-c}^c P_1 dy = 0, \quad (3.50)$$

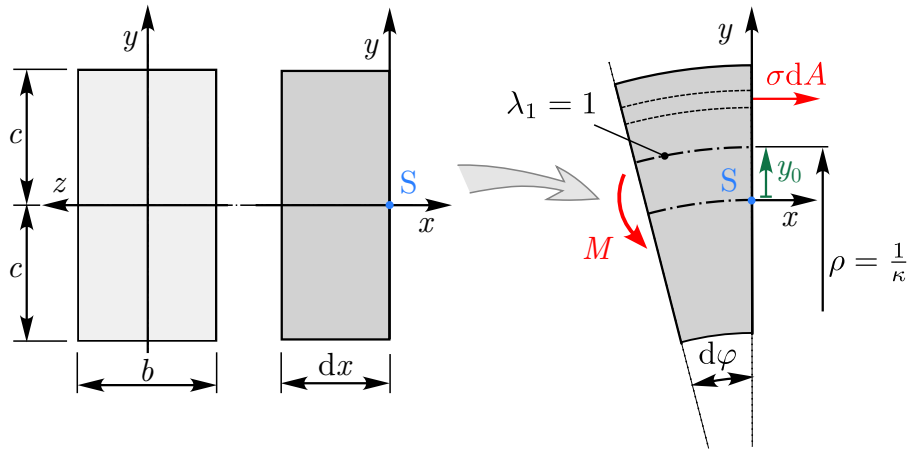
$$0 = 0, \quad (3.51)$$

$$M - b \int_{-c}^c P_1 y dy = 0. \quad (3.52)$$

Belátható továbbá [23], hogy az Euler-Bernoulli hipotézis⁶ véges alakváltozások esetén is alkalmazható, azaz az egyes keresztmetszetek – nagyon jó közelítéssel – síkok maradnak az alakváltozás folyamata során, továbbá merőlegesek maradnak a semleges szálra. Erről vizuálisan is meg lehet győződni a hajlító mérés során készített felvételtől (2.7 ábra). Ezen feltételezések segítségével felírhatjuk a főnyúlást (fajlagos ívhossz változást, λ_1) a semleges száltól való távolsággal és annak görbületével (κ),

$$\lambda_1 = 1 + (y - y_0)\kappa. \quad (3.53)$$

⁶Vagy ahogy Bojtár megfogalmazta *A szilárdságtan nagy tudósai* című munkájában történelmi perspektívára hivatkozva: Leonardo-Mariotte-Jacob Bernoulli-Euler-Parent-Navier-Saint Venant hipotézis.



3.3. ábra. Egy kiragadott infinitezimális hosszúságú gerendaelem.

Amint azt a 3.53 egyenlet megformálásából láthatjuk, a semleges szál (vagy felület) nem feltétlen esik egybe a keresztmetszetek súlypontvonalával. Ez közvetlen következménye a habok különböző viselkedésének húzás és nyomás esetén. Ez a jelenség hasonlóképpen jelenik meg a képlékenységtan számos anyagánál [24], így a hajlítás hasonló módon vezethető le itt is. Mindez után a 3.47 egyenletet használhatjuk, hogy a görbület és a semleges szál eltolódása közötti összefüggést meghatározzuk, majd a 3.52 egyenlettel kapcsolatot teremthetünk a görbület és a keresztmetszetet terhelő nyomaték között. Mivel tudjuk, hogy $y < y_0$ esetén $\lambda_1 < 1$, 3.47 egyenlet kifejezhető 3.45 összefüggés segítségével, mint

$$b \left[\int_{-c}^{y_0} \sum_{i=1}^N \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} - 1) dy + \int_{y_0}^c \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu}{\alpha} (\lambda_1^{\alpha} - \lambda_1^{-\alpha}) dy \right] = 0, \quad (3.54)$$

ahol a nyúlás kifejezhető y függvényeként 3.53 egyenlet segítségével. Szabjuk meg feltétlenül integráláshoz, hogy $\alpha_i \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Elvégezve a határozott integrálást egy olyan egyenletre jutunk, amit tetszőleges anyagi paraméterek esetén nem tudunk megoldani a görbületre vagy a semleges szál eltolódására⁷. Az egyenlet numerikus megoldására van mód, amennyiben ismerjük az anyagi viselkedést leíró paramétereket. Egyszerűsíti azonban a helyzetet, hogy a görbület meghatározható tartományban vehet csak fel értékeket. A nyomott oldalon $\det(\mathbf{F}) = J = \lambda_1 = 0$ szinguláris eset helyén felvett görbület jelenti annak felső határát, míg alsó határát a nem görbült, zérus érték. A felső határt 3.53 összefüggéssel adhatjuk meg, amikor a szinguláris helyet $y = -c$ -ben keressük. Első becslésre alkalmazhatjuk, hogy az anyag húzásra végtelen merev. Ekkor a semleges szál eltolódik $y_0 = c$ helyre (a gyakorlatban ez ennél természetesen kisebb). Ekkor a becslés a maximum görbületre megadható a

$$\kappa_{\max} = \frac{1}{2c} \quad (3.55)$$

összefüggéssel, ahol c a keresztmetszet jellemző magassága. Valós habok esetén a görbület felső határa ettől az értéktől nagyobb lesz, pontos értéke iterációval határozható meg. Beláttuk tehát, hogy 3.47 egyenlet gyökeit numerikusan véges tartományon kell csak keresni

⁷Analitikus megoldása a problémának elképzelhetővé válik, ha az anyagi paraméterek számát szűkítjük az α_i paramétereken keresztül, melyeket pozitív egészeknek adunk meg. Ekkor a gyökvonás elvégezhető és analitikus eredményhez juthatunk. Ilyenkor a paraméterillesztés pontosságának rovására analitikusan megoldhatóvá tettük az egyenletet.

κ görbület szerint. Elvégezve az integrálokat 3.54 egyenletben, a megoldást

$$\begin{aligned} & \frac{2b\mu}{\kappa\alpha^2\nu} \left((1 + c\kappa - \kappa y_0)^{-\alpha\nu} + \nu((1 + c\kappa - \kappa y_0)^\alpha - 1) \right) + \\ & \sum_{i=1}^N \frac{2b\mu_i}{\kappa\alpha_i^2} (1 + \alpha_i \ln(1 - \kappa(c + y_0)) - (1 - (1 - \kappa(c + y_0))^{\alpha_i})) = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

kifejezés alapján kell numerikusan keresni y_0 -ra. A modellt nyomásra harmadrendben fogom alkalmazni ($N = 3$), ekkor amennyiben ismerjük a 9 anyagi paramétert ($\alpha, \mu, \nu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$) és a keresztmetszetre jellemző b és c paramétert akkor numerikusan megadható az $y_0(\kappa)$ összefüggés. A hajlítási feladatok során számos helyen előjön ez az összefüggés, emiatt meghatározása fontos. Erre az anyagi paraméterek meghatározása után kerül sor.

4. Anyagmodellek illesztése

4.1. Modellillesztési stratégiák

A modellek illesztésének célja, hogy a meglévő mérési pontokra a kiválasztott modellt úgy illesszük, hogy az a céljainknak legjobban megfeleljen. Számos modellel kellő pontosság elérhető a vizsgált tartományban, így általánosan egy adathalmazra nem lehet definiálni "legjobban" illeszkedő modellt, de még meghatározott követelmények mellett is nehéz "legjobbat" meghatározni. Célszerű a modellezés során meghatározni egy tartományt, ahol a modelltől a legnagyobb pontosságot várjuk el. Ilyenkor az alkalmazás szempontjából irreleváns részekben a modell ugyan pontatlan lehet, viszont kellő pontosság elérhető a vizsgált tartományban. Ennek eszköze a hibafüggvény tudatos megválasztása. Szükségszerű továbbá, hogy a modellezés olyan mérési eredmények alapján történjen, ahol az alkalmazástól várható feszültségi állapot közel esik a méréséhez. Emiatt, mivel a dolgozat nagy hangsúlyt fektet a hajlításra, a modellillesztést egytengelyű húzó és nyomómérésre végzem.

A modellek illesztése egy skalárértékű hibafüggvény definiálásból és annak minimalizálásából áll. A hibafüggvény kiválasztása a modelltől elvárt követelmények szerint történik. A dolgozatban a következő általánosan alkalmazott hibafüggvények lesznek felhasználva:

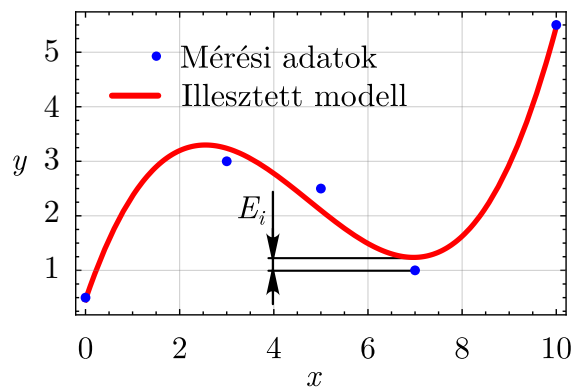
HIBÁK NÉGYZETÖSSZEGE (SSD):

$$E_{SSD} = \sum_{i=1}^n (P_i^{mért} - P^{fgv}(\lambda_i^{mért}))^2, \quad (4.1)$$

RELATÍV HIBÁK NÉGYZETÖSSZEGE (SSRD):

$$E_{SSRD} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i^{mért} - P^{fgv}(\lambda_i^{mért})}{P_i^{mért}} \right)^2, \quad (4.2)$$

ahol E a hibafüggvényt jelöli és n a mérési pontok számát.



4.1. ábra. A görbeillesztés elemi hibájának értelmezése.

Relatív hibafüggvények alkalmazása különösen akkor fontos, amikor alacsony feszültség értékeknél akarunk jó illeszkedést elérni a modellel és/vagy magas feszültség értékeknél a feszültség jelentős ütemben nő. Ilyenkor relatív hibafüggvények előnyösebb illesztést tehetnek lehetővé.

Amennyiben egy bizonyos hibafüggvényt alkalmazunk azonos elemszámú adatsorokra történő illesztéshez, a hibafüggvény megtalált minimum értéke alkalmas az illesztések minőségének összehasonlítására. Amennyiben az adatsorok hossza vagy az illesztés hibafüggvénye különbözik, egy egységes mérőszámra van szükség, amely megmutatja az illesztés minőségét. Erre a célra a determinációs együtthatót (R^2) alkalmazom, amely a következőképpen van definiálva:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (P_i^{\text{mért}} - P^{fgv}(\lambda_i))^2}{\sum_{i=1}^n (P_i^{\text{mért}} - \bar{P}^{\text{mért}})^2}, \quad (4.3)$$

ahol $\bar{P}^{\text{mért}}$ a mért első Piola–Kirchhoff feszültségértékek számtani közepe.

Mindezek után egy tetszőleges függvényre elvégezhető az illesztés, melynek lényege az alkalmazott hibafüggvény minimalizálása. Ilyenkor a modell paramétereitől függő hibafüggvény globális minimumának való megkeresése a cél. Annak következtében, hogy az így kapott függvények rendkívül bonyolultak és instabilak tudnak lenni, analitikus megoldása rendszerint nem lehetséges. Különböző szélsőérték keresési algoritmusok [25] alkalmazása a kézenfekvő módszer. Wolfram Mathematica *NMinimize*[] függvényét alkalmaztam, amely robusztus megoldás tetszőleges szélsőértékkeresési feladatokra [25]. Az algoritmusnak rendszerint "*RandomSearch*" volt kiválasztva, így elkerülve a minimalizálás lokális szélsőértékeken történő "megakadását". A függvény lehetőséget ad feltételes szélsőérték keresésre, így fizikai tartalommal bíró paraméterek fizikailag lehetséges tartományra szűkíthetők. Ahogyan az a 3.1.4 fejezetben meg lett mutatva, ilyen kritérium, hogy

$$\sum_{i=1}^N \mu_i > 0, \quad \sum_{i=1}^N 2\mu_i \left(\frac{1}{3} + \beta_i \right) > 0. \quad (4.4)$$

Fizikailag elfogadható paramétereket csak akkor kaphatunk, ha további feltételeket ellenőrziünk. Egy lehetséges vizsgálat a paraméterstabilitás megállapítására a *Drucker* stabilitásvizsgálat [26]. Kimondja, hogy minden $d\mathbf{h}$ logaritmikus Hencky alakváltozás növekménynek az alakváltozási energiasűrűség függvény értékén növelni kell,

$$d\boldsymbol{\tau} : d\mathbf{h} > 0, \quad (4.5)$$

ahol $\boldsymbol{\tau}$ a Kirchhoff-féle feszültségi tenzor. Ezt a vizsgálatot az ABAQUS anyagi paraméter illesztője automatikusan elvégzi és megadja azt a tartományt, melyen különböző igénybevételekre (egytengelyű húzás, nyomás, kéttengelyű húzás, stb.) az anyagi paraméterekkel a modell stabil.

A következő fejezetben ezeket az illesztési stratégiák lesznek alkalmazva, hogy meghatározzuk a 3. fejezetben bevezetett modell paramétereit.

4.2. Egytengelyű húzó- és nyomóvizsgálat

A *hyperfoam* modell illesztésénél általános irányelv, hogy a modellt minimum két különböző mérési módszerrel meghatározott adataira illesszük [22]. Az így illesztett modellek sokkal robusztusabbak, sokkal pontosabb eredményeket tudnak adni akár az illesztéstől

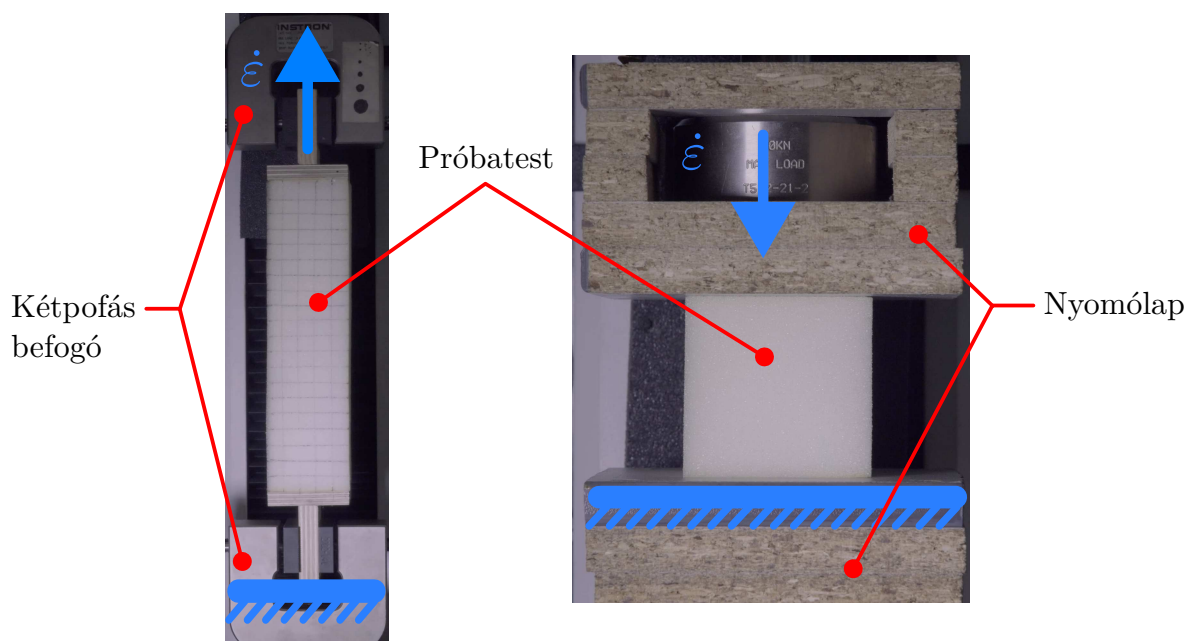
eltérő feszültségi állapot esetén is. Ezek a mérések jellemzően egy- és kéttengelyű húzó- és nyomó és tiszta nyíró vizsgálatok. Jelen dolgozatban is két különböző mérésre végzem el az illesztést, mégpedig egytengelyű húzó- és nyomómérésre. Ezek a vizsgálatok azok, melyek által létrehozott feszültségi állapot legközelebb áll a hajlítás karakterisztikájához.

Az egytengelyű húzó és nyomómérést egyaránt *INSTRON 3345* egyoszlopos szakítógépen végeztem a *Műszaki Mechanikai Tanszék* laboratóriumában. A mérőgép a terhelést *INSTRON 2519-107* 5 kN erőmérő cella segítségével méri. Nyomóvizsgálat esetén egy, a nyomás felületét megnövelő nyomólap, míg húzóvizsgálat esetén kétpofás befogó lett alkalmazva. A mérés elmozdulás vezérelt, mely során a beállított mérnöki alakváltozási sebesség nagysága mindkét esetben $|\dot{\varepsilon}| = 0.01 \frac{1}{s}$ volt, mellyel a viszkoelasztikus hatások jó közelítéssel ki lettek küszöbölve. Jelen dolgozatnak a polimer habok viszkoelasztikus modellezése nem célja. Az egyes mérések során beállított paramétereket 4.1 táblázat tartalmazza

4.1. táblázat. Egytengelyű nyomóvizsgálat adatai

	Nyomó vizsgálat	Húzó vizsgálat
Magasság (L_0)	50 mm	50 mm
Szélesség és vastagság (a, b)	50 mm	200 mm
Keresztmetszet (A_0)	2500 mm ²	2500 mm ²
Maximális mérnöki alakváltozás ($\varepsilon_{\max}$)	-0.85	0.7
Mérnöki alakváltozási sebesség ($\dot{\varepsilon}$)	-0.01 $\frac{1}{s}$	0.01 $\frac{1}{s}$

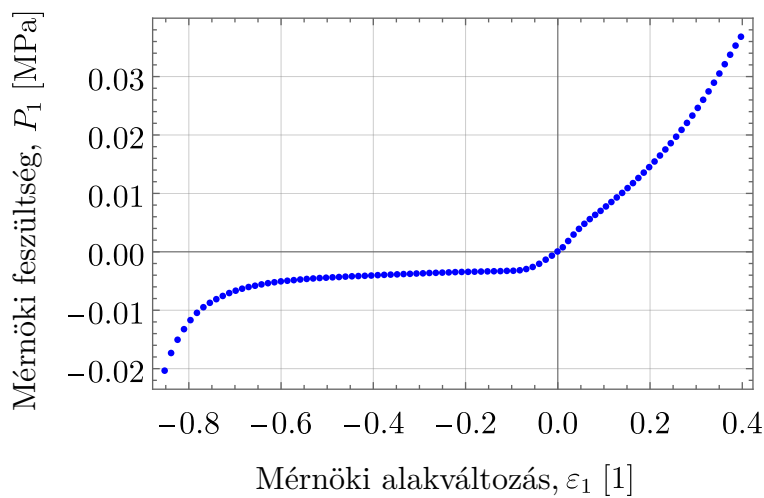
A vizsgált próbatestek (4.2 ábra) minden esetben poliuretán tömbből lettek kivágva. A húzás esetén a próbatestek hossza a szélességüknek négyszerese volt. Ilyenkor – ahogy azt az 1.3 ábra felvételei bizonyítják – a Saint-Venant-elv szerint a véglapok befogásának hatásától eltekinthetünk. A befogás megvalósítására a próbatestek rétegelt falemezre szálerősített szerkezetépítő ragasztóval lettek felragasztva.



4.2. ábra. A nyomó és húzó próbatest az egytengelyű vizsgálat előtt.

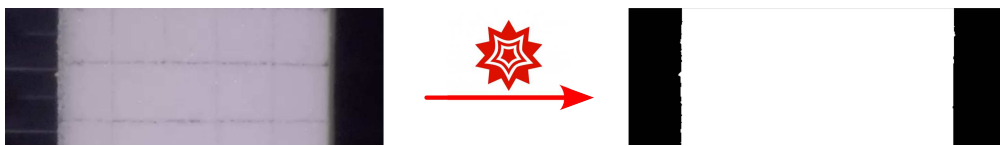
Nyomómérés esetén különös figyelmet kell fordítani a kihajlás jelenségére. Alacsony rugalmassági modulusuk miatt zömöknek látszó geometria esetén is felléphet kihajlás. Ennek elkerülése érdekében 50 mm élhosszúságú kocka próbatesten lett elvégezve a nyomómérés.

Az adatok feldolgozása során a kezdeti bizonytalan zónát (felfutási szakasz) korrekcióval vettem figyelembe. Szakirodalomban elterjedten alkalmazott eljárás ilyenkor a nyers adat kezdeti inflexió pontjába egyenest illeszteni és a bizonytalan kezdeti szakaszt ezzel helyettesíteni (slack correction). Ezt a feldolgozást *Wolfram Mathematica*-ban végeztem. A mérések során meghatároztam az aktuális anyag mérnöki feszültség-mérnöki alakváltozás kapcsolatát. Ennek diagramját a 4.3 ábra mutatja.



4.3. ábra. Egytengelyű mérési eredmények.

A mérés során elkészített videofelvételek alapján meghatározhatjuk a keresztirányú alakváltozásokat is. Ennek legegyszerűbb módja, ha a felvételeket binarizáljuk (4.4 ábra). Ilyenkor – amennyiben a felvételtől egy vékony sávot vizsgálunk – a fekete és a fehér területek aránya egyenesen arányos lesz a keresztirányú alakváltozásokkal.

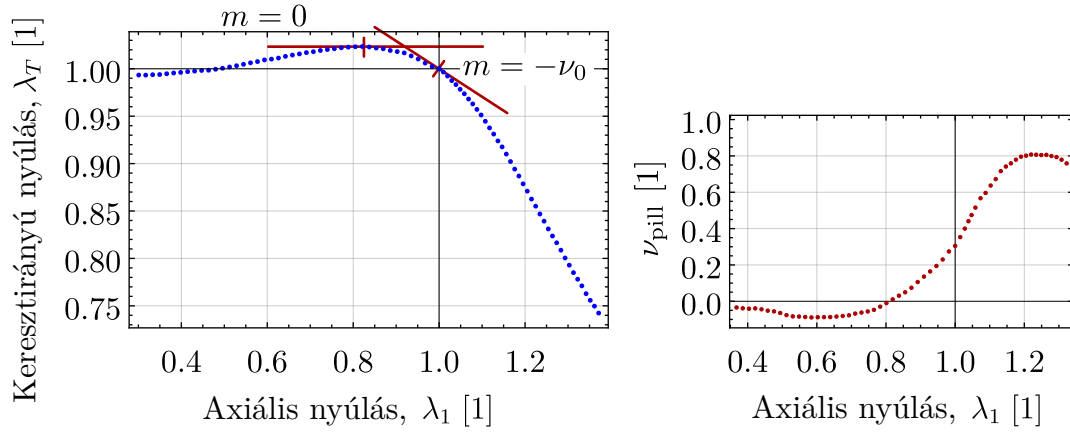


4.4. ábra. Az egytengelyű vizsgálatok felvételeinek binarizálása.

A binarizálás alapján a 4.5 ábrán látható adatsort állapítottam meg, amely jó összhangban van mások eredményével [27]. Nyomás esetén ($\lambda_1 < 1$) a kis kezdeti keresztirányú alakváltozásokat követően ez a tendencia megáll, sőt, visszafordul negatív irányba (a keresztmetszet nyomás hatására kissé "összemegy"). Ezt jellemzi a pillanatnyi Poisson-tényező (ν_{pill}), melynek változása a 4.5 ábrán látható.

A Poisson-tényező⁸ meghatározásához – a szakirodalomban alkalmazott módszerrel összhangban [7] – a következő függvényt szükséges illeszteni a mért húzó és nyomó $\lambda_1 - \lambda_T$

⁸A Poisson-tényező fogalma Siméon Denis Poisson nevét viseli, aki a 19. században foglalkozott az anyagok mechanikai viselkedésével. Poisson kísérleti megfigyelések alapján bevezette a keresztirányú



4.5. ábra. A megállapított keresztirányú nyúlások, ahol m a meredekséget jelöli és kapcsolatba hozható ν_{pill} pillanatnyi Poisson-tényezővel.

adatsorra külön-külön:

$$\lambda_T = \lambda_1^{-\nu}. \quad (4.6)$$

Az illesztendő kifejezés a a Poisson-tényezőt a szokásos

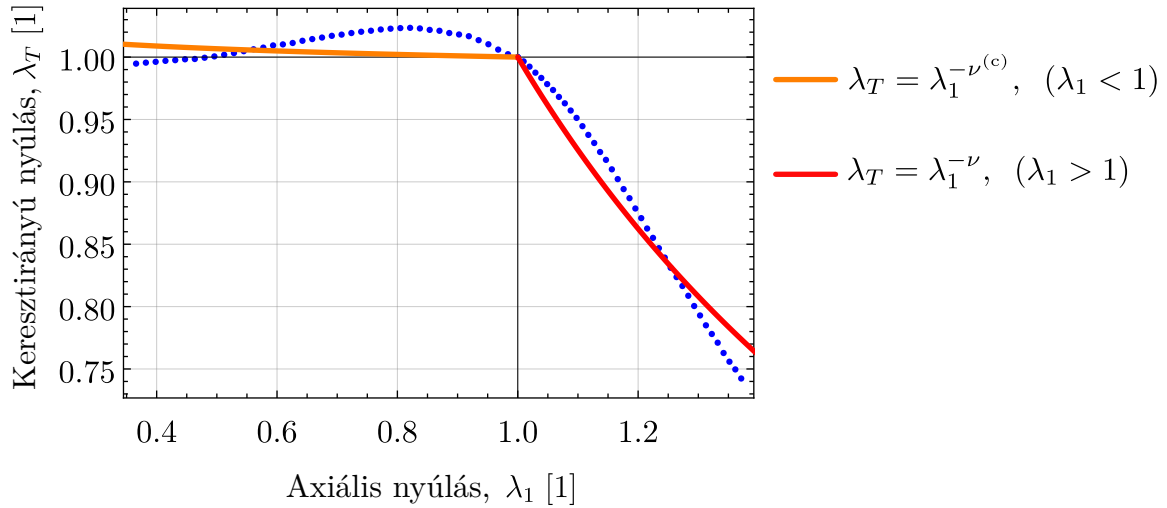
$$\nu = -\frac{d\varepsilon_T}{d\varepsilon_1} \quad (4.7)$$

egyenlet szerint fejezi ki véges alakváltozásokra kiterjesztve a "valós" alakváltozások (true strain) segítségével. Azzal a feltételezéssel élünk, hogy az alakváltozás során bármely alakváltozás-inkrementumot azonos anyagi jellemző (ν) ír le. A véges alakváltozásokra megadott Poisson-tényezőnek ez csak egy lehetséges megadása, számos Poisson-függvény létezik [7]. Illesztve (4.6 ábra) 4.6 egyenletet 4.5 ábra szerinti adathalmaz nyomott és húzott felére, a következő Poisson-tényezők adódnak:

$$\nu^c = 0.00963 \approx 0, \quad (\lambda_1 < 1), \quad \nu = 0.812, \quad (\lambda_1 > 1). \quad (4.8)$$

Nyomás esetén a Poisson-tényezőre kapott eredmény ($\nu^c \approx 0$) összhangban van az irodalomban rendszeresen alkalmazott feltételezéssel [6, 28, 26]. A húzás esetén kapott eredmény ($\nu = 0.812$) elsőre mérési hibának tűnhet, azonban ez az eredmény és a pillanatnyi Poisson-tényező trendszerű változása összhangban van mások eredményével [5, 29]. Kontinuummechanikai modellben (3.25 és 3.33 egyenlet) azonban 0.5-et meghaladó Poisson-tényező értékek nem alkalmazhatóak. Amennyiben a 4.6 összefüggést az alakváltozás kezdeti szakaszára illesztjük (4.5 ábra), a kezdeti Poisson-tényező értéke $\nu_0 = 0.3138$ -nek adódik. Azért, hogy a kívánt viselkedésnek az alakváltozás magas mértéke mellett minél jobban megfeleljen az illesztett aszimmetrikus modell (3.33 egyenlet), a Poisson-tényező húzás esetén a maximális, $\nu = 0.5$ -nél valamelyest kevesebb, $\nu = 0.499$ lett megválasztva a numerikus stabilitás végett. $\nu \rightarrow 0.5$ esetén a *hyperfoam* modellben numerikus instabilitások lépnek fel. Ilyenkor lehetne alkalmazni az összenyomhatatlan esetre bevezetett Ogden-modellt is [30], viszont ilyen kis térfogati összenyomhatóság esetén lényegi eltérést nem tapasztalnánk. Így nem indokolt egy másik modellt alkalmazni $\lambda_1 > 1$ esetre.

alakváltozás és a hosszanti alakváltozás arányát leíró tényezőt, amely azóta is alapvető fontosságú a rugalmas anyagok modellezésében.



4.6. ábra. A keresztirányú nyúlásokra illesztett Poisson-tényező.

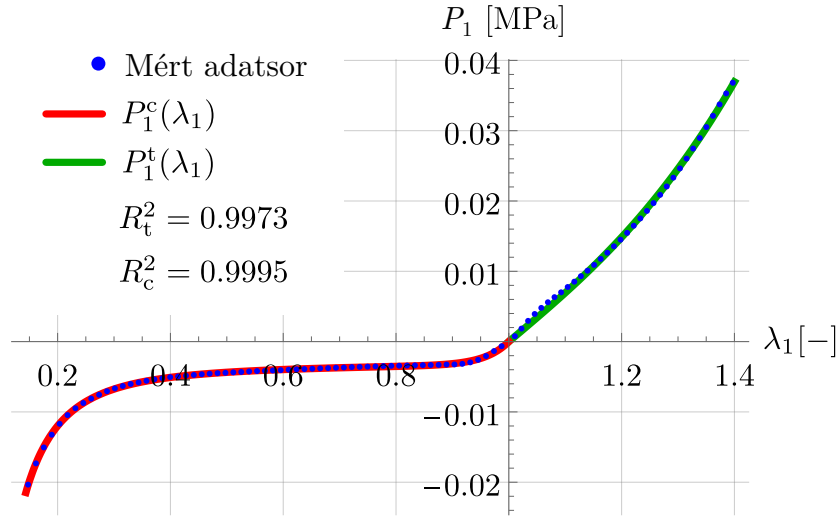
Végül tehát elvégezhetjük a paraméterillesztést 4.3 adatsorra az eredeti, 3.25 *hyper-foam* és a bevezetett 3.33 aszimmetrikus modell szerint. Előbbire az egész mért adatsor alapján egyben, míg utóbbi esetén a $\lambda_1 < 1$ ágra kizárólag nyomómérés, $\lambda_1 > 1$ ágra kizárólag húzó mérés adataira történt az illesztés. Hibafüggvénynek 4.2 relatív hibafüggvényt alkalmaztam.

Az aszimmetrikus anyagmodellre megállapított paraméterek

Az aszimmetrikus modell illesztésénél alkalmazva, hogy nyomásra $\nu_i^c = 0$ és, hogy húzásra $\nu = 0.499$, az adódó paramétereket a 4.2 táblázat mutatja. Az illesztett modell nyomásra harmadrendű ($N = 3$), míg húzásra elsőrendű ($N = 1$). Nyomás esetén szükség van magasabb rendű modellt használni, míg húzás esetén elsőrendű modellel is jó illeszkedést lehet elérni, mert kisebb itt a nemlinearitás. A mért adatsorra való illeszkedést a 4.7 ábra mutatja. A kiszámított determinációs együttható (R^2) nagyon jó illeszkedést mutat mind a $\lambda_1 < 1$, mind a $\lambda_1 > 1$ ágra.

4.2. táblázat. Aszimmetrikus modell illesztett paraméterei.

$J > 1$ ("húzás")		$J < 1$ ("nyomás")			
α [–]	5.77745	α_i [–]	25.0357	–0.19622	–0.217785
μ [MPa]	0.022607	μ_i [MPa]	0.0411286	–0.0481767	0.047072
ν [–]	0.499	ν^c [–]	0		
β [–]	249.5	β^c [–]	0		
R_t^2	0.9973	R_c^2	0.9995		



4.7. ábra. Az illesztett aszimmetrikus anyagmodell illeszkedése a mérési adatokra.

A *hyperfoam* anyagmodellre megállapított paraméterek

A *hyperfoam* modell illesztésére alapvetően 4 megközelítés elképzelhető:

1. ABAQUS-ban megadhatjuk a mérnöki feszültség, mérnöki alakváltozás és keresztirányú alakváltozás adatokat, melyre az illesztés történik. A probléma, hogy a húzás esetén leírt magas Poisson-tényező következtében az illesztés minden esetben hibaüzenettel zárul, a mért értékek fizikailag megvalósíthatatlannak tűnnek.
2. Élhetünk azzal a közelítéssel, hogy a Poisson-tényező közelítőleg zérus. Ezt a közelítést gyakran alkalmazzák a szakirodalomban [5, 26].
3. Lerögzíthetjük ν_i -t az illesztésre. Ekkor a megválasztott ν érték a kezdeti Poisson-tényező, amely vizuálisan 4.5 ábra origóba húzott érintő meredekségével értelmezhető és a megállapított érték

$$\nu_0 = - \left. \frac{d\varepsilon_T}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0.3138. \quad (4.9)$$

4. Negyedik lehetőségként kiindulhatunk abból a feltételből, hogy egytengelyű igénybevétel esetén a keresztirányú feszültségek zérusak, amelynek az illesztett paraméterek esetén teljesülni kell. Ezt egy második, a keresztirányú feszültségekre felírt

$$E_T = \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_T(\lambda_1, \lambda_T)}{P_1^{\text{mért}}} \right) \quad (4.10)$$

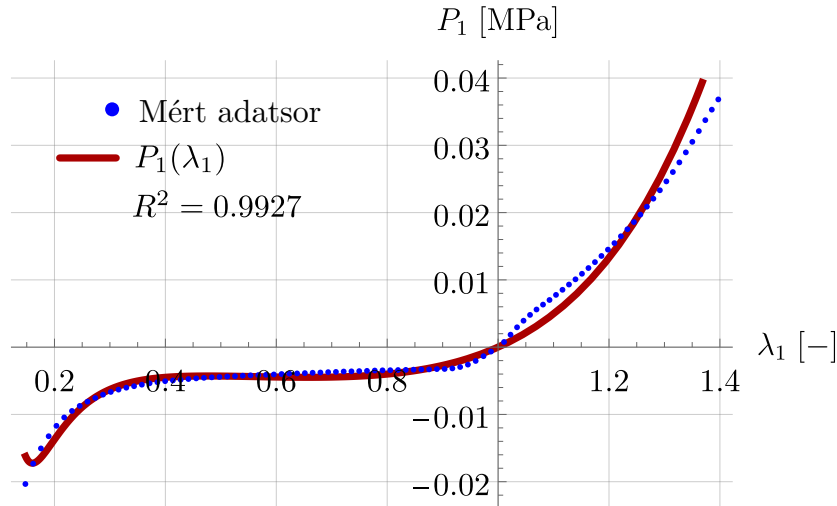
hibafüggvény minimalizálásával érhetjük el [20, 22]. Ekkor az illesztés során minimalizált hibafüggvény az

$$E_e = E_1 + E_T. \quad (4.11)$$

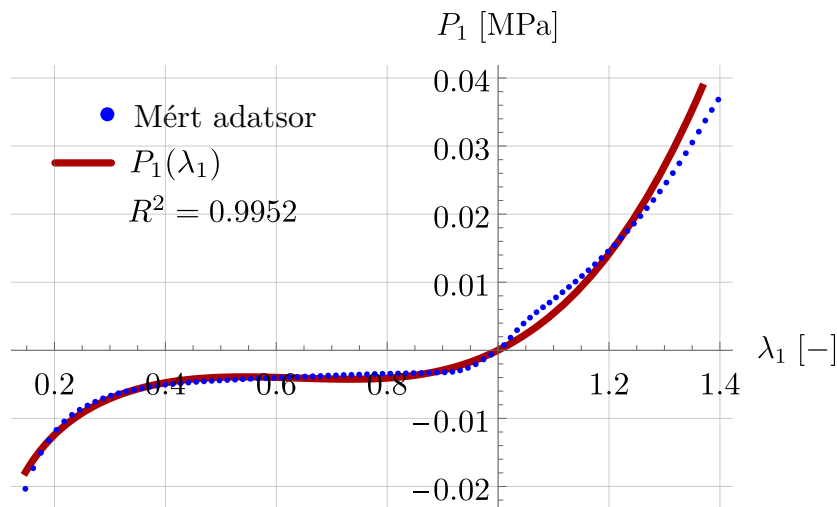
Ezen módszerek közül csak a második, a harmadik és a negyedik szolgáltat megoldást minden esetben, viszont az első módszerrel az előbbieken leírtak szerint problémák merülhetnek fel. A *hyperfoam* modell (3.25) illesztésére a dolgozatban a második és a harmadik módszert alkalmaztam. A megállapított paramétereket harmadrendű modellre ($N = 3$) a két illesztési stratégia esetére a 4.3 és 4.4 táblázat, a modell illeszkedését pedig a 4.8 és 4.9 ábra mutatja.

4.3. táblázat. Harmadrendű *hyperfoam* modell illesztett paramétereit konstans ν_0 -lal.

$\alpha_i [-]$	7.33567	2.82722	-2.35060
$\mu_i [\text{MPa}]$	0.0240900	$-3.27296 \cdot 10^{-3}$	$-6.85116 \cdot 10^{-3}$
$\nu_0 [-]$	0.3138		
$\beta_0 [-]$	0.842361		
R^2	0.9927		

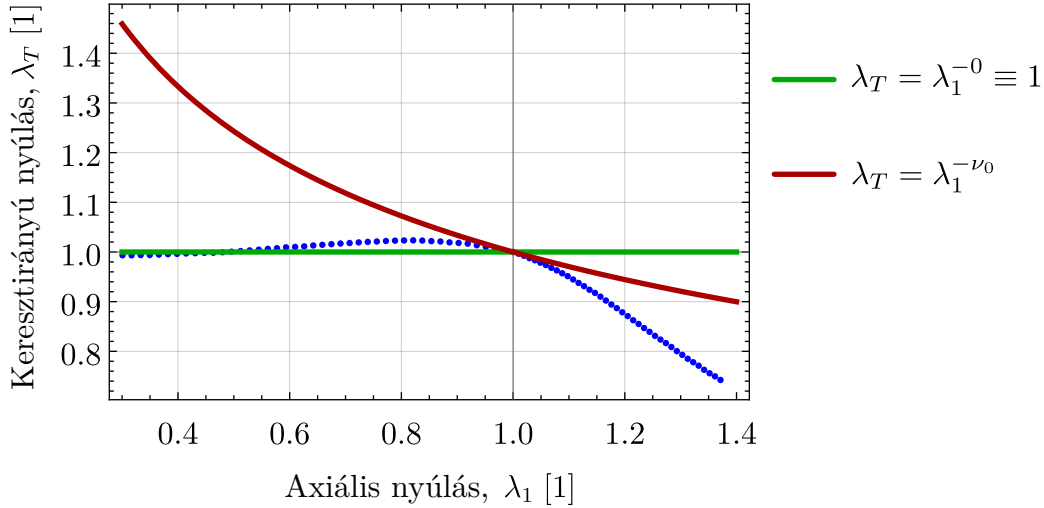
4.8. ábra. Harmadrendű *hyperfoam* modell illeszkedése a mért adatokra konstans ν_0 -lal.4.4. táblázat. Harmadrendű *hyperfoam* modell illesztett paramétereit zérus ν_i -vel.

$\alpha_i [-]$	3.58788	3.82148	3.36400
$\mu_i [\text{MPa}]$	-4.02007	2.22439	1.81585
$\nu [-]$	0		
$\beta [-]$	0		
R^2	0.9952		

4.9. ábra. Harmadrendű *hyperfoam* modell illeszkedése a mért adatokra zérus ν_i -vel.

Amennyiben konstans Poisson-tényező értékeket használunk (legyen az zérus vagy ν_0), a mért eredményektől nagyon eltér a $\lambda_T(\lambda_1)$ kapcsolat. A két illesztés esetére a 4.10 ábra

mutatja ezt a kapcsolatot. Jól látható, hogy mindkét módszer által előjelzett keresztirányú alakváltozás lényegesen eltér a mért adatsortól. Ez az eltérés alapvető problémát jelent a modellezés során és az illesztés módszerétől függetlenül jelentkezik a *hyperfoam* hiperelasztikus anyagmodell esetén. Ha 4.6 ábrát összehasonlítjuk 4.10 ábra bármely görbéjével, jobb illeszkedést állapíthatunk meg a bevezetett modellel a mért adatsorra.



4.10. ábra. A *hyperfoam* modell által szolgáltatott keresztirányú alakváltozás különböző illesztések esetén.

Érdekességképpen megjegyezhető a *hyperfoam* modell érzékenysége 4.8 ábrán látható illesztésnél. A mért paramétertartomány alsó felén az illesztett modell "visszaforul" és instabillá válik, így ott már nem használható. Ez az érzékenység a *hyperfoam* modellel történő illesztéseknél általános megfigyelhető, ezért célszerű széles tartományban illeszteni.

4.3. Numerikus megoldás a nyomaték - görbület összefüggésre

Az előző fejezetben illesztettük a bevezetett aszimmetrikus hiperelasztikus habmodellt a vizsgált anyagra, tehát a meghatározott anyagi paraméterekkel visszatérhetünk 3.4 fejezethez és meghatározhatjuk a nyomaték-görbület összefüggést. Analitikus megoldás a semleges szál eltolódását leíró $y_0(\kappa)$ összefüggésre zárt alakban nem adható meg, numerikus eszközökhöz kell nyúlni. 3.3 ábra alapján az x irányú erők egyensúlyára a következő nemlineáris összefüggés adódott:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y_0, \kappa) = & \frac{2b\mu}{\kappa\alpha^2\nu} \left((1 + c\kappa - \kappa y_0)^{-\alpha\nu} + \nu((1 + c\kappa - \kappa y_0)^\alpha - 1) \right) + \\ & \sum_{i=1}^N \frac{2b\mu_i}{\kappa\alpha_i^2} (1 + \alpha_i \ln(1 - \kappa(c + y_0)) - (1 - (1 - \kappa(c + y_0))^{\alpha_i})) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Az összefüggésben ismerjük c és b , aktuális hajlítási feladatra jellemző keresztmetszeti méreteket (3.3 ábra),

$$c = 100 \text{ mm},$$

$$b = 200 \text{ mm},$$

és az anyagmodellre jellemző 9 anyagi paramétert (4.2 táblázat) és a nyomott részen alkalmazott modell rendjét ($N = 3$). A feladat, hogy elimináljuk y_0 semleges szál eltolódását leíró ismeretlent, célszerűen úgy, hogy kifejezzük azt κ görbület segítségével.

Ehhez numerikus módszert kell alkalmaznunk. Használjuk a *Newton–Raphson*-módszert, hogy megkeressük 4.12 egyenlet y_0 gyökeit, ha κ_i görbület felosztás adott a $\kappa \in [0^+, \kappa_{max}]$ intervallumon, ahol alsó közelítésként

$$\kappa_{max} = \frac{1}{2c} = 0.005 \frac{1}{m}. \quad (4.13)$$

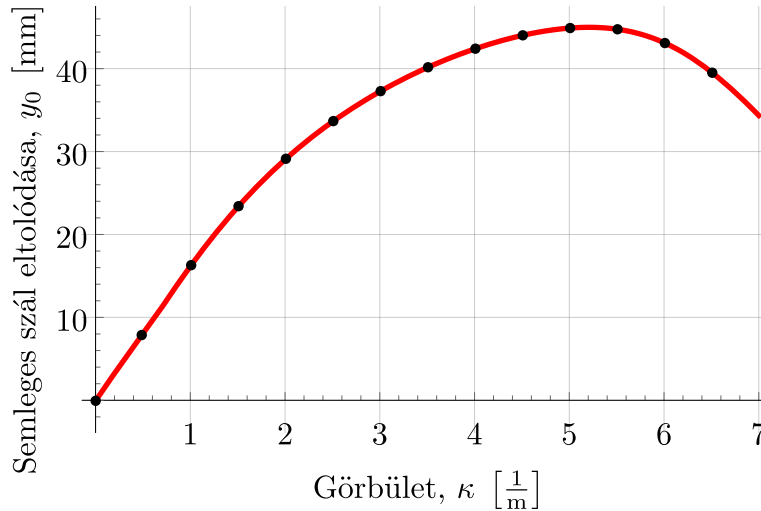
A semleges szál eltolódására az értékeket 0 körül keressük, így a *Newton–Raphson* iteráció során ezt választjuk első értéknek. Egy adott κ_0 -hoz tartozó $y_{0,n+1}$ -edik lépés számítható a

$$y_{0,n+1}(\kappa_i) = y_{0,n}(\kappa_i) - \frac{\mathcal{F}(y_{0,n}(\kappa_i), \kappa_i)}{\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_0} \right|_{y_0=y_{0,n}(\kappa_i)}^{\kappa=\kappa_i}}. \quad (4.14)$$

A következő lépéshez használhatjuk a megadott (most 0.1% relatív hibával) meghatározott $y_{0,n}(\kappa_i)$ értéket. Az így meghatározott $y_0(\kappa_i)$ pontokra interpolációs függvényt illeszthetünk *Wolfram Mathematica*-ban az *Interpolate[]* függvénnyel, így

$$y_0 = y_0(\kappa) \quad (4.15)$$

függvénykapcsolat – az adott geometriára és anyagra numerikusan – adott. Az így adódó görbe grafikonját a 4.11 ábra mutatja.



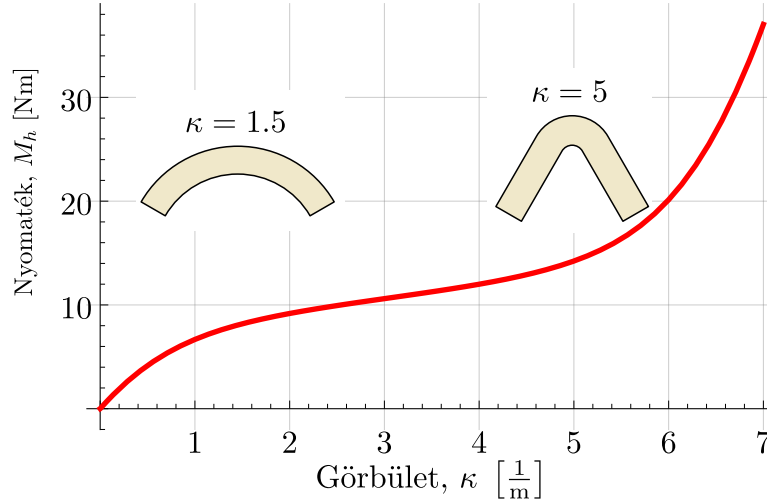
4.11. ábra. A semleges szál eltolódásának grafikonja az illesztett pontok interpolációs függvényeként.

Hasonlóképpen fel tudjuk írni a nyomatékokra adódó egyensúlyt is 3.3 ábra alapján. Ekkor adódik a következő egyenlet:

$$b \left[\int_{-c}^{y_0(\kappa)} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} - 1) y dy + \int_{y_0(\kappa)}^c \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu}{\alpha} (\lambda_1^{\alpha} - \lambda_1^{-\alpha\nu}) y dy \right] = M_h, \quad (4.16)$$

ahol $\lambda_1 = 1 + (y - y_0(\kappa))\kappa$. Az egyenlet összetett, de az egyetlen ismeretlen benne κ semleges szál görbülete. Végül a nyomaték-görbület összefüggést a 4.12 ábra mutatja. Ezzel meghatároztuk a bevezetett aszimmetrikus hiperelasztikus anyagmodellre a nyomaték-görbület összefüggést a vizsgált anyagra és gerenda keresztmetszetre a következő feltételezésekkel:

- A keresztmetszetek síkok maradnak és merőlegesek maradnak a semleges szálra az alakváltozás során (Euler–Bernoulli-hipotézis),
- a térfogaton megoszló erőrendszerektől eltekintünk.



4.12. ábra. A nyomaték-görbület kapcsolat.

4.4. A mért nyomaték-görbület összefüggés meghatározása

Miután meghatároztuk a súlypontvonalon található P_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) pontot (4.13 ábra) és rendelkezésünkre áll 4.11 ábra szerinti numerikus megoldás $y_0(\kappa)$ semleges szál eltolódást leíró függvénykapcsolatra, meghatározhatjuk a semleges szál K keresztmetszeten felvett pozícióját ($\mathbf{x}_K$, 2.8 ábra). A keresett y_0 eltolódást csak iteratív módon lehet meghatározni. Adott a görbület

$$\kappa^{(1)} = \frac{1}{r^{(1)}} \quad (4.17)$$

egyenlettel a képfeldolgozás alapján, amennyiben

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(r^{(1)}\right)^2 \quad (4.18)$$

egyenletű kört illesztjük a meghatározott $P_1, P_2, P_3, P'_2, P'_3$ (tükröképek a K keresztmetszetre) pontokra. Ekkor adódik

$$y_0^{(1)} = y_0(\kappa_1) \quad (4.19)$$

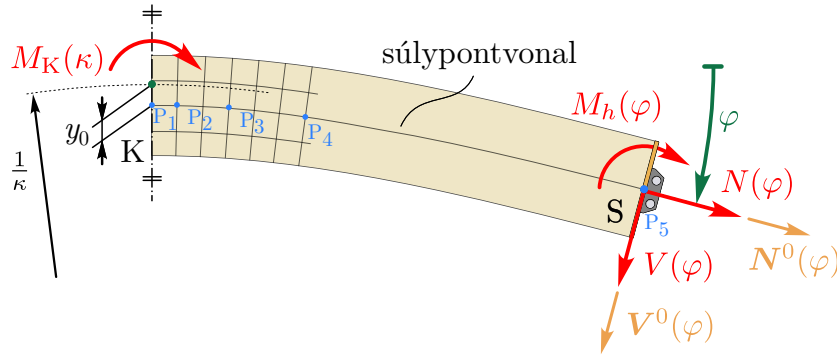
eltolódás, mellyel

$$\kappa^{(2)} = \frac{1}{r^{(1)} + y_0^{(1)}} \quad (4.20)$$

és adódik a következő iterációs lépés. Az iteráció során a megadott 0.1% relatív hibához tartozó semleges szál eltolódás $y_0^{(0.1)}$. Ekkor a 2.8 ábra szerint

$$\mathbf{x}_K = \mathbf{x}_{P_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_0^{(0.1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_K. \quad (4.21)$$

$\mathbf{x}_{P_1}$ és $\mathbf{x}_K$ ismert. A reakció-erőrendszer redukálható K keresztmetszetbe a



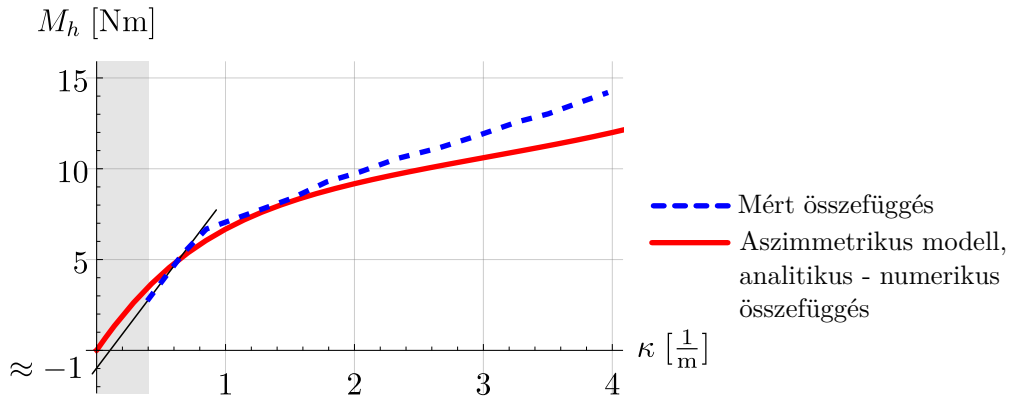
4.13. ábra. A hajlító próbatest szabadtest ábrája.

$$M_{h,K}(\varphi) = N(\varphi)l_N(\varphi) + V(\varphi)l_V(\varphi) + M_h(\varphi), \quad (4.22)$$

ahol

$$l_N(\varphi) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{V}^0(\varphi), \quad l_V(\varphi) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{N}^0(\varphi), \quad (4.23)$$

ahol $\mathbf{V}^0(\varphi)$ a nyíró-, míg $\mathbf{N}^0(\varphi)$ a normál kényszerítő irányába mutató egységvektor. Megkaptuk tehát adott φ szöghöz a K keresztmetszetet terhelő nyomatéki igénybevételt. Összefésülve ezeket $\kappa^{(0,1)}$ iterálva megállapított semleges szál görbületével, 4.14 ábrán látható nyomaték-görbület összefüggés adódik. A szürkével jelzett sávban – a videófeldolgozásból adódóan – a görbület meghatározás bizonytalan.



4.14. ábra. A hajlítóméréssel meghatározott nyomaték-görbület összefüggés.

Fontos megjegyezni, hogy 4.14 ábra méréssel meghatározott nyomaték – görbület összefüggése nem tartalmazza a próbatest önsúlyának hatását, melynek a semleges szál deformálásában szerepe van (amint az 2.9 ábrán megfigyelhető kis φ szögekre) és nyomatékot fejt ki a K keresztmetszetben. A mért összefüggés tehát nem egyezik meg teljesen az analitikus megoldással (amely nem veszi figyelembe az önsúlyt). Az önsúly hatásának eliminálása nem lehetséges analitikus módszerekkel. A mért eredmények trendszerű viselkedésről azonban megállapítható, hogy jó összhangban van az aszimmetrikus modell alapján előrejelzett értékekkel.

Végezhetünk egy gyors ellenőrzést az önsúly hatására $\varphi = 0^\circ$ szöghelyzetben. Ekkor, ha lineáris extrapolációval megkeressük a zérus görbülethez tartozó, K keresztmetszetben értelmezett nyomatéki igénybevételt, akkor $M_h \approx 1$ Nm, a 4.14 ábrának megfelelően.

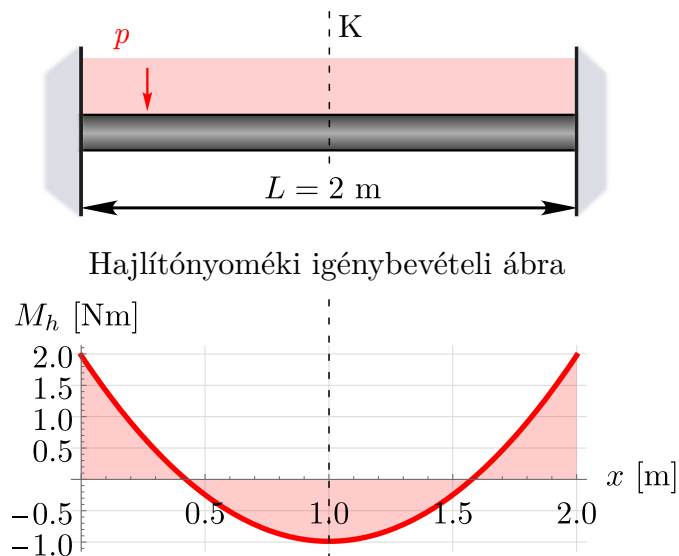
Az ennek megfelelő mechanikai modellt és nyomatéki igénybevételi függvényt a 4.15 ábra mutatja, ahol a vonal mentén megoszló erőrendszer a próbatest önsúlyából adódik ($p = 5.927 \text{ N/m}$). A nyomatéki igénybevételi függvény paraméteresen

$$M_h(x) = \frac{1}{12}p(L^2 - 6Lx + 6x^2), \quad (4.24)$$

melybe behelyettesítve, hogy $L = 2 \text{ m}$ és $x_K = 1 \text{ m}$, a számított hajlítónyomatéki igénybevétel a K keresztmetszetben

$$M_h(x_K) = -0.9878 \text{ Nm}, \quad (4.25)$$

amely jó összhangban van a 4.14 ábrán látható mérési adattal.



4.15. ábra. A $\varphi = 0^\circ$ -hoz tartozó mechanikai modell.

5. Végeelem számítások

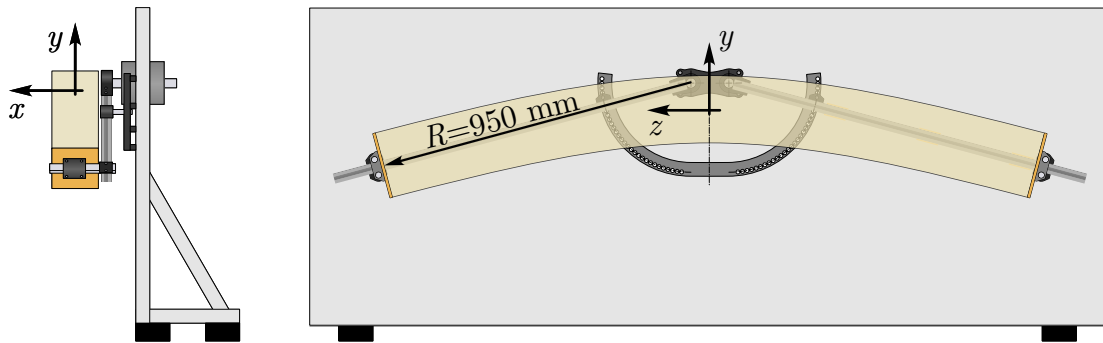
A hajlítómérés elrendezése azzal a követelménnyel lett megtervezve, hogy az kézenfekvően szimulálható legyen. Ez a fejezet az ABAQUS kereskedelmi végelem szoftverben végzett számításokat írja le, mely során összehasonlítottam a több módszerrel illesztett *hyperfoam* modellt a bevezetett aszimmetrikus konstitutív összefüggést közelítő végelem modellel.

5.1. A hajlítómérés végelem modellje

A hajlítómérés elrendezéséből adódóan több szimmetria feltétellel lehet élni:

- az elrendezés az 5.1 ábrán jelölt xy síkban szimmetrikus,
- továbbá a próbatest az yz síkban szimmetrikus.

Ezeket a feltételeket megadhatjuk a számítások során, így csökkentve adott hálózasi finomság mellett az elemszámot a negyedére. A számítások során lineáris elemet használtam, teljes integrálással (full integration), ami 8 integrációs pontot jelent egy elemen belül.



5.1. ábra. A hajlítógép elrendezése, a próbatest szimmetriái.

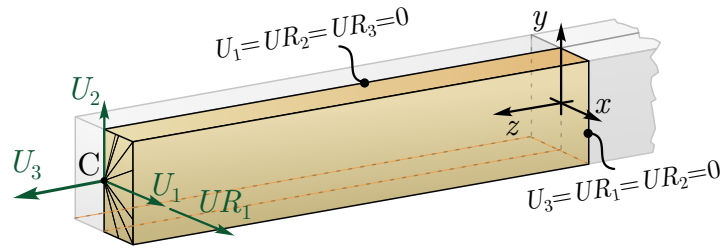
A hajlítógépen a végkeresztmetszet befogottként modellezhető. A végkeresztmetszet egyes szögpozíciókhoz tartozó elmozdulása és elfordulása (U_2, U_3, UR_1) beállítható a hajlítógép geometriai adottságaiból (R, φ), melyeket a 5.1 táblázat mutatja. Az egyes elmozdulások, U_1, U_2, U_3 a koordináta-rendszer x, y, z irányával azonosíthatóak, ahogy az az 5.2 ábrán is látható.

5.1. táblázat. Végkeresztmetszet elmozdulása különböző szögpozíciókhoz

$\varphi[^\circ]$	0	3	6	...	57	60	63
U_2 [mm]	-51.43	-102.71	-153.69	...	-839.34	-862.20	-882.53
U_3 [mm]	-1.393	-5.569	-12.51	...	-505.01	-551.10	-598.37
UR_1 [rad]	0.05417	0.1083	0.1625	...	1.083	1.137	1.192

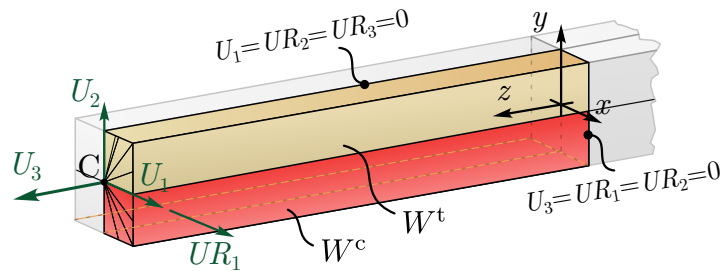
A végleges végelem modellt, feltüntetve az egyes szimmetria-feltétellel az 5.2 ábra mutatja.

Ahogy meghatároztuk azt az előző fejezetben, a súlypontvonal elmozdul és a síkfeladatként értelmezett hajlítást egyértelműen felosztja egy húzott és egy nyomott oldalra. Közelítésként végezhetünk olyan szimulációt, ahol ezt az elhatárolást a semleges szál eltolódása nélkül, a súlypontvonal segítségével tesszük meg és a két félhez így rendelünk



5.2. ábra. A hajlítás végelem modellje.

különböző anyagtulajdonságokat (W^t és W^c). Így közelítésképpen létrehoztuk az aszimmetrikus anyagtulajdonságot közelítő szétválasztott végelem modellt, ahogyan az az 5.3 ábrán látható. Az aszimmetrikus modell esetében – egytengelyű igénybevételre szorítkozva – nem fordulhat elő olyan feszültségi állapot, amikor nyomás esetén a húzott $\lambda_1 > 1$ oldalt szükséges használni. Ez engedi meg, hogy a modelleket külön illesszük egymástól a mérési adatsorra. Jelen esetben, a közelítő szimuláció esetén figyelmet kell fordítani arra, hogy az illesztett modell ne térjen el az ellenkező ág feszültségeitől kis alakváltozások esetén. Ez a feltétel a 4.2 paraméterillesztéseivel teljesül. Ettől az első közelítéstől (mivel a húzott ág Poisson-tényezője $\nu = 0.499$, a nyomotté pedig $\nu^c = 0$) a deformált keresztmetszet pontosabb leírását várom.



5.3. ábra. A szétválasztott végelem modell felhasználva a szimmetria feltételeket.

5.2. UMAT fortran szubrutin

A bevezetett aszimmetrikus hiperelasztikus hab anyagmodell (3.33 egyenlet) implementálására ABAQUS VEM szoftverbe a UMAT vagy a UHYPER szubrutin segítségével van lehetőségünk. A UMAT szubrutin során több dolgot kell definiálni, lényegesen összetettebb, de átfogó implementálást tesz lehetővé a felhasználó számára. Ez a szubrutin lehetővé teszi egy anyag konstitutív viselkedésének megadását az ABAQUS számára, amely meghívja a szubrutint minden integrálási pontban. A szubrutinban a minden egyes pontban szolgáltatott bemenő adatok (anyagi jellemzők és deformációgradiens, [19]) alapján számítjuk

1. σ Cauchy-féle feszültségi tenzort,
2. az alakváltozási energiasűrűséget,
3. a $\partial \Delta \sigma / \partial \Delta \epsilon$ konzisztens érintőtenzort,

melyet a VEM megoldó az iterációk során használ. Ennek a részleteire a dolgozat nem terjed ki.

Ezeknek definiálása hosszas és programozás-igényes feladat. Nagyban leegyszerűsítik ezt a feladatot az elérhető mintafájlok, amelyeket nagyszabásúan nemrégiben publikáltak [31]. A publikáció hiperelasztikus anyagmodellek numerikus implementációját mutatja be a főnyúlások szerinti leírásban. Elérhető a például a Gent-féle, neo-Hookean-féle, Yeoh-féle, Mooney–Rivlin-féle és az összenyomhatatlan Ogden-modell. Egy anyagmodell definiálásához meg kell adni az alakváltozási energiasűrűség-függvényt és azoknak deriváltjait $\bar{\lambda}_i$ és J szerint első és másodrendben. A konzisztens érintő tenzor számításához a 3.33 alakváltozási energiasűrűség függvényt szeparálni szükséges isochor és térfogati részre, melyet additív felbontással teszünk meg:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W_{\text{iso}}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) + W_{\text{vol}}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, J), \quad (5.1)$$

ahol W_{iso} az izochor, míg W_{vol} a térfogati fajlagos energiasűrűség függvény. $\bar{\lambda}_i$ az izochor főnyúlás és a következőképpen számítható 3.8 összefüggés alapján:

$$\bar{\lambda}_a = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_a, \quad a = 1, 2, 3.$$

Ez alapján 3.33 átírható a következő alakra:

$$W(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, J) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left(J^{\frac{\alpha_i}{3}} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i}) - 3 - \alpha_i \ln(J) \right), & J < 1, \\ \frac{2\mu}{\alpha^2} \left(J^{\frac{\alpha}{3}} (\bar{\lambda}_1^{\alpha} + \bar{\lambda}_2^{\alpha} + \bar{\lambda}_3^{\alpha}) - 3 + \frac{1}{\beta} (J^{-\alpha\beta} - 1) \right), & J > 1, \\ \frac{1}{2} (W^c(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, J) + W^t(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, J)), & J = 1. \end{cases} \quad (5.2)$$

Izochor esetben $J \equiv 1$, tehát W_{iso} felírható, mint:

$$W_{\text{iso}}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3), & J < 1, \\ \frac{2\mu}{\alpha^2} (\bar{\lambda}_1^{\alpha} + \bar{\lambda}_2^{\alpha} + \bar{\lambda}_3^{\alpha} - 3), & J > 1, \\ \frac{1}{2} (W_{\text{iso}}^c(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) + W_{\text{iso}}^t(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3)), & J = 1. \end{cases} \quad (5.3)$$

A térfogati rész pedig előáll 5.2 és 5.3 különbségeként:

$$W_{\text{vol}}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, J) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left((J^{\frac{\alpha_i}{3}-1}) (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i}) - \alpha_i \ln(J) \right), & J < 1, \\ \frac{2\mu}{\alpha^2} \left((J^{\frac{\alpha}{3}-1}) (\bar{\lambda}_1^{\alpha} + \bar{\lambda}_2^{\alpha} + \bar{\lambda}_3^{\alpha}) + \frac{1}{\beta} (J^{-\alpha\beta} - 1) \right), & J > 1, \\ \frac{1}{2} (W_{\text{vol}}^c(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, J) + W_{\text{vol}}^t(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, J)), & J = 1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Fontos megjegyezni, hogy a *hyperfoam* modellt nem (és így a segítségével bevezetett aszimmetrikus modellt sem) lehet felbontani tisztán térfogati részre, úgy, hogy az csak J térfogati hányados függvénye legyen. Az így megadott 5.4 egyenlet a térfogati alakváltozási energiasűrűséget jellemzi, de állapotjellemzőként megtalálható benne $\bar{\lambda}_a$. $\partial\Delta\sigma/\partial\Delta\epsilon$ konzisztens érintőtenzor felírásához $\mathbf{C}$ jobboldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzorból származtatott értékeken kívül a következő deriváltakat szükséges kiszámítani:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_a} = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\lambda_a \alpha_i} \left(J^{\frac{\alpha_i}{3}} \bar{\lambda}_a^{\alpha_i} \right), & J < 1, \\ \frac{2\mu}{\lambda_a \alpha} \left(J^{\frac{\alpha}{3}} \bar{\lambda}_a^{\alpha} \right), & J > 1, \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \right)^c + \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \right)^t \right), & J = 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

A vegyes deriváltak számításánál vegyük észre, hogy zérustól különböző eredményt csak abban az esetben kapunk, ha $a = b$, tehát

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\lambda}_a^2} = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i(\alpha_i-1)}{\alpha_i} \left(J^{\frac{\alpha_i}{3}} \bar{\lambda}^{\alpha_i-2} \right), & J < 1, \\ \frac{2\mu(\alpha-1)}{\alpha} \left(J^{\frac{\alpha}{3}} \bar{\lambda}_a^{\alpha-2} \right), & J > 1, \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\lambda}_a^2} \right)^c + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\lambda}_a^2} \right)^t \right), & J = 1. \end{cases} \quad (5.6)$$

A térfogati rész kifejezéséhez J térfogati hányados szerinti deriváltját kell venni a térfogati alakváltozási energiasűrűség függvénynek:

$$\frac{\partial W_{\text{vol}}}{\partial J} = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{3J\alpha_i} \left(J^{\frac{\alpha_i}{3}} \left(\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} \right) - 3 \right), & J < 1, \\ \frac{2\mu_i J^{-\alpha\beta-1}}{3\alpha} \left(J^{\alpha(\frac{1}{3}+\beta)} \left(\bar{\lambda}_1^\alpha + \bar{\lambda}_2^\alpha + \bar{\lambda}_3^\alpha \right) - 3 \right), & J > 1, \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial W_{\text{vol}}}{\partial J} \right)^c + \left(\frac{\partial W_{\text{vol}}}{\partial J} \right)^t \right), & J = 1. \end{cases} \quad (5.7)$$

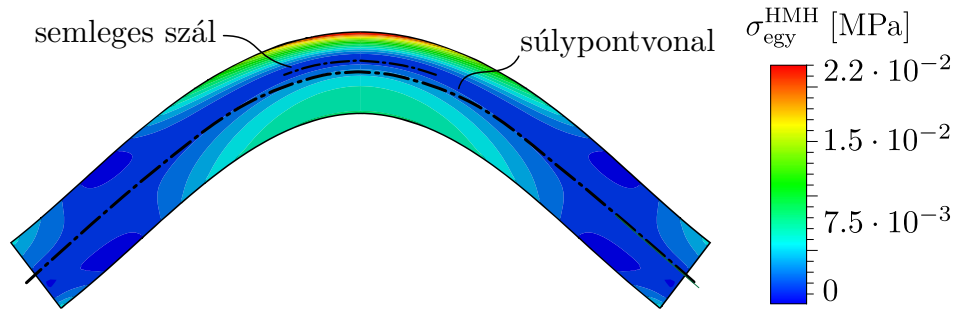
$$\frac{\partial^2 W_{\text{vol}}}{\partial J^2} = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{9J^2\alpha_i} \left((\alpha_i - 3) J^{\frac{\alpha_i}{3}} \left(\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} \right) + 9 \right), & J < 1, \\ \frac{2\mu_i}{9J^2\alpha} \left(9(1 + \alpha\beta) J^{-\alpha\beta} + (\alpha - 3) J^{\frac{\alpha}{3}} \left(\bar{\lambda}_1^\alpha + \bar{\lambda}_2^\alpha + \bar{\lambda}_3^\alpha \right) \right), & J > 1, \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial^2 W_{\text{vol}}}{\partial J^2} \right)^c + \left(\frac{\partial^2 W_{\text{vol}}}{\partial J^2} \right)^t \right), & J = 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Ezekkel a mennyiségekkel és $\mathbf{C}$ sajátértékeivel és sajátvektoraival $\partial\Delta\boldsymbol{\sigma}/\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ konzisztens érintőtenzor egyes komponensei felírhatóak.

A szubrutint Fortran 77 program-környezetben szükséges megírni, majd a szubrutint az ABAQUS-ba integrált Intel oneAPI fortran compiler fordítja le minden egyes szimuláció előtt. A dolgozat készítése során ez a compiler nem volt integrálható ABAQUS végelem szoftverbe kompatibilitási problémák miatt, az Intel megszüntette az *ifort.exe* fordító támogatását. A UMAT szubrutinban megírt, aszimmetrikus modellel készített szimulációk az újszerű eredményekről készülő tudományos folyóirat cikkben lesznek közölve.

5.3. Szimulációs eredmények

A 5.1. fejezetben bemutatott végelem modellek alapján elvégeztem a szimulációkat ABAQUS végelem szoftverben. A 5.4 ábra egy, a *hyperfoam* modellel végzett szimulációs eredményt mutatja, ahol a $\nu_i \equiv 0$ feltétel lett alkalmazva a paraméterillesztés során. Az ábrán a színek a HMH egyenértékű feszültség nagyságát mutatják. Jól látható, hogy a legnagyobb görbületű részen (középen) a semleges szál jelentősen eltolódik a súlypontvonalhoz képest a húzott oldal irányába. A következő két alfejezet ezeknek a szimulációknak az eredményeit mutatja be a vizsgált szempontok alapján.



5.4. ábra. Feszültségeloszlás a hajlított nyílt cellás hab gerendában.

5.3.1. Reakció erőrendszer

A reakció-erőrendszer egy adott szimulációhoz előállítható és az adatsor (különböző szögpozícióhoz tartozó reakció-erőrendszer) kimenthető a programból. A hajlítás kialakítása szerint a reakció-erőrendszer a befogás pontjában ébred, amelyet a végelem modellen (5.2 ábrán) a C pont jelöl. Mivel a mérés során a nulla értékek (mérőcsoportok tárazása) a próbatest felhelyezése előtt lettek beállítva (önsúly hatása is mérve van), a mért adatok a szimulált reakcióerőkkel és nyomatékokkal közvetlenül összehasonlíthatóak. A megálapított reakció-erőrendszer-szögelfordulás kapcsolatot a különböző szimulációk esetén a 5.5 ábra mutatja.

Az eltérés a mért és a szimulált értékek között nem haladja meg az egyes szimulációs módszerek között látható eltéréseket. Az illeszkedés minőségének megállapításra használhatjuk a gyökös eltérést (root mean squared error)⁹.

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2}, \quad (5.9)$$

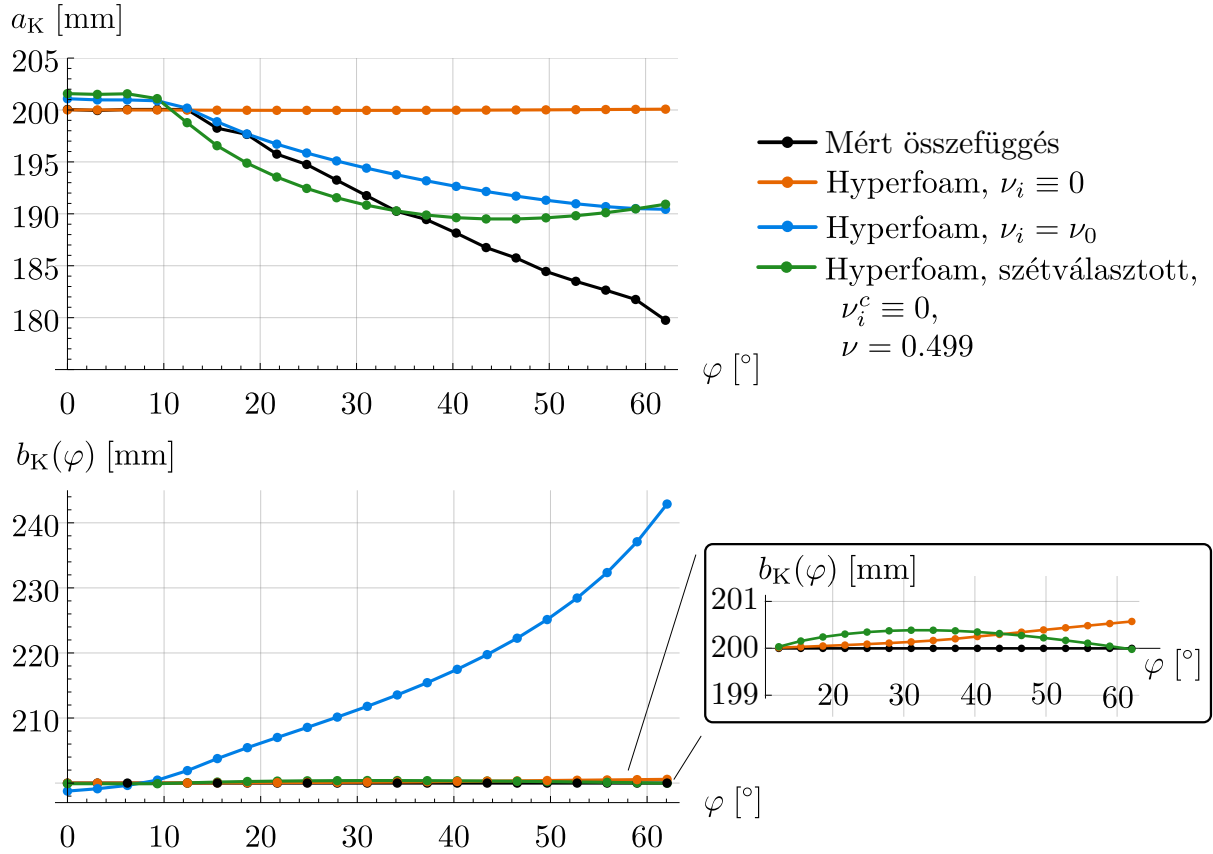
ahol Y_i az egyes mért érték, míg y_i valamely modell által adott érték és n az adatsor elemszáma. Kisebb RMSE jobb illeszkedést jelent. A kiszámított értékeket a 5.2 táblázat mutatja.

A bevezetett modell működését közelítő szétválasztott szimuláció esetén a reakcióerőkben nem tapasztalható lényegi eltérés a különböző módszerrel illesztett *hyperfoam* modell szemben (se javulás, se romlás). A mérések és a szimulációk között az eltérést mérési és illesztési bizonytalanság határain belül található.

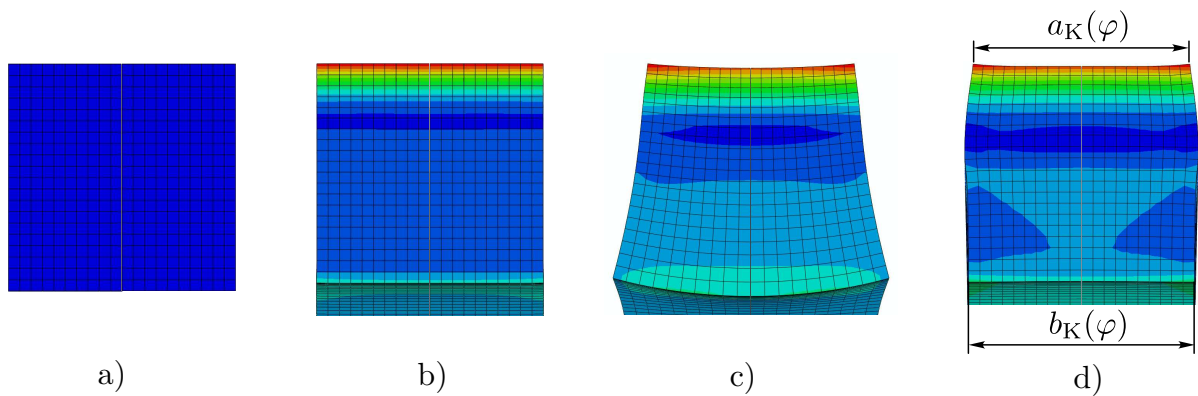
⁹Az R^2 , determinációs együttható nem használható a deformációk minősítésére, ugyanis egy helyen zéróosztó lépne fel.

5.3. táblázat. A különböző szimulációk által adott deformáció illeszkedése.

	$\nu \equiv 0$	$\nu_i = \nu_0$	szétválasztott
RMSE, $a_K(\varphi)$	10.813	4.81093	4.26205
RMSE, $b_K(\varphi)$	0.274138	19.1843	0.249382



5.6. ábra. A K keresztmetszet jellemző méretei különböző VEM modellel.

5.7. ábra. A deformált K keresztmetszet alakja *hyoerfoam* modellel szimulálva, a) terhelés nélkül, b) $\nu_i \equiv 0$, c) $\nu_i = \nu_0$, d) szétválasztott modell. A deformált b), c), d) esetben $\varphi = 60^\circ$.

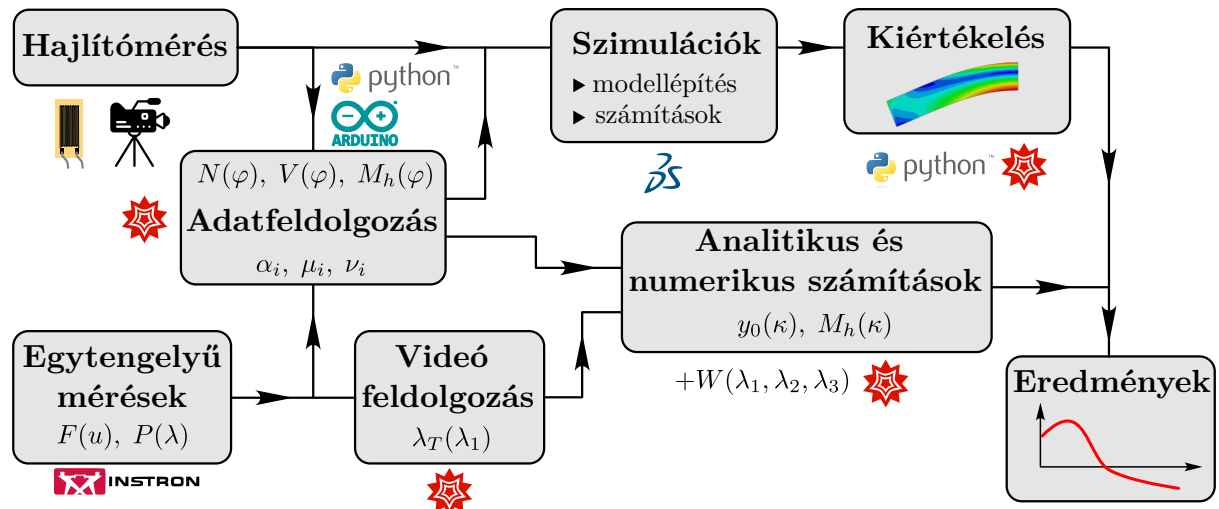
lesztettük a modellünket, akkor $b_K(\varphi)$ jellemző méret nagyon eltér nemcsak a mérttől, de az összes többi módszertől. Ezt tükrözik az 5.3 táblázatban látható RMSE értékek is. Azt állapíthatjuk meg tehát, hogy hajlítás esetén a szokványos paraméterillesztési stratégiák

mindegyike hibázik az elmozdulások leírásában. Megfigyelhetjük, hogy $a_K(\varphi)$ mért jellegét egyik modell sem tudja produkálni. Ez közvetlen következménye, hogy a modellezési korlátok miatt nem tudunk olyan Poisson-tényezőt használni, amelyet az anyagviselkedésre kimértünk a 4.2 fejezetben. Az aszimmetrikus konstitutív modellt közelítő szétválasztott szimulációs eljárás, amikor a modellt két részre bontva, külön anyagtulajdonságokat adtunk meg (5.3 ábra) az 5.6 ábrán a zöld görbe jelöli. Az illeszkedési értékeket figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy a bevezetett modellt közelítő szimuláció *mindkét* vizsgált jellemző méret esetén jobban teljesít a szokványos illesztéseknél. Eszerint a modellezési elgondolás pontosabb eredményt ad a szokványos eljárásoknál továbbá indokolt és megalapozott a további kutatása.

6. Összegzés, konklúziók

A dolgozat fő célja egy olyan új, a Poisson-tényezőben aszimmetrikus hiperelasztikus anyagmodell megalkotása volt, amely a nyílt cellás polimer habok komplex mechanikai viselkedését hivatott pontosabban leírni. Ismert tény, hogy a polimer habok viselkedése húzó- és nyomóigénybevétel alatt jelentős eltérést mutat, különösen a keresztirányú alakváltozásokban. A hagyományosan alkalmazott összenyomható Ogden–Hill-féle hiperelasztikus anyagmodell a szerkezetéből adódóan sosem képes megfelelően kezelni a keresztirányú alakváltozások jelentős különbségeit húzás és nyomás esetén, ezért a fejlesztett modellben egy állapotjelző segítségével aszimmetrikus Poisson-tényező került bevezetésre.

Egyedi, nagyméretű hajlítógépet terveztem és építettem, amely lehetővé tette a nagy deformációk mérését nagyméretű próbatestek esetére is. A berendezésen nyúlásmérő rendszer kiépítésével tettem lehetővé a reakció-erőrendszer pontos meghatározását. A mérési adatok feldolgozásában és elemzésében képfeldolgozási technikákat alkalmaztam, amelyek segítségével nagyfelbontású (8K) képek alapján határoztam meg a deformált próbatest geometriai adatait. Python és Mathematica (6.1 ábra) programok használata lehetővé tette a pontos és részletes geometriai elemzést, amely alapot adott a bevezetett anyagmodell validálásához.



6.1. ábra. A dolgozatban elvégzett feladatok folyamatábrája.

Az anyagmodellek paramétereinek meghatározására egytengelyű húzó- és nyomóméréseket végeztem, melynek adatsorára paraméterillesztést végeztem. Videofelvételek binarizálásával meghatároztam a keresztirányú alakváltozásokat és a pillanatnyi Poisson-tényezőt az egytengelyű mérések során. A dolgozat során analitikus számításokat végeztem a bevezetett aszimmetrikus modellel és megmutattam, hogy nem lehet a nyomaték-görbület összefüggést zárt alakban kifejezni. Az adódó nemlineáris egyenletrendszert numerikus módszerrel oldottam meg a semleges szál eltolódását leíró és a nyomaték-görbület függvénykapcsolatra, amelyek jó egyezést mutattak a méréssel meghatározott összefüggéssel. A meghatározott függvénykapcsolat igen jó egyezést mutatott a megépített hajlító berendezésen mérttel. A kutatási munkafolyamat főbb pontjait a 6.1 folyamatábra mutatja.

Az új hiperelasztikus modell fejlesztése során egy olyan megközelítést dolgoztam ki, amely képes különböző Poisson-tényezővel leírni a húzás és nyomás viselkedését. A kifejlesztett modellre közelítő végeelem szimulációkat végeztem, ahol összehasonlítottam a *hyperfoam* modellel. Az eredmények jól korreláltak a mérési adatokkal, és a vizsgált esetekre pontosabb megoldást szolgáltatnak a *hyperfoam* modellnél.

Összefoglalva, az újonnan kifejlesztett hiperelasztikus anyagmodell jelentős előrelépést mutat a hagyományos modellekhez képest a nyílt cellás polimer habok mechanikai viselkedésének leírásában. Az aszimmetrikus Poisson-tényező alkalmazása lehetővé teszi a keresztirányú alakváltozások pontosabb előrejelzését, amely különösen fontos olyan ipari alkalmazásokban, mint az autóiipari ütközésszimulációk. Ilyenkor fontos, hogy az ülésanyagban lévő szivacsot is megfelelően tudjuk modellezni, csakúgy, mint a repülő-ülések vagy az orvosi habok esetén. A dolgozatban bemutatott mérési- és konstitutív modellezési módszerek megbízható alapot nyújtanak a jövőbeli kutatásokhoz és modellek továbbfejlesztéséhez és azok numerikus implementálására.

Hivatkozások

- [1] Lorna J. Gibson and Michael F. Ashby. *Cellular Solids: Structure and Properties*. Cambridge Solid State Science Series. Cambridge University Press, 2 edition, 1997.
- [2] K. Ogi and A. Senba. Aircraft seat design indicators for eliminating economy class syndrome. 10 2023.
- [3] R. W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. *Proc. R. Soc. Lond.*, 328(1575):567–583, June 1972.
- [4] B. Storåkers. On material representation and constitutive branching in finite compressible elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 34(2):125–145, January 1986.
- [5] N. J. Mills. *Polymer Foams Handbook: Engineering and Biomechanics Applications and Design Guide*. Butterworth-Heinemann. 2007.
- [6] N.J. Mills. The high strain mechanical response of the wet kelvin model for open-cell foams. *International Journal of Solids and Structures*, 44(1):51–65, 2007.
- [7] M. Beatty and D. Stalnaker. The poisson function of finite elasticity. *Journal of Applied Mechanics-transactions of The Asme - J APPL MECH*, 53, 12 1986.
- [8] Vishay Precision Group. Shunt calibration of strain gauge instrumentation, tech note TN-514. Technical report. https://intertechnology.com/Vishay/pdfs/TechNotes_TechTips/TN-514.pdf.
- [9] A Gerhard Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics II*. John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [10] A. Benkhettou, O. Khatir, I. Boudjemaa, A. Sahli, B. A. B. Bouiadjra, and S. Benbarek. Multi-objective optimization of prosthetic multi-cells foam liner. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2024.
- [11] J. Chen, F. Lu, M. Wang, and S. Xiang. A new method for the dynamics analysis of super-elastic-plastic foams under inhomogeneous loading and unloading conditions. *Polymers*, (17), 2024.
- [12] G. F. Serra, F. A. O. Fernandes, E. Noronha, and R. J. Alves de Sousa. Engineering and design of a last mile novel helmet concept. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 2024.
- [13] P. Chavoshnejad, G. Li, A. Solhtalab, D. Liu, and M. J. Razavi. A theoretical framework for predicting the heterogeneous stiffness map of brain white matter tissue. *Physical Biology*, 21(6), 2024.
- [14] D. Cracknell, M. Battley, J. Fernandez, and M. Amirpour. Fluid-filled lattices for responsive orthotic insoles. *Smart Materials and Structures*, 2024.
- [15] W.-M. Chen, Y. Yu, X. Geng, C. Wang, L. Chen, and X. Ma. Modulation of internal tissue stresses of the knee via control of variable-stiffness properties in a 3d-printed footwear: A combined experimental and finite element analysis. *Engineering & Physics*, 2022.

- [16] Márton Tomin, Attila Kossa, Szabolcs Berezvai, and Ákos Kmetty. Investigating the impact behavior of wrestling mats via finite element simulation and falling weight impact tests. *Polymer Testing*, 108:107521, 2022.
- [17] S. Să răndan, R. Negru, L. Marşavina, M. S. Mihuţa, and D.-A. Şerban. Numerical analysis of a rugby union protective headgear under impact loading. *Materials Today: Proceedings*, 2023. 9th International Conference on Advanced Materials and Structures.
- [18] R. Hill. Aspects of invariance in solid mechanics. In *Advances in Applied Mechanics*, Advances in applied mechanics, pages 1–75. Elsevier, 1979.
- [19] *ABAQUS Documentation, Version 2022*. Dassault Systèmes Simulia Corp, United States.
- [20] A. Kossa and Sz. Berezvai. Novel strategy for the hyperelastic parameter fitting procedure of polymer foam materials. *Polymer Testing*, 53:149–155, 2016.
- [21] R. W. Ogden. *Non-linear elastic deformations*. Dover Publications, 1997.
- [22] S. Yan, D. Jia, Y. Yu, L. Wang, Y. Qiu, and Q. Wan. Novel strategies for parameter fitting procedure of the ogden hyperfoam model under shear condition. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 86:104154, 2021.
- [23] S. Timoshenko. *Strength of materials (Part II)*. D. Van Nostrand Company, Inc., 1940.
- [24] J. Lubliner. *Plasticity theory*. Dover Publications, 2008.
- [25] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 14.1. Champaign, IL, 2024.
- [26] G. Silber and C. Then. *Preventive Biomechanics: Optimizing Support Systems for the Human Body in the Lying and Sitting Position*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [27] F. Rádi. Constitutive modeling of polymeric sponge materials, final project, bme műszaki mechanikai tanszék. 2013.
- [28] Sz. Berezvai and A. Kossa. Closed-form solution of the Ogden–Hill’s compressible hyperelastic model for ramp loading. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 21(2):263–286, September 2016.
- [29] N. J. Mills and A. Gilchrist. High Strain Extension of Open-Cell Foams . *Journal of Engineering Materials and Technology*, 122(1):67–73, 04 1999.
- [30] R. W. Ogden. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 326(1567):565–584, February 1972.
- [31] S. J. Connolly, D. Mackenzie, and Y. Gorash. Isotropic hyperelasticity in principal stretches: explicit elasticity tensors and numerical implementation. *Computational Mechanics*, 64(5):1273–1288, May 2019.