

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR  
MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK

ENDRÉSZ BALÁZS

Tudományos Diákköri Konferencia Dolgozat  
Szenzorfüzió szerepe digitális stabilizálási feladatokban

Témavezető:

*Dr. Stépán Gábor*  
professzor emeritusz

BUDAPEST, 2024

# Tartalomjegyzék

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Absztrakt                                                             | IV |
| Ábra jegyzék                                                          | VI |
| 1. Motiváció                                                          | 1  |
| 2. Furuta inga                                                        | 2  |
| 3. Szenzorfúzió                                                       | 6  |
| 4. Szenzorfúzió matematikai modellezési alternatívái                  | 9  |
| 4.1. Magára hagyott rendszer viselkedése . . . . .                    | 11 |
| 4.2. Folytonos szabályozó stabilitása . . . . .                       | 12 |
| 4.3. Nulladrendű tartó stabilitásra gyakorolt hatása . . . . .        | 12 |
| 4.4. Két nulladrendű tartó együttes működésének leképezése . . . . .  | 16 |
| 4.5. Két nulladrendű tartó együttes működésének stabilitása . . . . . | 22 |
| 5. Racionális mintavételezési időarány hatása                         | 35 |
| 6. Felbontóképesség hatása két szenzor esetén                         | 39 |
| 7. Összefoglalás                                                      | 44 |
| Irodalomjegyzék                                                       | 46 |
| Függelék                                                              | 48 |

# Absztrakt

Az emberi egyensúlyozás egy összetett folyamat, amely több szervrendszer együttműködését igényli: a vestibuláris, vizuális és proprioceptív szervrendszer közösen biztosítja, hogy minél stabilabban álljunk mindennapjainkban. A három szervrendszer azonban különböző pontossággal és gyorsasággal rendelkezik. Például a vestibuláris szervrendszer gyorsabb jeleket biztosít, míg a vizuális szervrendszer rendelkezik a legjobb pontossággal. A kutatások azt mutatták, hogy mindhárom rendszer fontos szerepet játszik az egyensúly fenntartásában, mivel, ha bármelyik hiányzik, kevésbé vagyunk stabilak. Ilyenkor például megnövekszik a véletlenszerű mozgásaink mértéke álló helyzetben [1].

A jelenség megértése érdekében korábban egy vizuális és hibrid (kamerát és enkódert használó) egyensúlyozó Furuta-inga készült. Digitális szabályozás során az időkésés mellett a felbontóképesség is befolyásolja a rendszer működését, ami például mikrokaotikus viselkedéshez vezethet [2]. A jelenség matematikai modellezése erre, a digitális szabályozót használó inverz inga szerkezetre, pontosabban ennek egy alacsonyabb dimenziós változatára kerül kiterjesztésre. A dolgozat azt vizsgálja, hogy matematikailag kimutatható-e, hogy az egyensúly stabilizálásában szerepet játszik egy pontosabb (jobb felbontású), de lassabb (nagyobb késésű) és egy kevésbé pontos (rosszabb felbontású), de gyorsabb (kisebb késésű) rendszer együttes jelenléte a szabályozásban.

A kutatás ezután a kész inga verzióját vizsgálja, további orientáció-meghatározási mód-szereket javasol a sikeres szabályozáshoz, és kísérletekkel validálja a dinamikai modellt.

[1] ASSLÄNDER, Lorenz. Analysis of the visual contribution to human reactive balancing. 2015. PhD Thesis. Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2015.

[2] HALLER, Gy; STÉPÁN, G. Micro-chaos in digital control. Journal of Nonlinear Science, 1996, 6: 415-448.

# Angol absztrakt

Human balance is a complex process that relies on the cooperation of multiple sensory systems, including vestibular, visual, and proprioceptive systems, all work together to ensure our stability in everyday life. However, these systems vary in both accuracy and speed. For example, the vestibular system provides faster signals, whereas the visual system offers the highest level of accuracy. Research on balance has shown that all three systems play a crucial role in maintaining balance, as we become less stable when any one of these systems is impaired. For instance, standing balance becomes less stable when any of these systems is missing, leading to an increase in random sway movements [1].

In this research, a Furuta pendulum capable of visual and hybrid (using camera and encoder) balancing has already been developed to aid in understanding this phenomenon. In digital control, besides time delay, resolution also influences the system's behavior, leading to micro-chaotic dynamics [2]. The mathematical investigation is extended to this inverted pendulum structure, which uses a digital controller, simplified to a lower-dimensional version. The work seeks whether it can be mathematically demonstrated that the presence of both a more accurate (higher resolution), but slower (with greater delay) sensory system, and a less accurate (lower resolution), but faster (with less delay) sensory system, contributes to stabilizing balance.

The research further examines the assembled version of the pendulum, proposes additional orientation determination methods for effective visual control, and validates the dynamic model through experiments.

[1] ASSLÄNDER, Lorenz. Analysis of the visual contribution to human reactive balancing. 2015. PhD Thesis. Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2015.

[2] HALLER, Gy; STÉPÁN, G. Micro-chaos in digital control. Journal of Nonlinear Science, 1996, 6: 415-448.

# Ábrák jegyzéke

|                                                                                                                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Furuta-inga konstrukciója . . . . .                                                                                                                                            | 2  |
| 2.2. Stabilitási diagram $D_2 = 1.5$ paraméterre kiszámolva, amikor az időkézés $\tau = 0.025s$ (kék), $\tau = 0.05s$ (zöld), $\tau = 0.1s$ (piros), $\tau = 0.2s$ (lila) . . . . . | 4  |
| 2.3. Leggyorsabb beállási időhöz tartozó paraméterpár keresése $P_2 = 0$ és $D_2 = 1.5$ esetén. . . . .                                                                             | 4  |
| 2.4. Elméleti és mért stabilitási tartományok összevetése $P_2 = 0$ és $D_2 = 1.5$ esetén. . . . .                                                                                  | 5  |
| 2.5. Mérés időfüggvénye $D_1 = 10$ , $P_1 = 80$ , $P_2 = 5$ , $D_2 = 2.5$ and $\tau = 25$ ms . . . . .                                                                              | 6  |
| 4.1. Polírízó gép szabályozásának mechanikai modellje . . . . .                                                                                                                     | 9  |
| 4.2. Cruise control mechanikai modellje . . . . .                                                                                                                                   | 10 |
| 4.3. Stabilitási határok az időkézés ( $\Delta t$ ) függvényében . . . . .                                                                                                          | 14 |
| 4.4. Egy időkézéssel rendelkező rendszer szimulációs válasza $p = 3$ [1/s], $\Delta t = 0.5$ s és $k = 2$ [1/s] esetén. . . . .                                                     | 15 |
| 4.5. A transzformáció szimmetrikus jellegének reprezentációja . . . . .                                                                                                             | 21 |
| 4.6. Stabilitási diagram, rögzített $k = 1$ [1] dimenziótlan paraméter esetén . . . . .                                                                                             | 26 |
| 4.7. Stabilitási diagram, rögzített $k = 1$ [1] dimenziótlan paraméterrel, különböző $n$ esetekre. . . . .                                                                          | 28 |
| 4.8. Stabilitási diagram, rögzített $k = 1$ [1] dimenziótlan paraméterrel, különböző $n$ esetekre, $\Delta t_j = 1$ s rögzítése esetén. . . . .                                     | 29 |
| 4.9. Stabilitási diagram ábrája, amely a közelítő eredményt mutatja akkor, amikor $\Delta t_i \rightarrow 0$ , míg $\Delta t_j = 1$ s. (Jelen esetben $n = 100$ .) . . . . .        | 31 |
| 4.10. Stabilitási diagram, rögzített $\Delta t_i = 1$ s esetén, $k$ hatásának vizsgálata céljából. . . . .                                                                          | 33 |
| 4.11. Stabilitási diagramok összevetése, rögzített $\Delta t_j = 1$ s esetén, $p_1$ és $n$ hatásának bemutatásával . . . . .                                                        | 34 |
| 5.1. $n = 3/2$ esetén a mintavételezések közötti távolság reprezentációja . . . . .                                                                                                 | 35 |
| 5.2. Vizualizációs lehetőségek $n = 2/3$ esetén a transzformációs lépések kiválasztására. . . . .                                                                                   | 36 |
| 5.3. Stabilitási diagram, rögzített $k = 1$ [1] dimenziótlan paraméterrel, különböző $n$ esetekre, $\Delta t_j = 1$ s rögzítése esetén, kettő páros $n$ érték között. . . . .       | 38 |
| 6.1. Int függvény reprezentációja . . . . .                                                                                                                                         | 39 |
| 6.2. Pókháló diagram és annak kiemelt jelentőségű egyenesei. Paraméterek: $p_1 = 4$ , $p_2 = 8$ , $h_1 = 0.5$ , $h_2 = 2$ , $k = 10$ , $\Delta t = 0.1$ . . . . .                   | 41 |

|      |                                                                                                                                                                                 |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.3. | Szimulációs eredmény időfüggvénye. Paraméterek: $p_1 = 5$ , $p_2 = 7.5$ , $h_1 = 0.5$ , $h_2 = 1$ , $k = 10$ , $\Delta_t = 0.1$ . . . . .                                       | 42 |
| 6.4. | Szimulációs eredmény pókháló diagramjának és leképezés összehasonlítása. Paraméterek: $p_1 = 5$ , $p_2 = 7.5$ , $h_1 = 0.5$ , $h_2 = 1$ , $k = 10$ , $\Delta_t = 0.1$ . . . . . | 42 |
| 6.5. | Szimulációs eredmény pókháló diagramján egy megoldás menete. Paraméterek: $p_1 = 5$ , $p_2 = 7.5$ , $h_1 = 0.5$ , $h_2 = 1$ , $k = 10$ , $\Delta_t = 0.1$ . . . . .             | 43 |
| 7.1. | Stabilitási diagram, rögzített $k = 1$ [1] dimenziótlan paraméterrel, numerikus differenciálegyenlet megoldóval generálva . . . . .                                             | 48 |
| 7.2. | Stabilitási diagram $k$ paraméterfüggésének ábrázolása háromdimenziós felületen. . . . .                                                                                        | 49 |
| 7.3. | Stabilitási diagram $k$ paraméterfüggésének ábrázolása háromdimenziós felületen. . . . .                                                                                        | 50 |
| 7.4. | Stabilitási diagram $k$ paraméterfüggésének ábrázolása háromdimenziós felületen. . . . .                                                                                        | 51 |
| 7.5. | Stabilitási diagram $k$ paraméterfüggésének ábrázolása háromdimenziós felületen. . . . .                                                                                        | 52 |
| 7.6. | Stabilitási diagram $k$ paraméterfüggésének ábrázolása háromdimenziós felületen, $n$ hatásának vizualizációja. . . . .                                                          | 53 |

## Köszönetnyilvánítás

Szeretnem megköszönni témavezetőmnek, Stépán Gábor tanár úrnak a folytonos támogatást. Minden konzultáció alkalmával nagyon sokat tanulhatok tőle, amely mindennél többet jelent számomra és mindig feltölt motivációval, hogy érdemes tovább folytatni az elkezdett kutatási munkákat.

Szeretnék köszönetet mondani édesanyámnak, hogy ezen nehéz időszakban is támogat és mindig fordulhatok hozzá tanácsért, segítségért.

Köszönöm barátaimnak, hogy beszélgetéseikkel, gondolataikkal, jelenlétükkel teszik értékesebbé az életemet és köszönöm mértéktelen türelmüket.

Budapest, 2024. 11. 17.

*Endrész Balázs*

# 1. Motiváció

Az emberi egyensúlyozás egy összetett folyamat, amely több szervrendszer, a vizuális, vestibuláris és proprioceptív szervrendszer együttes működésének segítségével képes biztosítani stabilitásunkat. Az egyensúlyozással és stabilitásvesztéssel kapcsolatos problémák az idős korban jelentkeznek főként, amikor az esések egyre nagyobb egészségügyi kockázattal járnak, így annak megértése, hogy miként működik az emberi egyensúlyozás egy fontos probléma. Amennyiben értjük, hogy mikor és hogyan nő meg az elesések kockázata, akkor van lehetőség olyan preventív megoldásokon gondolkodni, amelyek az elesést megakadályozhatják.

Az emberi egyensúlyozás vizsgálatának és kutatási területének másik kérdése, hogy van-e lehetőség egyensúlyozással kapcsolatos vizsgálatokból egyes betegségek kialakulására következtetni. A meglepő kutatási eredmények alapján egy olyan egyszerű vizsgálat, mint az egyhelyben állás célzott vizsgálata is elegendő lehet neurológiai betegségek, mint a Parkinson kór kialakulásának előrejelzésére. Ezeknél a betegségeknel a minél gyorsabb észrevétel jelentőséggel bír, hiszen korai fázisban észrevett betegség esetén a beteg életminősége javítható. A vizsgálatok azt az érdekes jelenséget mutatták, hogy a mindenki által tapasztalt véletlenszerű mozgás, amelyet egyhelyben állás közben végzünk a Parkinson kóros betegek esetében sokkal kisebb, így a vizsgálatok egyszerűen tudnak a betegség meglétének lehetőségére utalni [1].

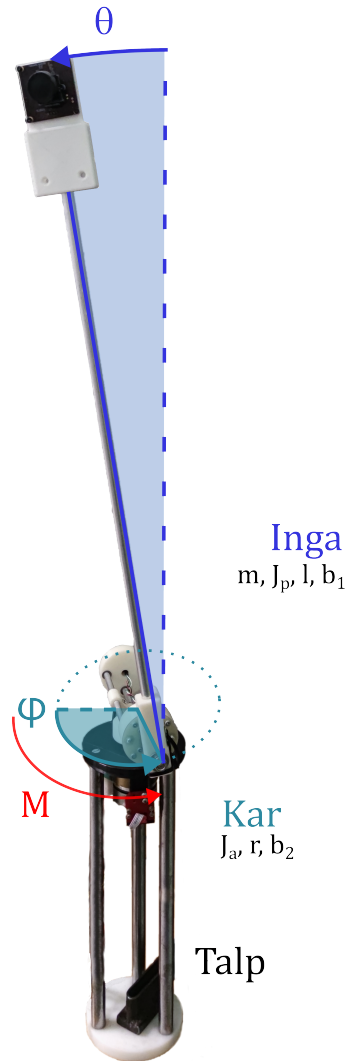
Mindemellett a mérnöki gyakorlatban igazán hasznos koncepciók nyerhetők a természetből, annak megismerése és modellezése során. A modern mérnöki tudományokban a komplex szenzorrendszerek és robotikai alkalmazások is helyet kapnak, amelyek tervezésével kapcsolatban nagyon sok tapasztalat és ötlet származik az emberi testből, amelyeket később eltérő helyeken, mérnöki tervezés során is lehet alkalmazni.

Korábbi munkám során elkészült egy olyan Furuta-inga konstrukció, amely a rúd tetejére helyezett kamera segítségével igyekszik magát a felső instabil egyensúlyi helyzete körül tartani. A konstrukció tervezését és gyártását követően megtörtént az ingát jellemző fizikai paraméterek mérése és identifikációja [2]. A konstrukció kamera mellett rendelkezik mindkét szabadságfoka esetén egy-egy enkóderrel, amely szintén alkalmazható az állapot meghatározására.

Jelenlegi dolgozat célja annak az emberi egyensúlyozásból merített ötletnek a vizsgálata, hogy az enkóder és a kamera együttes alkalmazása szenzorfúzióként, mint ahogy az emberi szervrendszer teszi, eltérő időkésséssel és felbontóképességgel rendelkező szervek segítségével, miként hat a rendszer stabilitására. Az ember esetében a szem a leglassabb és egyben legpontosabb egyensúlyozó szervrendszer, amelyet a kamera tud reprezentálni, míg az enkóder ekkor a többi szerv működését írhatja le. További felmerülő kérdés, hogy mérnöki szempontból előnyt jelenthet-e egy ilyen szenzorfúzió használata egy dinamikai rendszer stabilizálásához vagy annak megtartása érdekében, a robusztusság növelésén keresztül.

## 2. Furuta inga

Korábbi munkám során sikerült megtervezni és legyártani egy Furuta-inga koncepciót, amely rudjának tetején egy kamera helyezkedik el, így az emberi egyensúlyozás egy két szabadságfokú modelljének nemlinearitással kiegészített verzióját modellezzve. A gyártást követően a modell paramétereinek mérése és a nem mérhető paramétereket pedig paraméteridentifikációs módszerrel történő meghatározása történt[2]. Az elkészült inga konstrukcióját Ábra 2.1 mutatja.



**2.1. ábra.** Furuta-inga konstrukciója

A modell rendszer és bemeneti mátrixa megadható, mint

$$\mathbf{A} = \frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} 0 & J^2 & 0 \\ \tilde{k}J_a & -b_1J_a & -mrlq\tilde{b}_2 \\ \tilde{k}mrl & -mrlb_1 & -J_p\tilde{b}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} 0 \\ Nmrl \\ NJ_p \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

ahol  $J^2 = J_a J_p - (mrl)^2$ ,  $\tilde{k} = k_t - mgl$  és  $\tilde{b}_2 + K$ , ahol  $J_a$  a kar tehetetlenségi nyomatéka a motor tengelyére számítva,  $J_p$  az inga tehetetlenségi nyomatéka annak forgástengelyére számítva,  $m$  az inga tömege,  $l$  az inga súlypontjának tengelytől mért távolsága,  $r$  a kar motor tengelyétől mért távolsága,  $b_1$  az ingánál mérhető viszkózus súrlódási tényező,  $b_2$  a motornál mérhető viszkózus súrlódási tényező,  $N$  a motor állandó,  $K$  az úgynevezett visszaható elektromotoros erő (back-EMF) hatását jelölő tag és a rendszer állapotvektora (a ciklikus koordináta elhagyásával)  $\mathbf{x}(t) = [\theta(t) \quad \dot{\theta}(t) \quad \dot{\varphi}(t)]^T$ .

A rendszer kimeneti vektora

$$\mathbf{y}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j \\ U_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{\varphi}_j \\ U_j \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

amely kibővített állapotvektor segítségével a szabályozót tartalmazó mátrix segítségével a vektor két időpillanat közötti frissítésének szabálya megadható, mint

$$\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{C} \mathbf{y}_j. \quad (2.3)$$

A  $\mathbf{C}$  mátrix előáll, mint:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}\tau} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \\ -P_1 & -D_1 & D_2 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

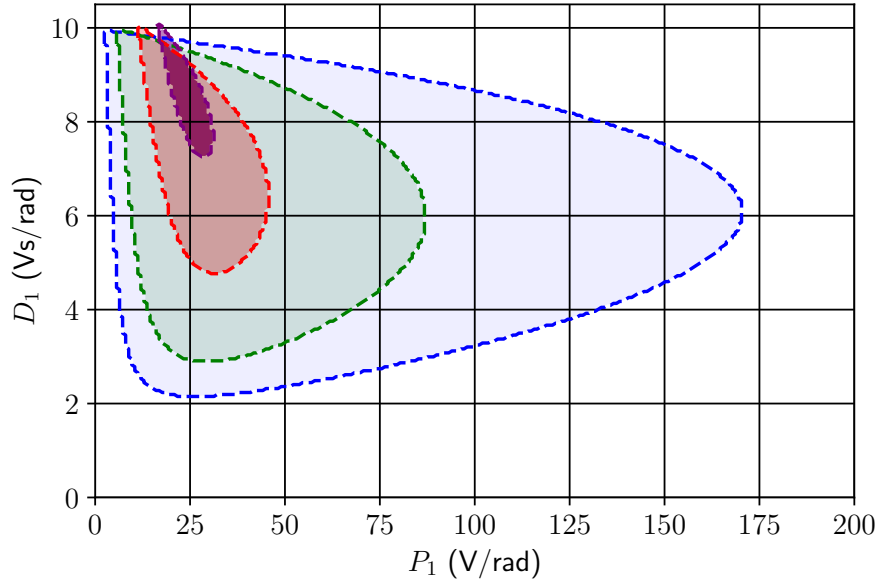
ahol a  $\mathbf{B}_1$  vektor

$$\mathbf{B}_1 = (e^{\mathbf{A}\tau} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.5)$$

módon van definiálva és  $P_1$ ,  $D_1$  az ingához, míg  $P_2$ ,  $D_2$  a karhoz tartozó  $PD$  szabályozó értékek. A mátrixok segítségével a kritikus időkézés értéke meghatározható a Pólya-Szegő tétel segítségével[3]. A kritikus időkézés értéke a számítások alapján

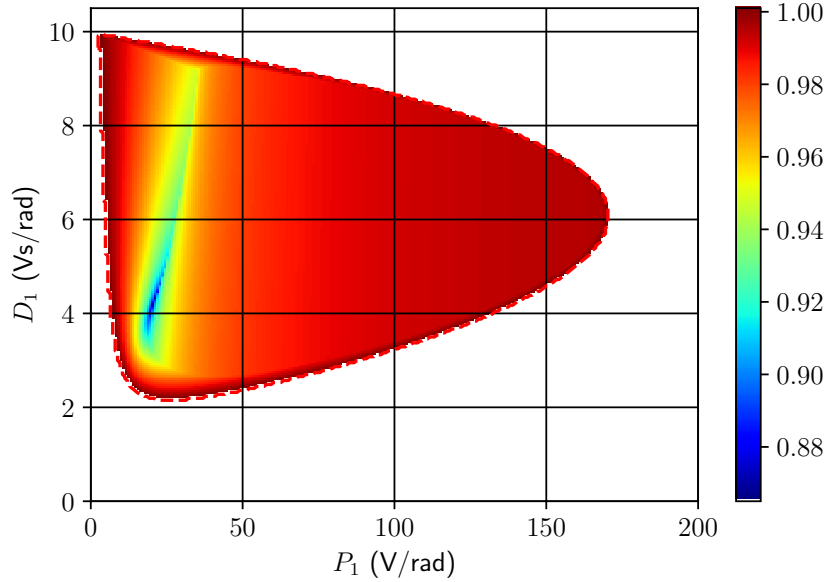
$$\tau_{cr} \approx 0.277 [s] \quad (2.6)$$

értéknek adódott. A stabilitási diagram a fent definiált mátrixok segítségével numerikusan számítható, amelyet Ábra 2.2 szemlélteti.



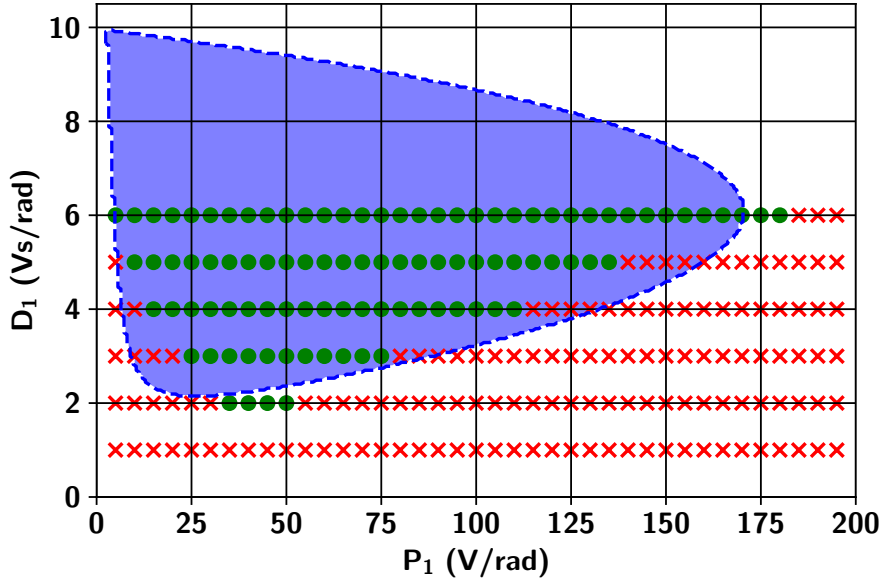
**2.2. ábra.** Stabilitási diagram  $D_2 = 1.5$  paraméterre kiszámolva, amikor az időkézés  $\tau = 0.025s$  (kék),  $\tau = 0.05s$  (zöld),  $\tau = 0.1s$  (piros),  $\tau = 0.2s$  (lila)

Digitális időkézés esetén ezen felül lehetőség van a stabilitás „erősségének” meghatározására, amelyhez a karakterisztikus multiplikátorok abszolútértékének maximumát kell ábrázolni (lásd Ábra 2.3). A legkisebb abszolútértékű pont a leggyorsabb beálláshoz tartozó érték, amely a tartomány belsejében található meg, azt egy jelentős mértékű gradiens veszi körül.



**2.3. ábra.** Leggyorsabb beállási időhöz tartozó paraméterpár keresése  $P_2 = 0$  és  $D_2 = 1.5$  esetén.

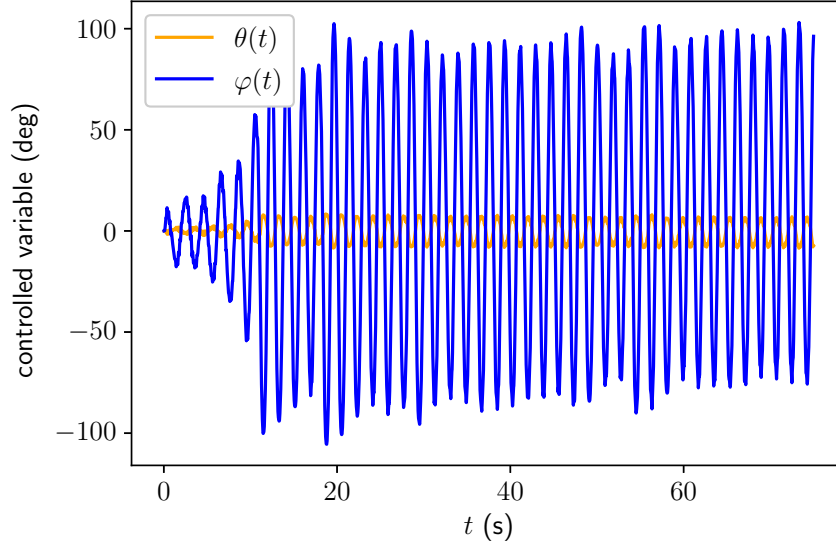
A paraméteridentifikáció kísérleti validálásához a  $P_1 - D_1$  paramétertartományon végig söpörve  $\Delta P_1 = 5$  lépésközzel a stabilitás minden pontban meghatározható mérés útján. A mérés eredményét a Ábra 2.4 mutatja. A diagramon jelölt zöld pontok esetén a rendszer stabil, míg piros pontok esetén a rendszer instabil viselkedést mutatott.  $D_1 = 6$  felett a motor nyomatéka telítésbe ment át, így efelett mért értékek nem felelnek meg az elméletileg számolt lineáris modellel becsléseknek, így azok nem kerültek ábrázolásra. Az elméletileg számolt tartomány a kísérleti eredményekkel nagy fokú egyezést mutat, így a paraméteridentifikációt és az elméleti modell felírását sikeresnek lehet tekinteni.



**2.4. ábra.** Elméleti és mért stabilitási tartományok összevetése  $P_2 = 0$  és  $D_2 = 1.5$  esetén.

Stabilnak tekinthető egy pont, ha kis perturbációk esetén is stabil marad a rendszer, illetve, ha magára hagyva képes az ingát a felső, instabil egyensúlyi pont körül tartani. Egy ilyen mérés eredményét mutatja a Ábra 2.5 ábra is. A rendszer nem mutat aszimptotikusan stabil viselkedést, amely a következménye lehet a véges felbontóképességnek és a nem modellezett nem lineáris jelenségeknek, mint a motor kotyogása.

Az inga képfeldolgozó algoritmusainak fejlesztése a jövőben elengedhetetlen ahhoz, hogy a képfeldolgozást használó rendszer stabilitása és a szenzorfüziós eredmények kipróbálhatóak legyenek kísérleti úton. Az eddig meghatározott optical flow és SIFT jellemző keresést használó algoritmusok mellett érdemes lehet biológiailag motivált orientációkereső algoritmusokat is kipróbálni, hasonlóan ahhoz a publikációhoz, amelyben a szemben található csapok és pálcikákat modellező Gábor függvények segítségével történt orientáció meghatározás [4].



**2.5. ábra.** Mérés időfüggvénye  $D_1 = 10$ ,  $P_1 = 80$ ,  $P_2 = 5$ ,  $D_2 = 2.5$  and  $\tau = 25$  ms

### 3. Szenzorfúzió

Szenzorfúzió alatt azt a konstrukciót értjük, amikor azonos fizikai jellemzőt több szenzor együttes működésének eredményén keresztül kerül meghatározásra. A szenzorok specifikációi alapján van lehetőség a szenzor mérési eredményeinek súlyozására (például a bizonytalanság vagy az információ aktualitása alapján). Az egyik legelterjedtebb szenzorfúzióra használható metódus az úgy nevezett Kálmán-szűrő. Kálmán-szűrő egy olyan megfigyelő, amely rendelkezik a rendszer dinamika modelljével, ám (mint általában a modell alapú technikák esetében) a jelekből érkező bizonytalanságok és a modellbizonytalanság miatt ez a modell nem egyezik a valósággal, így az innen származtatott belső állapotok is eltérőek lesznek. A Kálmán-szűrők ezt az eltérést minimalizálják optimális módon, súlyozva a bemenetre érkező jeleket azok bizonytalansága és aktualitása függvényében, majd ezt kombinálva a belsőleg, előre prediktált állapottal, képezi a szűrő a megfigyelt, újonnan prediktált állapotot. A Kálmán-szűrők tervezése során általános feltételezés szerint rendszert érő bizonytalanságok modellezhetőek, mint Gauss-eloszlást mutató fehér zajok. Amennyiben a szenzorokból érkező zaj nem tesz eleget ennek a feltételnek, akkor a szűrő nem tudja teljesíteni az optimális súlyozás megtalálását és ezen keresztül az optimális állapotbecslést. Kálmán-szűrő előnyös tulajdonsága, hogy a becsült állapot mellett az úgynevezett kovariancia értéket is megadja, amelyből a becslés jóságának fokára lehet következtetni [5].

Szenzorfúzió megvalósítására ezen felül számos lehetőség nyílik, mint support vector machine (SVM) gépi tanulási metódus, amelyet legfőképp klasszifikációs technikákra fejlesztettek ki és használnak. A metódus célja egy hipersíkot optimalizálni a hibák minimalizálása érdekében, továbbá maximalizálni a különböző tartalékokat, mint a biztonsági tartalék. SVM könnyen használható szenzorfúzió esetén például információk tömörítésére

is, mivel előfordulhat, hogy az adatmennyiségnek köszönhetően, valós időben nem lenne végrehajtható a kívánt feladat. Szenzorfüzió témakörében fontos csoportot alkotnak a Baye-féle metódusok, a Dempster-Shafer elmélet és neurális hálók. Ezek a valószínűség alapú vagy tanulás alapú technikák közös célja egy célfüggvényt optimalizálni, ezen keresztül megtalálni az optimális módszert az adatok kombinálására. A klasszifikációs technikák között lehet említeni az eddigi eljárások mellett a fuzzy logika használatát is, amely során a logika azt vizsgálja, hogy az fennálló körülmények között az egyes szenzorok mennyire alkalmasak a kívánt mennyiség mérésére.

Szenzorfüzió használható nem csak szabályozástechnikában, de a műszaki tudományok különféle területein. Az internetes eszközhálózatok (Internet of Things) szükséges feltétele, hogy rendszer a környezetről elegendő információval rendelkezzen, amelyre például szenzorfüzió használatán keresztül van lehetőség. Az önvezető mobilitási eszközök kapcsán is fontos szerepet tölt be a szakirodalomban a szenzorfüzió. A modern önvezető autók rengeteg szenzorral vannak ellátva, mint kamera, LIDAR vagy ultrahangos érzékelők annak érdekében, hogy a környezetet minél pontosabban fel tudják térképezni. Az adatok mennyisége ezen technológia esetében annyira sok, hogy több szintes szenzorfüzió kialakítására van szükség, hogy az alacsony szintű rendszerek közel valós időben tudjanak reagálni a környezet változásaira.

A szenzorfüzió a dróniparban is kulcs szerepet játszik, hiszen a biztonságos manőverek végrehajtásához megbízható információval kell rendelkeznie a drónnak annak helyzetéről és pozíciójáról, illetve a környezetről. A navigációt segítik a drónokba szerelt giroszkópok, gyorsulásérzékelők, magnetométerek, ultrahangos érzékelők és GPS, ám a legtöbb modell GPS jel hiányában is képes manőverek végrehajtása közben nyomon követni pozícióját és a feladat végrehajtása után vissza tud állni az előző kijelölt pozícióba.

A virtuális valóság eszközök esetében egy kihívást jelentő mérnöki feladat az ember fejének nyomon követése, amely kulcsszerepet játszik a felhasználás során. Ezen alkalmazások esetében egy érzékelő használata nem lenne elegendő, mivel a giroszkópok nem adnak elegendő információt a fej orientációjának és pozíciójának pontos ismeretéhez, a gyorsulásérzékelők pedig zajos jellege miatt nem alkalmasak egyedüli érzékelésre. A magnetométerek bár az orientációt helyesen adják vissza, ferromágneses fémek közelében nem működnek megfelelően. A szenzorok egyes gyenge pontjaik kiküszöbölése érdekében érdemes egyesíteni különböző működési elvű szenzorokat, így kihasználva mindegyik saját előnyös tulajdonságát [6].

Több szenzoros rendszerek használata a biológiához kapcsolódó tudományokban is feltehető. A sportolók mozgásának tanulmányozása egy fontos biomechanikai feladat, amely segíthet rávilágítani arra, hogy milyen helyes és helytelen mozdulatokat végeznek az élsportolók, ezzel javítva a teljesítményükön és felhívva a figyelmet a balesetveszélyes mozdulatokra. Egy kutatás során szenzorok segítségével követték nyomon a sportolók gyorsulását és energia felhasználásukat a mozgás során. A szenzorfüzió segítségével 90% feletti pontossággal sikerült a nyomon követést végrehajtani a validációs tesztek alapján. Az

eljárás hasznosnak bizonyult a megjelenő helytelen mozdulatok felfedezésére, amely az edző számára hasznos információval szolgált az egyéni edzési terv továbbfejlesztéséhez [7].

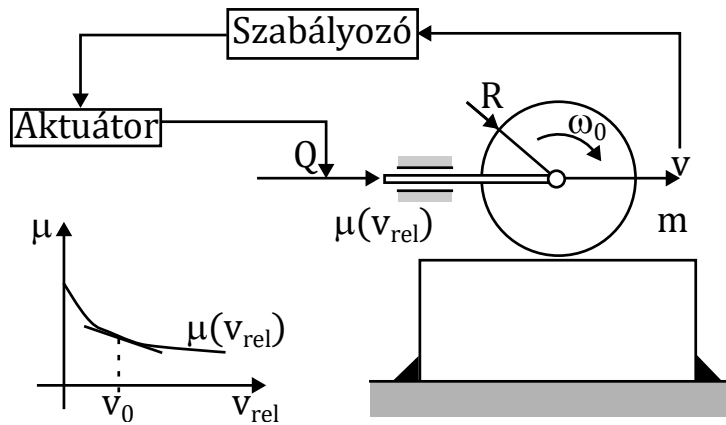
A dolgozat témájához hasonlóan emberi járást imitáló gépek készítése során is előszeretettel használják a szenzorfúziót, robotikai felhasználásokban. Humanoid robotok esetében egy lejtőn való sétálás egy kihívást jelentő feladat, mivel annak érdekében, hogy egyensúlyukat megtartsák súlypontjukat át kell helyezni stabil pozícióból, amelyhez előre vagy hátra kell hajoljanak. Az alábbi kutatás során ennek a hajlásnak a szögét határozták meg szenzorfúzió segítségével, Kálmán-szűrő alkalmazásával, amellyel a szabályozóba érkező hibajelből sikeresen tudták szűrni a szenzorokban megjelenő zajokat [8].

Az itt felsorolt eredmények mutatják a szenzorfúzió szerepét műszaki felhasználásokban, ám rávilágítanak arra, hogy a legtöbb szenzorfúziót megvalósító eljárás, optimalizációs technikára épül. Az optimalizációs technikák hátránya, hogy a megoldás kevés információt nyújt arról, hogy milyen kvantitatív és kvalitatív struktúrája van a dinamikának, így nem ad lehetőséget a paraméterek szerepének megértésére. A dolgozatban használt eljárás előnye, hogy egy egyszerű szabályozó struktúra esetén belátást ad a rendszer egészének működésébe, egyes paraméterek hatását ezen keresztül jobban meg lehet érteni és a stabil paramétertér geometriája is meghatározhatóvá válik.

## 4. Szenzorfúzió matematikai modellezési alternatívái

Annak érdekében, hogy a bemutatásra kerülő matematikai modell vizsgálatát vizualizálni és mélyen tanulmányozni lehessen, a dolgozatban egy redukált modell kerül használatra az inga több szabadságfokú modellje helyett, mivel nagy fókusz esetén a fázistér ábrázolása nehézkes a nagy dimenziószám miatt. Ezeket a modelleket nevezzük 'cartoon modellnek', mivel egy redukált, kisebb dimenziós megfelelői a valós modellnek ahhoz hasonlóan, ahogy a rajzfilmek is a valós reprezentáció egy redukált, elnagyolt megfelelőinek tekinthetők.

Bár ezek a modellek nem kerülnek elő direkt módon egyensúlyozás témakörében, több mechanikai alkalmazás esetében is láthatunk példát ilyen, egy dimenziós modellre, ahol a szenzorfúzió szintén fontos szerepet kaphat, mint például egy polírozó gép, vagy a sebességtartó automatika.



4.1. ábra. Polírozó gép szabályozásának mechanikai modellje

A polírozó gép modellje a Ábra 4.1 látható. A modell levezetése során feltesszük, hogy a gép  $R$  sugarú tárcsája  $-\omega_0$  szögsebességgel forog és  $v$  sebességgel mozog horizontális irányba. A tárcsa és a felület között ennek következtében

$$v_{\text{rel}} = R\omega_0 - v \quad (4.1)$$

relatív sebesség írható fel. A felület érintkezési pontjában Stribeck-modell segítségével írjuk le, amely  $\mu(v_{\text{rel}})$  relatív sebességtől függő súrlódási tényező segítségével kerül meghatározásra. A Stribeck-modell nemlineáris kapcsolatot teremt a relatív sebesség és a súrlódási tényező között. A nemlineáris modellt a  $v = 0$  pont körül linearizálva a súrlódási erő a következő alakban írható fel:

$$mg\mu(v_{\text{rel}}) = mg\mu(R\omega_0 - v) \approx mg\mu(R\omega_0) - mg\mu'(R\omega_0)v, \quad (4.2)$$

ahol  $\mu'$  a relatív sebesség szerinti differenciálást jelöli és a Stribeck-hatás következtében  $\mu'(R\omega_0) < 0$ . A rendszerre ható szabályzó erőt állítsuk elő, mint

$$F_K(v) = -mg\mu(R\omega_0) - \tilde{F}(v), \quad (4.3)$$

ahol a  $\tilde{F}(v)$  a későbbiekben azonosított szabályozási struktúra, és  $mg\mu(R\omega_0)$  egy ehhez képesti konstans eltolása az erőnek. Ezek alapján a felírható linearizált egyenlete a polírozó gépnek:

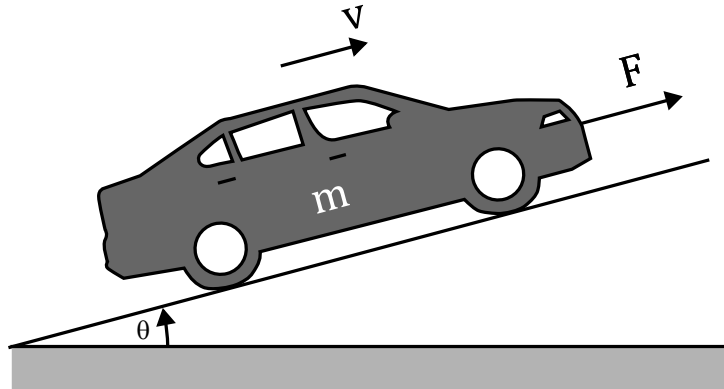
$$m\dot{v} + mg\mu'(R\omega_0)v = mg\mu(R\omega_0) - mg\mu(R\omega_0) - \tilde{F}(v), \quad (4.4)$$

amely alapján a rendszer átírható, mint

$$\dot{v} - kv = F(v, t) \quad v(0) = v_0, \quad k > 0, \quad (4.5)$$

ahol  $k = -g\mu'(R\omega_0)$  és  $F(v) = -\tilde{F}(v)/m$  [9].

A másik példa a sebességszabályozás (vagy angol nevén cruise control), amely esetében a cél a rendszer sebességének egyenletesen tartása, a fellépő disszipatív hatások ellenére, mint az egyszerűsített modellben megjelenő közegellenállás (lásd Ábra 4.2).



**4.2. ábra.** Cruise control mechanikai modellje

A modellben az autót egy homogén testként modellezzük  $m$  tömeggel. Az autóra ható erők a gravitációs erő, a gördülő súrlódásból származó erőtag és a légköri ellenállásból (vagy közegellenállásból) származtatható erő, illetve a motorból származó  $F_K$  gerjesztés, amely az autót gyorsítja. A gravitációs komponense egyszerűen látszik, hogy  $F_g = mg \sin(\Theta)$ , amely linearizálás után  $\Theta = 0$

$$F_g = mg\Theta \quad (4.6)$$

eredményt adja. A gördülési súrlódás legegyszerűbb esetben egy konstans segítségével paraméterezhető, annak nagysága így

$$F_s = mg\mu_s, \quad (4.7)$$

ahol  $\mu_s$  a gördülési súrlódás tényező. Végül a légellenállásból származó tag

$$F_l = \frac{1}{2} \rho C_v A v^2 . \quad (4.8)$$

Az így kapott modell Taylor sorba fejthető egy adott munkaponti sebesség ,  $v_0$  körül, így a közegellenállásból egy linearizált,

$$\tilde{F}_l = \rho C_v A v \quad (4.9)$$

tag marad. Newton törvények felírását követően adódik, hogy

$$\dot{I} = \sum F \quad \rightarrow \quad m\dot{v} = F_K - \tilde{F}_l - F_g - F_s . \quad (4.10)$$

Tegyük fel, hogy az autó vízszintesen halad, azaz  $\Theta = 0$  és a szabályozásra használt  $F_K$  nagyságát válasszuk meg úgy, hogy  $F_K = mg\mu_s + \tilde{F}$ , így a végső képlet

$$m\dot{v} - \rho C_v A v = \tilde{F} , \quad (4.11)$$

azaz  $k = \rho C_v A/m$  és  $F = \tilde{F}/m$  megválasztása esetén a továbbiakban használat, alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\dot{v} - kv = F(v, t) \quad v(0) = v_0 , \quad k > 0 , \quad (4.12)$$

ahol  $v$  a sebesség,  $k$  rendszerparaméter, míg  $F(v, t)$  beavatkozó erő, amely általánosan állapot- és időfüggőnek tekinthető [10].

## 4.1. Magára hagyott rendszer viselkedése

Amennyiben  $F(v, t) \equiv 0$  esetén a rendszer modellje

$$\dot{v} - kv = 0 , \quad v(0) = v_0 , \quad k > 0 \quad (4.13)$$

formára egyszerűsödik, amelynek stabilitása könnyen látható, hiszen a Routh-Hurwitz kritérium elégséges feltételének nem tesz eleget, az együtthatók előjele nem egyezik meg, így a rendszer instabil. A modellhez tartozó karakterisztikus egyenlet ekkor

$$\lambda - k = 0 , \quad (4.14)$$

amelyből az egyenlet megoldása:

$$v(t) = v_0 e^{kt} . \quad (4.15)$$

## 4.2. Folytonos szabályozó stabilitása

Következő vizsgálati elrendezésben legyen  $F(v, t) = -pv$ , amely egy proporcionális szabályozónak felel meg – a sebességhez viszonyítva –, hiszen a sebességgel egyenesen arányosan avatkozik be a rendszer működésébe. Amennyiben feltételezzük, hogy a jelet késés nélkül lehet visszacsatolni és a mért jel folytonos, elhanyagolva a kvantálásból eredő hatásokat, a modell az alábbiak szerint írható fel:

$$\dot{v} - kv = -pv, \quad v(0) = v_0, \quad k > 0. \quad (4.16)$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet megadható, mint

$$\lambda - k + p = 0, \quad (4.17)$$

amelyből az egyenlet megoldása

$$v(t) = v_0 e^{(k-p)t}. \quad (4.18)$$

A rendszer stabilitásának feltétel ekkor, hogy  $-k + p$  pozitív kifejezés legyen, azaz

$$p > k \quad (4.19)$$

feltételnek szükséges teljesülnie.

## 4.3. Nulladrendű tartó stabilitásra gyakorolt hatása

Modern irányítástechnikában törekszünk arra, hogy minél könnyebben általánosítható legyen az irányítási technikák, amivel a rendszerbe avatkozzunk. Az irányítástechnika fő feladata, hogy egy már meglévő fizikai rendszer működését – amelyet a szakirodalomban irányított szakasznak neveznek – annak megváltoztatása nélkül tudjunk beavatkozni. Ennek eredményeképp a szabályozó paramétereinek hangolásával érhető el, hogy a rendszer az előírt stabilitás és performancia kritériumoknak megfelelően üzemeljen. Míg régen a mérnöki gyakorlatban analóg eszközök áltak rendelkezésre a szabályozó paramétereinek hangolására (mint a gépészmérnöki gyakorlatban megjelenő centrifugál regulátor vagy a villamosmérnöki gyakorlatban alkalmazott analóg áramköri elemek), addig nagyon flexibilitás érdekében manapság elterjedt digitális szabályozók tervezése. Míg a digitális szabályozók előnye, hogy a szabályozó paramétereit könnyedén lehet változtatni és lehetőség van állapot vagy idő függően változtatni is az itt megjelenő változókat, addig a szabályozóban a digitalizálás miatt időkésés jelenik meg, amely az egész zárt szabályozási kör stabilitására hatással van. A digitalizálásra több lehetőség is adódik, például az elsőrendű tartó, bilineáris transzformáció, de a legelterjedtebb, egyszerű implementálhatósága miatt az úgynevezett nulladrendű tartó (Zero Order Hold - ZOH).

A ZOH esetén a szenzorban  $t_i$  időpillanatban mért jelet  $\Delta t$ , mintavételezési időnek megfelelő ideig azonos értéken tartjuk. [3]. A jel nagysága jelen megközelítésben a mérés pillanatában a valós fizikai rendszer adott pillanatban mért értékével egyezik meg, míg a kvantálás hatásától jelen alfejezetben eltekintünk. Ekkor a differenciálegyenlet

$$\dot{v} - kv = -pv_i, \quad v(0) = v_0, \quad k > 0 \quad (4.20)$$

alakban írható fel, ahol  $v_i$  a mintavételezett jel nagysága  $t \in [t_i, t_{i+1})$  intervallumban. Az eddigiekben homogén differenciálegyenlet így inhomogénná vált, amelynek homogén megoldása Egyenlet 4.15 eredménnyel azonos módon áll elő, mint:

$$v_H(t) = Ae^{kt}. \quad (4.21)$$

Az inhomogén rész esetén mivel tudjuk, hogy a rendszer partikuláris megoldása gerjesztéssel azonos alakú, konstans gerjesztésre adott válasza az egyenletnek egy konstans partikuláris megoldás, amely így meghatározható, hogy

$$v_P = \frac{p}{k}v_i. \quad (4.22)$$

A nulladrendű tartót tartalmazó rendszer időfüggvénye így

$$v(t) = v_H + v_P = Ae^{kt} + \frac{p}{k}v_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (4.23)$$

Az integrálási konstans értéke kezdeti feltételként meghatározható. Annak következtében, hogy a gerjesztés minden mintavételezéskor változik általánosan, felírható, hogy a vizsgált időintervallum elején  $v(t_i) = v_i$ , amelyből

$$v(t) = \left(1 - \frac{p}{k}\right)v_i e^{k(t-t_i)} + \frac{p}{k}v_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (4.24)$$

A következő intervallum elején  $v(t_{i+1}) = v_{i+1}$  lesz a kezdeti feltétel. Mivel ismert az időfejlődés törvénye az adott időintervallumban, annak végén a következő intervallum kezdete megadható, mint

$$v_{i+1} = \left[\left(1 - e^{k\Delta t}\right)\frac{p}{k} + e^{k\Delta t}\right]v_i, \quad (4.25)$$

ahol  $\Delta t$  a mintavételezési idő. Az így előálló egyenlet egy egydimenziós diszkrét leképezés, ahol a stabilitási feltétel, hogy a  $v_i$  előző állapot együttható abszolút értéke egynél kisebb, azaz

$$\left|\left(1 - e^{k\Delta t}\right)\frac{p}{k} + e^{k\Delta t}\right| < 1, \quad (4.26)$$

amelyből

$$k < p < k \frac{e^{k\Delta t} + 1}{e^{k\Delta t} - 1} = \frac{k}{\tanh(k\Delta t/2)} . \quad (4.27)$$

Annak érdekében, hogy a szabad paraméterek száma csökkenjen, az egyenletet érdemes dimenziótlanítani. Válasszuk meg a dimenziótlan időt, mint  $\tau := t/\Delta t$  és jelölje a mintavételezési időpontokat  $i := t_i/\Delta t$ . Bevezetve a dimenziótlan időhöz tartozó deriválás jelölését, mint  $d/d\tau \square = \square'$  az idő szerinti derivált átírható, mint

$$\dot{\square} = \frac{d}{dt}\square = \frac{d}{\Delta t d\tau}\square = \frac{1}{\Delta t} \square' . \quad (4.28)$$

A differenciálegyenlet ennek megfelelően

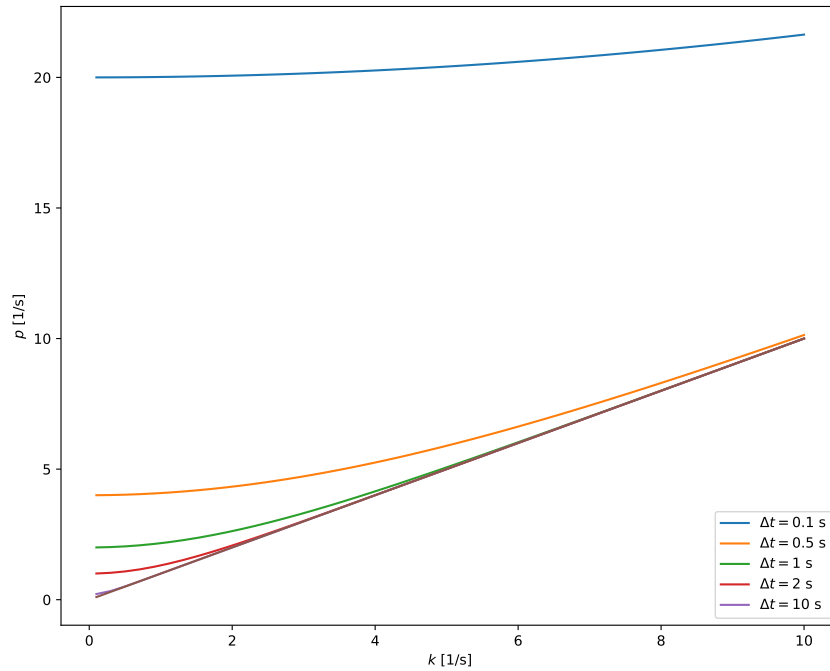
$$\frac{1}{\Delta t} v' - kv = -pv_i , \quad \tau \in [i, i+1) , \quad (4.29)$$

Válasszuk meg  $\tilde{k} := k\Delta t$  és  $\tilde{p} := p\Delta t$  dimenziótlanított paramétereket. Definiáljuk újra  $p := \tilde{p}$  és  $k := \tilde{k}$  paramétert rövidítés érdekében, így a differenciálegyenlet az alábbi formára egyszerűsödik

$$v' - kv = -pv_i , \quad \tau \in [i, i+1) . \quad (4.30)$$

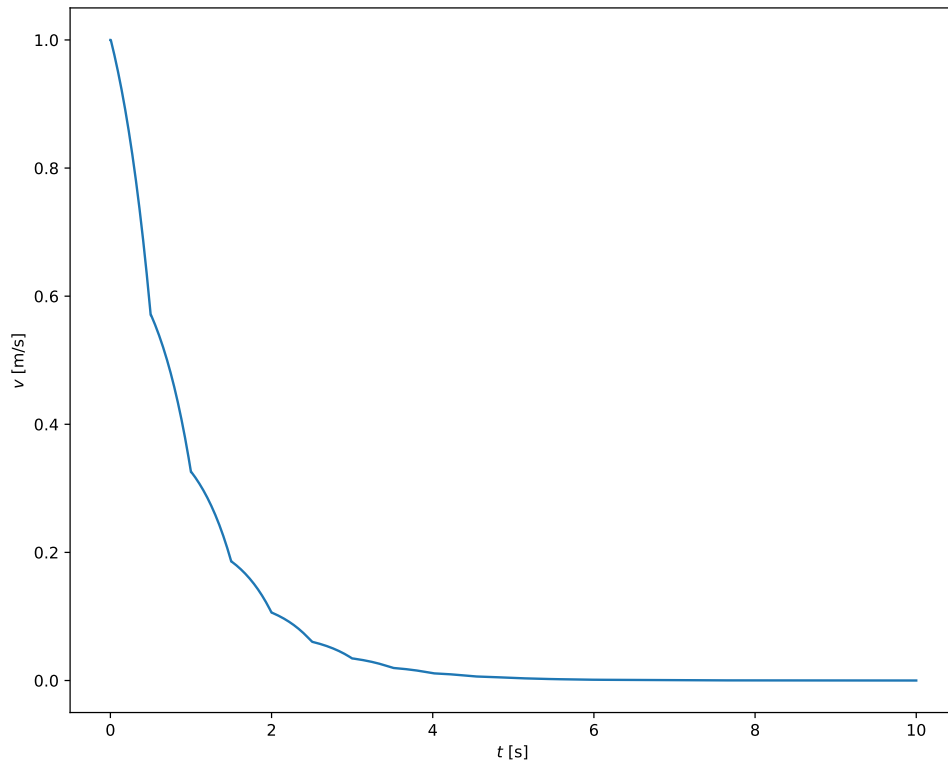
A stabilitási kritérium ekkor

$$k < p < k \frac{e^k + 1}{e^k - 1} = \frac{k}{\tanh(k/2)} . \quad (4.31)$$



**4.3. ábra.** Stabilitási határok az időkézésés ( $\Delta t$ ) függvényében

A stabilitási határok az időkézés függvényében ábrázolhatóak, mint Ábra 4.3. Míg az alsó stabilitási határ nem függ  $\Delta t$  értékétől, addig a felső esetén,  $\Delta t$  csökkentése a stabilitási határ növekedését eredményezi. A felső érték a negatív egység nagyságú karakterisztikus multiplikátorhoz tartozik, amely a dinamikus stabilitásvesztéshez tartozó határt mutatja. A stabilitási diagram növekedésének az oka, hogy az időkézés csökkenésével a szabályozóban a valós, aktuális értékekhez közeli érték van jelen, így a stabilitás felé billenti az alapvetően instabil ( $k > 0$ ) rendszert.



**4.4. ábra.** Egy időkézéssel rendelkező rendszer szimulációs válasza  $p = 3$  [1/s],  $\Delta t = 0.5$  s és  $k = 2$  [1/s] esetén.

Az elméleti eredmények numerikus szimuláció segítségével is ellenőrzésre kerültek, amelyhez python nyelv scipy könyvtárának ODEINT megoldója került felhasználásra [11]. Egy szimulációs eredményt mutat a Ábra 4.4. A numerikus megoldó mindig  $\Delta t$  hosszan számolja a függvény válaszát, amelyet követően a szimulációból kivesszük az utolsó számított értékét  $v$ -nek, amellyel inicializáljuk a következő tartományt, ezek a váltási pontok megfigyelhetők a grafikonokon is  $1.49 \cdot 10^{-8}$ -as tolerancia érték mellett. Ez a jelenség elkerülhető lenne hosszabb szimulációk futtatásával, viszont ez a módszer segíti a következő példák szimulálását és az összehasonlítást lehetővé teszi.

A leképzés által számolt eredmények összevetésre kerültek a szimulációs eredményekkel. Ehhez az első,  $v_0 = 1$ -ben inicializált,  $\Delta t$  hosszú iteráció után számított  $v$  értékek kerültek összehasonlításra a leképzés  $a$  értékeivel. A vizsgálat során  $k \in [0.1, 5]$ ,  $p \in [0, 10]$ ,  $\Delta t \in [0.1, 1.5]$  tartományból véletlenszerűen választott értékek esetén került összehasonlításra 1000 alkalommal. A random generálást a numpy csomag random függvényével

került végrehajtásra, miközben a generálás seed-je 111142 volt, közvetlen a generálás elkezdése előtt. Tekintsük a szimulációs eredményt a megbízhatóbbnak! Ekkor a relatív hiba nagysága (a szimulációs eredményhez viszonyítva)

$$\varepsilon_i = \frac{|v_{\text{szim}_i} - v_{\text{anal}_i}|}{v_{\text{szim}_i}}, \quad \bar{\varepsilon} \approx 2.016 \cdot 10^{-6}\%, \quad \sigma_{\varepsilon} = 8.715 \cdot 10^{-5}\%, \quad (4.32)$$

az így kapott eredmények azt mutatják, hogy mind az átlag mind a szórás a numerikus hiba közelében van, és mivel  $v$  értékei legalább 5 nagyságrenddel különböznek a hiba nagyságától, az eredmények azonosként elfogadhatóak.

#### 4.4. Két nulladrendű tartó együttes működésének leképezése

Amennyiben azonos szabadságfokhoz tartozó változót két szenzor segítségével is mérjük, új szabadságfokokat adunk a rendszerhez: a második szenzornak az erősítési tényezőjét, illetve a ZOH mintavételezési idejét is tudjuk állítani, így a differenciálegyenlet ezen dimenziótlanított alakja

$$v' - kv = -p_1 v_i - p_2 v_j, \quad \tau \in [i, i+1), \quad \Delta t_i < \Delta t_j, \quad k > 0, \quad (4.33)$$

azaz tegyük fel, hogy az első szenzor mintavételezési ideje kisebb.

Az általános eset helyett, ahol  $\Delta t_j / \Delta t_i = n$  tetszőleges, tekintsük a legegyszerűbb nem triviális esetet, ahol  $n = 2$ , azaz a  $j$  indexű szenzor mintavételezése alatt az  $i$  indexű szenzor két mintavételezést hajt végre. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy  $\tau$  időpillanatban mindkettő szenzor mintavételez, amely esetén  $v_i = v_j$ . Az első mintavételezési szakasz során ekkor a differenciálegyenlet

$$v' - kv = -p_1 v_i - p_2 v_i, \quad \tau \in [i, i+1), \quad 2\Delta t_i = \Delta t_j, \quad (4.34)$$

alakra egyszerűsödik. Az alak az első szakaszban teljes mértékben megegyezik a fenti alfejezetben leírtakkal, így ekkor a differenciálegyenlet megoldása

$$v(\tau) = \left(1 - \frac{p_1 + p_2}{k}\right) v_i e^{k(\tau-i)} + \frac{p_1 + p_2}{k} v_i, \quad t \in [i, i+1), \quad (4.35)$$

amelyből az alszakaszra vonatkozó egy dimenziós leképezés

$$v_{i+1} = \left[ \left(1 - e^k\right) \frac{p_1 + p_2}{k} + e^k \right] v_i = a_{11} v_i. \quad (4.36)$$

A mintavételezés következő szakasza során  $v_j = v_i$  marad, míg  $v_i$ -t léptetni kell együtt, hiszen a folyamat elején mintavételezés történt. Ekkor a differenciálegyenlet struktúrája

$$v' - kv = -p_1 v_{i+1} - p_2 v_i, \quad \tau \in [i+1, i+2), \quad 2\Delta t_i = \Delta t_j. \quad (4.37)$$

Az egyenlet homogén megoldása Egyenlet 4.21 azonos alakú, míg az inhomogén rész ebben az esetben is azonos jellegű a gerjesztéssel, azaz konstans függvény formájában áll elő. A partikuláris megoldás ekkor

$$v_P = \frac{p_1}{k} v_{i+1} + \frac{p_2}{k} v_i. \quad (4.38)$$

Ekkor a differenciálegyenlet megoldása

$$v(\tau) = Ae^{k\tau} + \frac{p_1}{k} v_{i+1} + \frac{p_2}{k} v_i, \quad \tau \in [i+1, i+2), \quad (4.39)$$

ennek a szakasznak kezdeti feltétele  $v(i+1) = v_{i+1}$ , amelyből az integráló konstans előállítható. Ezzel kiegészítve a megoldást az

$$v(\tau) = \left[ \left(1 - \frac{p_1}{k}\right) e^{k(\tau-(i+1))} + \frac{p_1}{k} \right] v_{i+1} + \left[ 1 - e^{k(\tau-(i+1))} \right] \frac{p_2}{k} v_i, \quad \tau \in [i+1, i+2), \quad (4.40)$$

alakban áll elő. A szakasz végén, a következő, két szenzor közös mintavételezési pontjában ekkor a megoldás

$$v_{i+2} = \left[ \left(1 - \frac{p_1}{k}\right) e^k + \frac{p_1}{k} \right] v_{i+1} + \left[ 1 - e^k \right] \frac{p_2}{k} v_i = a_{21} v_{i+1} + a_{22} v_i. \quad (4.41)$$

A következő szakasz ismét változtatja a gerjesztést ebben az esetben mind  $v_i$ , mind  $v_j$  tagban, azaz visszaértünk a kezdetben feltett esethez, amikor  $v_i = v_j$ . A leképezés ebben az esetben kétdimenziós, hiszen a felíráshoz felhasználásra került két állapot:  $v_i$  és  $v_{i+1}$ . A két szakasz külön vett leképezésének Cauchy-felbontással előállított diszkrét állapotteres felírása

$$\begin{bmatrix} v_{i+2} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{A}_{22}} \begin{bmatrix} v_{i+1} \\ v_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_{i+1} \\ v_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{A}_{12}} \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i-1} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Tekintsük a két szakasz együttes hatását a rendszerre, amely előállítható, mint  $\mathbf{A}_2$  és  $\mathbf{A}_1$  mátrixok szorzata (amelyet úgy is tudunk értelmezni, hogy  $[v_{i+1} \ v_i]^T$  helyére annak definícióját helyettesítjük, amelyet az első szakasz differenciálegyenlete határoz meg), amely

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} a_{21} + a_{22} & 0 \\ a_{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

transzformációs mátrixot ad eredményül. A megoldás formálisan egyezik a megközelítéssel, hogy Egyenlet 4.36-ben nyert, első szakaszra vonatkozó megoldást helyettesítjük Egyenlet 4.44-be, viszont az így kapott transzformációs formalizmus könnyebben általánosítható  $n > 2$  esetére. A mátrix tisztán zérus oszlopa azt mutatja, hogy a leképezésnek van zérus sajátértéke, azaz a dimenzió redukálható egy dimenziós leképezésre, ahol a leképezés karakterisztikus multiplikátora  $a_{11}a_{21} + a_{22}$ .

Az általánosság felé mutató  $n \in \mathbb{N}$  eset vizsgálata előtt, folytassuk a vizsgálatot  $n = 3$  esettel. Ekkor az első két mintavételezési szakaszban az eredmény Egyenlet 4.36 és Egyenlet 4.44-kal azonosan halad. A harmadik, befejező eset ekkor formálisan hasonlít  $v_{i+2}$  esetére, amely

$$v_{i+3} = \left[ \left( 1 - \frac{p_1}{k} \right) e^k + \frac{p_1}{k} \right] v_{i+2} + \left[ 1 - e^k \right] \frac{p_2}{k} v_i = a_{31} v_{i+2} + a_{32} v_i. \quad (4.44)$$

A leképezésbe ekkor egy új állapot is jelen van, így az összes eddig felírt mátrixot ennek megfelelően át kell definiálni. A mátrixok ekkor

$$\begin{bmatrix} v_{i+3} \\ v_{i+2} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{31} & 0 & a_{32} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}_{33}} \begin{bmatrix} v_{i+2} \\ v_{i+1} \\ v_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_{i+2} \\ v_{i+1} \\ v_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}_{32}} \begin{bmatrix} v_{i+1} \\ v_i \\ v_{i-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_{i+1} \\ v_i \\ v_{i-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}_{31}} \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i-1} \\ v_{i-2} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

alakban állíthatóak elő. A transzformációk ekkor is formálisan összesorozhatóak

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{33} \mathbf{A}_{32} \mathbf{A}_{31} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{21}a_{31} + a_{22}a_{31} + a_{32} & 0 & 0 \\ a_{11}a_{21} + a_{22} & 0 & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

amely esetén az  $n$ -edik sorban az  $n$  transzformáció eredménye található. A mátrix két zérus sajátértékkel rendelkezik, azaz a leképezés egydimenzióra redukálható, amelynek karakterisztikus multiplikátora  $a_{11}a_{21}a_{31} + a_{22}a_{31} + a_{32}$ .

A vizsgálatok alapján a  $\mathbf{A}_{nl}$  leképezés általánosan felírható, mint

$$\mathbf{A}_{nl} = \begin{cases} \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0}_{n-1}^T \\ \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{ha } l = 1, \\ \begin{bmatrix} a_{l1} & a_{l2} \mathbf{e}_{1-1}^T \\ \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{ha } l > 1, \end{cases} \quad (4.47)$$

ahol  $\mathbf{I}_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$  négyzetes egységmátrix,  $\mathbf{0}_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1 \times 1}$  zérus oszlopvektor, azaz  $\mathbf{0}_{n-1} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-1}]^T$ , ahol  $x_m = 0$ ,  $\forall m = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $\mathbf{e}_{l-1} \in \mathbb{R}^{n-1 \times 1}$   $l-1$ -edik standard

egység bázisvektor, azaz  $\mathbf{e}_{l-1} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-1}]^T$ , ahol  $x_m = 0, \forall m \in \{1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{l-1\}$  és  $x_{l-1} = 1$  és  $a_{l1} = \left[ \left(1 - e^k\right) \frac{p_1 + p_2}{k} + e^k \right]$ ,  $a_{l1} = \left[ \left(1 - \frac{p_1}{k}\right) e^k + \frac{p_1}{k} \right]$ ,  $a_{l2} = \left[ 1 - e^k \right] \frac{p_2}{k}$  és  $l = 1, 2, \dots, n$ .

Az így általánosított leképezés hátránya, hogy az állapotok száma függ  $n$  nagyságától, így nagy  $n$  értékek esetén a számítási idő a mérettel együtt növekszik.

Eltérő módon is előállítható a leképezés, amennyiben annak egyik változóját rögzítjük. Minden leképezésben  $t_i$  és  $t_{j+1}$  között jelen van  $v_j$ , amely a  $t_{j+1}$  időpillanatban frissül csupán. Ennek következtében vegyük a következő leképezést, amely kapcsolatot teremt kettő, általános, kisebb  $t_i$  mintavételezési időlépéssel haladó lépés között:

$$\begin{bmatrix} v_{i+l+1} \\ v_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{l1} & a_{l2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}_l} \begin{bmatrix} v_{i+l} \\ v_j \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

A leképezés speciális alakot kell, hogy felvegyen  $t = t_i = t_j$  kezdeti mintavételezéskor és  $t = t_{i+n} = t_{j+1}$  mintavételezés esetén, mivel ekkor a leképezésnek biztosítania kell az egyenlőséget a két mintavételezett érték között, így

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}_{j0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i-1} \\ v_j \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} v_{i+n} \\ v_{j+1} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}_n} = \begin{bmatrix} a_{l1} & a_{l2} \\ a_{l1} & a_{l2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i+n-1} \\ v_j \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

A leképezés  $v_j$  és  $v_{j+1}$  között ekkor előállítható, mint

$$\begin{bmatrix} v_{i+n} \\ v_{j+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{A}_n \mathbf{A}_l^{n-1} \mathbf{A}_{j0}}_{=: \mathbf{A}} \begin{bmatrix} v_{i-1} \\ v_j \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

és a keresett egy dimenziós leképezés ekkor megadható, mint az  $\mathbf{A}$  mátrix jobb alsó eleme. A mátrix  $n = 2$  esetén az alábbi formában áll elő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{l1}^2 + a_{l1}a_{l2} + a_{l2} \\ 0 & a_{l1}^2 + a_{l1}a_{l2} + a_{l2} \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

és  $n = 3$  esetén

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{l1}^3 + a_{l1}(a_{l1}a_{l2} + a_{l2}) + a_{l2} \\ 0 & a_{l1}^3 + a_{l1}(a_{l1}a_{l2} + a_{l2}) + a_{l2} \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Az így kapott leképezések esetén szintén látszik, hogy a kezdeti  $\mathbf{A}_0$ -nak köszönhetően a kétdimenziós leképezések egy zérus oszloppal rendelkeznek, azaz egyik sajátértékük zérus, amely miatt a leképezések redukálhatóak egy dimenzióra. Általánosan látszik, hogy a

másik sajátértéke a transzformációnak a karakterisztikus multiplikátor, pedig valóban a nem nulla fődiagonális elem, amely a leképezés jobb alsó eleme.

Amiért két eltérő módon is felírásra került a leképezés, azokat érdemes összehasonlítani, hogy valóban ugyanarra az eredményre vezetnek-e. Ehhez az előző eset  $a_{11}$  és  $a_{n1}, a_{n2}$  együtthatóinak átalakítása szükséges, hogy a két leképezés azonos formalizmus segítségével álljon elő.  $a_{11}$  első lépésben előálló változó valójában felírható, mint egy általános  $k$ -adik lépésben a két mintavételezett  $v_{i+k}$  és  $v_j$  értékekhez tartozó együtthatók összege (mivel az első lépésben  $v_i = v_j$ ), azonos mintavételezési pillanat miatt, azaz

$$a_{11} = a_{l1} + a_{l2}, \quad (4.53)$$

illetve a két leképezésben  $a_{l1}$  és  $a_{l2}$  értékei megegyeznek. Ekkor  $n = 2$  esetén az előbbi leképezés mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{l1}^2 + a_{l1}a_{l2} + a_{l2} & 0 \\ a_{l1} + a_{l2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

míg  $n = 3$  leképezéshez tartozó mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{l1}^3 + a_{l1}^2a_{l2} + a_{l1}a_{l2} + a_{l2} & 0 & 0 \\ a_{l1}^2 + a_{l1}a_{l2} + a_{l2} & 0 & 0 \\ a_{l1} + a_{l2} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Az egyenletekből látszik, hogy az egydimenziós leképezések megegyeznek, azaz Egyenlet 4.54 bal felső eleme egyezik Egyenlet 4.51 bal alsó elemével, és hasonlóan Egyenlet 4.55 bal felső eleme egyezik Egyenlet 4.52 bal alsó elemével.

Az utóbbi módszer előnye, hogy mindegyik leképezés már csak 2x2 mátrixok segítségével áll elő, amely a jobban skálázható  $n$  növekedésével. A levezetés során ebben az esetben  $v_j$ -t helyeztük a fókuszba és közös mintavételezés pillanatában az onnan származó értékekkel történt a levezetés. Amennyiben  $v_j$  helyett  $v_i$  segítségével kerül a közös mintavételezési pillanat előállításra, belátást lehet kapni egy további érdekes tulajdonságába a leképezésnek. Legyen  $\mathbf{A}_{i0}$  a kezdő pillanatban az inicializáló lépést végrehajtó leképezés, azaz

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}_{i0}} \begin{bmatrix} v_i \\ v_{j-1} \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

A kezdő lépésben ekkor ezt a mátrixot kell szorozni balról  $\mathbf{A}_l$ -lel, amely eredménye

$$\mathbf{A}_{i1} = \mathbf{A}_l \mathbf{A}_{i0} = \begin{bmatrix} a_{l1} + a_{l2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

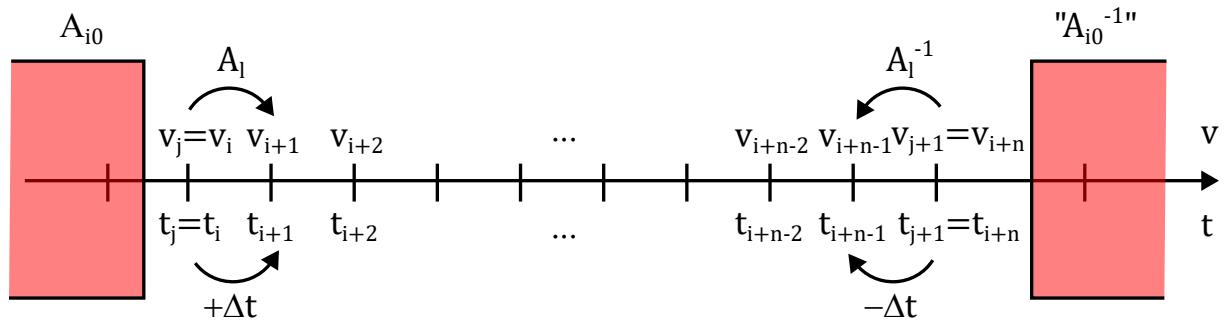
azaz valóban az így előállított leképezésnek is a karakterisztikus multiplikátora az első lépés után  $a_{11} = a_{l1} + a_{l2}$ , ahogy azt fentebb került tárgyalásra. Ekkor bár elő lehetne állítani minden lépéshez tartozóan  $\mathbf{A}_l^n \mathbf{A}_{i0}$  segítségével  $n$  lépés eredményét, hogyha szeretnénk az előzőkhez hasonlóan a végső lépésben azt is reprezentálni, hogy  $v_{i+n} = v_j$ , akkor  $\mathbf{A}_n \mathbf{A}_l^{n-1} \mathbf{A}_{i0}$  leképezést kell használni. Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_{i0} \mathbf{A}_l, \quad (4.58)$$

ezt a leképezésbe helyettesítve

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{i0} \mathbf{A}_l^n \mathbf{A}_{i0}. \quad (4.59)$$

A leképezés ekkor egy szimmetrikus jelleget mutat, amely a lépések felépítésében is nyomon követhető. Az első lépésben  $t_j$  helybenhagyása mellett  $t_i, t_{i+1}$ -re frissül, azaz  $\Delta t$ -vel távolodunk a közös mintavételezési ponttól, amely  $\mathbf{A}_l \mathbf{A}_{i0}$  leképezés formájában egy előre lépést ( $\mathbf{A}_l$ ) és a múlt "levágását" ( $\mathbf{A}_{i0}$ ) jelenti matematikailag. Amikor az utolsó lépést tesszük meg, amelyet követően ismét egy közös mintavételezés következik, akkor éppen ennek az első lépésnek az inverzét hajtjuk végre,  $\Delta t$  időlépés megtételével visszatérünk egy olyan állapotba, amikor  $v_{i+n} = v_{j+1}$ , közös mintavételezési pont. Ha az időben visszafelé indulnánk el ebből a pontból, az éppen az első lépést mutatja, így a leképezésben megjelenő szimmetria valóban egy észrevehető jelenség. Ekkor  $\mathbf{A}_l \mathbf{A}_{i0}$  leképezések egymásutánja egy előre lépést ( $\mathbf{A}_l$ ) és azt követően a múlt "levágásának" az inverz műveletét hajtja végre ez az időben visszafelé haladó szemlélet szerint ( $\mathbf{A}_{i0}$ ), azaz egy műveletet, amely megakadályozza a jövő hatásának érvényesülésének lehetőségét, azaz ez a művelet a kauzalitást biztosítja a leképezésben. Az ötlet szimmetriáját ábrázolja Ábra 4.5. Fontos megjegyezni, hogy  $\mathbf{A}_{i0}^{-1}$  csupán idézőjelek között szerepel az ábrán, mivel valójában a mátrixnak nincs inverze, hiszen determinánsa zérus, csupán az időben visszafelé haladás során értelmezett szerepét reprezentálja az inverz.



4.5. ábra. A transzformáció szimmetrikus jellegének reprezentációja

## 4.5. Két nulladrendű tartó együttes működésének stabilitása

A következőkben, miután beláttuk a különböző módon felírt leképezések ekvivalenciáját, használjuk Egyenlet 4.59 leképezését a továbbiakban, a stabilitás vizsgálatokhoz. A leképezés általános egyenletét ezek alapján elő lehet állítani, annak érdekében, hogy a struktúrát az analitikus számításokhoz jobban érthető formára hozzassuk. Ehhez első lépésként határozzuk meg  $\mathbf{A}_l$  leképezés diagonalizált alakját (mely létezik, mivel a mátrix sajátértékeinek algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik egymással):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{l2}}{a_{l1}-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{l1} \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

A leképezések segítségével konstruált alak

$$\mathbf{A}_l = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1} \quad (4.61)$$

és az  $n$ -edik hatvány előáll, mint

$$\mathbf{A}_l^n = \mathbf{V}\mathbf{D}^n\mathbf{V}^{-1}. \quad (4.62)$$

Az egy dimenziós leképezés általános alakja így meghatározható, mint

$$a = a_{l1}^n \frac{a_{l2}}{a_{l1} - 1} - \frac{a_{l2}}{a_{l1} - 1} + a_{l1}^n = a_{l2} \frac{a_{l1}^n - 1}{a_{l1} - 1} + a_{l1}^n. \quad (4.63)$$

Érdekességgként megmutatható, hogy a kifejezésben szereplő  $(a_{l1}^n - 1)/(a_{l1} - 1)$  tag az  $a_{l2}$  kezdeti értékű,  $a_{l1}$  kvóciennel rendelkező mértani sorozat összegképlete, azaz

$$a = a_{l1}^n + a_{l2} \sum_{m=1}^n a_{l1}^m. \quad (4.64)$$

A rendszer stabilitásához kapcsolódó feltétel szerint az  $a$  karakterisztikus multiplikátorral rendelkező leképezés stabil, akkor és csak is akkor, ha

$$|a| < 1, \quad (4.65)$$

azaz a stabilitás határai

$$a_+ = 1, \quad a_- = -1, \quad (4.66)$$

ahol az is látható, hogy  $a_+$  esetén az egymást követő lépések előjele azonos, az az ehhez tartozó megoldás egy konstans érték, míg  $a_-$  esetén egy alternáló előjellel rendelkező megoldásról beszélünk, azaz a rendszer lengést követően válik instabillá. Elsőként vizsgáljuk a pozitív esetet, amely

$$1 = a_{l2} \frac{a_{l1}^n - 1}{a_{l1} - 1} + a_{l1}^n \quad (4.67)$$

alakban keresendő megoldást mutatja, amelyből

$$0 = (a_{l1}^n - 1) \left( 1 + \frac{a_{l2}}{a_{l1} - 1} \right). \quad (4.68)$$

Amennyiben  $a_{l1}^n - 1 = 0$  és  $n$  páratlan az egyenlet megoldása  $a_{l1} = 1$ , amely a  $p_1 - p_2$  síkon a

$$p_1 = k \quad (4.69)$$

értéket adja vissza. Ekkor viszont az egyenlet másik része  $1 + a_{l2}/(a_{l1} - 1) \rightarrow \text{sgn}(p_2)\infty$ , így további vizsgálatra van szükség. L'Hospital szabály segítségével a vizsgálat elvégezhető, amely alapján azt szükséges ellenőrizni, hogy mi a határértéke

$$\lim_{p_1 \rightarrow k} (a_{l1}^n - 1) \left( 1 + \frac{a_{l2}}{a_{l1} - 1} \right) = \lim_{p_1 \rightarrow k} \frac{\frac{\partial(a_{l1}^n - 1)}{\partial p_1}}{\frac{\partial \left( \frac{a_{l1} - 1}{a_{l1} + a_{l2} - 1} \right)}{\partial p_1}} = \frac{np_2(1 - e^k)}{k} \neq 0, \quad (4.70)$$

azaz ez nem a kifejezés gyöke. Amennyiben  $n$  páros az egyenletnek van egy másik megoldása is:  $a_{l1} = -1$ , amely a  $p_1 - p_2$  síkon a

$$p_1 = k \frac{e^k + 1}{e^k - 1} \quad (4.71)$$

függőleges aszimptótát adja eredményül. A másik  $a_+$ -hoz tartozó határa a  $p_1 - p_2$  síkon

$$p_2 = -p_1 + k, \quad (4.72)$$

amely egy -1 meredekségű egyeneset határoz meg. A határra vonatkozó egyenlet nem definiált, ha a nevező zérus, azaz amennyiben  $k = 0$ . Ám az egyenlet definiálásakor Egyenlet 4.33 esetén kikötésre került  $k$  szigorú pozitivitása, így ez az eset a probléma során nem jelenik meg. Érdekes megemlíteni, hogy az  $a_+$ -hoz tartozó stabilitási határok függetlenek  $n$  értékétől.

A másik, dinamikus stabilitásvesztéshez tartozó határ,  $a_-$  esetén az egyenlet az alábbiak szerint alakul:

$$-1 = a_{l2} \frac{a_{l1}^n - 1}{a_{l1} - 1} + a_{l1}^n, \quad (4.73)$$

$$a_{l2} = -\frac{(a_{l1}^n + 1)(a_{l1} - 1)}{a_{l1}^n - 1}, \quad (4.74)$$

amely alapján a stabilitási diagram  $p_1 - p_2$  síkján a határ grafikonja megadható, mint

$$p_2 = (k - p_1) \frac{\left(\frac{k e^k - p_1 e^k + p_1}{k}\right)^n + 1}{\left(\frac{k e^k - p_1 e^k + p_1}{k}\right)^n - 1}. \quad (4.75)$$

A függvény analitikus vizsgálata során látszik, hogy rendelkezik ferde aszimptotával. A ferde aszimptota egyenlete alapján ( $p_2 = z_1 p_1 + z_2$ , ahol  $z_1 = \lim_{p_1 \rightarrow \infty} p_2/p_1$  és  $z_2 = \lim_{p_1 \rightarrow \infty} p_2 - z_1 p_1$ ) adódik, hogy

$$z_1 = -1 \quad z_2 = k, \quad (4.76)$$

azaz a ferde aszimptota független  $n$  értékétől, és annak kifejezése Egyenlet 4.72 egyenlettel azonosan

$$p_2 = -p_1 + k, \quad (4.77)$$

azaz  $a_-$  ferde aszimptotája  $a_+$ -ra rásimul. Ezek mellett vizsgálható a függvény függőleges aszimptotája, amely a nevezőn keresztül felírható, mint

$$\lim_{p_1 \rightarrow P} p_2 = \infty. \quad (4.78)$$

Amennyiben  $n$  páratlan, akkor a feltétel átírható  $p_1 = P$  értéknél, mint

$$\frac{k e^k - P e^k + P}{k} = 1, \quad (4.79)$$

amelyből

$$P = k \quad (4.80)$$

eredmény adódik. Ebben a pontban a számláló is zérus visszahelyettesítve a függvénybe, azaz a határérték  $0/0$  alakú, a vizsgálatot L'Hospital szabály segítségével lehet folytatni, amely értelmében

$$\lim_{p_1 \rightarrow P} p_2 = \lim_{p_1 \rightarrow P} \frac{\frac{\partial n_{p2}}{\partial p_1}}{\frac{\partial d_{p2}}{\partial p_1}} = -\frac{2k}{n(1 - e^k)} < \infty, \quad (4.81)$$

azaz a függvénynek nincs páratlan  $n$  érték esetén függőleges aszimptotája. Amennyiben  $n$  páros, egy másik feltétel is adódik:

$$\frac{ke^k - Pe^k + P}{k} = -1, \quad (4.82)$$

amely Egyenlet 4.71  $a_+$  határral egyenértékűen megadja a

$$p_1 = k \frac{e^k + 1}{e^k - 1} \quad (4.83)$$

függőleges aszimptotát. Egy további kitüntetett szereppel rendelkező görbéje az egydimenziós leképezésnek az  $a = 0$ , amely esetén egy iteráció alatt a megoldás eljut  $v(t) \equiv 0$  értékbe. Ekkor

$$0 = a_{l2} \frac{a_{l1}^n - 1}{a_{l1} - 1} + a_{l1}^n, \quad (4.84)$$

amelyből

$$p_2 = (k - p_1) \frac{\left( \frac{ke^k - p_1 e^k + p_1}{k} \right)^n}{\left( \frac{ke^k - p_1 e^k + p_1}{k} \right)^n - 1}. \quad (4.85)$$

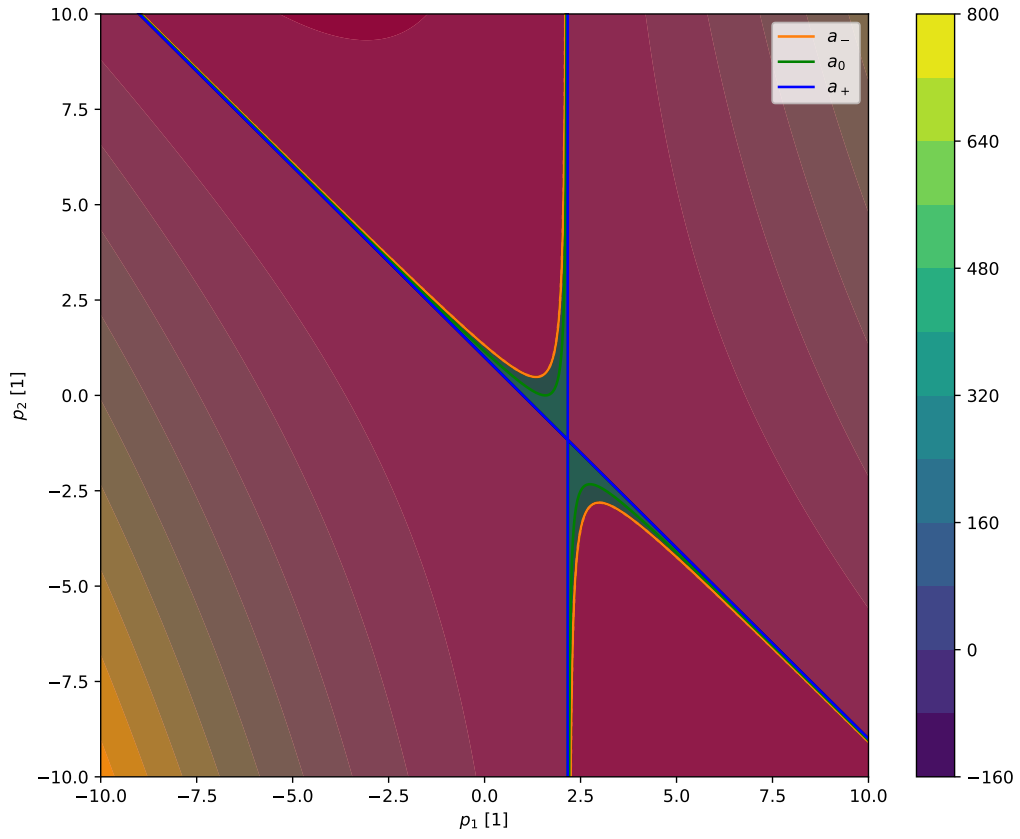
Az így kapott függvény rendelkezik  $\forall n$  értékre a

$$p_2 = -p_1 + k, \quad (4.86)$$

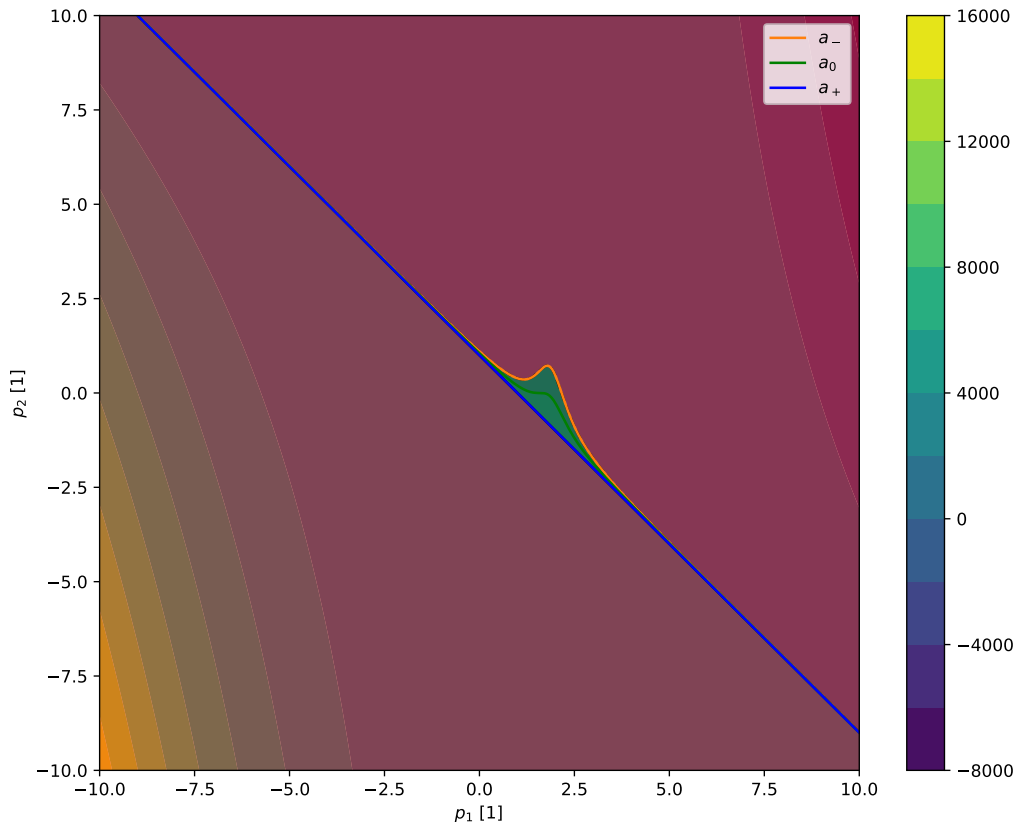
ferde aszimptotával, amely nem meglepő, hiszen mivel  $a$  egy folytonos függvény és  $a_+$ -nak megoldása az aszimptota,  $a_-$  pedig szintén rendelkezik a ferde aszimptotával ez csak úgy lehetséges, ha a Bolzano-tétel értelmében a két görbe közre zárja  $a = 0$  görbét. Emellett a görbe az előzőekkel azonosan  $n$  páratlan értékei esetén nem rendelkezik függőleges aszimptotával, ám amennyiben  $n$  páros, annak függőleges aszimptotája a

$$p_1 = k \frac{e^k + 1}{e^k - 1}. \quad (4.87)$$

A vizsgálat alapján úgy látszik, hogy a stabilitási diagram a  $p_1 - p_2$  síkon alternáló struktúrát mutat, kvalitatív különbség van  $n$  páros és  $n$  páratlan értékei esetén. Elsőként numerikusan értékeljük ki a görbét  $n = 2$  és  $n = 3$  esetén és nézzük meg az így kapott stabilitási diagramokat, rögzített  $k$  dimenziótlan paraméter esetén! (lásd Ábra 4.6) A jobb olvashatóság érdekében az analitikusan kiszámított határok és a kontúrokat ábrázoló diagramra mellett piros színnel halványan jelölésre kerültek az instabil és zölddel a stabil területek. Ahogy látszik, a numerikus kiértékelése a leképezésnek teljes átfedést mutat az analitikus számításokkal.



(a)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 2$  esetén



(b)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 3$  esetén

**4.6. ábra.** Stabilitási diagram, rögzített  $k = 1$  [1] dimenziótlan paraméter esetén

A leképezés helyességének igazolásához az egy nulladrendű tartót tartalmazó esethez hasonlóan numerikus differenciálegyenlet megoldóval is összehasonlításra került a megoldás. A szimulációt elvégezve 1000 generált pontra, a 111142-es seed ismételt inicializálásával,  $p_1 \in [0, 10)$ ,  $p_2 \in [0, 10)$ ,  $k \in [0.1, 5)$  és  $\Delta t_i \in [1, 1.5)$  generálási határok esetén a hiba az alábbiak szerint alakult:

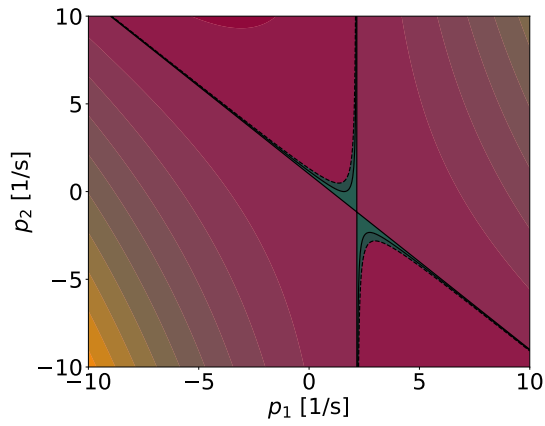
$$\bar{\varepsilon} \approx -2.412 \cdot 10^{-6}\% \qquad \sigma_{\varepsilon} \approx 7.469 \cdot 10^{-5}\%. \quad (4.88)$$

A közönséges differenciálegyenlet megoldóval kiszámított stabilitási határokat a Ábra 7.1 mutatja, kék színnel jelölve. Emellett a grafikonon jelölésre került szürke színnel a leképezés -1, 0 és 1 értékekhez tartozó kontúr függvényei. Ahogy az ábrán látszik, az eredmények szinte teljesen összefednek a numerikus megoldóval, viszont az egyik kék kontúr nem ér össze pontosan a függőleges és ferde aszimptota találkozásánál a Ábra 7.1a képének megfelelően, amely a függőlegesben található. Ennek oka, hogy a generálás során véges felbontással történt az értékek mintavételezése az ábra generálása során, amely egy instabil pontot jelölt ki abban a tartományban, ahol a két görbe összeér. Ez a numerikusan mintavételezett kontúr diagram hátránya az analitikus megoldással szemben.

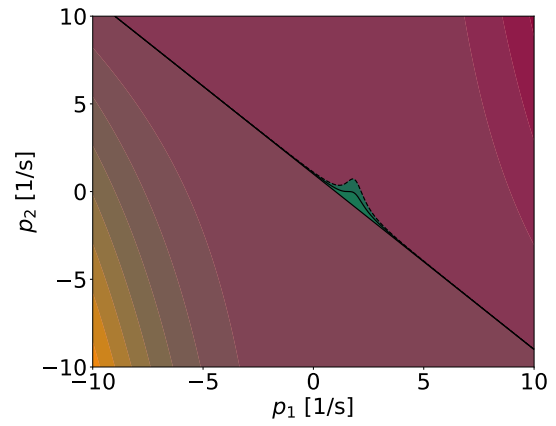
A stabilitási diagrammon ábrázolt  $p_1 - p_2$  szabályozó paraméterek mellett viszont a leképezésnek vannak egyéb paraméterei is, mint a rendszert jellemző  $k$  paraméter és az időkéstést reprezentáló  $\Delta t_i$ ,  $\Delta t_j$  paraméterek. Elsőként vizsgáljuk meg az  $n$  paraméter rendszerre gyakorolt hatását (amely  $\Delta t_j$  és  $\Delta t_i$  hányadosaként került definiálásra). A vizsgálat eredményét mutatja a Ábra 4.7. Fontos megjegyezni, hogy a képletben és a vizsgálat során definiált  $\Delta t$  paraméter  $\Delta t_i$ -t jelöli, amelynek rögzítése mellett  $n$  növelése  $\Delta t_j$  növekedéséhez vezet. Az ábráról leolvasható, hogy  $n$  páros értékei esetén  $n$  növekedésével a diagram negatív  $p_2$ -höz tartozó tartománya egyre inkább összezáródik, míg a pozitív  $p_2$  értékekhez tartozó értékek konvergálnak egy adott tartományra. A páratlan  $n$  értékekhez tartozó térképeken is egy hasonló szűkülést lehet észlelni és a két diagram azonos tartományhoz konvergál. Mindeközben az instabil értékek "egyre instabilabbak lesznek" és egyre nagyobb értékekhez tart a leképezés.

A vizsgálat során periodikus leképezés nem azonos  $\Delta t_j$  ideig tart az egyes képeken, hanem  $n$  növekedésével a vizsgálat periódus nagysága is növekszik. Amennyiben azt az esetet szeretnénk vizsgálni, amikor a leképezés ideje rögzített, akkor  $n$  növelése fordítottan arányosan kell, hogy változtassa  $\Delta t_i$ , kis időlépések nagyságát. Ezen vizsgálati elrendezés eredményét mutatja a Ábra 4.8. Ekkor  $n$  növekedésével párhuzamosan a dimenzióval rendelkező  $p_1 - p_2$  síkon a stabil tartomány tágulása figyelhető meg, mind  $n$  páros és páratlan értékei esetén.  $n > 10$  értékeknél már a függőleges aszimptota nem látszik a vizsgált tartományon  $n$  páros értékei esetén. Az  $n$  értékek növekedésével a mintavételezési idő csökkenése figyelhető meg, amely során úgy tűnik, hogy a pozitív tartomány a sík egy negyedére kinyílik.

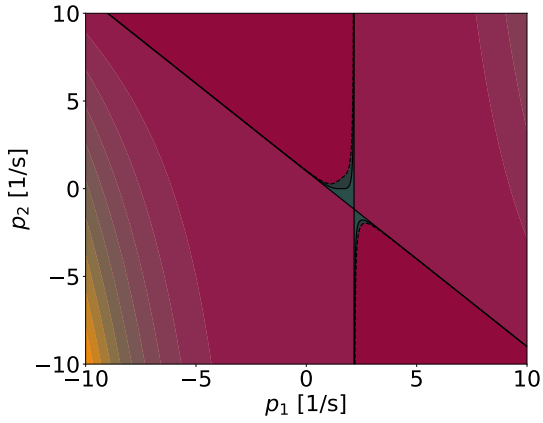
A szimulációs eredmények megmutatták, hogy azonos  $\Delta t_j$  mintavételezési idő mellett  $n$  változtatása és ezzel párhuzamosan  $\Delta t_i$  csökkentése a stabilitási térképet megváltoztatta.



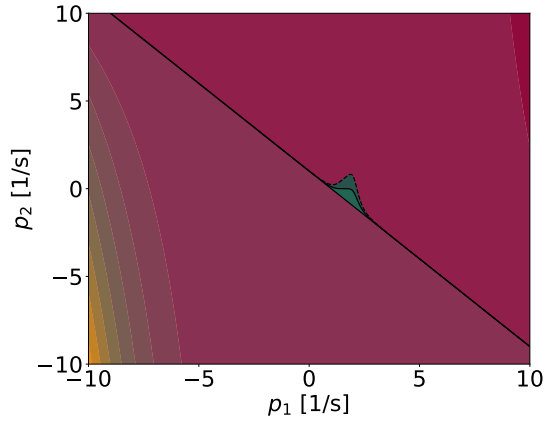
(a)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 2$  esetén



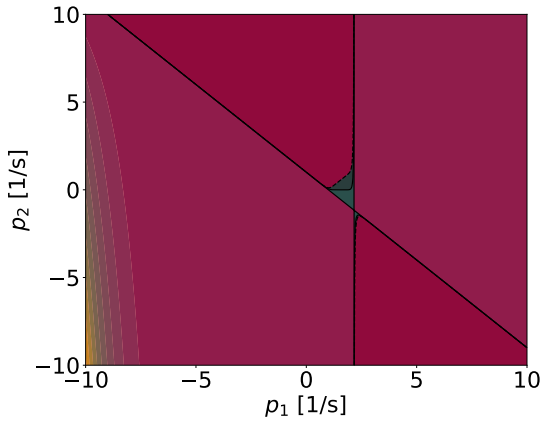
(b)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 3$  esetén



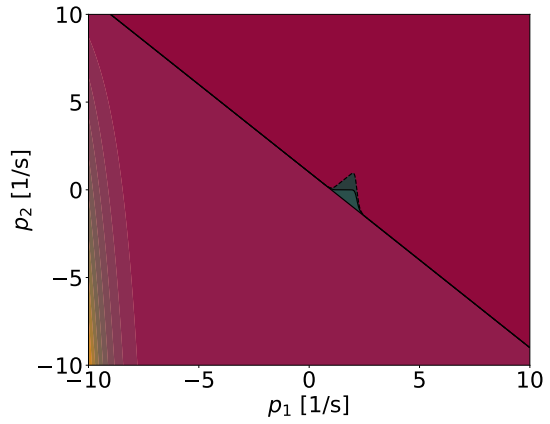
(c)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 4$  esetén



(d)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 5$  esetén

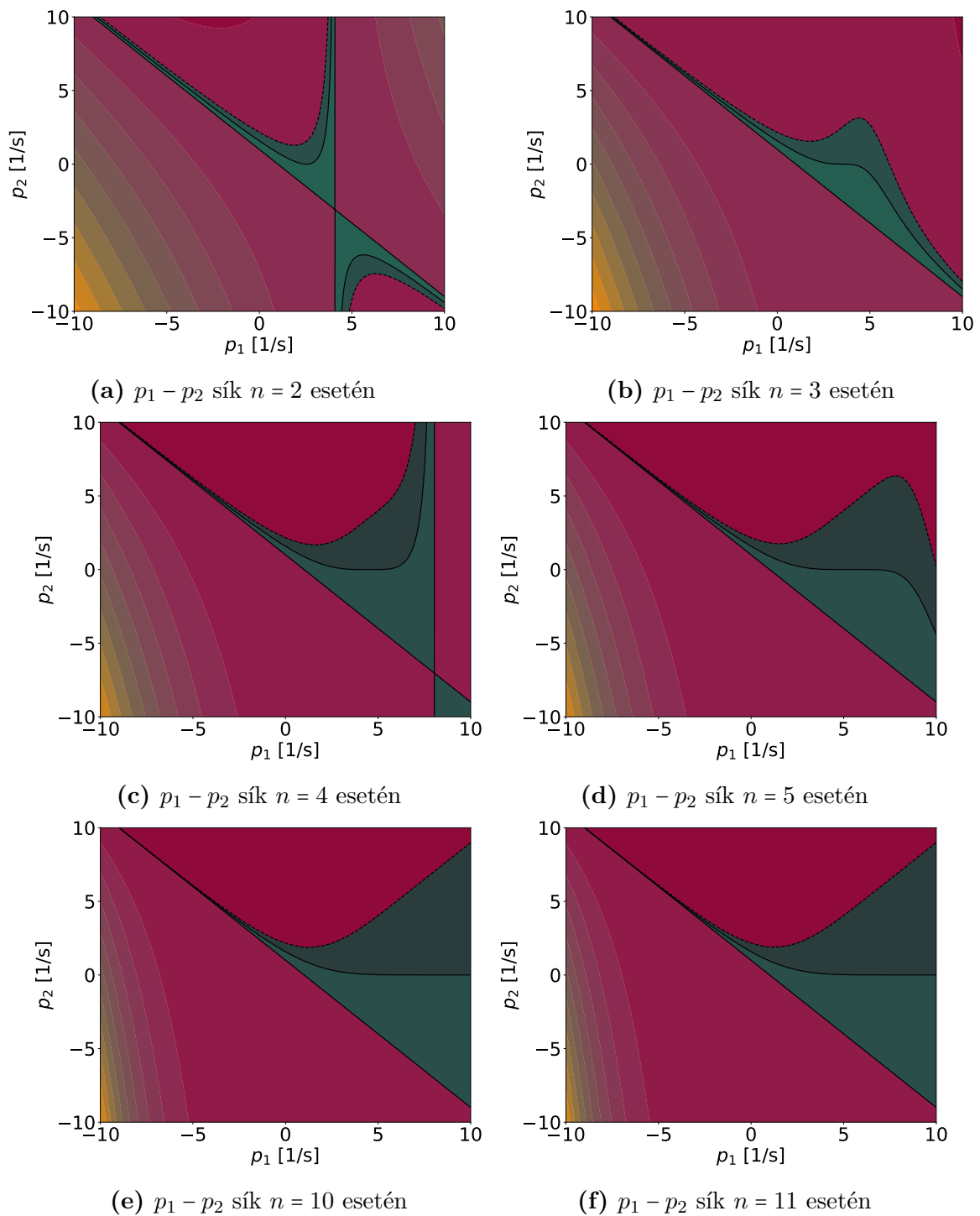


(e)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 10$  esetén



(f)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 11$  esetén

**4.7. ábra.** Stabilitási diagram, rögzített  $k = 1 [1]$  dimenziótlan paraméterrel, különböző  $n$  esetekre.



**4.8. ábra.** Stabilitási diagram, rögzített  $k = 1 [1]$  dimenziótlan paraméterrel, különböző  $n$  esetekre,  $\Delta t_j = 1$  s rögzítése esetén.

A korlátok számítását érdemes analitikus módszerrel is elvégezni. Egy elfajult esete  $n$  változtatásának az az eset, amikor  $n \rightarrow \infty$  és ezzel párhuzamosan  $\Delta t_i \rightarrow 0$ , amely a diszkrét mintavételezési pontokból a folytonos üzemi szenzor struktúra átmenetét valósítja meg ezen keresztül. Ekkor a felírható dimenziótlanított differenciálegyenlet

$$\dot{v} - kv = -p_1 v - p_2 v_j. \quad (4.89)$$

Az egyenlet megoldásából képezhető diszkrét leképezés pedig

$$v_{j+1} = \underbrace{\left(1 + \frac{p_2}{p_1 - k} e^{-(p_1 - k)} - \frac{p_2}{p_1 - k}\right)}_{=:a} v_j, \quad \tau \in [j, j+1) \quad (4.90)$$

alakban áll elő. A stabilitási határ ekkor  $a_+ = 1$  esetén

$$p_2 = -p_1 + k, \quad (4.91)$$

azaz a Egyenlet 4.72 egyező módon áll elő. A másik,  $a_- = -1$  stabilitási határ viszont az eddigiektől eltérő módon

$$p_2 = (p_1 - k) \frac{1 + e^{-(p_1 - k)}}{1 - e^{-(p_1 - k)}} \quad (4.92)$$

egyenletnek megfelelően írható fel. Ebben az esetben a függvénynek két ferde aszimptotája is van. A vizsgálat  $p_1 \rightarrow \infty$

$$p_2 = p_1 - k, \quad (4.93)$$

míg a  $p_1 \rightarrow -\infty$  vizsgálat

$$p_2 = -p_1 + k \quad (4.94)$$

ferde aszimptotát adja. Viszont ezzel együtt a függvénynek eltűnik a függőleges aszimptotája, mivel ez  $p_1 = k$  esetén lenne csak lehetséges, ekkor viszont a függvény  $0/0$  alakú. L'Hospital szabály segítségével belátható, hogy

$$\lim_{p_1 \rightarrow k} \frac{\frac{\partial(p_1 - k)(1 + e^{-(p_1 - k)})}{\partial p_1}}{\frac{\partial(1 - e^{-(p_1 - k)})}{\partial p_1}} = 2. \quad (4.95)$$

A leggyorsabban lecsengő megoldások  $a = 0$  esetén jelentkeznek, amely

$$p_2 = (p_1 - k) \frac{e^{-(p_1 - k)}}{1 - e^{-(p_1 - k)}} \quad (4.96)$$

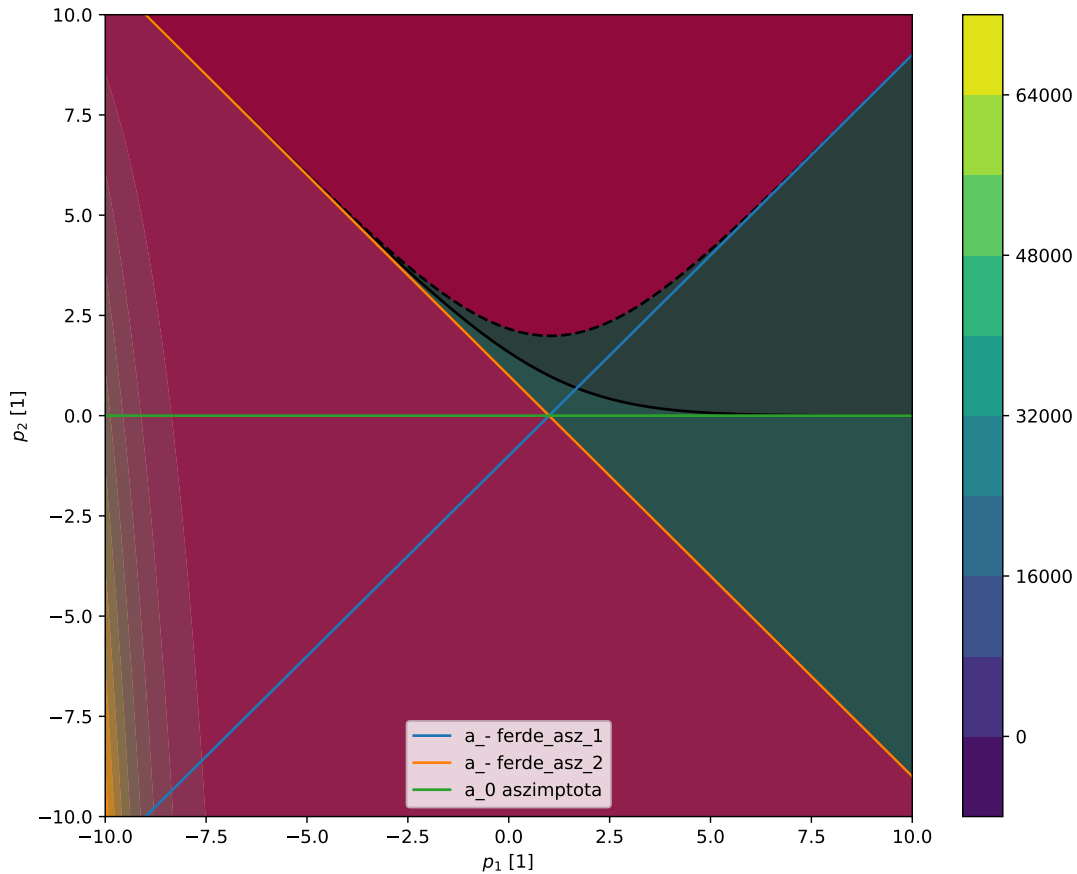
görbéhez vezet. Ez a függvény rendelkezik az előzőekhez hasonlóan egy

$$p_2 = -p_1 + k \quad (4.97)$$

ferde aszimptotával, illetve emellett megjelenik egy

$$p_2 = 0 \quad (4.98)$$

vízszintes aszimptota is. A numerikus szimulációból származó tapasztalatok azt mutatták, hogy  $n > 20$  felett már kis változást mutat csak a stabilitás diagram a kijelölt  $p_1 \times p_2 = [-10, 10] \times [-10, 10]$  tartományon. Az analitikus számítások igazolásához így egy ennél nagyobb,  $n = 100$  eset került kiválasztásra, amely már a tartományon a kívánt értékhez való konvergálást jelenti. Ekkor a leképezés diagrammja, rajta ábrázolva az analitikus eredményeket, a következő Ábra 4.9 mutatja. A diagramon jól megfigyelhető, hogy az analitikus stabilitási határok valóban jól közelítik a három kontúrhoz tartozó eseteket. Ezzel bemutatja, hogy  $n \rightarrow \infty$  esetén a stabilitási diagram megnő, és egy  $p_2 = k - p_1$  és  $p_2 = k + p_1$  görbék által határolt végtelen síknegyedetet stabilizál.



**4.9. ábra.** Stabilitási diagram ábrája, amely a közelítő eredményt mutatja akkor, amikor  $\Delta t_i \rightarrow 0$ , míg  $\Delta t_j = 1$  s. (Jelen esetben  $n = 100$ .)

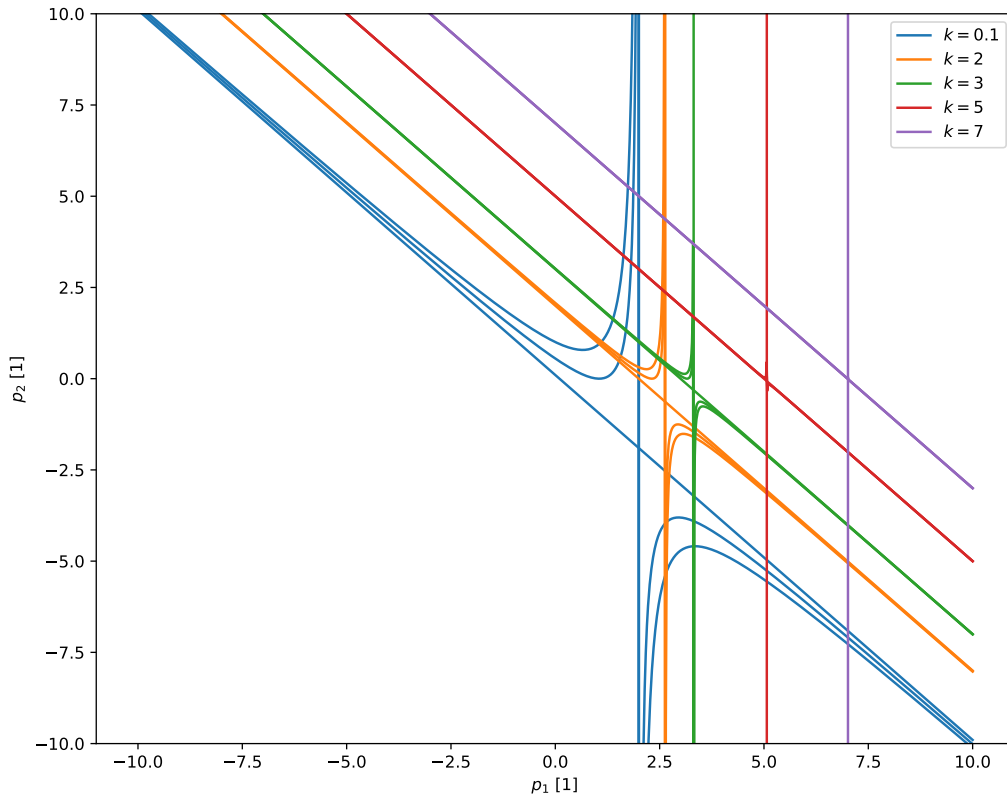
A fennmaradó, még nem vizsgált szabadságfoka a leképezésnek a  $k$  rendszerparaméter.

Ennek stabilitási diagramra gyakorolt hatását mutatja a Ábra 4.10. Az ábrán látszik, hogy bár kvalitatívan a stabilitási diagram nem változik, a stabil tartomány formája megmarad, az  $k$  hatására eltolódik a  $p_1 - p_2$  síkon és  $k$  növekedésével szűkülni kezd. A stabil tartomány eltolódása alapvetően egy veszélyes folyamat valós fizikai rendszerek esetében, mivel egy behangolt  $p_1 p_2$  szabályozó (jelen esetben),  $k$  modellparaméter bizonytalanság esetén könnyen eredményezhet instabilitást. Ennek következtében robusztusságot sokszor egy ismert nagyságú bizonytalanság figyelembevételével számítanak, amely azt tudja biztosítani a rendszer számára, hogy a robusztus szabályozó a bizonytalan paraméterek halmazán is teljesíti a kért performancia kritériumokat (köztük a stabilitást).

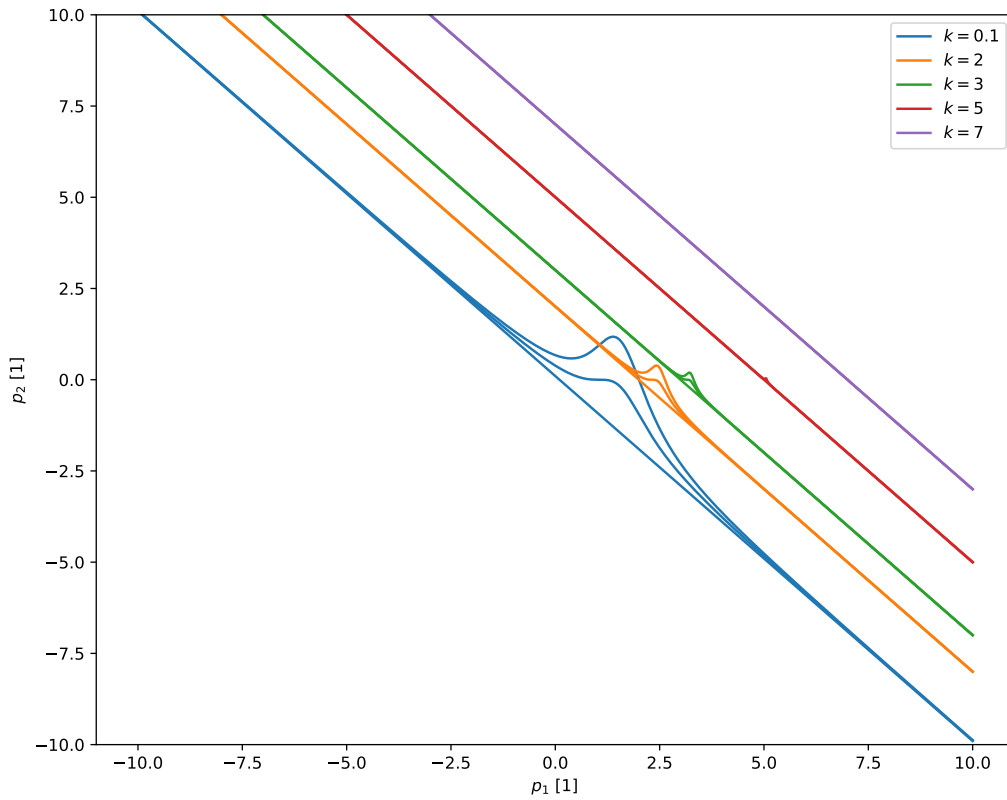
A diagramok valójában 5 dimenzióval rendelkeznek (hiszen  $p_1, p_2, k, \Delta t_i, n$  paraméterek is befolyásolják a stabilitást), eddig mindig csak ennek egyes szeleteit lehetett látni, így a robusztussággal kapcsolatban végső megállapítást nem tudunk tenni, viszont eddig az látszik, hogy  $k$  növelése a diagramot eltolja és területét csökkenti,  $\Delta t_j$  (vagyis  $n$ ) növelése önmagában kissé csökkenti a diagram területét és  $p_2$  negatív értékeit befolyásolja  $n$  páros értékei esetében, míg  $\Delta t_j$  rögzítése és  $n, \Delta t_i$  párhuzamos változtatása a területet növelni tudja.

Bár ez a szabályozó erre a rendszerre a robusztus stabilitást a vizsgált diagram alapján csak korlátok között tudja biztosítani, a vizsgálat célja annak megértése, hogy a két szenzorral rendelkező szabályozási struktúra képes-e a robusztusságot jobban növelni, mint azt az egy mintavételezési idővel rendelkező társánál már láthattuk. Ehhez rajzoljuk fel a Ábra 4.3 diagramot, rajta ábrázolva az eredeti, egy szabályozóval rendelkező rendszert is. Az eredményeket a Ábra 4.11 foglalja össze. Zöld színnel látható a diagramon az eredeti, egy nulladrendű tartót tartalmazó rendszer, míg kék és narancs vonalak jelölik a több szabadságfokú rendszer stabilitásdiagramjait. A vizsgálat során az egyik mintavételezési időt  $\Delta t_j = 1$  s értéken tartottuk, amelyhez  $n$  és  $\Delta t_i$  értékét fordítottan arányosan változtattuk. A diagramon megfigyelhető, hogy a zöld görbék által közre zárt területnél kisebb területet is lehet kapni a szabályozó segítségével,  $p_1$  változtatásának függvényében.  $n$  értékének növelése egy bizonyos értékig tovább növeli a stabil, közre zárt tartományt, amelyet követően a képen látható végső értékhez konvergálnak a stabilitási tartományok. Jól látszik továbbá, hogy található olyan  $p_1$  és  $n$  kombináció, amely esetén a stabilitási görbe szélesebb, mint eredetileg, az egyszerűbb szabályozónál volt, így a bonyolultabb rendszer nagyobb paraméterbizonytalanságoknak is ellen tud állni.

A rendszer több dimenziós volta miatt a stabilitási diagramok változásáról háromdimenziós térképek is készültek, amelyek jól reprezentálják a  $p_1 - p_2$  síkon található stabil tartomány  $k$  függését. Ezeket reprezentáló ábrák a Függelékben megtalálhatóak. Kék felület a leképezés dinamikus stabilitásvesztési határához,  $a = -1$ -hez tartozó határokat jelöli minden diagramon. A narancs felület a  $a = +1$ -hez tartozó negatív meredekségű egyenessel leírt határt jelöli, amely mind páros, mind páratlan  $n$  értékeknél megtalálható. A zöld felület  $n$  páros értékeihez tartozó  $a = +1$  függőleges aszimptotáját jelöli. A függőleges aszimptota irányában megjelenő csíkok numerikus eredetű és a véges számábrázolás, illetve felbontás miatt jelentkezett.

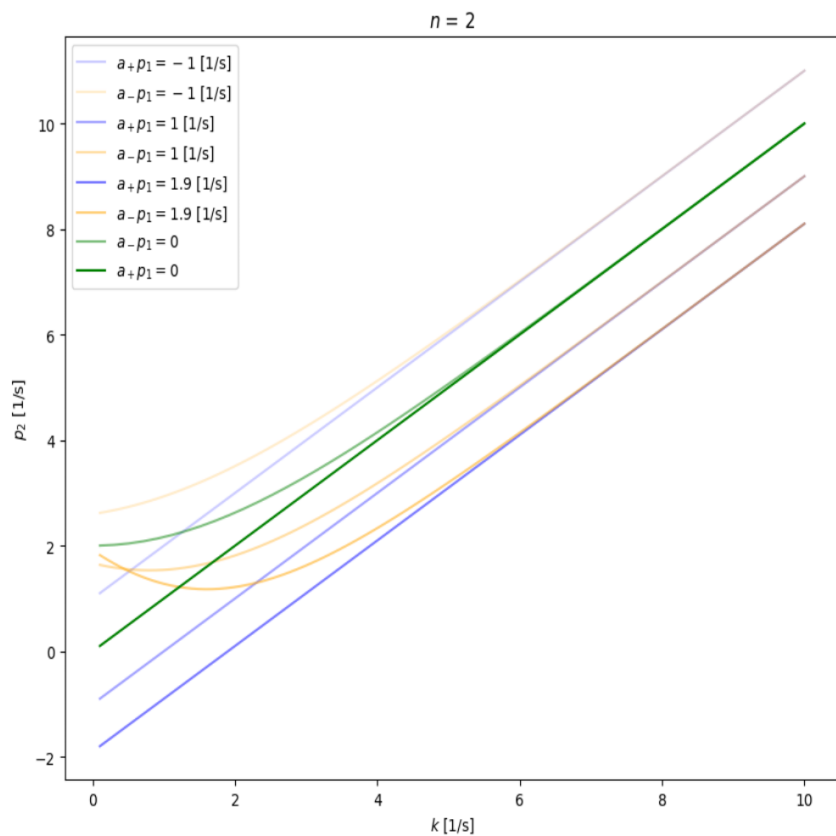


(a)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 2$  esetén

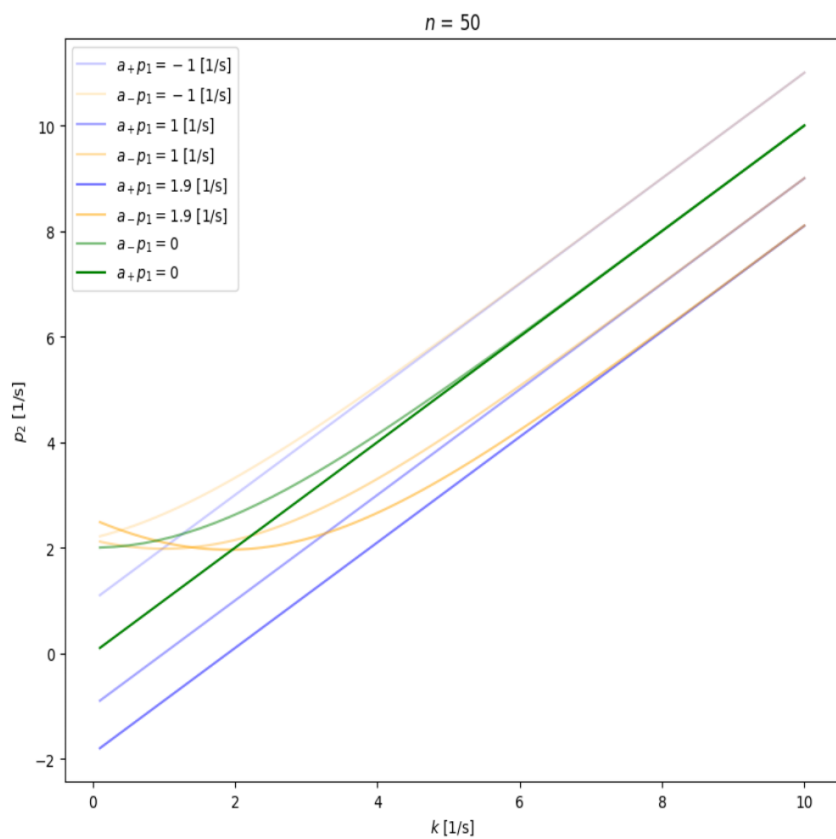


(b)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 3$  esetén

**4.10. ábra.** Stabilitási diagram, rögzített  $\Delta t_i = 1$  s esetén,  $k$  hatásának vizsgálata céljából.



(a)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 2$  esetén

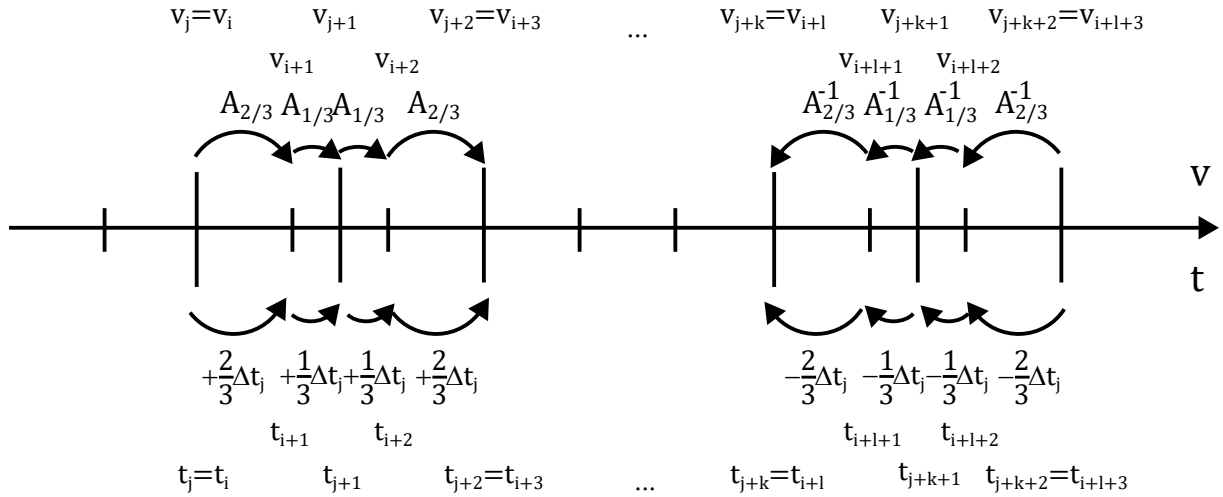


(b)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 50$  esetén

**4.11. ábra.** Stabilitási diagramok összevetése, rögzített  $\Delta t_j = 1$  s esetén,  $p_1$  és  $n$  hatásának bemutatásával

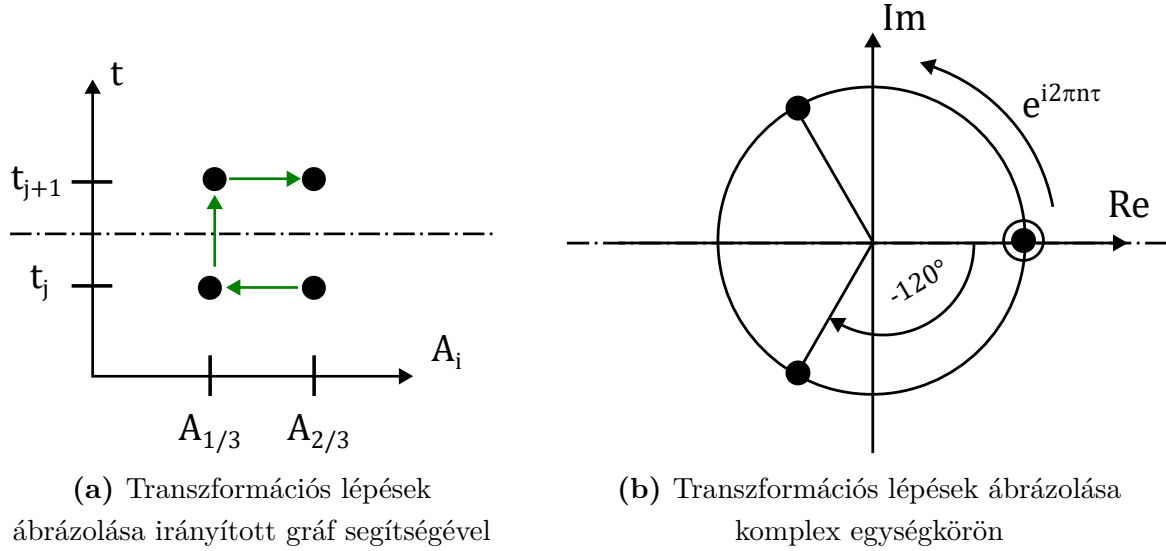
## 5. Racionális mintavételezési időarány hatása

Eddigiekben vizsgálatra kerültek azok az esetek, amikor  $n \in \mathbb{N}$ . Láttuk, hogy a stabilitási diagrammokon kvalitatív különbség figyelhető meg  $n$  páros vagy páratlan értékei esetén. A felmerülő kérdés, hogy mi történik a két stabilitási görbe között, esetleg egy folytonos átvitel figyelhető-e meg a struktúra változásában? Ehhez vegyük, a mérnöki szempontból még releváns esetet, amikor  $n \in \mathbb{Q}$ . Ekkor is megfigyelhető periodikusság, amely a számláló és a nevező legkisebb közös többszörösénél fog megjelenni, ám a periodikusságon belül egy sokkal bonyolultabb és általánosan nehezebben kezelhető esetre jutunk, mivel  $i$  és  $j$  mintavételezési pontok között nem azonos a mintavételezési idő minden vizsgált szakaszban. ettől függetlenül a szakaszok esetében egy ismerős szimmetria fellelhető, hiszen amikor a leképezés visszajut a közös mintavételezési pontba, akkor az abba a pontba való lépés megfeleltethető az első, közös mintavételezési pontból való kilépés inverzének. Ezt a szimmetriát szemlélteti Ábra 5.1  $n = 2/3$  esetén.



5.1. ábra.  $n = 3/2$  esetén a mintavételezések közötti távolság reprezentációja

A leképezések előállításához első lépésként arra szükséges egy módszert kidolgozni, hogy miként lehet az egyes mintavételezési időpontokat meghatározni. A mintavételezéseket vizualizációját és hasonló szimmetria tulajdonságokat lehet felfedezni akkor, ha adott  $t \in [t_j, t_{j+1})$  intervallumokon egy irányított gráf segítségével jelöljük a végrehajtandó transzformációkat, amelyet a Ábra 5.2a reprezentál. Egy másik vizualizációs lehetőség a komplex egységkörön, annak fázisaként reprezentálni a transzformációkat. Az egyes lépések ekkor az egységkörből akkora köríveket jelölnek ki a teljes körhöz képest, mint amekkora a  $\Delta t_j$ -hez képest a megtett lépések aránya, amelyet a Ábra 5.2b mutat.



**5.2. ábra.** Vizualizációs lehetőségek  $n = 2/3$  esetén a transzformációs lépések kiválasztására.

A leképezés előállítható egy segédállapottal bővített rendszer segítségével. Ekkor a segédállapot felelős az értékek változtatásáért, míg a mellette megjelenő kettő mintavételezés feladata mindig  $v_i$  és  $v_j$  értékek frissítése lesz. Ebben a felírásban a következő háromdimenziós leképezés áll elő

$$\begin{bmatrix} v_{q+1} \\ v_i \\ v_j \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_q & a_i & a_j \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{A}_q} \begin{bmatrix} v_q \\ v_i \\ v_j \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_q \\ v_{i+1} \\ v_j \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{A}_i} \begin{bmatrix} v_q \\ v_i \\ v_j \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_q \\ v_i \\ v_{j+1} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{A}_j} \begin{bmatrix} v_q \\ v_i \\ v_j \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

ahol  $a_q = e^{k\Delta t}$ ,  $a_i = p_1/k(1 - e^{k\Delta t})$  és  $a_j = p_2/k(1 - e^{k\Delta t})$ . Továbbá a múlt hatásának levágásához a vizsgált periódus előtt, definiáljuk újra a  $\mathbf{A}_0$  mátrixot, mint

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

A leképezés összegképlete megkapható a következő algoritmus segítségével:

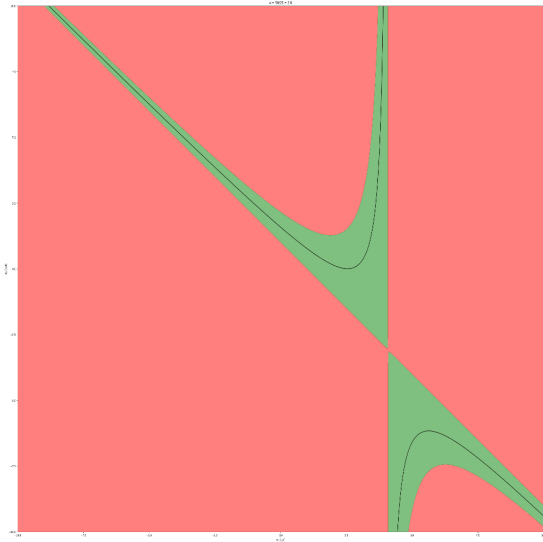
1. Legyen a két szenzor mintavételezési ideje  $\Delta t_i$  és  $\Delta t_j$ , úgy hogy  $\Delta t_i < \Delta t_j$ . Válasszuk meg a leképezés időlépését, mint  $\Delta t_q = 1/\Delta t_j$ . A szimuláció addig meg, míg el nem érünk a két időérték legkisebb közös többszöröséig. Kezdetben legyen  $t = 0$ . Inicializáljuk  $\mathbf{A}$  teljes periódusra vonatkozó leképezést, mint  $\mathbf{A}_0$ .
2. Minden lépésben szorozzuk meg balról az előző leképezést  $\mathbf{A}_q$ -val és léptessük  $t$ -t  $\Delta t_q$ -val.

3. Vizsgáljuk meg, hogy az adott  $t$  értékét az adott iterációban. Amennyiben  $t \Delta t_i$  egész számú többszöröse, szorozzuk meg balról az eddigi leképezések mátrixát  $\mathbf{A}_i$ -vel.
4. Vizsgáljuk meg, hogy az adott  $t$  értékét az adott iterációban. Amennyiben  $t \Delta t_j$  egész számú többszöröse, szorozzuk meg balról az eddigi leképezések mátrixát  $\mathbf{A}_j$ -vel.
5. Ha elértük a két mintavételezési idő legkisebb közös többszörösét, állítsuk meg az iterációt, egyébként folytassuk a 2. lépésnél a folyamatot.

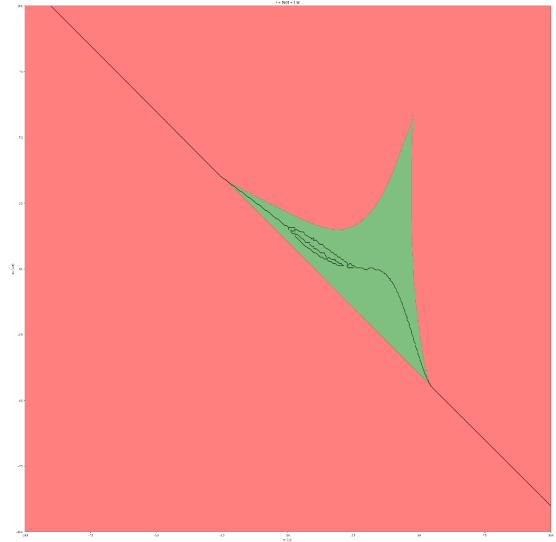
Az előzőkhez hasonlóan a leképezés pontosságát numerikus szimulációs eredmények segítségével került ellenőrzésre. Generálás során 1000 adatpont  $p_1 \in [0, 10)$ ,  $p_2 \in [0, 10)$ ,  $k \in [0.1, 20)$ ,  $1/\Delta t_j \in [2, 10]$ ,  $1/\Delta t_i \in [2, 1/\Delta t_j]$  generálási határokkal és 111142 seeddel került elvégzésre. A szimulációs eredmények alapján

$$\bar{\varepsilon} = 2.172 \cdot 10^{-5}\%, \quad \sigma_{\varepsilon} = 4.533 \cdot 10^{-4}\% \quad (5.3)$$

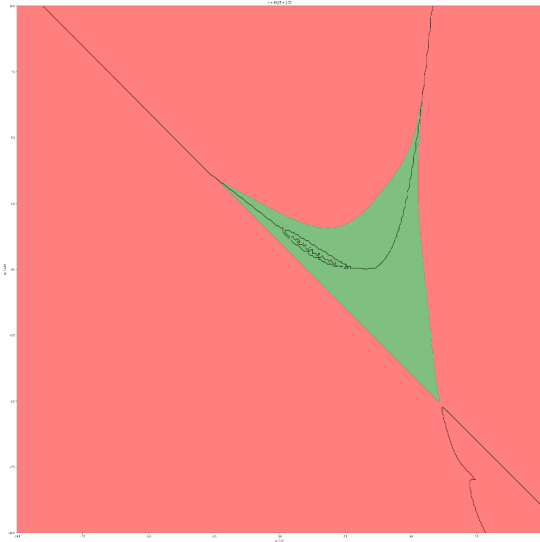
a leképezés és a szimuláció egyezik. Az Ábra 5.3 mutatja, hogy mi történik akkor, amikor két páros  $n$  érték között veszünk racionális  $n$  eseteket. Annak következtében, hogy tudjuk, minőségbeli különbség van a stabilitási diagram páros és páratlan  $n$  értékekre vett esetei között, felmerül a kérdés, hogy ez a tulajdonság miként jelenik meg a két  $n$  érték között. A szimulációs eredmények azt mutatták, hogy minőségileg egy hasonló, alternáló jellegű viselkedés figyelhető meg, mint amit az egész értékekre láthatunk, ám ezeken az alsóbb szinteken belül bonyolult változások figyelhetőek meg, ahogy a stabilitási diagram egyik alakzatból a másikba alakul át. A jövőben a kutatás célját képezheti ezen transzformációk megértése, amely egy mélyebb képet adhat arról, hogy a diagram milyen módon változik a folyamat során.



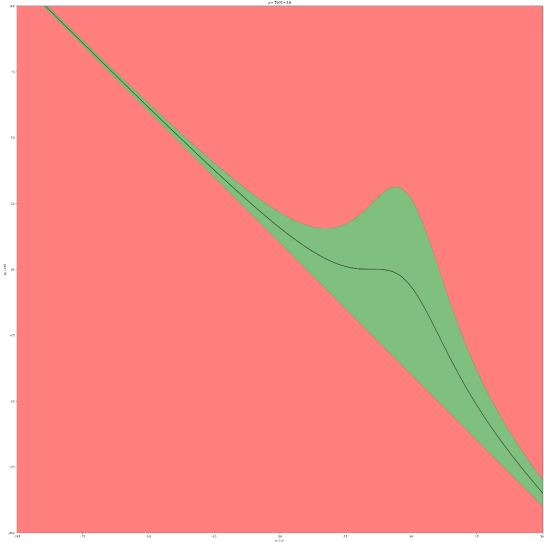
(a)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 2$  esetén



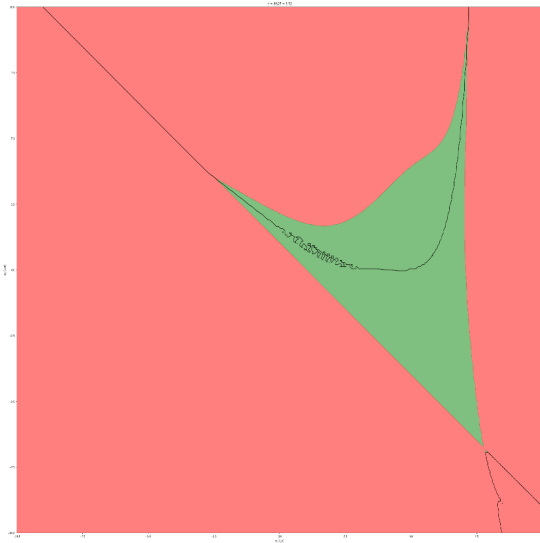
(b)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 2.36$  esetén



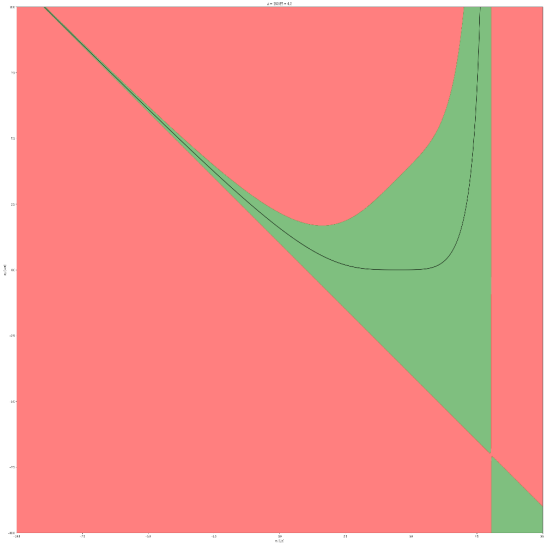
(c)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 2.72$  esetén



(d)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 3$  esetén



(e)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 3.52$  esetén



(f)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 4$  esetén

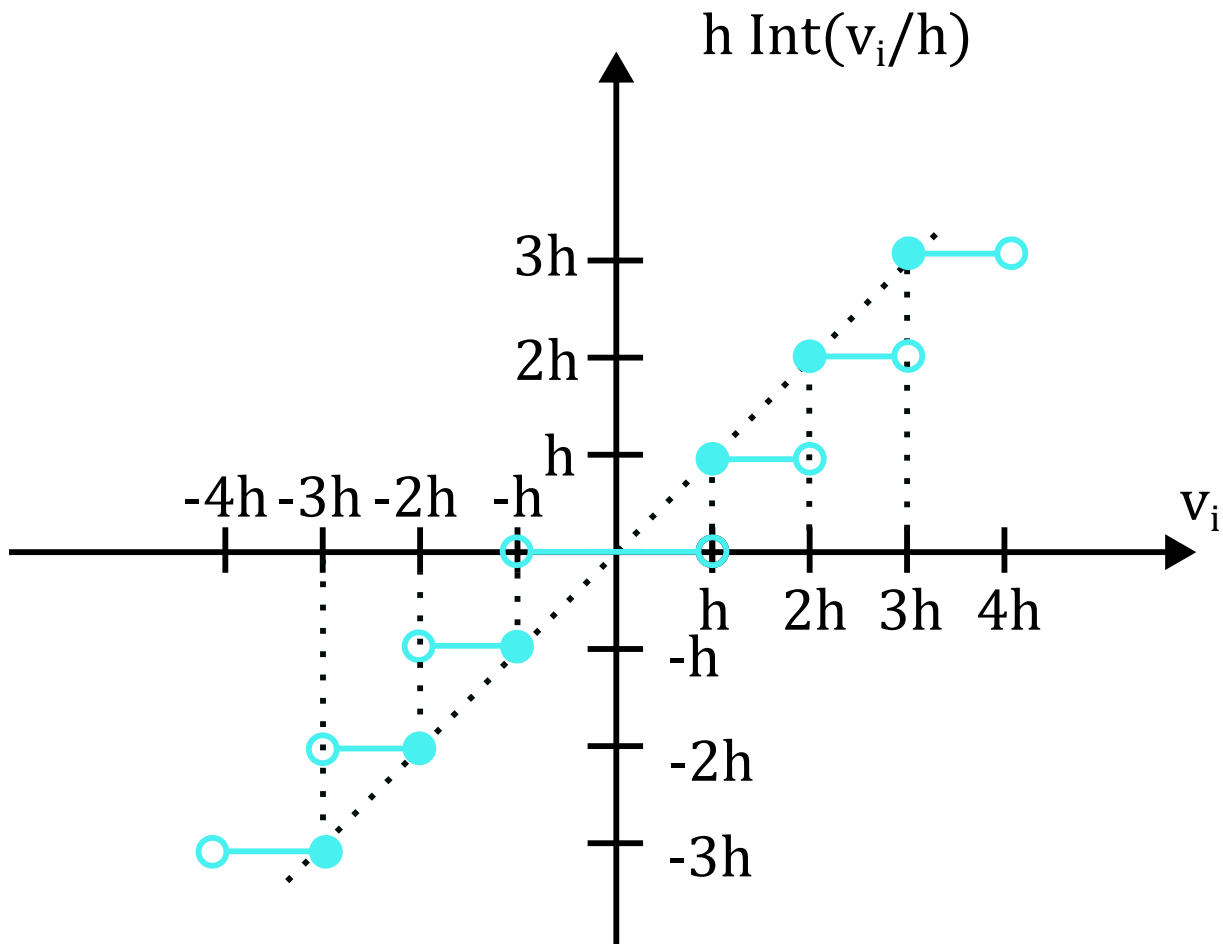
**5.3. ábra.** Stabilitási diagram, rögzített  $k = 1$  [1] dimenziótlan paraméterrel, különböző  $n$  esetekre,  $\Delta t_j = 1$  s rögzítése esetén, kettő páros  $n$  érték között.

## 6. Felbontóképesség hatása két szenzor esetén

Következőekben térjünk vissza az azonos nulladrendű tartót tartalmazó modellhez, amelynek esetében egészítsük ki a rendszert a felbontóképesség hatásával. Modellezzük úgy a szenzor pontosságát, hogy egy térbeli mintavételezési pontossággal is rendelkeznek ezek a műszerek, azaz nem egy bizonyos, véges felbontásnak megfelelően tudnak csak mérni és mért jelet a szabályozónak továbbítani. A modell ekkor az alábbi alakban írható fel

$$\dot{v} - kv = -p_1 h_1 \text{Int}\left(\frac{v_i}{h_1}\right) - p_2 h_2 \text{Int}\left(\frac{v_i}{h_2}\right), \quad h_2 > h_1, \quad (6.1)$$

azaz az ugyanabban a mintavételezési pillanatban ( $t_i$ ) a szenzorok egyike  $h_1 \text{Int}(v_i/h_1)$ , míg a másik  $h_2 \text{Int}(v_i/h_2)$  értéknek megfelelően mért és adott jelet a szabályozónak. Az  $\text{Int}()$  függvény egy egészrészképző páratlan (azaz az origóra középpontosan szimmetrikus) függvény, amelynek képét mutatja Ábra 6.1.



6.1. ábra. Int függvény reprezentációja

Az így kapott differenciálegyenlet megoldása

$$v(t) = v_i e^{k(t-t_i)} + \frac{p_1 h_1}{k} \left(1 - e^{k(t-t_i)}\right) \text{Int}\left(\frac{v_i}{h_1}\right) + \frac{p_2 h_2}{k} \left(1 - e^{k(t-t_i)}\right) \text{Int}\left(\frac{v_i}{h_2}\right), \quad (6.2)$$

míg a következő mintavételezési pont ekkor számítható, mint

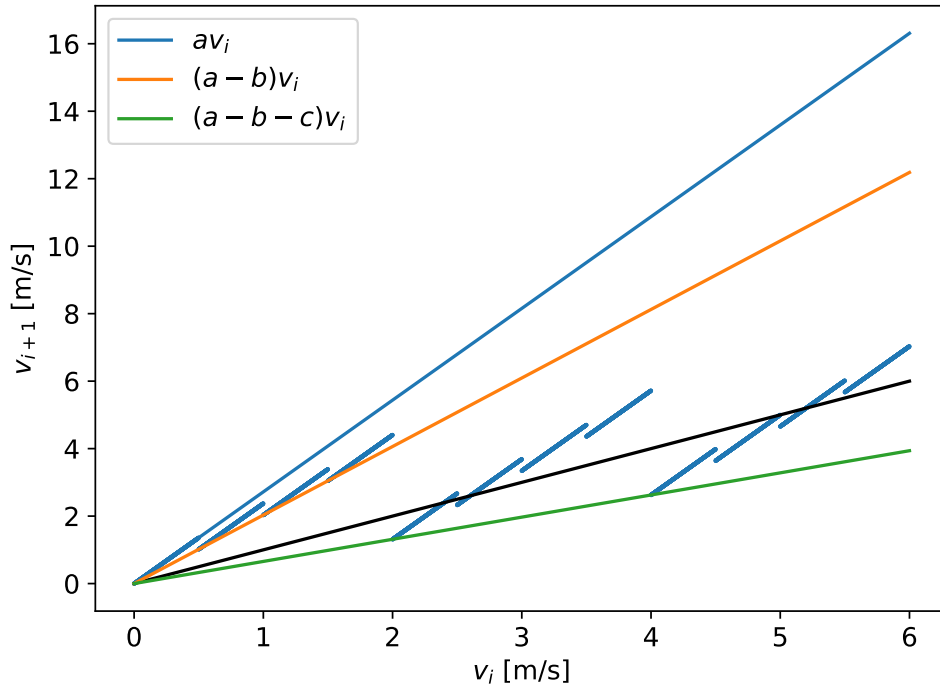
$$v_{i+1} = \underbrace{e^{k\Delta t}}_{=:a>0} v_i - \underbrace{\frac{p_1}{k} (e^{k\Delta t} - 1) h_1 \text{Int}\left(\frac{v_i}{h_1}\right)}_{=:b>0} - \underbrace{\frac{p_2}{k} (e^{k\Delta t} - 1) h_2 \text{Int}\left(\frac{v_i}{h_2}\right)}_{=:c>0}. \quad (6.3)$$

A leképezés ekkor

$$v_{i+1} = av_i - bh_1 \text{Int}\left(\frac{v_i}{h_1}\right) - ch_2 \text{Int}\left(\frac{v_i}{h_2}\right), \quad (6.4)$$

ahol  $a > 0$ ,  $b > 0$  és  $c > 0$ , mivel  $k > 0$ . A leképezés alapján megrajzolható az úgy nevezett pókháló diagram (angol nevén cobweb diagram), amely kapcsolatot teremt az előző és következő időpillanatbeli állapotok között. A diagram során  $a$  adja meg az egyes szegmensek meredekségét,  $b$  és  $c$  pedig a görbén vertikális eltolásokat hajtanak végre, ennek segítségével befolyásolva az általános struktúráját a diagramnak. A diagramon egyes pontok halmaza kitüntetett szereppel bír. A  $45^\circ$  egyenesen található pontok a fix pontok halmaza (hiszen ekkor  $v_{i+1} = v_i$ ), azaz a leképezés azon pontjai, amelyek áthaladnak ezen az egyenesen, a leképezés fix pontjai. A leképezéshez konstruálható ezen felül 3 egyenes, amelyeket a Ábra 6.2 is mutat:

1. Az  $av_i$  egyenes a szabályozó nélküli, magára hagyott rendszer meredekségét mutatja (ábrán kék színnel)
2. Az  $(a - b)v_i$  egyenes a jobb felbontóképességű szenzorral működő szabályozó működése esetén mutatja a rendszer viselkedését (az ábrán narancssárgával)
3. Az  $(a - b - c)v_i$  egyenes mind a két szenzorral együttesen irányított rendszer működése esetén mutatja a rendszer viselkedését (az ábrán zölddel)

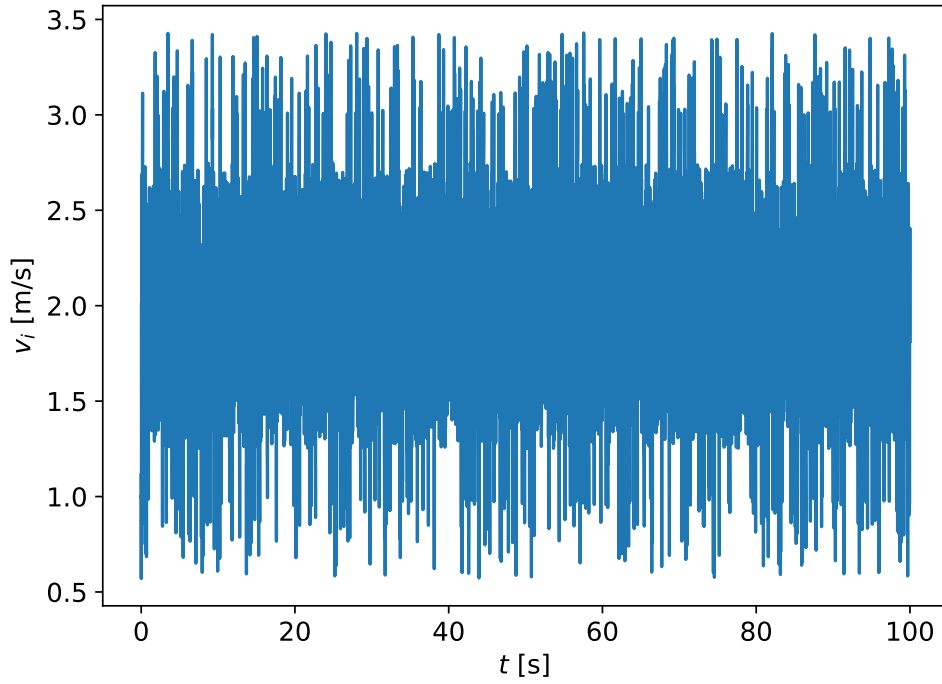


**6.2. ábra.** Pókháló diagram és annak kiemelt jelentőségű egyenesei. Paraméterek:

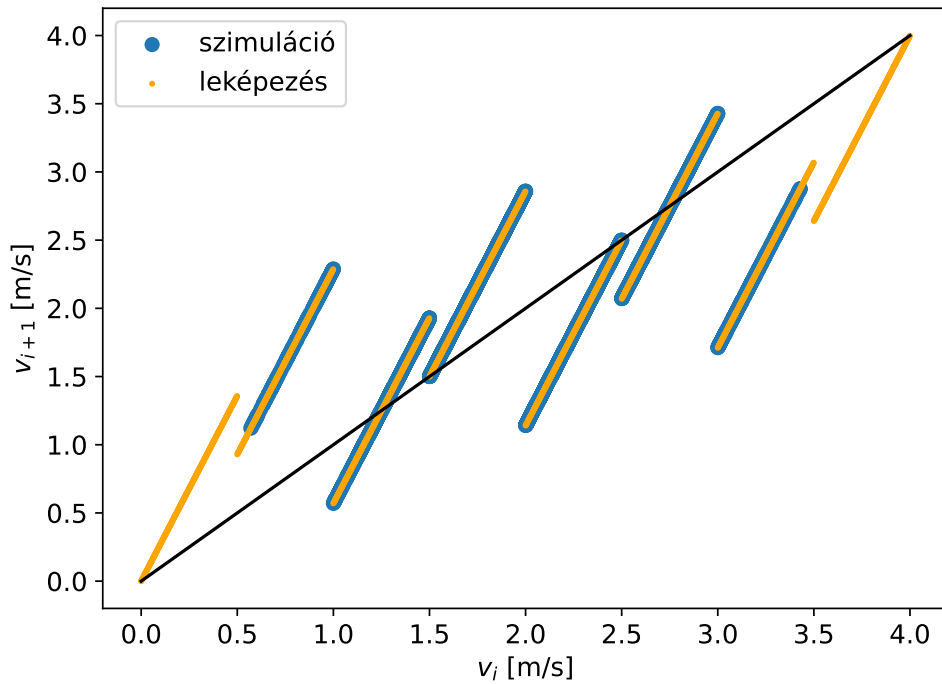
$$p_1 = 4, p_2 = 8, h_1 = 0.5, h_2 = 2, k = 10, \Delta_t = 0.1$$

Ábra 6.2 esetén érdemes megjegyezni, hogy  $p_1 < p_2 < k$  paraméterválasztás miatt bár sem az egyik, sem a másik szabályozó önmagában nem képes a rendszert a 45°-os egyenes alá juttatni, azok kombinációja már képes ezt az együttes hatást elérni. Másik megjegyzés, hogy a két szenzor együttes hatása miatt az egészrészképzésre jellemző sávok szerkezet tovább bomlik, még több sávot eredményezve. Ennek köszönhetően pedig a fixpontok száma a diagramon növekszik.  $v_i \in [2, 3]$  tartományán a  $b$ -vel történő eltolás miatt egy új fixpont is megjelenik. Ez a probléma hasonlít arra a kérdésre, hogy egy analóg, vagy digitális késő óra mutatja többször helyesen az időt? Digitális esetben egy metszéspont körül a lépcsős szerkezet miatt többször is felveszi az óra a pontos időt, míg az analóg csak egyszer ennek a pontnak a környezetében. Így amennyiben a metszéspontok számát választjuk metrikának, akkor a digitális óra többször mutatja helyesen az időt egy nap során.

A leképezés eredményei szimuláció segítségével is összevethetőek, a leképezés helyességét reprezentálandó. A szimuláció során egyszerre a leképezéshez tartozó  $\Delta t$  mintavételezési időnek megfelelő ideig szimuláljuk a rendszert, majd az így kapott eredményt kimentjük és a szimulációt abból a pontból folytatjuk. A szimuláció időfüggvényét mutatja a Ábra 6.3. Az időfüggvényen is észrevehető, hogy a rendszernek a mozgása rendezetlennek tűnik, ám a mozgás korlátos, nem hagyja el átlagértékének egy bizonyos környezetét. Az eredményből képzett pókháló diagram a Ábra 6.4 mutatja. Az ábra alapján az analitikusan kapott leképezés pontos illeszkedést mutat a szimulációs eredményekkel.



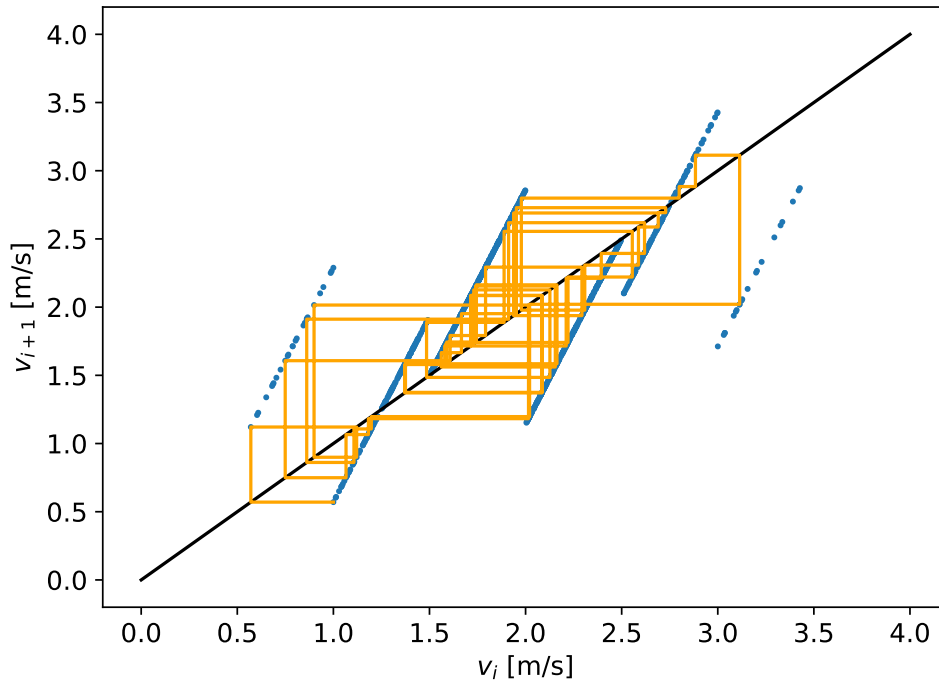
**6.3. ábra.** Szimulációs eredmény időfüggvénye. Paraméterek:  $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 7.5$ ,  $h_1 = 0.5$ ,  $h_2 = 1$ ,  $k = 10$ ,  $\Delta_t = 0.1$



**6.4. ábra.** Szimulációs eredmény pókháló diagramjának és leképezés összehasonlítása. Paraméterek:  $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 7.5$ ,  $h_1 = 0.5$ ,  $h_2 = 1$ ,  $k = 10$ ,  $\Delta_t = 0.1$

A pókháló diagram egy diszkrét megoldás terében mutatja annak mozgását. A diszkrét leképezések trajektóriáját ebben a térben meg lehet úgy rajzolni, hogy egy kezdőpontból

induló leképezést rávetítjük horizontálisan a  $45^\circ$  egyenesre, majd az így kapott pontból vertikálisan rávetítünk a pókháló diagramra. Egy így kapott trajektória látható Ábra 6.5 esetében.



**6.5. ábra.** Szimulációs eredmény pókháló diagramján egy megoldás menete.

Paraméterek:  $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 7.5$ ,  $h_1 = 0.5$ ,  $h_2 = 1$ ,  $k = 10$ ,  $\Delta_t = 0.1$

A szimuláció egy "stabil" mikrokaotikus jellegű diagramot rajzolt ki, mind Ábra 6.3, mind a megoldás trajektóriájaként Ábra 6.5. A kaotikus jelleg belátásához három tényezőt kell figyelembe venni [12]:

1. A káosz egyik alap jellemzője, hogy érzékeny a kezdeti feltételekre. Elsőként szükséges belátni, hogy két, egymás  $\delta$  sugarú környezetében elindított megoldás egy idő után elhagyja ezt a  $\delta$  környezetet.
2. Be kell látni az attraktor létezését, amelyet Ábra 6.4 szimulációs része jól kijelöl a leképezés analitikus megoldásából. Az attraktor azt a tartományt jelöli ki, amelyen kívül található minden pontot a leképezés magán belülre ránt és ott tart. Amennyiben kilöködné, akkor is visszahúzza a leképezés.
3. Végül, de nem utolsó sorban a topológikus tranzitivitást kell belátni, azaz annak megismerése szükséges, hogy minden fixpont instabil, továbbá minden egy periódusú periodikus pálya instabil, továbbá minden akárhány periódusú periodikus pálya is instabil, azaz nincs arra lehetőség, hogy egy megoldás egy idő után az attraktoron belül megáll.

## 7. Összefoglalás

A dolgozat során bemutatásra került egy biológiaiailag motivált mérnöki kérdés felvetés, amely középpontjában az emberi egyensúlyozás során jelenlévő szenzorfúzió előnyeinek megismerése szerepelt. Az ember több szervrendszert együttesen használva tartja magát a felső, instabil egyensúlyi helyzetben. Ezeknek a szervrendszereknek egy érdekes adottsága, hogy eltérő időkésséssel és felbontóképességgel rendelkeznek, amelyek között egy jellegzetes fordított arányosság figyelhető meg. A jó felbontású, pontos szervrendszerek tipikusan lassabbak, mint a rossz felbontású, pontatlanabb, de gyors szervrendszerek.

A kutatás során egy egyszerűsített, úgy nevezett „cartoon-modell” segítségével került sor a két szenzort használó szenzorfúzióval rendelkező szabályozó stabilitás vizsgálatának. Elsőként a két digitális szabályozóval ellátott modell került bemutatásra. A vizsgálatokból az derül ki, hogy a két szabályozó időkésségének arányossága szerepet játszik a stabilitási diagram kvalitatív struktúrájában, a rendszer páros és páratlan hánycsoportok esetén egymástól teljesen eltérő struktúrát vesz fel. A vizsgálatokból az látszik, hogy két szenzor használatával a stabilitási diagramok  $k$  rendszerparaméter változtatásának irányában szélesebbek, így a rendszer nagyobb modell-bizonytalanság esetén is stabilizálható. A kutatás kitekintéseként a jövőben érdemes lehet annak hatását is vizsgálni, hogy tetszőleges számú szenzor hozzáadása a rendszer stabilitását és robusztusságát mennyiben befolyásolja. Az emberi szervrendszerben megfigyelhető egyfajta minimális energiára törekvés, viszont minden szenzor vagy szervrendszer működése energiát igényel, így elképzelhető, hogy egy idő után nem érdemes a robusztusság felé elmozdulni az energiafogyasztás növelés árán. Az optimalizálási feladatok során egy költségfüggvénynek megfelelően próbáljuk megtalálni az optimális megoldást. Felmerül a kérdése annak, hogy vajon az emberi egyensúlyozás során meghatározható-e egy ilyen költségfüggvény a szenzorok számának tekintetében.

A dolgozat másik részében a felbontóképesség hatásának vizsgálata kezdődött el. Szimulációs eredmények segítségével bemutatásra került, hogy egy szenzorfúzióval ellátott szabályozó esetén olyan tartományokat is lehet szabályozni, amelyeket csak egy szabályozó segítségével nem lehetne, egy adott erősítési érték megtartása mellett. Az itt vélhetően felfedezhető mikrokaotikus mozgások emlékeztethetnek minket az emberi egyensúlyozás során megjelenő véletlenszerű dülöngélés (angolul random sway) jelenségére. A véletlenszerű mozgások egy része mögött determinisztikus jellegű kaotikus hatások is meghúzódhatnak, így felvetül annak a kérdése, hogy az így előállított modell mennyire tudja leírni a random sway jelenséget.

A tudománytörténet során a véletlenszerűség kérdése kitüntetett szereppel rendelkezett. A 19. század előtt a véletlenszerűség fő és talán egyetlen forrásaként az információ hiánya volt megtalálható. Ez a szemlélet szerint a világ determinisztikus, minden folyamatnak oka van és amennyiben ismernénk az összes szabadságfokot és a szabadságfokokhoz kapcsolódó kezdeti feltételeket, akkor onnantól minden jelenség pontosan leírhatóvá válna. A makrofizikai jelenségek között eddig nem is találtunk olyan jelenséget, amely kívül esett volna ezen kérdéskörön, ám a kisebb objektumok felé haladva, a kvantummechanikában

már találhatóak ilyen jelenségek. Sokáig a nagy tudósok egy csoportja, köztük Einstein is úgy gondolta, hogy a kvantummechanikai leírás nem lehet teljes, biztos vannak még olyan "rejtett változók", amelyek ismeretében a modell determinisztikussá válna. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció kapcsán hangzott el híres mondata, hogy "Isten nem kockajátékos", amely ezt a nézetét erősíti meg. Ahogy a Bell-féle egyenlőtlenség arra rámutatott kvantummechanika esetén még is van arra lehetőség, hogy rejtett változók nélkül is legyenek olyan jelenségek, amelyeknek nem kell determinisztikus tulajdonsággal rendelkeznie [13].

Az emberi agy számítási kapacitását egy mikroprocesszor még a mai napig nem volt képes legyőzni, mivel bár az agy lassú ezekhez a félvezető technológiával működő eszközökhöz képest, ám nagyságrendekkel több kapcsolattal rendelkezik, mint a félvezető technológiában a lábak száma és képes párhuzamosítani is a műveletek végrehajtását. Az agy optimalizációs technikái kapcsán már régen felvetődött annak a kérdésköre, hogy vajon az agyban esetleg megjelenő kvantumjelenségek miként befolyásolhatják annak működését. Egyik ehhez kapcsolódó felvetülő filozófia jellegű kérdés a tudat fizikai hátterének feltérképezése. Az egyik kvantumjelenségekkel összekapcsolt része az agynak az úgynevezett mikrotubulusok [14; 15]. Ezek ismerete modellezési szempontból azért bírhat jelentőséggel, mivel ahogy fentebb említésre került, a kvantummechanika jelenségek között találhatunk tisztán véletlenszerűségekre épülő folyamatokat, amelyek kérdéses, hogyan befolyásolják agyunk működését [16].

A kutatás következő állomása az időkésés és felbontóképesség közös vizsgálata szenzorfúzió során. Felmerül annak kérdése, hogy esetleg a fordítottan arányos jellege az időkésésnek és felbontóképességnek lehet-e előnyös az emberi egyensúlyozás szempontjából és magyarázhatja-e az ehhez kapcsolódó szervrendszerek evolúciós kialakulásának okait. Illetve, hogy mérnöki szenzorfúziós rendszerek tervezéséhez milyen további tervezési elvek kapcsolódhatnak, érdemes-e minél pontosabb és gyorsabb eszközökkel tervezni a szabályozott gépeinket.

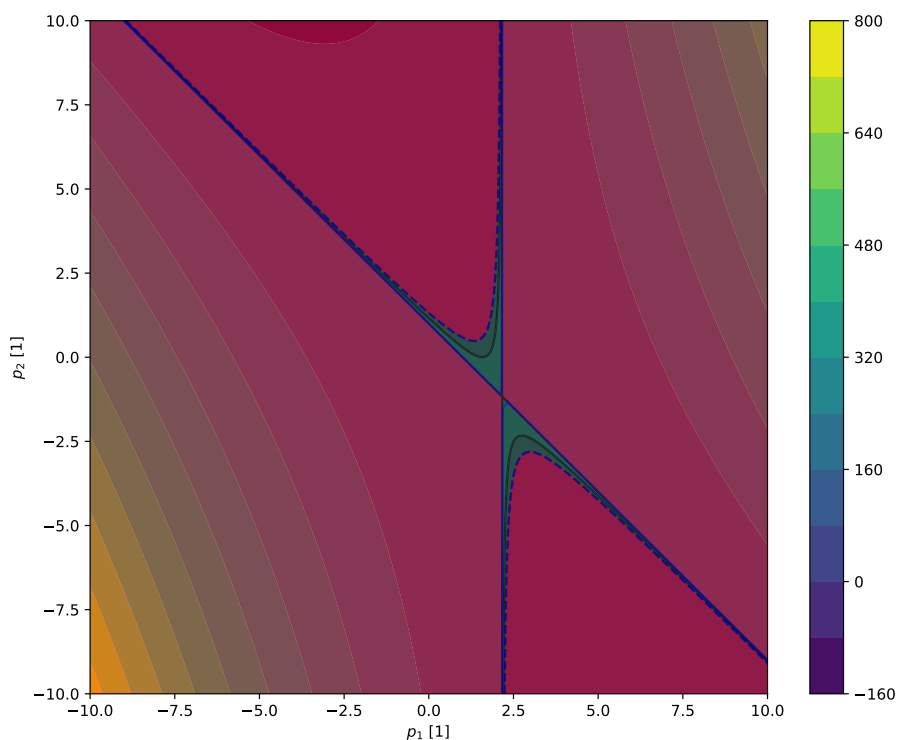
A szenzorfúzió vizsgálata során, az idő digitalizálásának hatására periodikus leképezések jelentek meg. A jövőben vizsgálható annak a hatása, ha nem működik mindegyik periódusban mindkettő szenzor, hanem azok a hatásukat csak felváltva fejtik ki a rendszerre. Az úgy nevezett act-and-wait szabályozó használata esetén periodikusan kapcsol be és kapcsol ki a szabályozó, ezzel segítve a performanciát is [17]. Egy felmerülő ötlet annak hatása, ha két fázisban eltolt act-and-wait szabályozó hatását vizsgáljuk a rendszerre, amely szabályozók más szenzortól kapják forrásukat. Az act-and-wait szabályozó ezen kívül olyan módon is kiterjeszthető lenne, hogy a bekapcsolt periódus alatt a szenzorfúzióban is van egy folytonos váltás, melyik szenzor végzi a szabályozást.

## Irodalomjegyzék

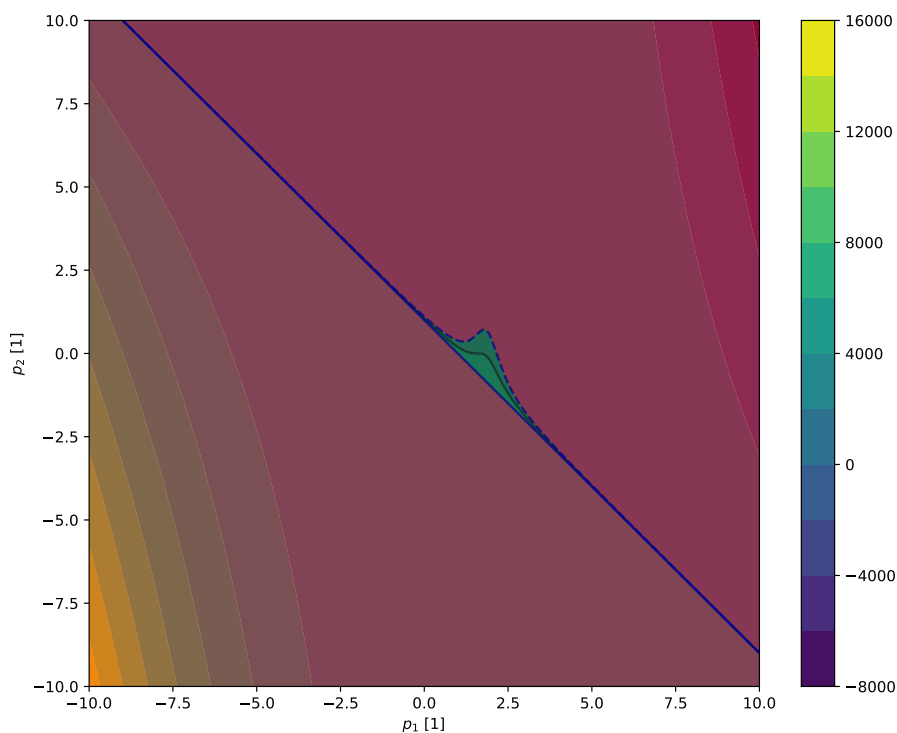
- [1] Tamás Insperger, Ian Loram, John Milton, Pietro Morasso, Taishin Nomura, and Gábor Stépán. *CISM - Advanced Course of Dynamics of Human Balancing*.
- [2] ENDRÉSZ Balázs and STÉPÁN Gábor. Furuta-inga tervezése képfeldolgozást megvalósító szabályozáshoz: Design of a furuta pendulum for visual control. *Nemzetközi Gépészeti Konferencia–OGÉT*, pages 94–99, 2024.
- [3] Mate B Vizi and Gabor Stepan. Digital stability of the furuta pendulum based on angle detection. *Journal of Vibration and Control*, 30(3-4):588–597, 2024.
- [4] Zhiqiang Cao, Xilong Liu, Nong Gu, Saeid Nahavandi, De Xu, Chao Zhou, and Min Tan. A fast orientation estimation approach of natural images. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 46(11):1589–1597, 2015.
- [5] Richard M Murray et al. Optimization-based control. *California Institute of Technology, CA*, pages 111–128, 2009.
- [6] Man Lok Fung, Michael ZQ Chen, and Yong Hua Chen. Sensor fusion: A review of methods and applications. In *2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, pages 3853–3860. IEEE, 2017.
- [7] Duan Xingjun. Application of motion sensor fusion in special competitive sports. *Journal of Sensors*, 2021(1):4469367, 2021.
- [8] Risma Dian Alarmi, Ali Husein Alasiry, Novian Fajar Satria, and Bambang Sumantri. A sensor fusion algorithm in humanoid robot pd balancing control for walking on slope. In *2020 International Electronics Symposium (IES)*, pages 289–296. IEEE, 2020.
- [9] Bence Szaksz and Gabor Stepan. Transient chaotic behavior of fuzzy controlled polishing processes. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 32(9), 2022.
- [10] Richard M. Murray. Lecture 2 – lqr control.
- [11] Pauli Virtanen, Ralf Gommers, Travis E. Oliphant, Matt Haberland, Tyler Reddy, David Cournapeau, Evgeni Burovski, Pearu Peterson, Warren Weckesser, Jonathan Bright, Stéfan J. van der Walt, Matthew Brett, Joshua Wilson, K. Jarrod Millman, Nikolay Mayorov, Andrew R. J. Nelson, Eric Jones, Robert Kern, Eric Larson, C J Carey, İlhan Polat, Yu Feng, Eric W. Moore, Jake VanderPlas, Denis Laxalde, Josef Perktold, Robert Cimrman, Ian Henriksen, E. A. Quintero, Charles R. Harris, Anne M. Archibald, Antônio H. Ribeiro, Fabian Pedregosa, Paul van Mulbregt, and SciPy 1.0 Contributors. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17:261–272, 2020. doi: 10.1038/s41592-019-0686-2.

- [12] Gy Haller and G Stépán. Micro-chaos in digital control. *Journal of Nonlinear Science*, 6:415–448, 1996.
- [13] Manabendra Nath Bera, Antonio Acín, Marek Kuś, Morgan W Mitchell, and Maciej Lewenstein. Randomness in quantum mechanics: philosophy, physics and technology. *Reports on progress in physics*, 80(12):124001, 2017.
- [14] Scott Hagan, Stuart R Hameroff, and Jack A Tuszynski. Quantum computation in brain microtubules: Decoherence and biological feasibility. *Physical review E*, 65(6):061901, 2002.
- [15] Stuart Hameroff and Roger Penrose. Orchestrated reduction of quantum coherence in brain microtubules: A model for consciousness. *Mathematics and computers in simulation*, 40(3-4):453–480, 1996.
- [16] Eliano Pessa and Giuseppe Vitiello. Quantum noise induced entanglement and chaos in the dissipative quantum model of brain. *International Journal of Modern Physics B*, 18(06):841–858, 2004.
- [17] Tamás Insperger. Act-and-wait concept for continuous-time control systems with feedback delay. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(5):974–977, 2006.

# Függelék

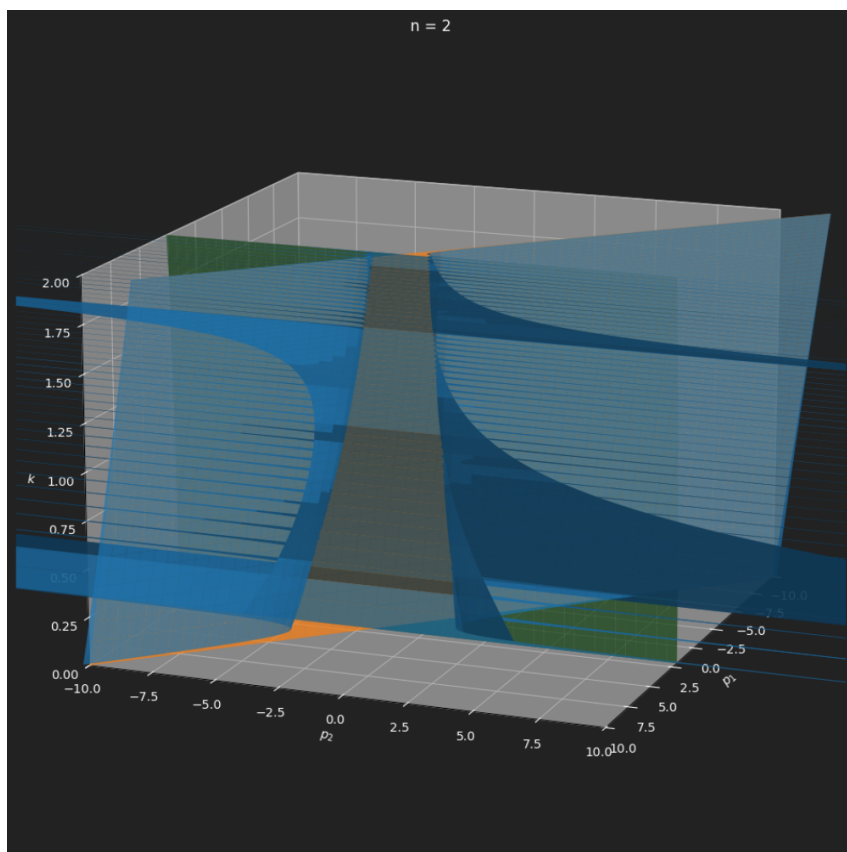


(a)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 2$  esetén

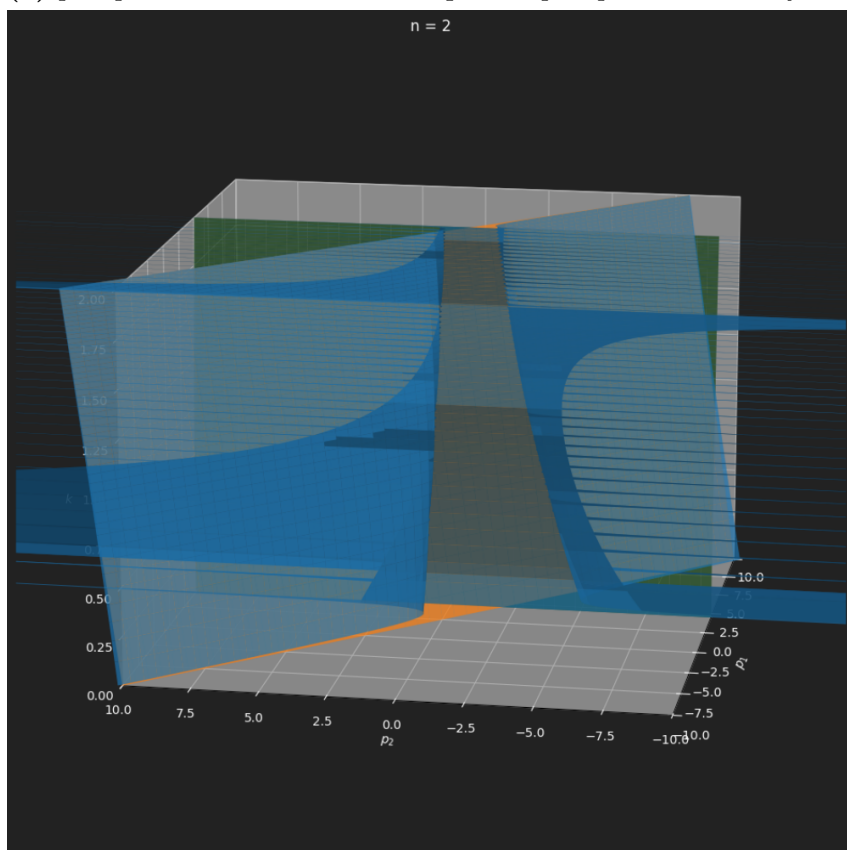


(b)  $p_1 - p_2$  sík  $n = 3$  esetén

**7.1. ábra.** Stabilitási diagram, rögzített  $k = 1$  [1] dimenziótlan paraméterrel, numerikus differenciálegyenlet megoldóval generálva

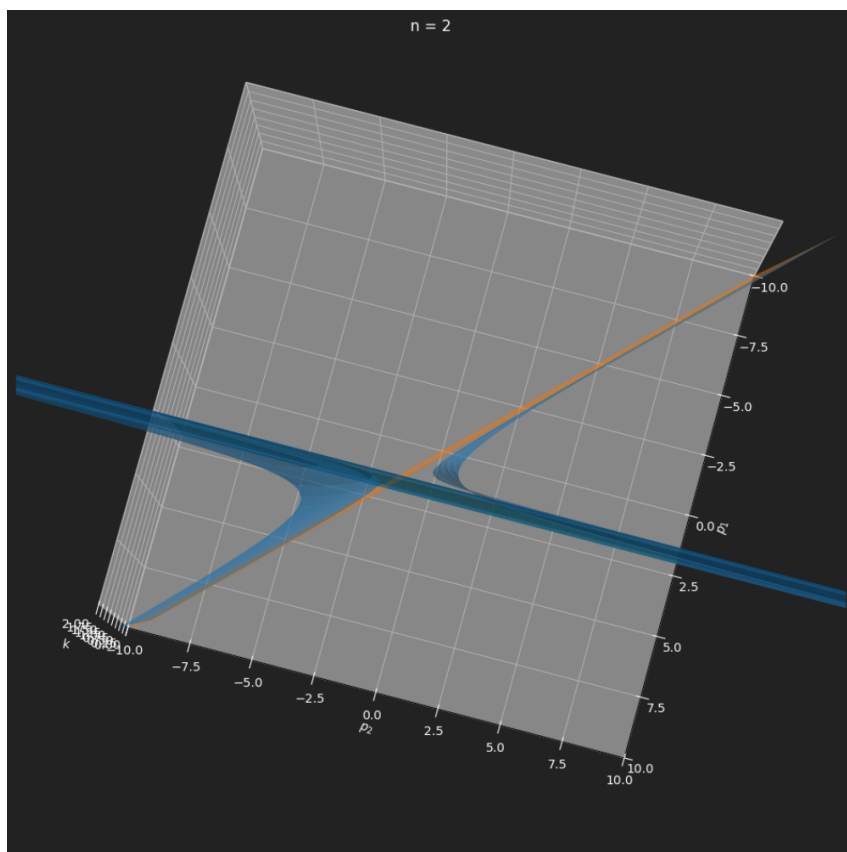


(a)  $p_1 - p_2 - k$  felület  $n = 2$  esetén pozitív  $p_1 - p_2$  értékek irányából

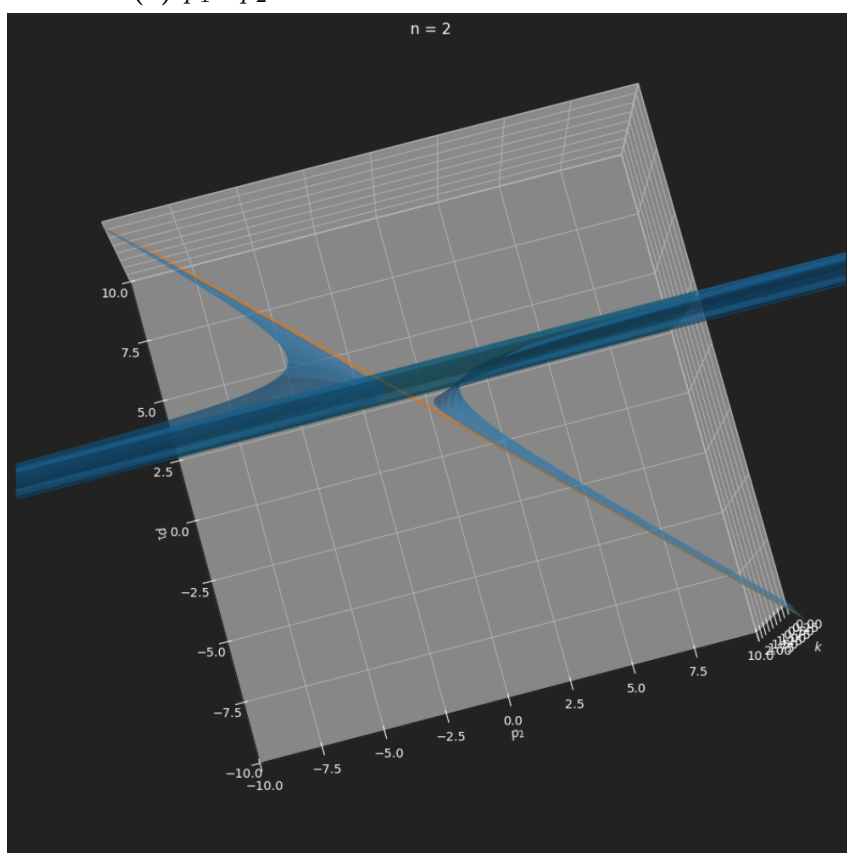


(b)  $p_1 - p_2 - k$  felület  $n = 2$  esetén negatív  $p_1 - p_2$  értékek irányából

**7.2. ábra.** Stabilitási diagram  $k$  paraméterfüggésének ábrázolása háromdimenziós felületen.

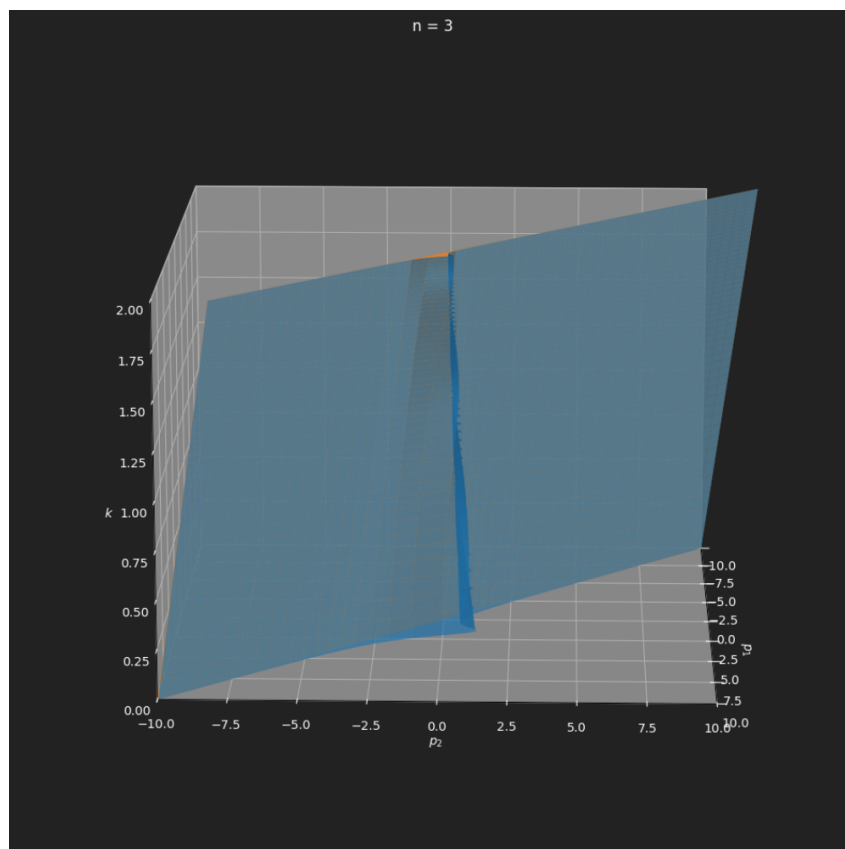


(a)  $p_1 - p_2 - k$  felület  $n = 2$  esetén felülnézetből

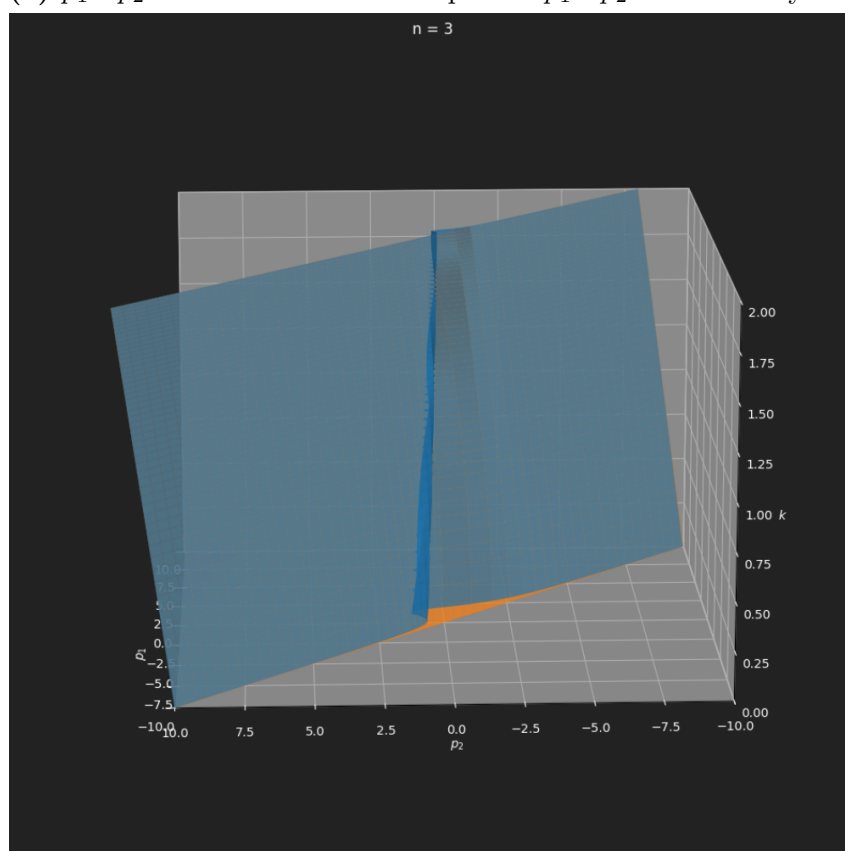


(b)  $p_1 - p_2 - k$  felület  $n = 2$  esetén alulnézetből

**7.3. ábra.** Stabilitási diagram  $k$  paraméterfüggésének ábrázolása háromdimenziós felületen.

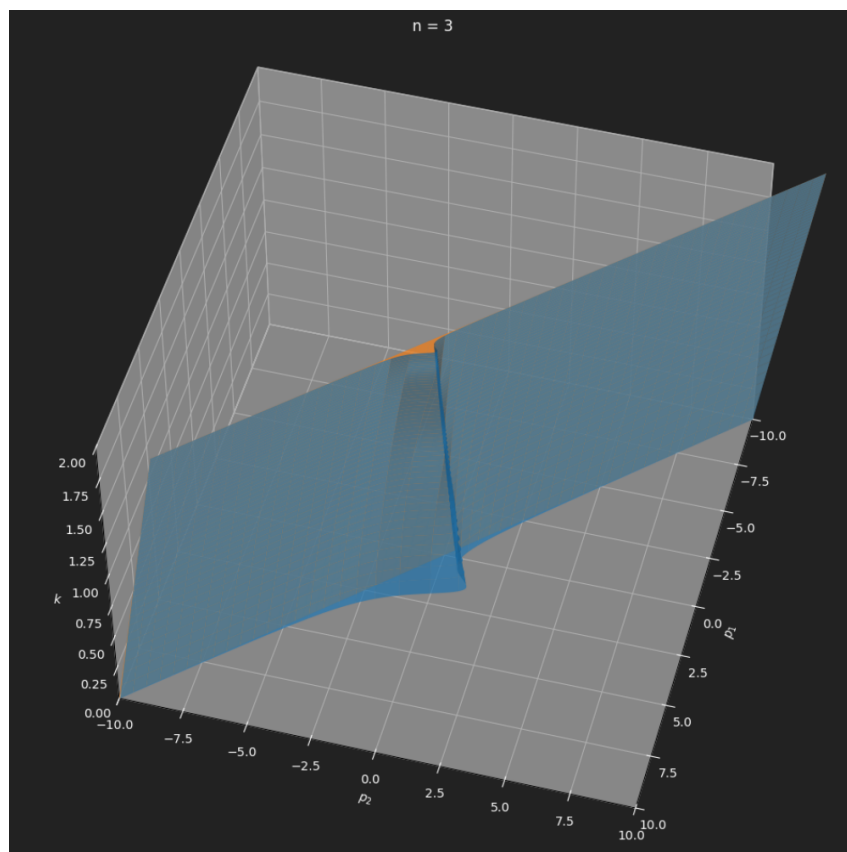


(a)  $p_1 - p_2 - k$  felület  $n = 3$  esetén pozitív  $p_1 - p_2$  értékek irányából

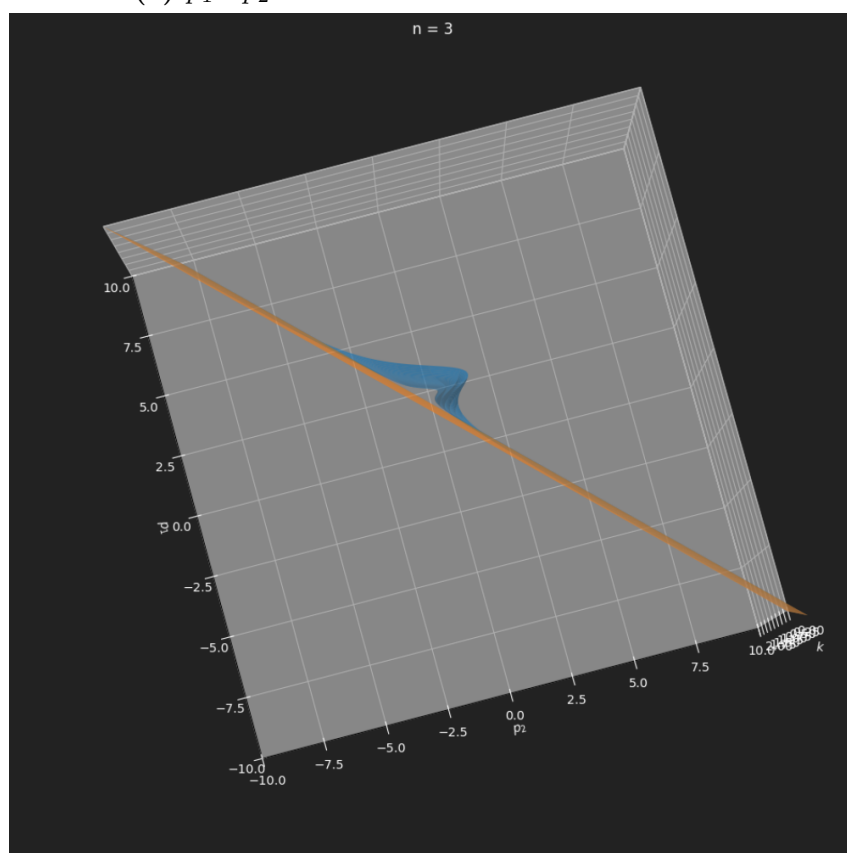


(b)  $p_1 - p_2 - k$  felület  $n = 3$  esetén negatív  $p_1 - p_2$  értékek irányából

**7.4. ábra.** Stabilitási diagram  $k$  paraméterfüggésének ábrázolása háromdimenziós felületen.

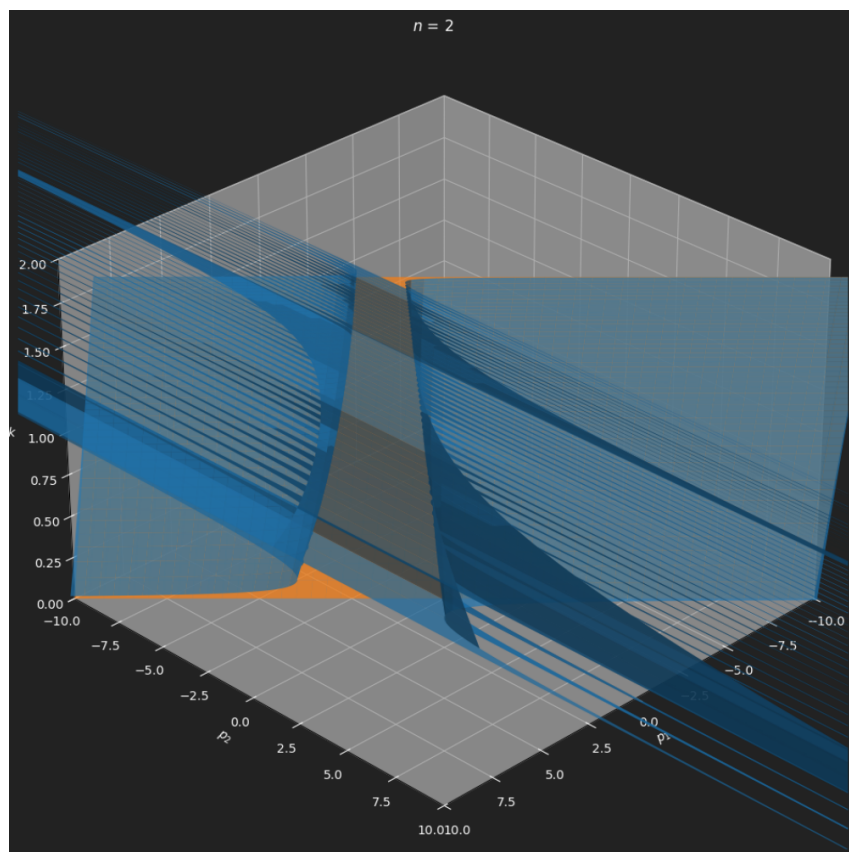


(a)  $p_1 - p_2 - k$  felület  $n = 3$  esetén felülnézetből

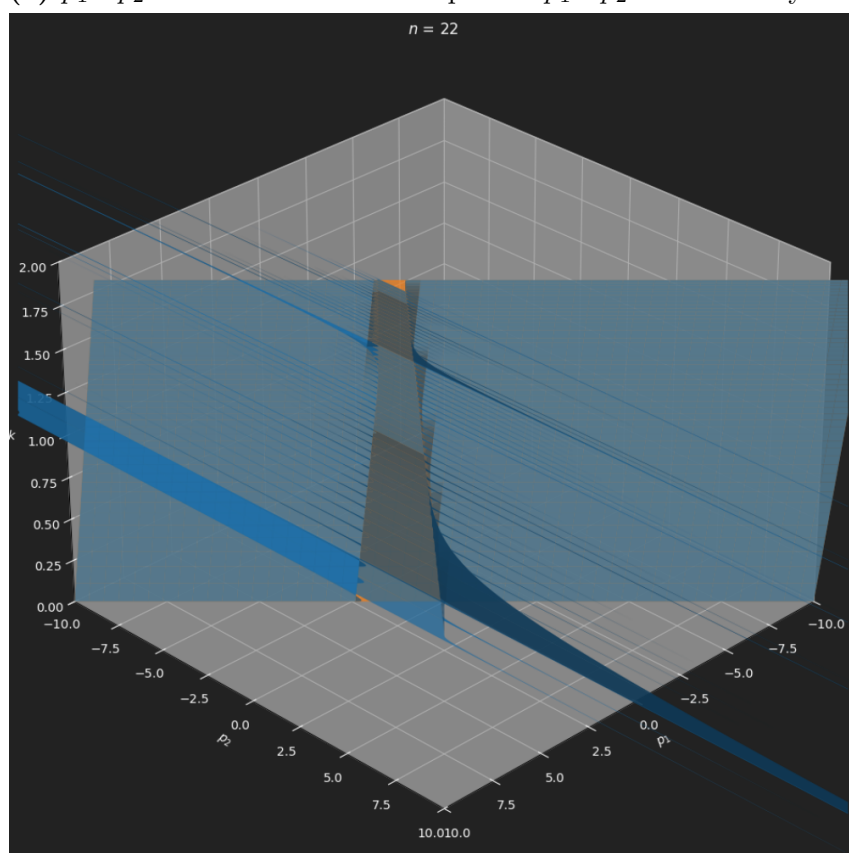


(b)  $p_1 - p_2 - k$  felület  $n = 3$  esetén alulnézetből

**7.5. ábra.** Stabilitási diagram  $k$  paraméterfüggésének ábrázolása háromdimenziós felületen.



(a)  $p_1 - p_2 - k$  felület  $n = 2$  esetén pozitív  $p_1 - p_2$  értékek irányából



(b)  $p_1 - p_2 - k$  felület  $n = 22$  esetén pozitív  $p_1 - p_2$  értékek irányából

**7.6. ábra.** Stabilitási diagram  $k$  paraméterfüggésének ábrázolása háromdimenziós felületen,  $n$  hatásának vizualizációja.