

Gerg  cz Bendegúz, Kálmán József Levente  
TDK



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR  
MŰSZAKI MECHANIKA TANSZÉK





M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR  
MŰSZAKI MECHANIKA TANSZÉK

GERGÁ CZ BENDEGÚ Z  
KÁLMÁN JÓZSEF LEVENTE

TDK

Komponens alapú átviteli út analízis passzív oldali zaj esetén

Konzulens:  
*Kimpián Tibor*  
okl. villamosmérnök

Konzulens:  
*Kádár Fanni*  
Tanszéki mérnök

BUDAPEST, 2024

# NYILATKOZATOK

*Nyilatkozat az önálló munkáról*

Alulírottak, *Gergácza Bendegúz* (MQWGJ0), *Kálmán József Levente* (O0SRF2), a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem hallgatói, büntetőjogi és fegyelmi felelősségünk tudatában kijelentjük és sajátkezű aláírásunkkal igazoljuk, hogy ezt a TDK dolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magunk készítettük, és a dolgozatomban csak a megadott forrásokat használtuk fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettük, egyértelműen, a hatályos előírásoknak megfelelően, a forrás megadásával megjelöltük.

Budapest, 2024. december 1.

---

*hallgató*

---

*hallgató*

# Tartalomjegyzék

|                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>                                                     | <b>3</b>  |
| 1.1. Kormányzást segítő rendszer bemutatása . . . . .                   | 3         |
| 1.2. Szerkezeti áttekintés és motiváció . . . . .                       | 4         |
| <b>2. Akusztikai alapok</b>                                             | <b>4</b>  |
| 2.1. Zajszint jellemzése . . . . .                                      | 4         |
| 2.2. Hang keletkezése . . . . .                                         | 5         |
| 2.3. A hang tulajdonságai . . . . .                                     | 7         |
| <b>3. Zajok és rezgések villamos forgógépekben</b>                      | <b>7</b>  |
| 3.1. A zaj keletkezésének felosztása villamos forgógép esetén . . . . . | 9         |
| 3.2. Mechanikai alkatrészekből származó zajok . . . . .                 | 10        |
| 3.3. Elektro mágneses tér hatásaiból adódó zajok . . . . .              | 11        |
| 3.4. Rendszám alapú analízis . . . . .                                  | 14        |
| <b>4. Mechanikai rezgőrendszer átviteli függvénye</b>                   | <b>16</b> |
| <b>5. Átviteli útvonal analízis (Transfer Path Analysis, TPA)</b>       | <b>18</b> |
| 5.1. Hagyományos TPA . . . . .                                          | 19        |
| 5.2. Komponens alapú TPA . . . . .                                      | 20        |
| 5.2.1. Ekvivalens erők és válaszok meghatározása . . . . .              | 20        |
| 5.2.2. Blocked force TPA . . . . .                                      | 20        |
| 5.2.3. Szabad elmozdulás TPA . . . . .                                  | 21        |
| 5.2.4. Összetett kontaktú TPA . . . . .                                 | 22        |
| 5.2.5. In situ TPA . . . . .                                            | 23        |
| 5.3. Transmissibility TPA . . . . .                                     | 24        |
| 5.4. A pszeudo inverz számítása . . . . .                               | 24        |
| 5.4.1. Szinguláris értékekre bontás (Singular value decomposition) . .  | 25        |
| 5.4.2. Moore-Penrose pseudoinverse . . . . .                            | 25        |
| <b>6. Virtuális pont transzformáció</b>                                 | <b>26</b> |
| 6.1. Virtuális pont FRFek . . . . .                                     | 29        |
| 6.2. Transzformáció jósági fokának ellenőrzése . . . . .                | 30        |
| 6.2.1. Szenzor konzisztenciája . . . . .                                | 30        |
| <b>7. Mérési összeállítás</b>                                           | <b>32</b> |
| 7.1. Motor felszerlése a fékpadra . . . . .                             | 32        |
| 7.2. FRF-ek meghatározása kísérleti úton . . . . .                      | 34        |
| 7.3. Üzemi állapotok mérése . . . . .                                   | 34        |

|                                                          |           |
|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>8. Validáció</b>                                      | <b>35</b> |
| 8.1. Validáció zavarmentes esetben . . . . .             | 36        |
| 8.2. Validáció passzív oldali zaj jelenlétében . . . . . | 38        |
| <b>9. Rendszám alapú megközelítés</b>                    | <b>41</b> |
| 9.1. A módszer pontossága . . . . .                      | 42        |
| 9.2. A módszer robusztussága . . . . .                   | 44        |
| <b>10.Konklúzió</b>                                      | <b>47</b> |

# 1. Bevezetés

## 1.1. Kormányzást segítő rendszer bemutatása

Az autóipar fejlődésének egyik következménye a kormányrendszerekbe szerelt segédberendezések megjelenése volt; melyek mind a biztonság, mind a vezetési élményt növelték. Az így beépített gépelemek mozgása során keletkező rezgések nemkívánatos zajokat okozhatnak, amelyek zavaró hatása csökkenti az utastér komfortját. A hanghatások csökkentése a fejlesztési költségek igen jelentős hányadát teszi ki, amire a különböző beszállítók eltérő megoldásokat találtak. Mára az elektromos rásegítés minden kategóriában jelen vannak, a legegyszerűbb járművektől egészen a luxuskategóriáig. A használt rendszerek kialakulásához elengedhetetlen néhány figyelemre méltó megoldás áttekintése.

Az első kormányrásegítő rendszerek kezdetben hidraulikus elven működtek, ahol a szükséges olajnyomás eléréséhez egy hidraulikus szivattyút használtak. Ez a szivattyú közvetlenül a főtengelyre van szerelve, és nem kikapcsolható ha hosszú egyenes utakon halad az autó, ami feleslegesen növeli az autó üzemanyag fogyasztását.

Ugyanakkor masszív, robusztus felépítésüknek köszönhetően napjainkban is használják tehergépjárművekben és különféle munkagépekben rendkívüli erő kifejtő képességüknek köszönhetően.

Az autóipar fejlődésének egyik mérföldköve az 1971-ben bemutatott Mercedes-Benz 250 luxus coupé volt, ahol a tervezés során kiemelt szerepet kapott a zavartalan utazási élmény. Ebben a modellben, az akkor már elterjedő elektromos rendszerek helyett, a Mercedes egy különleges, de jóval bonyolultabb pneumatikus megoldást választott. A beépített pneumatikus rendszer lehetővé tette a kormánymű szinte teljesen zajtalan működését. A ma gyártott személyautók kizárólag elektromos rásegítésű kormányrendszerrel vannak szerelve. Használatuk elősegíti a környezetszennyezés csökkentését, a gyártás és a használat során felhasznált egyre kevesebb olaj miatt.

A felsoroltak mindegyikében közös, hogy egy aktív és egy passzív elem kapcsolata adja a teljes összeállítást. Az aktív oldal jellemzően a zaj forrásáért felelős; lehet ez motor, vagy bármi olyan alkatrész, ami jól elkülöníthető a környezetétől energia bevitel szempontjából. A passzív oldali elemek a zajterjedésben és lesugárzásában kapnak jelentős szerepet.

Az akusztikai vizsgálatok költségeinek csökkentése és a zajterjedés mélyebb megértésének érdekében egy olyan módszer kifejlesztésére van szükség, amely a két oldalt függetlenül egymástól jól vizsgálhatóvá teszi. Erre megoldás a Blocked Force módszer, ahol az átadódó erők vizsgálatával tudjuk az alegységek viselkedését megfigyelni. Az így kiszámolt erők felelősek a kontaktpontokban átadódó rezgésekért és a zajok továbbterjedéséért. A módszer nagy előnye, hogy egy komplex rendszer is felbontható egyszerűbb építőelemekre, amelyek egymástól független és összekapcsolt vizsgálata könnyebbé teszi a teljes szerkezet megértését.

## 1.2. Szerkezeti áttekintés és motiváció

A dolgozat célja a komponens alapú átviteli útvonal-analízis (component-based transfer path analysis, cTPA) elméleti háttérének ismertetése, a módszer robusztusságának vizsgálata, valamint az eredmények elemzésére egy új, úgynevezett rendszám alapú megközelítés bemutatása. A vizsgálat fő motivációja, hogy a kormányrendszerek fejlesztéhez végzett laboratóriumi felfutásos tesztek során egyes fordulatszám tartományokon a cTPA számítások pontatlanságát tapasztaltuk [3]. Emellett az eljárás külső zavarásra is érzékenynek bizonyult. A cTPA ipari felhasználáshoz elengedhetetlen pontos és megbízható metrikák felállítása, amely munkánk fő fókusza. A cTPA módszert a kormányrendszerekben található elektromos szervó motor rezgéseinek laboratóriumi mérései alapján vizsgáltuk.

Először összefoglaljuk a témakörhöz kapcsolódó alapvető akusztikai ismereteket, valamint bemutatjuk a villamos forgógépekre jellemző zaj- és rezgéskeltő mechanizmusokat. Ezt követően részletes elméleti áttekintést nyújtunk a módszer tudományos háttérének megértéséhez. Ezután ismertetjük a módszer alkalmazhatóságát zavartalan környezetben, valamint passzív oldali széles sávú zaj jelenlétében. Végül bemutatunk az innovatív, rendszám-alapú megközelítést, és szemléltetjük, hogy ez a megközelítés hogyan növeli a módszer robusztusságát és lényegkiemelő képességét a hagyományos technológiával szemben.

## 2. Akusztikai alapok

A kormányművek által keltett zajok megértéséhez először a hangok létrejöttét, tulajdonságait, jellemzőit vizsgáljuk. Ezeket a különböző közegekben terjedő rezgéseket a környezet nagyban befolyásolja a zaj forrásától az emberi fülig való eljutás során. A módszer működésének megértéséhez először néhány akusztikai alapfogalmat be kell vezetni. A következőkben az utolsó magyarul íródott villamos gépek zajával foglalkozó könyvet használjuk fel [11], ami jó kiindulást ad a következőkben az akusztikai alapok megértéséhez.

### 2.1. Zajsint jellemzése

A hangtér jellemzésére bevezetett mérőszám a hangnyomáseloszlás, amely leírja a közeg részecskéinek tér- és időbeli eloszlás változását. Periódikusan ismétlődő sűrűsödések és ritkulások alakulnak ki a közegben, ahol a hangnyomás megmutatja, hogy egy adott pontban a nyomásváltozás hogyan alakul a rezgések hatására. A hangnyomás meghatározása a következő definíció [11] szerint történik:

$$p = \frac{p_{\text{const}} \kappa}{\rho_{\text{const}}} \rho, \quad (1)$$

ahol,  $p_{\text{const}}$  a légköri nyomás,  $\rho_{\text{const}}$  a normál hőmérsékleten érvényes sűrűség,  $\kappa$  a gázra jellemző adiabatikus gázállandó,  $\rho$  pedig a mért sűrűség. Az akusztikai vizsgálá-

latok során az emberi fül számára zavaró zajokat tanulmányozzuk, ahol a közvetítő közeg a levegő.

Összetett jellegű korrelálatlan zajforrások hang hangnyomásának meghatározása esetén az egyes frekvenciakomponensek hangnyomásának összegzésével lehet kiszámolni [11]:

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2} , \quad (2)$$

ahol  $p_1, p_2, p_3$  a különböző frekvenciákhoz tartozó hangnyomások, és  $n$  a futóindex  $n$  darab különböző frekvencia komponens esetén.

A hangok vizsgálata során egy másik érték meghatározása is elengedhetetlen. A kialakult hangok hangnyomásszintjének jellemzésére az emberi hallásküszöbhez tartozó hangnyomást vesszük alapul, lásd a 3 ábra. A különböző gépek eltérő hangteljesítményt adnak le a környezetnek, amelyek az ott tartózkodó embereket zavarhatják, rosszabb esetben egészségükben kárt tehetnek. Ennek szabályozására egy olyan skála bevezetése szükséges, ami közvetlenül tükrözi az emberi fül logaritmikus érzékenységét [11]:

$$L_W = 10 \log \frac{p}{p_0} [\text{dB}] , \quad (3)$$

ahol,  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Pa az emberi fül hallásküszöbéhez tartozó referencia hangnyomás. Ez a megközelítés pontosabban kifejezi hogyan érzékeli a fül a hangnyomás változását.

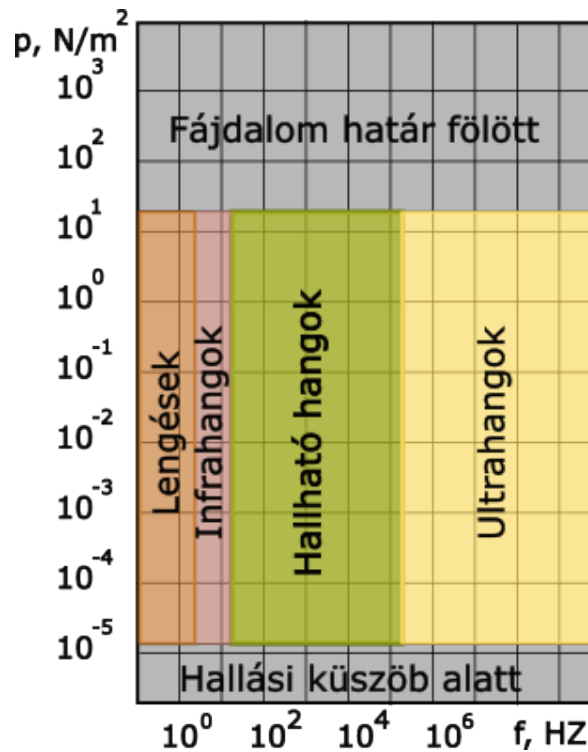
## 2.2. Hang keletkezése

Hangforrásként szolgál minden olyan mechanikai rendszer, amely képes meggerjeszteni a környezetét (levegő, folyadék, gépelem). Ezek a rezgések a közeg rugalmasságától függően haladnak a forrástól az érzékelőig, így a közeg mechanikai tulajdonságainak ismerete elengedhetetlen a rezgések leírása szempontjából. Minden anyagi részecske külső erő hatására kimozdul egyensúlyi helyzetéből, majd az erő megszűnésével visszatér az egyensúlyi helyzetébe. Az így kialakuló rezgések gázokban és folyadékokban longitudinálisak, azaz a hullámok terjedési iránya megegyezik a részecskék rezgési irányával, tehát a hanghullámok iránya és a közeg részecskéinek rezgése egy irányba mutat. A szilárd anyagokban a longitudinális hullámok mellett transzverzális hullámok is megjelennek, amelyek a nyúlás következtében kialakuló kontrakció következményei [11].

Az érzékelt hangok tulajdonságai a közeg anyagától és geometriájától függően változhatnak. A hanghullámok csillapodhatnak, visszaverődhetnek vagy frekvenciájuk eltolódhat a kibocsátáshoz képest. Ezeknek a hullámoknak a terjedési sebessége jól számolható a különböző anyagokban, ha ismertek a fizikai jellemzők (nyomás, hőmérséklet, gázok esetén a páratartalom stb.) [11].

A hangok vizsgálatához olyan mérőszámok bevezetésére van szükség, amelyekkel a fizikai jelenségeket jól jellemezhetjük. Az emberi hallás szempontjából erre kiválóan

alkalmas az amplitúdó és frekvencia, amelyek egyértelműen megadják a hanghullám tulajdonságait. Ezek alapján az emberi fül frekvenciaérzékenységi tartománya 20 Hz-től 20 kHz-ig terjed. Az ennél alacsonyabb frekvenciájú rezgéseket infrahangoknak nevezzük, amelyek rosszullétet okozhatnak a zajforrás közelében tartózkodóknak és vízi állatok használják nagy távolságú kommunikációra. Míg a 20 kHz feletti tartományban ultrahangról beszélünk.



**1. ábra.** Emberi hallás szempontjából fontos hangnyomás-frekvencia sík tartományai [11]

A másik fontos jellemző a hullám amplitúdójából számolható hangnyomás. A hallásküszöb alatti hangok nem hordoznak magukban elegendő energiát, amelyet a fülünk képes számunkra hasznos információvá alakítani. A tartomány felső határa a fájdalom küszöb, ahol a hallószervünk károsodhat a túl nagy hangnyomás következtében. Ezek a tartományok a hangnyomás-frekvencia síkon ábrázolva a az 1 ábrán láthatóak.

A zajok vizsgálatához elengedhetetlen egy olyan eszköz, amely a hanghullámokat feldolgozható információvá alakít. A mikrofon például elektromos jelekké alakítja a hanghullámokat, míg a gyorsulásérzékelők a rezgés alapján szolgáltatnak adatokat a hangforrásról. Az így nyert információk összegyűjtésével és elemzésével konstrukciós változtatások végezhetőek el a szerkezeten.

A kormányrendszerek komponensei által keltett zajok a spektrumon a fordulatszám függvényében jelennek meg. Vezetés közben a motorok általános üzemállapota a 0 –

5000 Hz terjedő intervallum, ami nagy része a hallható tartományba esik, így jelentősen csökkentve a vezetési élményt.

### 2.3. A hang tulajdonságai

A kialakult zaj tulajdonságát nagyban befolyásolja a mechanikai rendszer geometriája és a rezgést kiváltó gerjesztő erő. Ezek meghatározzák, hogy a hang tiszta (egyedi frekvenciájú) vagy tonális tulajdonságot hordoz [11].

A tiszta hangok olyan hangok, amelyek jól definiált frekvenciával és hullámformával rendelkeznek, amik a környezetben fellépő mechanikai rezgésekből származnak. Ezek a hangok tipikusan szinuszhullám formájában jelentkeznek, és jellemzőjük, hogy tiszta és éles hangzásuak, minimális harmonikus torzulással.

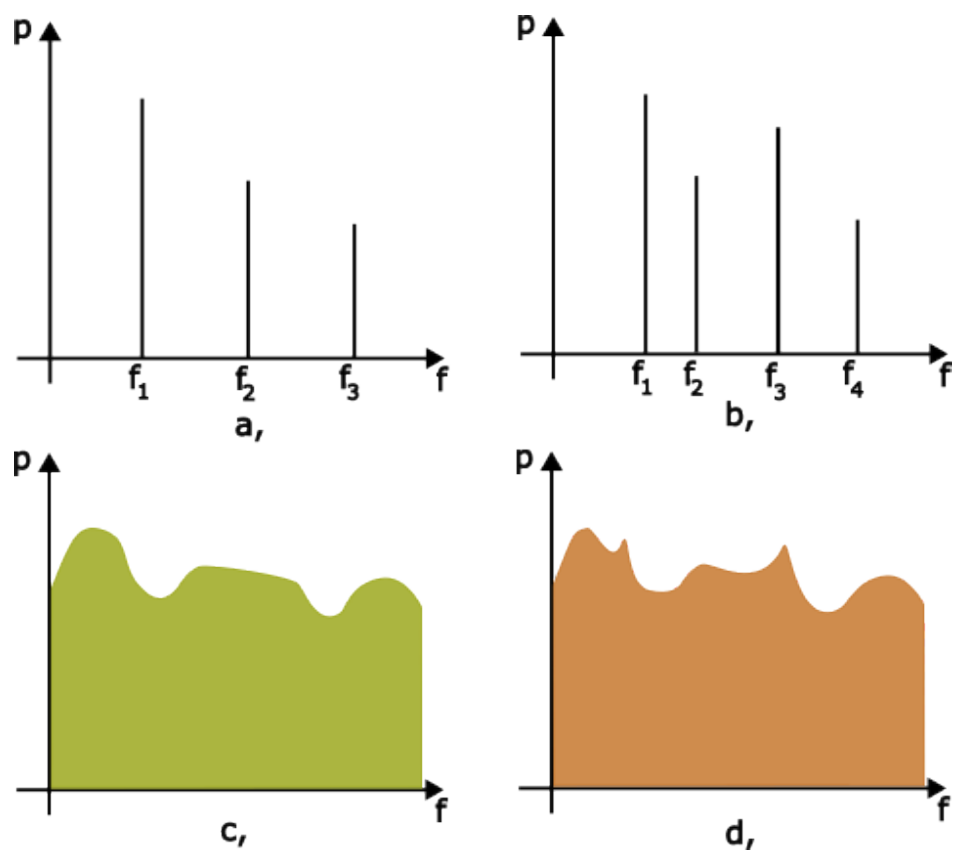
A tonális hangok az akusztikában olyan hangokat jelentenek, amelynek frekvenciája tiszta és stabil, azaz jól meghatározott magassággal rendelkeznek. Ezek a hangok is jellemzően szinuszhullámok formájában jelennek meg, harmonikus sorozatot követnek, ahol az alaphang mellett különböző harmonikusok is jelen vannak, lásd a 2. ábra a panelje.

Ha a hang összetett, lásd a 2. ábra b panelje akkor a rendszer rezgése véges vagy végtelen számú tiszta hang összegeként írható le. Zaj esetén a frekvenciaeloszlás folytonos, ahogy azt a 2. ábra c panelje ábrázolja azonban a spektrumban kiemelkedő komponensek is megjelenhetnek a 2. ábra b paneljéhez hasonló módon.

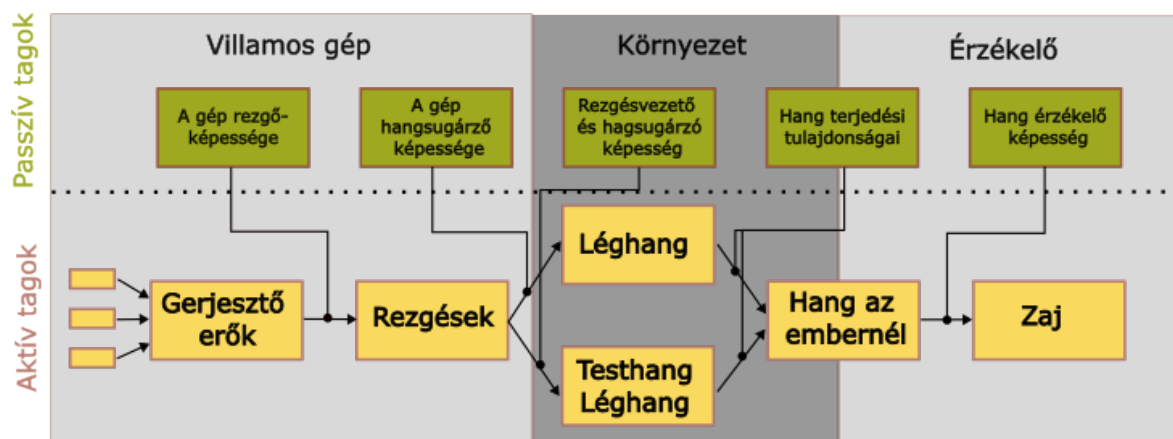
A 2. ábra néhány hangtípust szemléltet, bemutatva azok frekvenciabeli megjelenését. Akusztikai vizsgálata szempontjából fontos információkat tartalmaz a jobb alsó sarokban látható frekvenciaeloszlás. A folytonos frekvencia skálán megjelenő kiugró értékek jól jellemzik a szerkezet rezonanciáit és hibáit.

## 3. Zajok és rezgések villamos forgógépekben

A kormányműbe szerelt villamos motor keltette rezgések a kormányrúdon keresztül a kormánykerékre adódnak. A itt érzékelhető kis fordulatszámú nyomatékhullámosság haptikus érzékelése csökkenti vezetési élményt. Az utastérbe bejutó hangok fő útja a kormánymű felfogatási pontjain keresztül vezet és kapcsolattól függően jelentősen felerősödhetnek. A zaj terjedésének modellje három részre osztható egy kormánymű esetén. Az aktív elemek közé sorolunk minden olyan tagot melynek a tulajdonságai időben változó paraméterekkel írhatóak le. Az így kialakult rezgéseket a passzív tagok szállítják a környezeten keresztül az érzékelőig. Egy egyszeűbb mechanikai rendszerben is egy bonyolult modellel írható le a környezet, mivel tartalmaznak többszörös sugárzókat és nemlineáris tagokat is [11]. Az érzékelő műszer számunkra feldolgozható információvá alakítja a hozzá eljutott rezgéseket, hangokat. Az így összegyűjtött adatok elemzésével az aktív és passzív oldali elemek zaja vizsgálható, a minimalizálásokra konstrukciós átalakítások írhatók elő. A 3 ábra szemlélteti a zaj létrejöttét egy egyszerűsített villamos forgógép esetén.



**2. ábra.** Hangtípusok ábrázolása idő és frekvencia tartományban; a,  $f_1$ -nek  $f_2$ ,  $f_3$  egész számú többszörösei a rezgésharmonikusok; b,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$  független rezgésharmonikusok; c, folytonos frekvencia eloszlás; d, folytonos frekvencia eloszlás, kiugró összetevőkkel [7], [11]

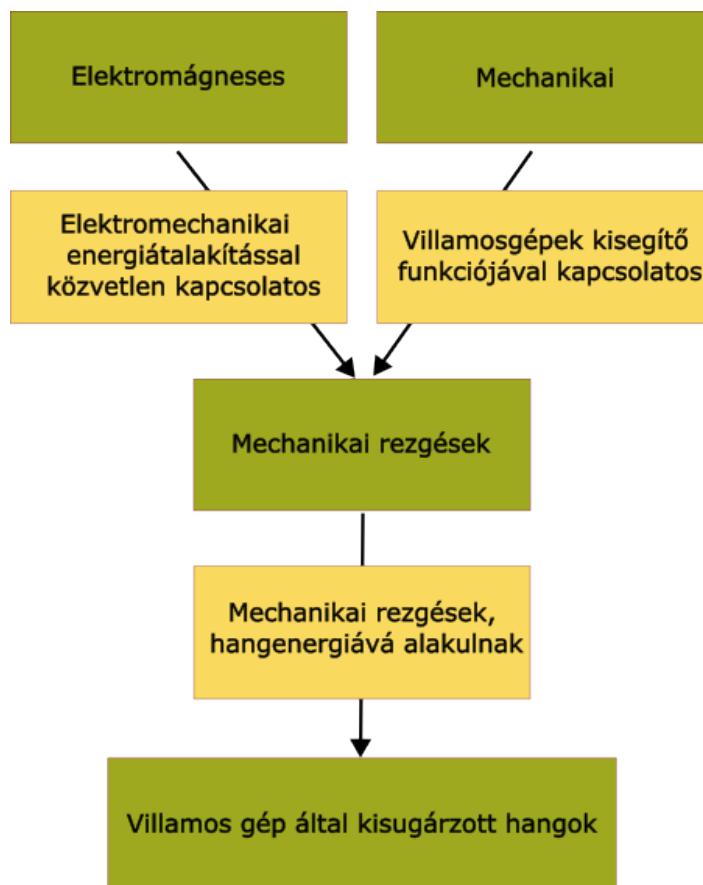


**3. ábra.** Zaj keletkezésének egyszerűsített ábrája [11], [7]

Hangforrásnak nevezünk minden olyan gépet, ami a felvett teljesítményének egy részét hangteljesítményként leadja a környezetnek. A mechanikai kapcsolatoktól függően ezzel egyidejűleg másodlagos és harmadlagos zajforrások is kialakulhatnak a környezetben. Ezek az alkatrészek gerjesztés hatására rezgésbe jönnek így újabb hangsugárzóként viselkednek [11].

### 3.1. A zaj keletkezésének felosztása villamos forgógép esetén

A forgó villamos gépek rezgéseinek kialakulásában több hatás is szerepet játszik más más súlyozással. A későbbi fejezetekben ezek a hatások bővebben kifejtésre kerülnek.



**4. ábra.** Villamos gépek zajának kialakulása, aerodinamikai zajoktól eltekintünk [11], [7]

A 4. ábrán a zaj útját követhetjük végig, amint a forrástól a zaj átadóján keresztül eljutunk a lesugárzott zajig.

A főbb zajforrások [11]:

- Elektromágneses tér inhomogenitásából származó zajok például gyártási pontatlanságok és geometria nagyban befolyásolják a mágnesek precíz elhelyezése, fogak

hornyolás, tekercs kialakítása, forgórész excentricitása.

- Mechanikai rezgés eredetű zajok közé sorolhatók a csapágyak keltette zajokat.
- Tökéletes tervezés esetén is a tekercsek és mágnesek arányából az egyes harmonikusok megjelennek a motor nyomatékosságában és zajában. A különböző konstrukciós megoldások ezeket a zajok felerősíthetik, és rosszul megválasztott motor felépítés esetén újabb harmonikusok is megjelenhetnek. A nagyobb terjesztménysűrűségű motorok esetén a lesugárzott zajszint is megnövekszik.
- Forgórész dinamikai kiegyensúlyoztalanságából származó rezgések.
- A légrés mező radiális összetevőinek hullámosságából származó zajok.

### 3.2. Mechanikai alkatrészekből származó zajok

A villamos forgógépek álló és forgó rész közé szerelt csapágyak lehetnek sikló valamint gördülő csapágyak (hengergörgős, golyós). A beépített kormányzást segítő rendszerekben a golyós csapágyak az elterjedtek, mivel ezek olcsóbbak és egyszerűbb az üzemeltetésük.

. Ezek a görgős csapágyak hozzájárulnak a kialakult zajszinthez és zajkeltésük mechanizmusa több okra vezethető vissza. Az üzemelés közben a spektrumban mind a forgó rész  $n$  fordulatszámmal hozhatók összefüggésbe [11]:

1. Belső gyűrűk excentricitása

$$f_{\text{ex}} = n, \quad (4)$$

ahol  $n$  a fordulatszám Hz-ben mérve, tehát az  $f_{\text{ex}}$  megegyezik a forgó rész forgási frekvenciájával.

2. Gördülő elemek szabálytalan alakjából adódó frekvencia

$$f_g = \frac{r_b}{r_b + r_k} n, \quad (5)$$

ahol  $r_b$  belső futófelület sugara és  $r_k$  külső futófelület sugara.

3. A gördülő elem saját tengelye körül elfordulásából származó rezgések

$$f_{gg} = \frac{r_b r_k}{r_g (r_b + r_k)} n, \quad (6)$$

ahol az  $r_g$  gördülő elem sugara.

4. Gyűrű hibákból származó rezgések

$$f_{ng} = \frac{r_b}{r_b + r_k} Z_g n, \quad (7)$$

ahol a  $Z_g$  a gördülő elemek száma.

### 5. Belső gyűrű frekvenciája

$$f_{\text{belső}} = \frac{N \cdot n_{\text{golyó}} \cdot v_{\text{golyó}}}{d_{\text{belső}}}, \quad (8)$$

ahol az  $N$  a gördülőelemek száma,  $n_{\text{golyó}}$  a gördülőelemek fordulatszáma,  $v_{\text{golyó}}$  a gördülőelemek sebessége és  $d_{\text{belső}}$  a belső gyűrű átmérője.

### 6. Külső gyűrű frekvenciája

$$f_{\text{külső}} = \frac{N \cdot n_{\text{golyó}} \cdot v_{\text{golyó}}}{d_{\text{külső}}}, \quad (9)$$

ahol,  $N$  a gördülőelemek száma,  $n_{\text{golyó}}$  a gördülőelemek fordulatszáma,  $v_{\text{golyó}}$  a gördülőelemek sebessége és  $d_{\text{külső}}$  a külső gyűrű átmérője.

## 3.3. Elektro mágneses tér hatásaiból adódó zajok

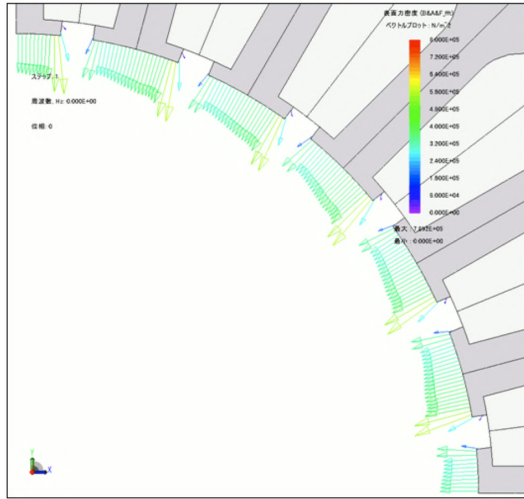
Eddigiekben áttekintésre került az utolsó, magyar nyelven megjelent villamos gépek zajkeltéséről szóló könyvben bemutatott zajkeltési mechanizmusok. Ezen a hatások ismerete elengedhetetlenek a kiértékelés során. A tudomány fejlődésével azonban új modellezési technikák is megjelentek. A következő részben egy ilyen új megközelítést bemutatása olvasható, amely az elektromos motor légrésében kialakuló dinamikus erők okozta zajok vizsgálatára összpontosít.

Állandómágnessel szerelt háromfázisú szinkronmotorok esetében a tekercseken átfolyó elektromos áram következtében mágneses tér keletkezik. Az így létrejött mágneses tér hatására, a motor álló és forgó része egymáshoz képest elfordul annak érdekében, hogy egy alacsonyabb potenciálú állapotba kerüljön a rendszer.

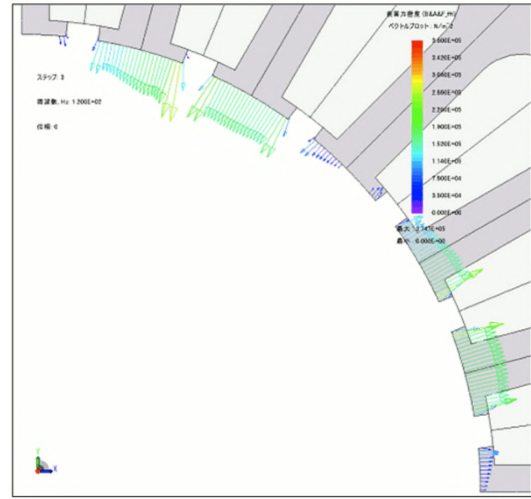
A kialakult mágneses tér modellezésére számos különböző módszert fejlesztettek ki. A leggyakrabban használt módszerek [10] közé tartozik a Virtual Work Principle (VWP) és a Maxwell Stress Tensor (MST), emellett a végelem módszer (FEM) is nagymértékben segíti a mágneses tér keltette erők hatását az alaktrészekre.

A háromfázisú szinkronmotor gerjesztése H-hídon keresztül történik, amely lehetővé teszi a motor áramának és irányának precíz szabályozását. Ez a precizitás elengedhetetlen bizonyos manőverek során, ahol nagy szögsebességek mellett is nagy pontosságra van szükség. A pontos vezérlés az impulzus szélesség modulálásával (PWM jellel) lehetséges. A 6 ábrán baloldalon a H-híd kapcsolási rajza, jobboldalon pedig a generált váltakozó feszültség ábrázolása található. Ez a vizualizáció segít megérteni, hogyan kapcsolódik össze a kapcsolási rajz működése a létrehozott feszültség és áram formájával [10].

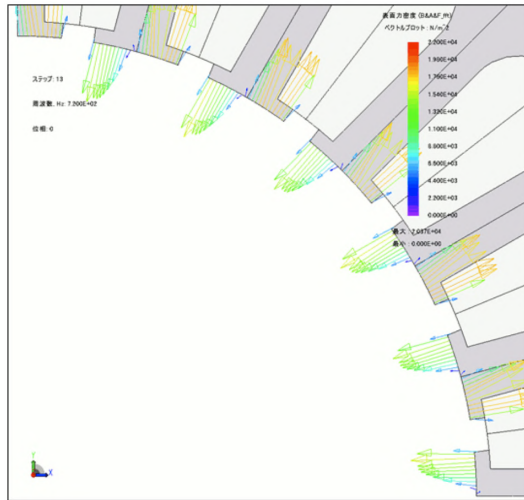
Egy ideális világban tiszta szinuszos jellel történik a villamos motorok gerjesztése, azonban egy egyszerű fordulatszám változtatás is bonyolult feladat. A jelalak moduláció bevezetésével (PWM) jól közelíthető ez a jelalak, ami egyszerűsíti a szabályozó köröket. Ehhez szükséges bevezetni a kitöltési tényezőt, ami meghatározza, hogy a periódus idő hány százalékán keresztül engedi át az áramot a szabályzó.



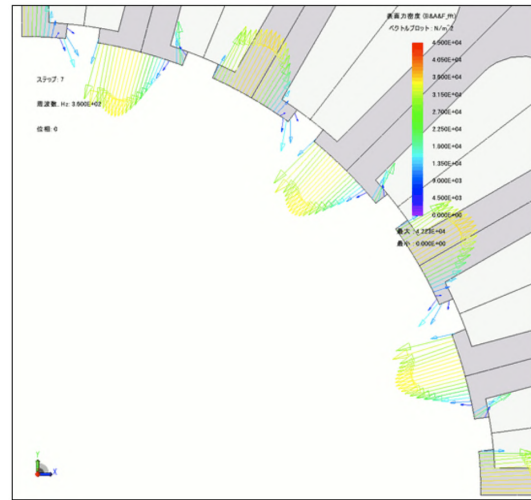
(a) DC elektromágneses erő



(b) 4. rendszámú elektromágneses erő



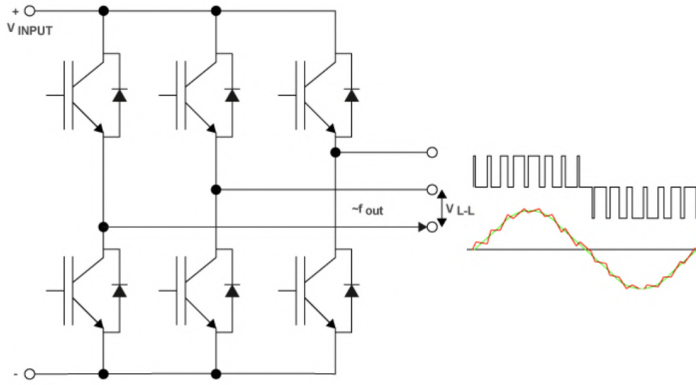
(c) 12. rendszám elektromágneses erő



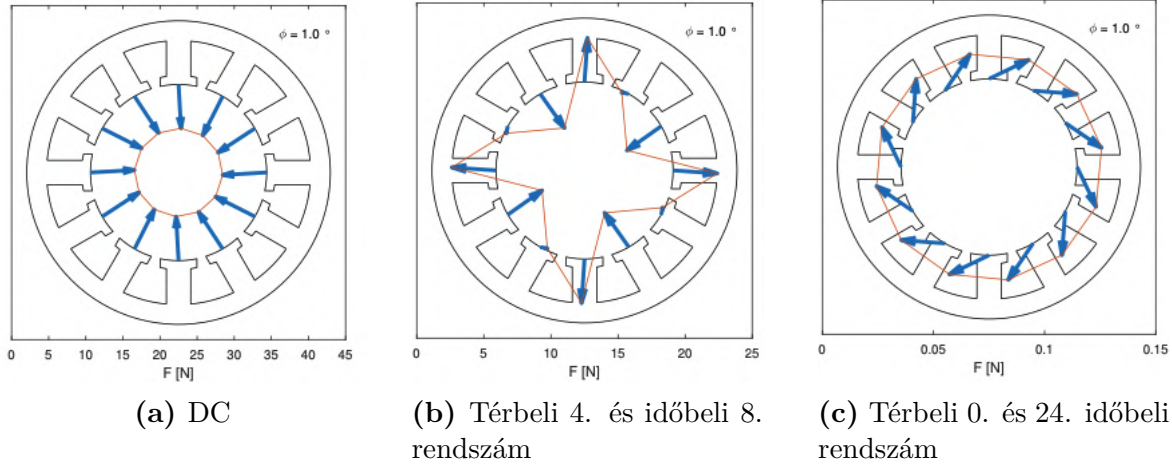
(d) 24. rendszám elektromágneses erő

**5. ábra.** Az villamos motor fog felületén kialakuló erő eloszlás [10], [4]

A 7 ábrán a fogakon kialakuló erők inhomogén eloszlása látható. Ez az inhomogenitás a rotor pozíciójától és a mágneses tér változásától függ. Az így létrejött erőkomponensek a villamos motor járulékos nyomaték hullámosságát okozzák, ami a kialakult rezgéseket nagyban befolyásolják. Tehát a fogak felszínén kialakuló gerjesztő erők időbeli változásának meghatározása kulcsfontosságú a zaj csökkentése szempontjából [10].

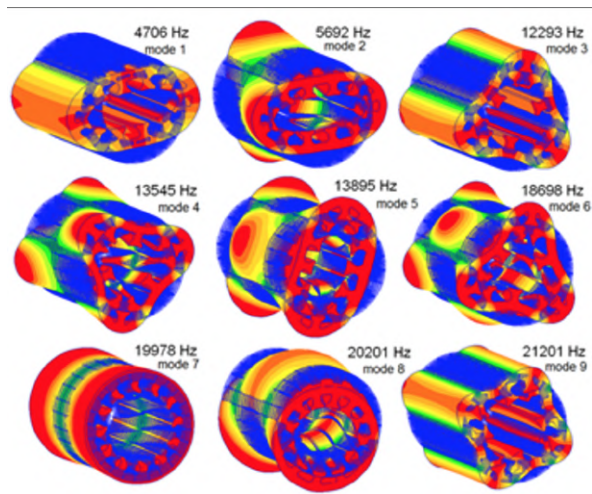


**6. ábra.** H-híd kapcsolási rajza és a PWM módszer [10], [2]



**7. ábra.** A villamos motor fog felületén egy pontra redukált erő eloszlás különböző rendszámok esetén [10]

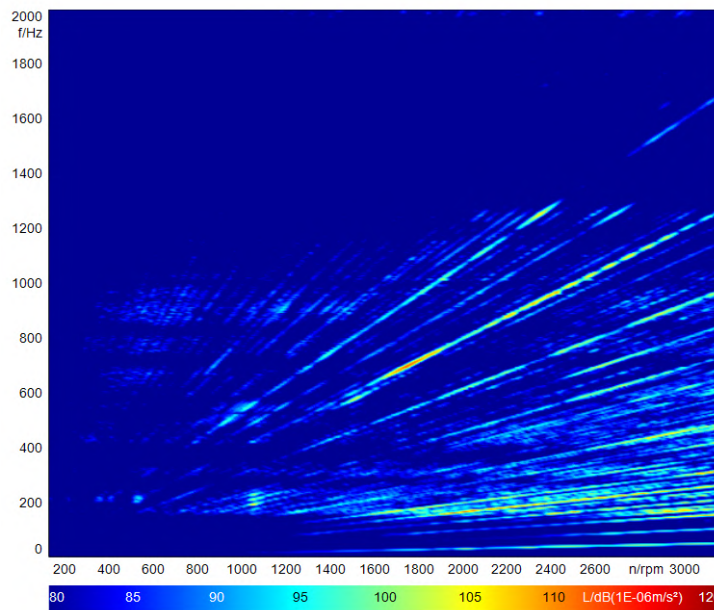
Egy másik vizsgálati módszer az villamos motor álló részének a végelem szimuláció. A mágneses térviselkedéséből meghatározott erőkomponensek idő és térbeli iránya és nagysága, a végelem modell bemeneti paramétereiként szolgálnak, lásd a 8 ábra. Az állórész, így meghatározott sajátfrekvenciái alapján a rezgések különböző módokon hangolhatók. A geometria változtatásával növelhető a szerkezet merevsége és a felhasznált alapanyagok is nagyban befolyásolják a kialakult rezgéseket. Villamos szempontból az indukció csökkentésével a radiális jellegű mágneses erőhatások is csökkenthetők [11], amik nagyban hozzájárulnak a kellemetlen zajok kialakulásához. Erre több megoldás is létezik, ezek közül a két legegyszerűbb, a tekercsek tápfeszültségének csökkentése, vagy a tápfeszültség állandó tartása mellett a tekercsek mentszámának növelése. Az ipari felhasználásban ezt ritkán alkalmazzák mivel a motor nyomatéka és teljesítménye az indukcióval együtt csökken.



8. ábra. Végelem szimuláció elektromos forgógép álló részén [8]

### 3.4. Rendszám alapú analízis

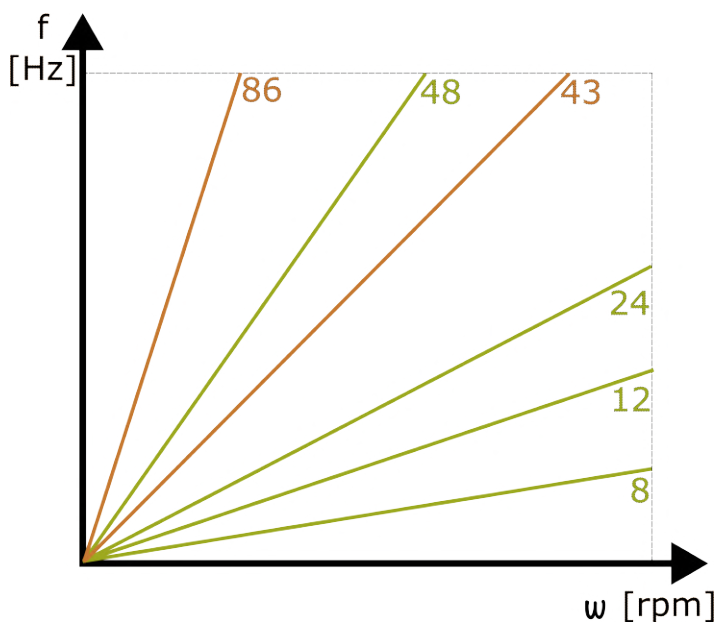
A motorok elemzéséhez szükséges a teljes üzemállapot vizsgálata, amelyet többek között felfutásos méréssel végezhetünk, ahol a fordulatszámot időben állandó sebességgel növeljük; a szerkezet spektrumának fordulatszám-függő változásait pedig Campbell-diagram segítségével vizsgálhatjuk. A diagram célja, hogy vizuálisan megmutassa, hol keresztezik egymást a sajátfrekvenciák és a gerjesztési frekvenciák, ami rezonanciát eredményez, lásd 9. ábra.



9. ábra. Végelem szimuláció elektromos forgógép álló részén

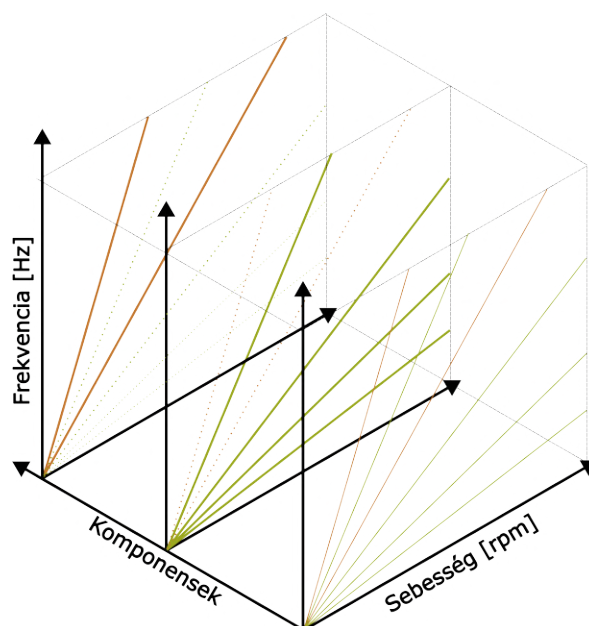
A diagrammon a szerkezet által keltett zaj amplitúdója látható a frekvencia és a fordulatszám függvényében, ahol a zaj intenzitását színkódolt ábrázolás jelzi. A frekvencia és a fordulatszám mértékegysége az iparban általánosan használt Hertz és RPM, míg a zajt dB skálán ábrázoljuk.

A 9 diagrammon az amplitúdó csúcsok összekötésével kialakuló egyenesek jelölik a rendszámokat. A különböző zajkeltési mechanizmusok a felfutás során a fordulatszám adott, egész számú többszörösével gerjesztik meg a szerkezetet, így ezek különböző meredekségű egyenesekként jelennek meg a Campbell-diagrammon. Ez lehetővé teszi a zajkeltési mechanizmusok pontos elkülönített vizsgálatát, amely segít az üzemelés közben hallható zaj eredetének meghatározásában is.



**10. ábra.** Campbell diagramm sematikus ábrája, barnával ábrázolva a 48 foggal rendelkező szíjtárcsa erősítetre rendszámok és zölddel a motor erősítette rendszámok

A 10, a 11 ábrákon látható, hogy egy Campbell-diagrammon a különböző alkatrészek által keltett zajok, hogyan választhatóak szét a meggerjesztett rendszámok alapján.



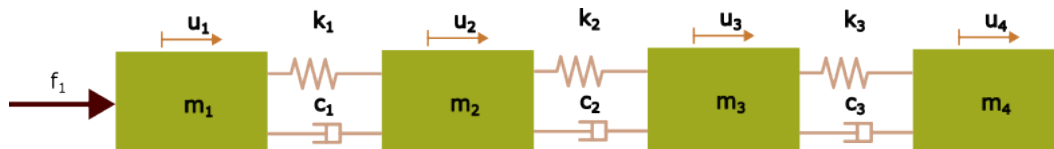
**11. ábra.** Campbell diagramm szétbontása különböző alkatrészek gerjesztette rendsámokra.

## 4. Mechanikai rezgőrendszer átviteli függvénye

Az eddig összefoglalt zajkeltési mechanizmusok cTPA alapú vizsgálatához elengedhetetlen, a szerkezet dinamikai viselkedésének leírása átviteli függvények segítségével. Ezek a rendszerre ható erők és és elmozdulások között teremtenek kapcsolatot frekvencia tartományban. Egy  $n$  szabadságfokú dinamikai rezgőrendszer mozgását az alábbi differenciál egyenletrendszerrel írhatjuk le:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) , \quad (10)$$

ahol  $\mathbf{M}$  a tömeg-,  $\mathbf{C}$  a csillapítás-, és  $\mathbf{K}$  a merevségi mátrix,  $\mathbf{u}$  a szabadsági fokokhoz tartozó pozícióvektor,  $\mathbf{f}$  az erővektor, a pont pedig az idő szerinti deriválást jelenti.



**12. ábra.** Négy szabadságfokú rendszer sematikus ábrája

Illusztrációként a 12. ábrán látható négy szabadságfokú rezgőrendszer esetén a 10. egyenlet a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_3(t) \\ \dot{u}_4(t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Az időtartománybeli jeleket a Fourier transzformáció segítségével alakítjuk a frekvencia tartományba:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (12)$$

ahol  $x(t)$  és  $X(\omega)$  a jel az idő, illetve a frekvencia tartományban. A 12. egyenlet alapján az idő szerinti deriválás frekvenciatartományban egy  $j\omega$ -val történő szorzást jelent, míg az idő szerinti integrálásnak egy  $j\omega$ -val történő osztás felel meg.

A Fourier transzformációt a 10. egyenletre alkalmazva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega), \quad (13)$$

bevezetve a

$$\mathbf{Z}(\omega)\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad (14)$$

jelölést,  $\mathbf{Z}(\omega)$  a dinamikai merevség mátrix, mely frekvencia függő komplex elemeket tartalmaz, és a rendszer tömeg, csillapítás és merevségi jellemzőiből tevődik össze. Ha a számításunk során az erők az ismertek, akkor a dinamikai merevségi mátrix inverzét, a dinamikai flexibilitási mátrixot  $\mathbf{Y}(\omega)$  használhatjuk:

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{Z}^{-1}(\omega)\mathbf{f}(\omega) = \mathbf{Y}(\omega)\mathbf{f}(\omega). \quad (15)$$

Ahol a dinamikai flexibilitási mátrix egy elemét az alábbi képlet segítségével kapjuk:

$$Y_{i,j}(\omega) = \frac{u_j(\omega)}{f_i(\omega)} \quad (16)$$

ahol,  $i$  a kimeneti jel (output) indexét,  $j$  pedig a bemeneti jel (input) indexét jelöli. Mivel ez a kimenő és bemenő jelek közötti kapcsolatot írja le a frekvencia tartományban, így nevezhető frekvencia átviteli függvény mátrixnak is (Frequency Response Function, FRF).

Az FRF mátrix sorai egy adott pont elmozdulásának kapcsolatát írja le az egyes pontokban történő erőbevétel hatására, míg az oszlopok egy adott erőbevétel és az egyes pontok elmozdulásai között teremt kapcsolatot.

$$\mathbf{Y}(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{u_1(\omega)}{f_1(\omega)} & \frac{u_1(\omega)}{f_2(\omega)} & \cdots & \frac{u_1(\omega)}{f_N(\omega)} \\ \frac{u_2(\omega)}{f_1(\omega)} & \frac{u_2(\omega)}{f_2(\omega)} & \cdots & \frac{u_2(\omega)}{f_N(\omega)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u_N(\omega)}{f_1(\omega)} & \frac{u_N(\omega)}{f_2(\omega)} & \cdots & \frac{u_N(\omega)}{f_N(\omega)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

A TPA számítások elvégzéséhez nélkülözhetetlen a rendszer dinamikáját leíró FRF mátrix ismerete. Kutatásunk során ezt az átviteli függvény mátrixot impulzuskalapácsos mérések segítségével, kísérleti úton határoztuk meg (7.2. alfejezet).

Az átviteli függvények a frekvenciatartományban kapcsolják össze a gerjesztést és a válaszjelet, azonban a mérések során a szükséges mennyiségeket időtartományban és diszkrét formában mérjük. Az időtartományban mintavételezett diszkrét jelek frekvenciatartománybeli megfelelőjét a Diszkrét Fourier-transzformációval (DFT) nyerhetjük, az alábbi képlet segítségével:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N_1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad (18)$$

ahol  $x(n)$  az időtartománybeli jel,  $X(k)$  a frekvencia tartománybeli megfelelője,  $N$  a rögzített minták száma,  $n$  és  $k$  pedig idő- illetve frekvenciatartomány futóindexei.

A frekvenciafelbontás függ a minták számától míg a maximális frekvencia értéke a mintavételi frekvenciával áll kapcsolatban. A gyakorlatban elterjedt Gyors Fourier Transzformáció (FFT) jelentősen lecsökkenti a számítási időt, mivel a transzformációt  $N^2$  művelet helyett  $N \cdot \log_2(N)$  művelettel valósítja meg.

## 5. Átviteli útvonal analízis (Transfer Path Analysis, TPA)

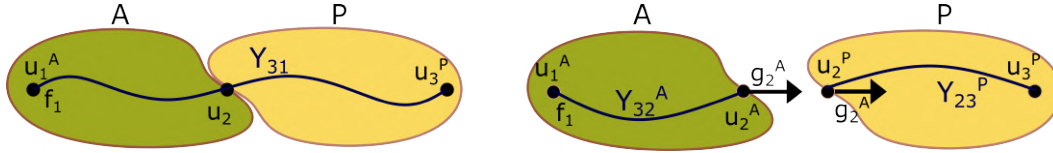
A TPA (Transfer Path Analysis) egy zaj- és rezgéselemzési módszer, amely a rezgések és zajok terjedési útvonalait vizsgálja komplex mechanikai rendszerekben. Célja, hogy azonosítsa, mely komponensek és útvonalak felelősek a nem kívánt zaj vagy rezgés forrásáért és/vagy továbbításáért. A módszert különféle iparágakban alkalmazzák, köztük az autóiparban is, a zajcsökkentés és vibrációs problémák megoldása érdekében. Bővebb információ a [9] és [6] irodalomban található a TPA-ról.

Az aktív és passzív oldal közötti interfészen ébredő erők számszerűsítésére az úgynevezett in situ TPA módszert alkalmazzuk. Az átadódó erő meghatározása során olyan helyeket vizsgálunk, ahová közvetlen szenzorokat nem lehet szerelni, ezért a mért pontbeli erőket és gyorsulásokat összekötő átviteli függvényeket (FRF) virtuális pont

transzformáció (VPT) segítségével transzformáljuk át olyan pontokba, amelyeknek a dinamikus vizsgálata szükséges. A módszer robusztusságát [1] az is mutatja, hogy a szöghibák és a távolságok pontatlan mérései csak kis mértékben befolyásolják a végeredményt. A TPA számítások során az elmozdulásokat ( $u$ )-val, az erőket pedig ( $f$ )-fel jelöljük; ezek tetszőleges hosszúságú vektorok. Így ( $n$ ) elmozdulás és ( $m$ ) erő esetén az elmozdulás  $u \in \mathbb{R}^n$ , az erő  $f \in \mathbb{R}^m$ , míg a közöttük lévő átviteli (FRF) mátrix mérete  $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Ezek dimenzióit az algoritmus átláthatósága érdekében a betűk vastagra szedése nem jelzi a TPA módszerek leírásakor.

## 5.1. Hagyományos TPA

A klasszikus TPA módszerének egyszerűsített modellje a 13. ábrán látható. A kapcsolt rendszert az 1-es pontban  $f_1$  erővel gerjesztjük. Ennek hatására a 3-as pontban  $u_3$  elmozdulás jön létre. A két pont közti (1. és 3.) mechanikai rendszer a közvetlenül a  $Y_{31}$  átviteli függvénnyel jellemezhető. A 13. ábra jobb oldalán a csatolt rendszer aktív (A) és passzív (P) alegységekre történő szétbontása történt. Itt az alrendszerek dinamikai viselkedését az  $Y_{21}^A$  és  $Y_{32}^P$  átviteli függvények jellemzik.



13. ábra. Hagyományos TPA: kapcsolt és nem kapcsolt esetének vázlata

Az alrendszerekre bontott összeállítás viselkedését a 19. egyenlet írja le.

$$\begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_2^P \\ u_3^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^A & Y_{12}^A & 0 & 0 \\ Y_{21}^A & Y_{22}^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{22}^P & Y_{23}^P \\ 0 & 0 & Y_{32}^P & Y_{33}^P \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2^A \\ g_2^P \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (19)$$

Az egyenletrendszer tovább alakításához felhasználjuk az interfész pontokon az alábbi peremfeltételeket:

$$u_2^A = u_2^B, \quad (20a)$$

$$g_2^A = -g_2^B = \lambda. \quad (20b)$$

A 20a és 20b összefüggést felhasználva a 19. egyenletrendszer második és harmadik sorát az alábbiak szerint alakíthatjuk tovább:

$$Y_{21}^A f_1 + Y_{22}^A g_2^A = Y_{22}^P g_2^A, \quad (21a)$$

$$- (Y_{22}^A + Y_{22}^B) \lambda = Y_{21}^A f_1, \quad (21b)$$

$$- \lambda = g_2^B = (Y_{22}^A + Y_{22}^B)^{-1} Y_{21}^A f_1. \quad (21c)$$

Az interfészen ébredő erők, valamint a passzív oldali  $Y_{32}^B$  átviteli függvény ismeretében a keresett  $u_3$  elmozdulás felírható:

$$u_3 = Y_{32}^B g_2^B = \left[ Y_{32}^B (Y_{22}^A + Y_{22}^B)^{-1} Y_{21}^A \right] f_1 = Y_{31}^{AB} f_1 \quad (22)$$

A kontakt pontokon ébredő  $g_2^B$  erők a gyakorlatban nehezen mérhetőek, mivel a kapcsolódási pontokba problémát jelenthet erőmérő szenzorokat felszerelni, ezért több módszer is kifejlesztettek a direkt erőmérés elkerülésére. Így a hagyományos TPA módszereket az alapján definiálják hogy  $g_2^B$ -t hogyan számolják ki az üzemi mérésekből. A módszerekről részletes leírás a [9] olvasható.

## 5.2. Komponens alapú TPA

A hagyományos TPA-val szemben a komponensekre bontás alapú TPA számos gyakorlati előnyt kínál. Különösen mérési szempontból lényeges, hogy az aktív oldali zajkeltés jól elkülöníthető a passzív oldaltól. Így a két komponens külön is vizsgálható.

A különböző TPA típusok részletesebben elérhetők a megfelelő szakirodalomban [9], [6]. Az alábbi felsorolásban a legfontosabb módszerek kerülnek ismertetésre. Fontos megjegyezni, hogy a következő rész célja a TPA típusok áttekintése, és nem a részletes, elméleti magyarázat. A módszerek közötti különbségek, alkalmazhatósági területek és az egyes módszerek előnyei röviden bemutatásra kerülnek.

### 5.2.1. Ekvivalens erők és válaszok meghatározása

A szétkapcsolt rendszer vizsgálata során az aktív oldali rész helyettesíthető a interfészpontban egy interfész erővel, ami azonos  $u_3$  elmozdulást eredményez, mint a szétkapcsolatlan esetben. Ezek az ekvivalens erők a rendszer válaszát pontosan előállítják, mintha a valódi gerjesztés lenne jelen.

$$Y_{32}^B (Y_{22}^A + Y_{22}^B) Y_{22}^A f_2^{eq} = Y_{32}^B (Y_{22}^A + Y_{22}^B) Y_{21}^A f_1, \quad (23)$$

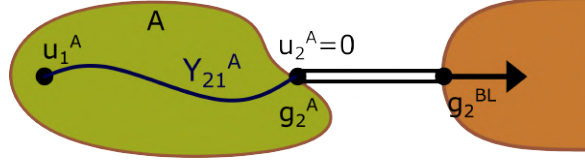
$$f_2^{eq} = (Y_{22}^A)^{-1} Y_{21}^A f_1 \quad (24)$$

Ez a megközelítés biztosítja, hogy a vizsgálatok során nem szükséges az aktív alkatrészek folyamatos jelenléte, így azok mérési szempontból könnyebben kezelhetőek. Az ekvivalens erők alkalmazása továbbá egyszerűsíti a rendszer elemzését, és lehetőséget nyújt a különféle komponensek elkülönített vizsgálatára.

### 5.2.2. Blocked force TPA

A módszer használata során az aktív komponens határfelülete rögzített és az itt ébredő erőket közvetlenül mérjük. A rögzített kapcsolat egyik következménye, hogy a határfelületi csomópont, az  $u_2 = 0$ , nem képes semmilyen irányban elmozdulni.

A kitérés nulla peremfeltétele végtelen merev megfogással lenne biztosítható. Ennek kellő mértékű megközelítése a gyakorlatban nehezen megvalósítható, ugyanis akár kis mértékű mozgások jelenléte esetén sem fogják a számolt helyettesítő erők az eredeti gerjesztés hatását jól tükrözni.



14. ábra. Blocked force TPA

A rendszer leírása matematikailag 25. egyenlettel lehetséges

$$\begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^A & Y_{12}^A \\ Y_{21}^A & Y_{22}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_2^A \end{bmatrix} \quad (25)$$

A mátrixegyenlet második sorának kifejtésével láthatjuk, hogy a kapcsolódási ponti erők monitorozásával közvetlenül az ekvivalens erőket mérjük:

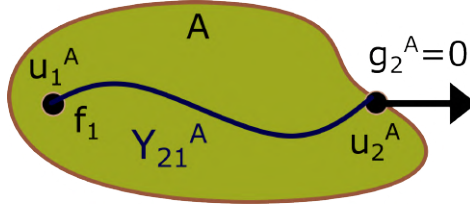
$$g_2^{bl} = -g_2^A = (Y_{22}^A)^{-1} Y_{21}^A f_1 \implies f_2^{eq} = g_2^{bl} \quad (26)$$

Ez a probléma különösen fontos, ha nagyobb rendszerekről beszélünk, például egy kormánymű esetében, ahol az alkatrészek összetettsége miatt rendkívül nehéz tökéletesen merev kapcsolatot kialakítani. Az ilyen bonyolult mechanikai szerkezeteknél több csatlakozási pont és mozgó alkatrész van, amelyek befolyásolhatják a teljes rendszer viselkedését. Emellett nagyobb frekvenciák esetén a határfelületi mozgások felerősödhetnek, ami tovább nehezíti a merevség fenntartását és a pontos mérési eredmények elérését. Az ilyen dinamikus helyzetekben a határfelület apró elmozdulásai jelentősen torzíthatják a valós viselkedést, amit az elemzések során nem lehet figyelmen kívül hagyni.

### 5.2.3. Szabad elmozdulás TPA

A szabad elmozdulás alapú TPA (Transfer Path Analysis) módszer olyan technikát jelent, ahol a korlátozás a határfelületi erőre vonatkozik. Az aktív komponens vizsgálata során biztosítani kell, hogy a határfelület szabadon mozogjon, ami például úgy érhető el, hogy az aktív komponens felakasztják. Ez azt jelenti, hogy a határfelületi erő nulla, azaz  $g_2^A = 0$ .

$$\begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^A & Y_{12}^A \\ Y_{21}^A & Y_{22}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$



15. ábra. Szabad elmozdulás alapú TPA

Ez a megközelítés lehetővé teszi, hogy a rendszer viselkedését pontosabban észlelhessük anélkül, hogy a határfelületi erők befolyásolnák az elmozdulásokat. Az ilyen beállítás segíthet abban, hogy a mérési eredmények jobban tükrözzék az aktív komponens tényleges dinamikai hatását, ami javíthatja a módszer előrejelzési képességének megbízhatóságának. A 27. egyenlet második sorának megoldásából következik:

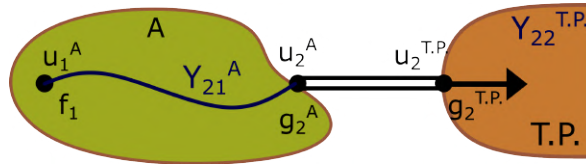
$$u_2^A = Y_{21}^A f_1, \quad (28)$$

$$f_{eq} = (Y_{22}^A)^{-1} (Y_{21}^A) f_1 = (Y_{22}^A)^{-1} u_2^A. \quad (29)$$

A módszernek több hátránya is van a gyakorlatban. Az egyik fő problémája, hogy a kontakt ponti erő nulla peremfeltétele miatt a rendszerre nem lehet terhelést adni. Így ilyen módszerrel az aktív komponens csak üresjárásban tudjuk megmérni, ami a gyakorlatban sokszor nem reprezentatív. Bár a szabad felület elméleti szempontból jelentős, gyakorlati alkalmazása nem elterjedt, mivel a mérések nehezen kivitelezhetőek, valamint a szükséges munkapontok kimérése nem megoldott.

#### 5.2.4. Összetett kontaktú TPA

Gyakorlati alkalmazásból fontos módszer mivel az impulzusalapú, illetve üzemi mérések során a pad illetve a felfogatási pontokra a peremfeltételek nem ideálisak. A legmerevebb megfogásnak is van rugalmassága, amivel számolni kell. A mérési összeállítás környezete is hatással van ezekre a mérésekre, ami megjelenik az eredményekben.



16. ábra. Összetett kontaktú TPA vázlata

Összetett rendszer esetén a mechanikai modell a 30. egyenlettel írható le.

$$\begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_2^{TP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^A & Y_{12}^A & 0 \\ Y_{21}^A & Y_{22}^A & 0 \\ 0 & 0 & Y_{22}^{TP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_2^A \\ g_2^{TP} \end{bmatrix} \quad (30)$$

A második és harmadik sorok felhasználásával az átadódó erő a következőképpen adható meg.

$$g_2^{TP} = (Y_{22}^A + Y_{22}^{TP}) Y_{21}^A f_1 \quad (31)$$

Az elmozdulás meghatározásához a második sorba visszahelyettesítve az előző egyenletet, megkapható  $u_2^{TP}$ . A belső erő kiszámításához az  $Y_{22}^{TP}$  kifejtése szükséges

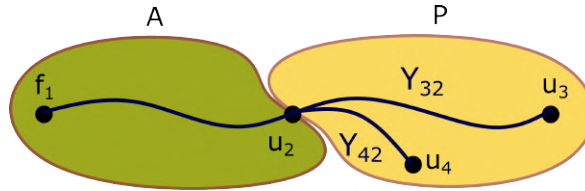
$$u_2^{TP} = Y_{21}^A f_1 - Y_{22}^A (Y_{22}^A + Y_{22}^{TP})^{-1} Y_{21}^A f_1 \quad (32)$$

$$f_{eq} = g_2^{TP} + (Y_{22}^A)^{-1} u_2 = (Y_{22}^{TP})^{-1} u_2 + (Y_{22}^A)^{-1} u_2 \quad (33)$$

A módszer alkalmazásának nehézségeit ebben az esetben az aktív és a passzív oldali átviteli függvények meghatározása jelenti.

### 5.2.5. In situ TPA

Az ipari TPA mérések során alapvető fontosságú, hogy a két alkatrész közötti szerelési vagy ragasztási idő a lehető legrövidebb legyen. Az egyik hatékony megoldás az lehet, ha az érzékelőket közvetlenül a felfogatásra vagy tesztpadra ragasztjuk, amely a passzív oldalt képviseli. Ebben az esetben nem szükséges mindkét alkatrész  $Y$  admittanciáját külön meghatározni, ami jelentősen leegyszerűsíti az impulzuskalapácsos mérést, mivel csupán a kontaktpont admittanciájának mérése elegendő. Mivel ennek köszönhetően a számításokhoz szükséges mérések elvégzése hatékonyan kivitelezhető, a gyakorlatban az in situ TPA elterjedése jelentős, és kutatásunk során mi is ezt a technikát alkalmaztuk. Azonban fontos megjegyezni, hogy a passzív oldal merevsége jelentősen befolyásolja a



17. ábra. In situ TPA

mérés pontosságát. Ha a passzív oldal mechanikai tulajdonságai nem ismertek pontosan, az ekvivalens erők, és az abból számolt további eredmények jelentős eltérést mutathatnak a valóságtól, és hibás következtetésekhez vezethetnek. A merevség változásai különösen nagy frekvenciák esetén okozhatnak problémát. Ezért célszerű a passzív oldal merevségét precízen meghatározni a mérési eredmények megbízhatósága érdekében. A matematikai leírása a rendszernek:

$$\begin{aligned} f_{eq} &= Z_{22}^{TP} u_2 + Z_{22}^A u_2 \\ f_{eq} &= (Z_{22}^P + Z_{22}^A) u_2 \\ f_{eq} &= Z_{22}^{AP} u_2 \end{aligned}$$

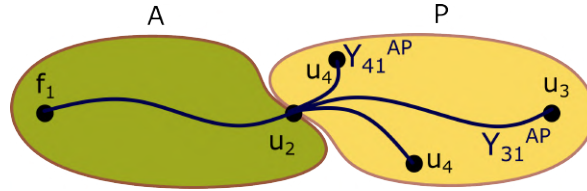
Mivel az érzékelők közel helyezkednek el a kontaktponthoz, ezért felírható a

$$f_{eq} = (Y_{22}^{AP})^+ u_2 , \quad (34)$$

kifejezés, ahol  $+$  a Moore-Penrose pseudoinverzét jelöli. A pszeudo inverz kiszámításának menetét az 5.4. alfejezetben részletezzük.

### 5.3. Transmissibility TPA

A módszer hasonlít az in-situ TPA módszerhez, mivel itt is egy csatolt rendszert vizsgálunk a passzív oldalról. Az érzékelők elhelyezése ebben az esetben is közel kell, hogy legyen a csatlakozási ponthoz, és a szabad szabadsági fokokat több érzékelő alkalmazásával tudjuk lekötni. Bár a mérés pontatlanabb, de a megfelelő paraméterek



18. ábra. Átviteli tényező TPA

megválasztásával, (például a felfogatási pont merevsége) a módszer pontossága jelentősen javítható, és akár a komponensalapú TPA mérési pontosságát is elérhetjük vele. További előnyt jelent, hogy a kalapácsos gerjesztések helyett az üzemi mérésből is kiszámítható az átviteli függvény (FRF).

Matematikai modellje a rendszernek az alábbi összefüggések segítségével lehetséges.

$$u_4 = Y_{41}^{AP} f_1 \longrightarrow f_1 = (Y_{41}^{AP})^+ u_4 \quad (35)$$

$$u_3 = Y_{31}^{AP} f_1 = Y_{31}^{AP} (Y_{41}^{AP})^+ u_4 = Y_{34}^{AP} u_4 \quad (36)$$

A transmissibility TPA módszerek mélyebb áttekintéséért lásd [9].

### 5.4. A pszeudo inverz számítása

A számításokhoz szükséges pszeudo invertálást a Moor-Penrose pszeudo invertálási módszer segítségével valósítjuk meg. Megértéséhez szükséges a szinguláris érték dekompozíció (Singular Value Decomposition: SVD) ismerete.

#### 5.4.1. Szinguláris értékre bontás (Singular value decomposition)

A szinguláris értékbontás (SVD) felhasználása igen széles spektrumon mozog. Felhasználható aluldeterminált és túldeterminált egyenletrendszerek megoldhatók a Moore-Penrose pszeudoinverz segítségével. Az SVD gyakran használatos adatcsökkentési eszközként, mivel segítségével azonosíthatók és elkülöníthetők azok az adatok, amelyek csak elhanyagolható mértékben járulnak hozzá az adathalmaz releváns információjához. Az SVD lehetővé teszi az információ lényeges komponenseinek kiemelését és a redundáns vagy zajos adatok háttérbe szorítását. Emellett ez a módszer képezi a főkomponens-elemzés (PCA) matematikai alapját, amely szintén az adatok dimenziócsökkentésére szolgál. Az SVD és alkalmazásainak részletesebb tárgyalását lásd [5].

A módszer alkalmazása során egy adott  $\mathbf{X}$  mátrixot felbontunk három különböző mátrix szorzatára:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad (37)$$

ahol egy  $n \times m$  méretű  $\mathbf{X}$  mátrix esetén  $\mathbf{U}$  egy  $n \times n$  méretű ortogonális mátrix,  $\mathbf{V}$  egy  $m \times m$  méretű ortogonális mátrix, míg  $\mathbf{\Sigma}$  egy  $n \times m$  méretű diagonális mátrix, ami csökkenő sorrendben tartalmazza  $\mathbf{X}$  szinguláris értékeit.

Egy rosszul kondicionált mátrix invertálása numerikus hibákhoz vezethet. Ezt stabilizálhatjuk úgy, hogy a  $\mathbf{\Sigma}$  mátrix kis értékeit egy bizonyos küszöbérték alatt nullára állítjuk. Ha ezt a küszöbértéket megfelelően választjuk meg, akkor az egyszerűsített mátrix a lényegi információkat megtartja, miközben kondicionáltabbá válik, így stabilabb és pontosabb számításokat biztosít.

#### 5.4.2. Moore-Penrose pseudoinverse

A legtöbb matematikai és fizikai modellünk lineáris egyenletekkel leírható.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

ahol  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  oszlop vektorok. Ha  $\mathbf{A}$  egy négyzetes mátrix, akkor egyszerűen megoldható:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Nehézséget az jelent ha  $\mathbf{A}$  mátrix oszlopai és sorai különböző méretűek. A korábban bevezetett SVD mátrixok bontását alkalmazzuk a lineáris egyenletre.

$$\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Mivel  $\mathbf{U}$  és  $\mathbf{V}$  mátrixokra igaz, hogy  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ ,  $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$ . Az egyenlet megoldható  $\mathbf{x}$ -re:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{b},$$

ahol  $\mathbf{V}\Sigma^{-1}\mathbf{U}^T$  a Moor-Penrose pseudoinverse. A gyakorlatban ennek a jelölése:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\Sigma^{-1}\mathbf{U}^T$$

A megoldás során mivel  $\mathbf{A}$  nem négyzetes, és az  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{b}$  elemek száma különbözik, ezért a közelítő megoldást jelölése  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

A megoldásnak két fő típusa van:

- aluldeterminált egyenletrendszer: esetben az  $\mathbf{x}$  elemeinek száma nagyobb, mint a  $\mathbf{b}$  elemeinek száma, így  $\mathbf{x}$ -re elméletileg végtelen számú megoldás létezik.
- túldeterminált egyenletrendszer: esetében ennek az ellenkezője igaz, a  $\mathbf{b}$ -ben lévő elemek száma nagyobb, mint  $\mathbf{x}$ -be. Tehát nincs megoldás  $\mathbf{x}$ -re

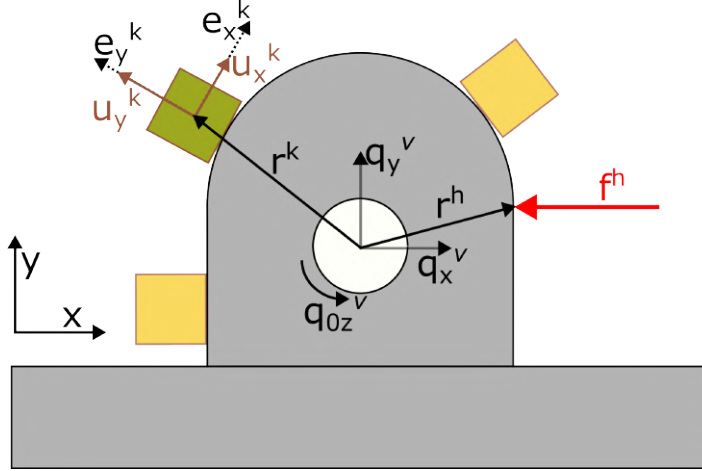
Mindkét esetben  $\tilde{\mathbf{x}}$  megoldást, a  $\|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}\| = \mathbf{b}$  egyenlet legjobb becslése.

## 6. Virtuális pont transzformáció

A vizsgálatok során gyakran előfordul, hogy a kívánt mérési pontban fizikailag nem lehet közvetlenül elvégezni az elmozdulások mérését. Erre a problémára nyújt megoldást a virtuális pont módszer, amely lehetővé teszi, hogy az elmozdulásokat és erőket egy másik pontra átszámítsuk. Ahhoz, hogy pontosan meghatározhassuk az átviteli függvényeket, elengedhetetlen a transláció és a rotáció precíz mérése. A virtuális pont transzformáció segítségével a kiválasztott pontra vetíthetjük a mért adatokat, így az erők és elmozdulások szabadon átkonvertálhatók a kívánt helyre. E módszer révén a mérés nemcsak a kívánt pontból, hanem az attól eltérő helyekről is végezhető, amivel megkerülhetők a fizikai akadályok. A transláció és rotáció mérésének pontossága kritikus, mivel ezek jelentősen befolyásolják a virtuális pont átalakítás helyességét. A pontatlan rotációs vagy translációs adatok hibás eredményekhez vezethetnek, így ezek mérése nagy figyelmet igényel. A virtuális pontot szabadon bárhova elhelyezhetjük a szerkezeten, de a jelen mérés során a felfogatási pont geometriai középpontját került kijelölésre. Ez a módszer nagy rugalmasságot biztosít a mérés során, lehetővé téve a nehezen hozzáférhető helyek pontos mérését.

A virtuális pontban a merev test 6 szabadsági fokkal rendelkezik (DoF = Degree of Freedom), ami azt jelenti, hogy a test mozgását három translációs irányban (x, y, z mentén) és három forgási irányban (x, y, z tengelyek körül) tudjuk jellemezni. Ahhoz, hogy ezeket a szabadsági fokokat pontosan meghatározzuk, szükséges a Descartes-koordináta rendszerben megadni a különböző távolságokat és orientációkat. Az átalakítás az inerciális elmozdulás módszerén (IDM = Inertial Displacement Method) alapul, amely a határfelületi elmozdulásokat veszi figyelembe, és a testet tökéletesen merevnek tekinti, azaz nem számol a rugalmassággal vagy deformációval. Az elmozdulások és elfordulások ismeretében összeállítható az  $\mathbf{R}$  transzformációs mátrix, amely segítségével az erők és gyorsulások átalakíthatóak a virtuális pontokba.

A 19. ábra azt illusztrálja, hogy a további egyenletekben szereplő  $\mathbf{r}$  pozíció-, és  $\mathbf{e}$  irányvektorokat, hogyan kell egy erőerjesztés és egy gyorsulásmérő szenzor által mért gyorsulások furatközéppontba történő transzformációjához felvenni.



19. ábra. Virtuális pont transzformáció

**Elmozdulás IDM** Az elmozdulás matematikai leírása a következőképpen történik: minden egyes háromtengelyes erőmérőhöz három távolság és kilenc orientáció tartozik. Ezekre azért van szükség, hogy a test összes szabadsági foka pontosan meghatározott legyen.

A szenzor orientációját leíró mátrix:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^k & \mathbf{e}_y^k & \mathbf{e}_z^k \end{bmatrix} = \mathbf{E}^k . \quad (38)$$

A szenzor távolságát a virtuális ponttól az  $\mathbf{r}^k$  vektor adja meg. Ezek ismeretében a virtuális pontra az alábbi kinematikai egyenlet írható fel:

$$\begin{bmatrix} u_x^k \\ u_y^k \\ u_z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{x,X}^k & e_{x,Y}^k & e_{x,Z}^k \\ e_{y,X}^k & e_{y,Y}^k & e_{y,Z}^k \\ e_{z,X}^k & e_{z,Y}^k & e_{z,Z}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_z^k & r_Y^k \\ 0 & 1 & 0 & -r_Z^k & 0 & r_X^k \\ 0 & 0 & 1 & r_Y^k & -r_X^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_X^\nu \\ q_Y^\nu \\ q_Z^\nu \\ q_\Theta^\nu \\ q_\Theta^\nu \\ q_\Theta^\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_x^\nu \\ \mu_y^\nu \\ \mu_z^\nu \end{bmatrix} , \quad (39)$$

ahol  $\nu$  a virtuális pontra, míg  $k$ : a mérő szenzorra utaló index,  $k$  pedig a mérések száma. Minden pontatlanságból illetve mérésből maradó távolság hibája a  $\boldsymbol{\mu}$  vektorba kerül.

A továbbiakban bevezetésre kerül  $\mathbf{R}^{k\nu}$ , a globális IDM mátrix ( $3 \times 6$ ). Minden egyes szenzorral felírható a következő egyenlet:

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{E}^{kT} \tilde{\mathbf{R}}^{k\nu} \mathbf{q}^\nu + \boldsymbol{\mu}^k \quad (40)$$

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{R}^{k\nu} \mathbf{q}^\nu + \boldsymbol{\mu}^k, \quad \mathbf{R}^{k\nu} \equiv \mathbf{E}^{kT} \tilde{\mathbf{R}}^{k\nu} \quad (41)$$

Általános esetben, ha egy virtuális ponton három szenzor helyezkedik el az  $\mathbf{R}^{k\nu}$  mátrix felírható az alábbi módon:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{q} + \boldsymbol{\mu} \quad \rightarrow \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{1,1} \\ \mathbf{R}^{2,1} \\ \mathbf{R}^{3,1} \\ & \mathbf{R}^{4,2} \\ & \mathbf{R}^{5,2} \\ & \mathbf{R}^{6,2} \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{R}^{n_k, n_\nu} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Az elmozdulások teljesen merev mozgások esetén működnek, mivel minden rugalmasság, elmozdulás hibát visz a transzformációba. A további részletek a [9] irodalomban olvasható.

**Erő IDM** Az erő transzformációjára vonatkozó felírás valóban hasonló az elmozduláshoz, hiszen mindkettőnél figyelembe kell venni a koordináta-rendszer átalakítását és a szabadsági fokokat. A hasonló felírás alapja az, hogy az erők és elmozdulások viszonya merev testek esetén azonos logikát követ. A transzformáció az erők vektoriális jellegéből fakadóan a koordináta-rendszer orientációjára épül, és a rotációs mátrix segítségével történik.

$$\begin{bmatrix} m_X^\nu \\ m_Y^\nu \\ m_Z^\nu \\ m_{\Theta_X}^\nu \\ m_{\Theta_Y}^\nu \\ m_{\Theta_Z}^\nu \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -r_Z^h & r_Y^h \\ r_Z^h & 0 & -r_X^h \\ r_Y^h & r_X^h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_X^h \\ e_Y^h \\ e_Z^h \end{bmatrix} f_h \quad (43)$$

ahol,  $\mathbf{m}^\nu$  a virtuális erő,  $f^h$  a gerjesztés,  $\mathbf{e}^h$  a gerjesztés iránya, míg  $\mathbf{r}^h$  a gerjesztés távolsága a virtuális ponttól.

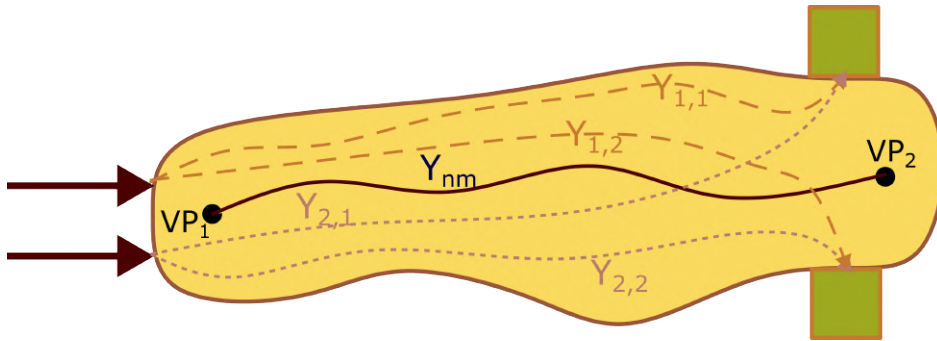
Az egyes gerjesztésekhez tartozó  $\mathbf{R}^{hv}$  transzformációs vektorokat az 44-nek megfelelően rendezhetjük mátrixba virtuális pontonként. Az így összeállított mátrixnak a gerjesztések számával megegyező sora, és a virtuális pontok hatszorosaival megegyező oszlopa lesz.

$$\mathbf{m} = \mathbf{R}^T \mathbf{f} \quad \rightarrow \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R^{1,1} \\ \vdots \\ R^{9,1} & R^{10,2} \\ & \vdots \\ & R^{18,2} & \ddots \\ & & & R^{n,m} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Ez a módszer lehetővé teszi, hogy a mátrix átfogó képet adjon a rendszer viselkedéséről, hiszen minden egyes gerjesztési pont hozzáadása bővíti a vizsgálat terét. Így amikor minden virtuális pont környezetét gerjesztjük, az így felépített mátrix segítségével részletesen megérthető az erők és elmozdulások kapcsolata, valamint a rendszer dinamikai tulajdonságai [9].

## 6.1. Virtuális pont FRFek

A transzformációs mátrixok segítségével a mért frekvencia válasz függvények (FRF) átalakíthatók a virtuális pontban lévő frekvencia válasz függvényekké. Az A 20. ábrán ennek a módszernek a sematikus rajza látható.



20. ábra. Virtuális pont FRF számítás

Például a mért elmozdulásokból az FRF mátrix segítségével meghatározhatóak az elmozdulásokhoz tartozó erők a gerjesztési pontokban.

$$\mathbf{f} = \mathbf{Y}^+ \mathbf{u} \quad (45)$$

Majd az így kiszámolt erők betranszformálhatóak a virtuális pontba:

$$\mathbf{m} = \mathbf{R}^T \mathbf{f} = \mathbf{R}^T \mathbf{Y}^+ \mathbf{u} = (\mathbf{Y}_f^{Tr})^+ \mathbf{u} \quad (46)$$

Ahonnán az erő-transzformált FRF mátrix:

$$\mathbf{Y}_f^{Tr} = \mathbf{Y}(\mathbf{R}^T)^+ \quad (47)$$

Hasonlóan az elmozdulások átalakítása is integrálható a frekvencia átviteli függvény mátrixba a gyorsulás-erő-transzformált FRF mátrix kiszámításához.

## 6.2. Transzformáció jósági fokának ellenőrzése

A mérések során a távolság mérési pontatlanságai, a gyorsulásérzékelők orientációjának eltérései, valamint a test nem tökéletes merevsége mérési hibákat eredményezhetnek. Ezek a hibaforrások befolyásolhatják a számítás pontosságát, ezért szükség van egy mérőszám bevezetésére, amely képes monitorozni ezeket az eltéréseket. Ez a mérőszám segítené annak értékelésében, hogy a transzformáció végeredményeként kapott számolt értékek mennyire pontosak és mennyire közelítik a valós fizikai viselkedést. Ennek alapján optimalizálható a mérési beállítás, és lehetőség nyílik a mérési hibák csökkentésére a megbízhatóbb eredmények érdekében.

### 6.2.1. Szenzor konzisztenciája

Annak érdekében, hogy megvizsgáljuk a szerkezet valós merevségét, [9] javasolta egy merevségi mutató bevezetését, amely az érzékelők konzisztenciáját méri egy adott terhelési esetre. Ez a konzisztenciát jelző mutató megmutatja, hogy a mért válaszcatornák mennyire következetesek az adott terhelés esetében. Az érzékelők konzisztenciájának vizsgálatához az első virtuális pont körül értékeljük az  $u_{1,2}$ -vel jelölt  $f_2$  terhelési esetre adott válaszokat. A terhelési vektor egy vagy több gerjesztésből áll, amely a virtuális első ponttól távoli második kapcsolási pontban történik. Ilyen módon az  $u_1$   $f_2$  hatására adott válaszok inkább globális jellegűek, és minden irányban kimutathatnak valamilyen jelet, ellentétben azzal, amikor a gerjesztés közvetlenül az első pont környékén történik. A gerjesztések és elmozdulások vizsgálatakor kétféle konzisztencia különböztethető meg: az összesített és a specifikus konzisztencia. Mindkettő azt a célt szolgálja, hogy a szűrő mátrix segítségével ellenőrizze a transzformáció helyességét.

**Általános konzisztencia** Az általános konzisztencia az adott virtuális ponthoz tartozó összes érzékelőcsatorna vagy gerjesztés állapotát vizsgálja. Első lépésként a szűretlen és a szűrt válaszok meghatározása történik. Definíció szerint az elmozdulás:

$$\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{Y}_{12} \mathbf{f}_2, \quad (48)$$

ahol  $\mathbf{u}_{1,2}$  az 1-es virtuális pont körüli elmozdulások vektora, egy attól megfelelő távolságra lévő 2-es pontbeli  $\mathbf{f}_2$  erők gerjesztésének hatására.

Szűrt jel esetén hasonlóan felírható az összefüggés:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{1,2} = \mathbf{F}_{11} \mathbf{Y}_{12} \mathbf{f}_2, \quad (49)$$

ahol  $\mathbf{F}$  egy szűrő mátrix, és az oda, majd vissza transzformálást valósítja meg:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{R}^+ \quad (50)$$

A általános szenzor konzisztencia kiszámítása a

$$\rho_{1,2}(\omega) = \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}_{1,2}(\omega)\|}{\|\mathbf{u}_{1,2}(\omega)\|} \quad (51)$$

képlet segítségével történik, ahol  $\|\cdot\|$  a vektor hosszát jelöli.

A konzisztencia kiszámításához minden frekvencián egy 0-tól 1-ig terjedő skálát használunk. Ha az érték 1, az jelzi, hogy a szűrt válasz normája megegyezik a szűretlen válasz normájával, ami ideális állapotot jelent. Ha az érték eltér az 1-től, az a szűrt válasz normájának csökkenését jelzi, ami általában a szerkezet rugalmasságából adódik. Mivel a módszer csak merev kapcsolatokat vesz figyelembe, a rugalmas kapcsolatok csökkenthetik a normát, ami a gyakorlatban pontatlanságot eredményezhet. A konzisztenciát az ütések pozíciójának és irányának pontosságának vizsgálatára is felhasználhatjuk [1].

**Specifikus konzisztencia** Az előzőleg vizsgált általános konzisztencia a hibák és pontatlanságok összességét értékeli, azonban ha a hiba pontosabb azonosítása szükséges, akkor elengedhetetlen a specifikus konzisztencia alkalmazása. Ez a módszer különböző csatornákat és gerjesztéseket vizsgál egy módosított spektrális koherencia függvény segítségével, hogy szűkítse a hiba lehetséges forrásait. A specifikus konzisztencia a

$$\rho_{u_{i,2}}(\omega) = \text{coh}(\tilde{u}_{i,2}(\omega), u_{i,2}(\omega)) \quad u_i \in \mathbf{u}_1 \quad (52)$$

képlet segítségével írható fel ahol  $\text{coh}(x, y)$  a módosított spektrális koherencia függvény:

$$\text{coh}(x, y) = \frac{(x + y)(x^* + y^*)}{2(xx^* + yy^*)}, \quad (53)$$

ahol  $x, y$ : komplex számok, a  $*$  pedig a komplex konjugálást jelöli.

A specifikus konzisztencia tehát a szűrt és szűretlen komplex válaszok amplitúdójának és fázisának összehasonlítást jelenti. A konzisztencia ilyen módon történő definiálásával

- ha a két vektor teljesen azonos, a konzisztencia értéke  $\rho = 1$ ,
- ha a vektorok hosszában vagy szögében eltérés van, az érték  $0 < \rho < 1$ ,
- ha a vektorok hossza azonos, de ellentétes irányba mutatnak, akkor  $\rho = 0$ .

Ezzel egy nulla és egy között mozgó metrikát kaptunk, ami így jól használható két komplex válasz összehasonlítására.

## 7. Mérési összeállítás

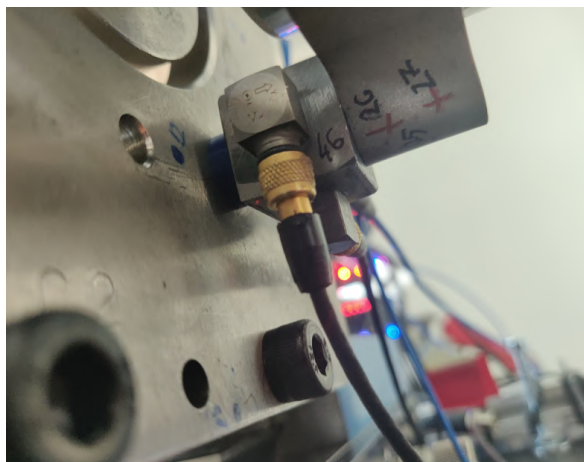
Egy villamos motor különböző paramétereinek meghatározásához (teljesítmény, nyomatékhullámosság, lesugárzott zaj, rezgések) kulcsfontosságú a fékpadok használata. A különböző terhelésekkel történő üzemállapotok szimulálása elengedhetetlen a fejlesztés során. A mérés során a különböző munkapontok meghatározásához a terhelést és fordulatszámát figyelemmel kell követni. A terhelés hatására keletkező hőt ezen pontokat nagyban befolyásolja, mivel a leadott nyomaték hő hatására csökken. Ennek védelmére a kormányműbe szerelés során egy teljesítményszabályozó elektronika hőszenzora véd a károsodástól és a túlmelegedéstől. Az így összegyűjtött adatok elemzésével a cél olyan geometriai és villamos paraméterek meghatározása, ami teljesítménycsökkenés nélkül képes a zavaró hatásokat kompenzálni.

Fontos megjegyezni, hogy az elméleti levezetés során a szakirodalomban elterjedt módon erőre és elmozdulásra vezettük le az egyenleteket. A gyakorlatban azonban mérés-technikai megfontolások miatt elmozdulás helyett általában gyorsulást mérünk. Az eddig tárgyalt egyenletek gyorsulásokra is hasonló módon alkalmazhatók, azonban ebben az esetben a rendszer gerjesztését és válaszát összekötő Y és Z átviteli függvényeket inertanciaként, illetve látszólagos tömegként ismerjük. Ennek megfelelően számításaink bemenő paramétereiként mi is gyorsulási adatokat használtunk és mértünk.

### 7.1. Motor felszerlése a fékpadra

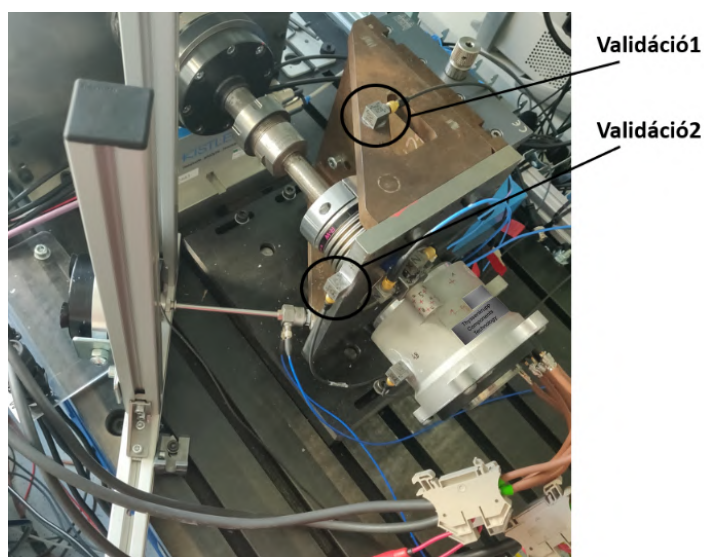
A fékpadon történő mérés során a motor tengelyének központosítására kiemelt figyelmet kell fordítani. Az excentricitásból következő kiegyensúlyozatlanság felesleges zajt visz a rendszerbe, ami csökkentheti a mérési pontosságot. A terhelésként szolgáló fékező motor nyomatékhullámosságának kiszűrésére egy lendkerék kerül beépítésre. A tárcsa tehetetlensége aluláteresztő szűrőként viselkedik, ami kiszűri a magasabb frekvenciájú zavarásokat a frekvenciaspektrumból.

A vizsgált villamos motor felszerelése során a felfogatólemez és a motor közé egy fém kocka és egy műanyag alátét kerül (21. ábra). A kékszínű műanyag alátét rugalmasan leválasztja a kiskockát és a motort a tesztpadtól. Az így kialakult kapcsolat a kiskocka és a motor között merevnek tekinthető, ami a gyorsulásérzékelők felszerelése szempontjából fontos.



**21. ábra.** Motor rögzítése a tesztpadra

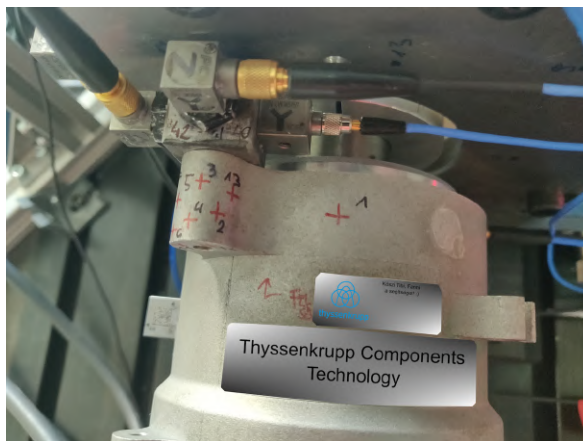
A villamos motor tesztpadhoz történő rögzítése két csavarral történik, ahol egy-egy kiskocka és műanyag alátét kerül beszerelésre. A felfogatásonként három háromtengelyes gyorsulásérzékelő az adott pontban túlhatározottá teszi a szerkezetet, így az átadódó erők számolhatóvá válnak. Számításaink minőségének ellenőrzésére két validációs szenzort is felszereltünk a passzív oldalra, lásd 22. ábra.



**22. ábra.** Shaker és validációs szenzorok integrációja a mérési összeállításba

## 7.2. FRF-ek meghatározása kísérleti úton

A motor dinamikáját leíró FRF-ek kiszámításához szükséges erő és gyorsulás jeleket impulzus kalapácsos mérés segítségével rögzítjük. Ehhez a motor felfogatásához közeli pontok kijelölése szükséges, amelyek a későbbi impulzus kalapáccsal történő gerjesztések helyéül szolgálnak. A pontok helyét úgy kell meghatározni, hogy gerjesztés során az adott virtuális pont minden irányba kapjon gerjesztő impulzust. Továbbá figyelembe kell venni az anyag rugalmas viselkedését is, ezért a virtuális ponthoz a lehető legközelebb kell kijelölni a gerjesztési helyeket, lásd 23. ábra.



23. ábra. Villamos motor felfogatásához közeli gerjesztési pontok

Az impulzusgerjesztés során a felületi normális irányában történő gerjesztés kihívást jelentett. A motor felületének geometriája a felfogatás közelében kis görbületi sugárral rendelkezik, amin kis kalapácsolási pontatlanság is nagy eltérést okozott a koherenciában.

## 7.3. Üzemi állapotok mérése

A bemutatott cTPA módszerek a kontaktpontokon létrejövő, az adott üzemi állapotban működő szervó motor által keltett zajokkal ekvivalens helyettesítő erők meghatározására összpontosítanak. Fontos azonban megjegyezni, hogy egy adott üzemi állapotban mért gyorsulásokból számított ekvivalens erők kizárólag az adott állapotban fellépő zajok és rezgések gerjesztésének szimulálására alkalmasak. Ezért az üzemi méréseket és az ekvivalens erők számítását minden vizsgálni kívánt üzemi állapotra el kell végezni.

A kormány motor különböző üzemállapotainak vizsgálatához felfutásos méréseket alkalmaztunk, ahol a motor fordulatszámát 30 másodperc alatt álló helyzetből 3000 RPM-ig konstans sebességgel növeltük. A méréseket mind az óramutató járásával meg egyező (Clockwise, CW), mind az azzal ellentétes irányban (Counterclockwise, CCW) elvégeztük.

Mivel a valóságban a passzív oldalról is érkezhethet zavarás a rendszerbe, a módszer robusztusságát ilyen esetekre is megvizsgáltuk. Ennek érdekében a passzív oldalhoz egy elektromos shakert rögzítettünk (22. ábra), amellyel 2000 Hz sávszélességű fehér zajt juttattunk a rendszerbe. A fent ismertetett méréseket 5 különböző zavarás amplitúdóval megismételtük, 3 dB-es különbséget tartva az egyes zajszintek között.

## 8. Validáció

Az impulzuskalapácsos mérések elvégzése után kiszámíthatjuk a gerjesztési pontokban ébredő erőket és a gyorsulásérzékelők által mért  $a_1$  gyorsulásokat összekapcsoló átviteli függvényeket. Az így kapott FRF-mátrix áttranszformálható a virtuális pontokba, a gerjesztési pontok és a gyorsulásérzékelők geometriai paraméterei (pozíció és orientáció) felhasználásával. Ezt követően az egyes üzemi állapotokban mért gyorsulások alapján kiszámíthatók az adott üzemi állapothoz tartozó ekvivalens erők.

Az ekvivalens erők pontosságának ellenőrzésére on-board validációs módszert alkalmazunk, hogy meghatározzuk, mennyire pontosan képesek a helyettesítő erők által gerjesztett rezgések a passzív oldalon követni a villamos motor által keltett zajokat. Ennek érdekében az erők számításához szükséges gyorsulások mérésénél a 22. ábrán bemutatott validációs szenzorok mért gyorsulásait összevetjük az ekvivalens erőkből a validációs pontokban számított gyorsulásokkal.

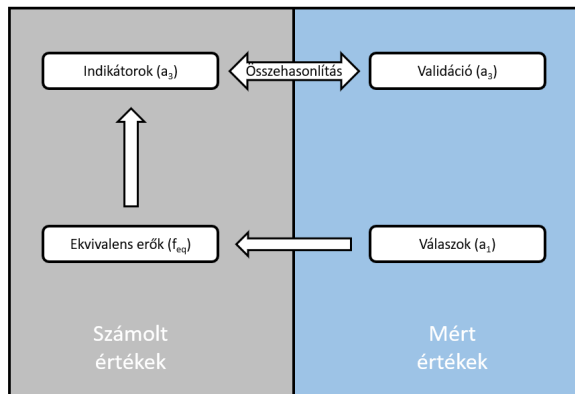
Fontos megjegyezni, hogy a számítások során kizárólag az erő szerinti transzformációt végeztük el, mivel a validációs gyorsulások meghatározásához nincs szükség a gyorsulás alapú transzformációra. Az ekvivalens erők meghatározásához szükséges 34. formula ennek megfelelően az alábbi alakot veszi fel:

$$f_{eq} = (Y_{12}^{AP})^+ a_1 . \quad (54)$$

A validációs pontok gyorsulásai pedig az alábbi egyenletből számolhatóak:

$$a_3 = Y_{23}^{AP} f_{eq} , \quad (55)$$

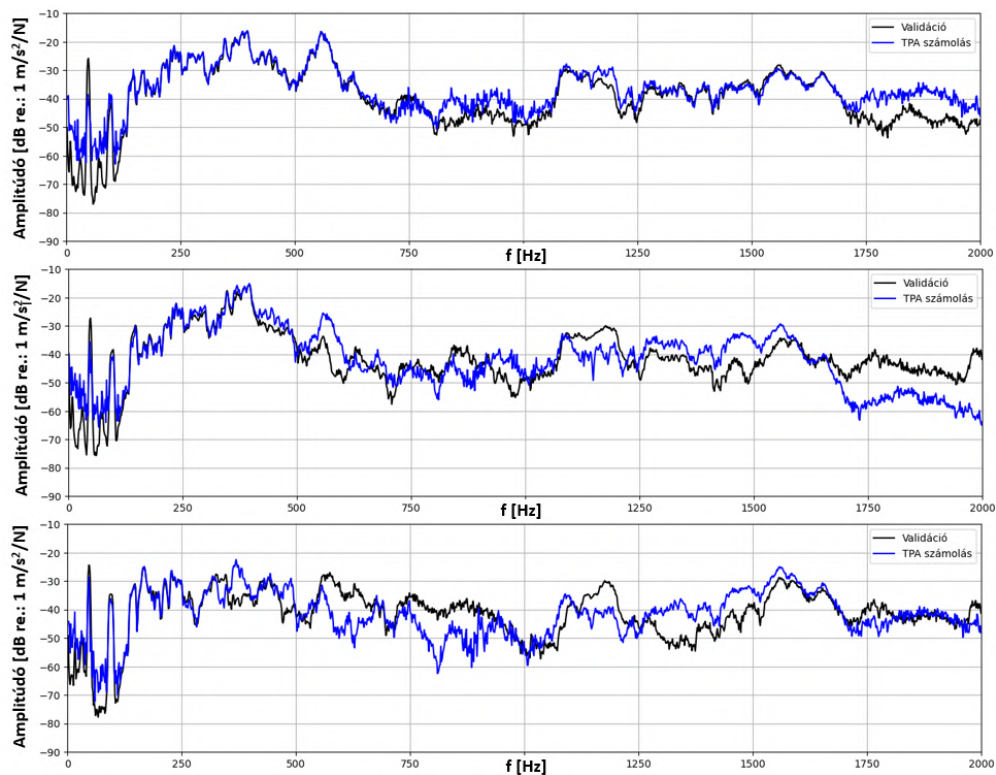
ahol  $Y_{23}^{AP}$  a validációs pontokba mutató, erő-transzformált átviteli függvény mátrix. A továbbiakban bemutatjuk az itt részletezett validációs folyamat eredményeit zavarás mentes esetekre, valamint a passzív oldali fehérzaj jelenlétében elvégzett mérésekre. A validációs számítások folyamatábrája a 24. ábrán látható.



24. ábra. Validációs számítások folyamatábrája

## 8.1. Validáció zavarmentes esetben

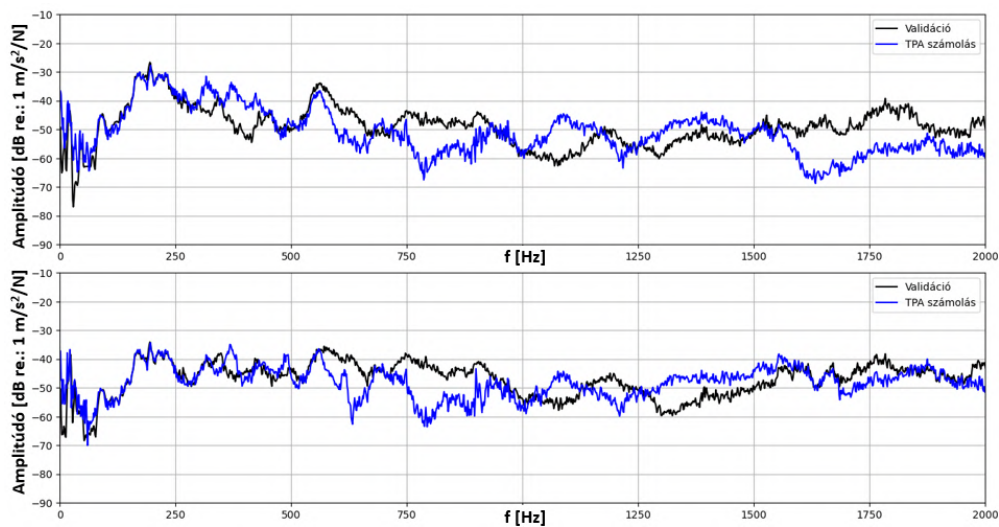
Az 54. és 55. összefüggéseket felhasználva számolható, hogy milyen fokú az egyezés a mért és számolt validációs pontbeli gyorsulások között a felfutásos mérések különböző RPM tartományaiban.



25. ábra. Megfelelő minőségű validációs eredmények

A 25. ábrán a 2-es validációs szenzor Y irányában, illetve az 1-es validációs szenzor Y és Z irányában, a felfutásos mérés 2700-3000 RPM tartományában mért és számolt gyorsulás spektrumok láthatóak.

A legtöbb RPM-tartományban — hasonlóan a 25. ábrán látható eredményekhez — a számított és mért spektrumok között jelentős egyezést tapasztaltunk. Emellett a csúcsok pozíciója és karakterisztikája még azokban az esetekben is konzisztens maradt, ahol eltérések jelentkeztek a rezgések amplitúdóiban. Ez azt jelzi, hogy az ekvivalens erők jól imitálták az eredeti gerjesztés hatására kialakuló passzív oldali rezgéseket. Ugyanakkor voltak olyan RPM-tartományok, ahol a számított és mért értékek jelentősebb eltéréseket mutattak.

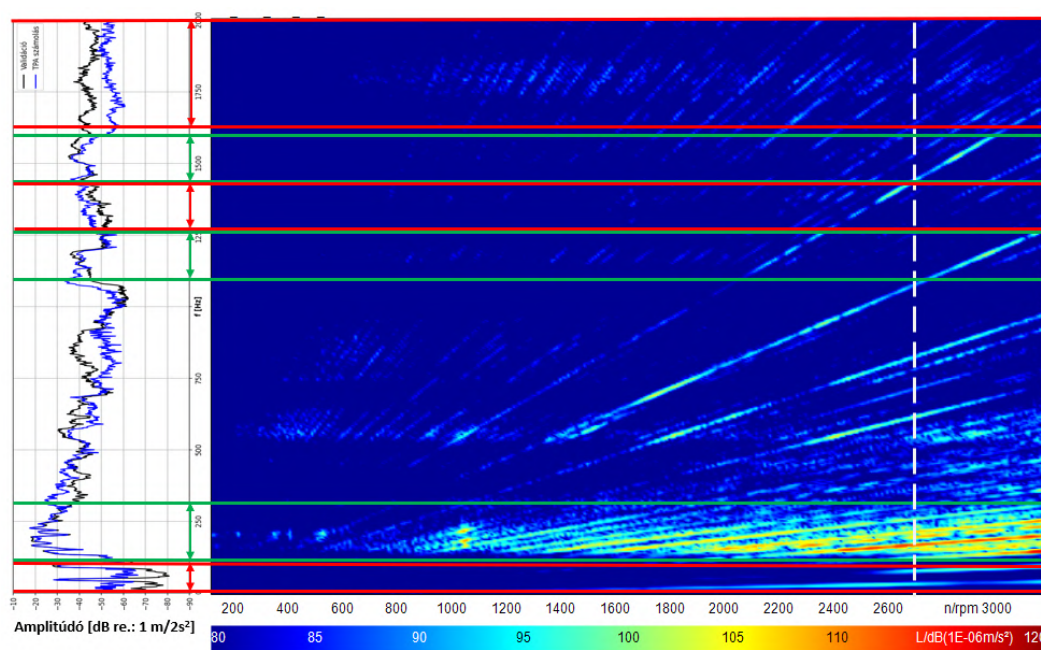


**26. ábra.** Gyengébb minőségű validációs eredmények

A 26. ábrán az 1-es validációs szenzor X és Z irányában a felfutásos mérés 1000-15000 RPM tartományában mért és számolt gyorsulás spektrumok láthatóak.

Tekintettel a mérések végrehajtásának precizitására — amit a minőségi indikátorok is igazoltak —, valamint a legtöbb RPM-tartományban tapasztalt magas fokú egyezésre, részletesebben szeretnénk volna megvizsgálni azokat az eseteket, amelyek eltértek a megszokott trendtől. A mögöttes okok feltárása érdekében az eredmények további elemzése volt szükséges.

A Campbell-diagram vizsgálata a validációs eredmények elemzése során lehetőséget ad az RPM változásainak figyelembevételére a mérés során (3.4. alfejezet). A 27. ábrán az 1-es validációs szenzor X irányában mért gyorsulásából számolt Campbell diagram, valamint a 2700-3000 RPM tartományban mért és számolt gyorsulás spektrumok összehasonlítása látható.



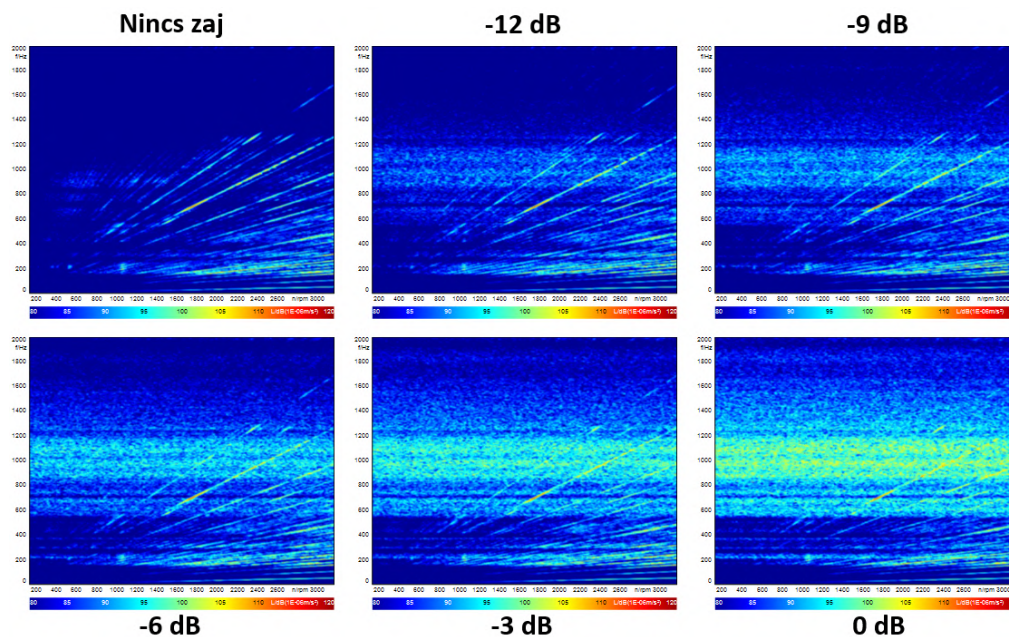
27. ábra. Campbell diagram és a validáció minőségének kapcsolata

A 27. ábrán megfigyelhető, hogy a felfutásos mérés bizonyos szakaszaiban vannak frekvenciatartományok, ahol nem áll rendelkezésre elegendő gerjesztés. Ezekben a tartományokban a jel-zaj viszony (Signal to Noise Ratio: SNR) jelentősen romolhat, ami a validációs eredmények pontosságának csökkenését eredményezi.

A jelenség passzív oldali zavarás nélküli mérések esetében is megfigyelhető 27. ábra, a mérési precizitás növelésére tett kimerítő erőfeszítéseink ellenére. Lehetséges, hogy a villanymotorok alapvető tulajdonságaiból fakadóan a zajszint nem csökkenthető egy bizonyos szintnél tovább a mérések során.

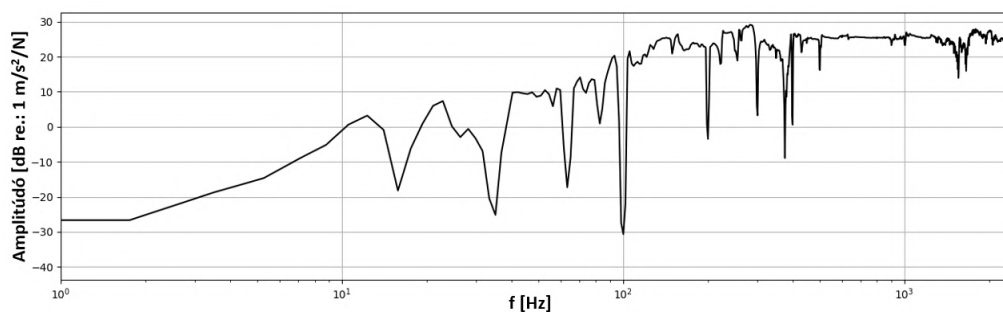
## 8.2. Validáció passzív oldali zaj jelenlétében

A módszer zavarásmentes esetben történő alkalmazhatóságát az előző alfejezetben bemutatottuk. A következőkben azt vizsgáljuk, hogyan változik a módszer előrejelzési pontossága a passzív oldali zaj növelésével. A 28. ábrán látható, hogy miként jelenik meg a növekvő zajszint a validációs szenzorok által mért gyorsulások Campbell-diagramjain.



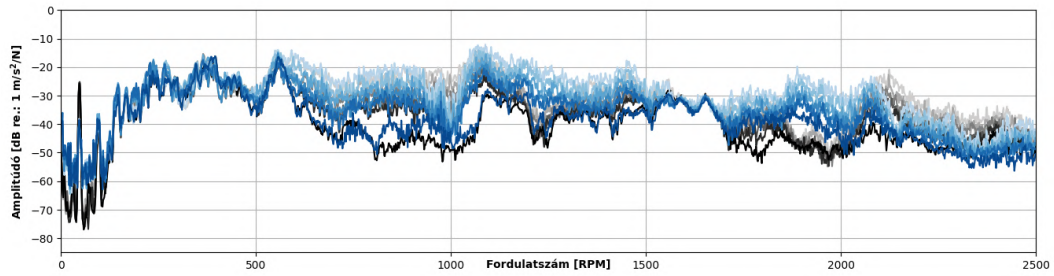
**28. ábra.** 2-es validációs szenzor Y irányának Campbell diagramjai különböző zajszinteken

Látható, hogy a zaj nem egyenletesen oszlik el a spektrumon. A jelenség mögöttes okait, a shaker talpponti inertanciájának vizsgálatával érthetjük meg (29. ábra). Az inertancia-görbét elemezve azt láthatjuk, hogy a mérési összeállítás karakterisztikája hasonlít egy felül-áteresztő szűrőjére. Ebből az következik, hogy a shakerrel nem tudtuk olyan effektíven meggerjeszteni a szerkezetet, és ezért kisebb mértékű a zaj kisebb frekvenciákon.



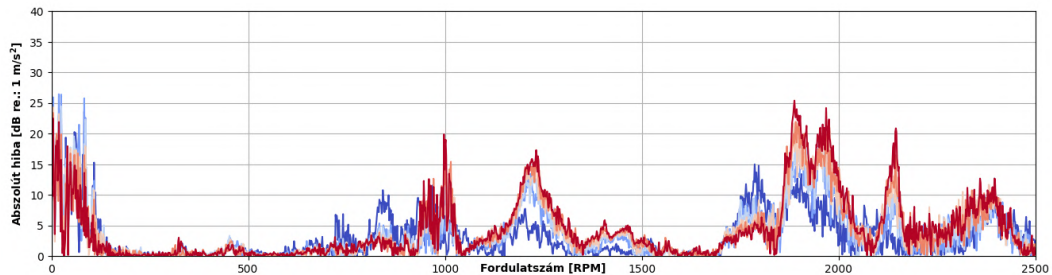
**29. ábra.** A passzív oldal inertanciája

A különböző zajszinteken végzett vizsgálatok során a módszer pontosságát az előzőekhez hasonlóan a 24. ábrán bemutatott folyamat szerint ellenőriztük. A 30. ábrán a mért és számolt spektrumokat láthatjuk fekete és kék színekkel jelölve, ahol a színek árnyalatai az eltérő zajszinteket mutatják. A magasabb zajintenzitásokat világosabb árnyalatok jelzik.



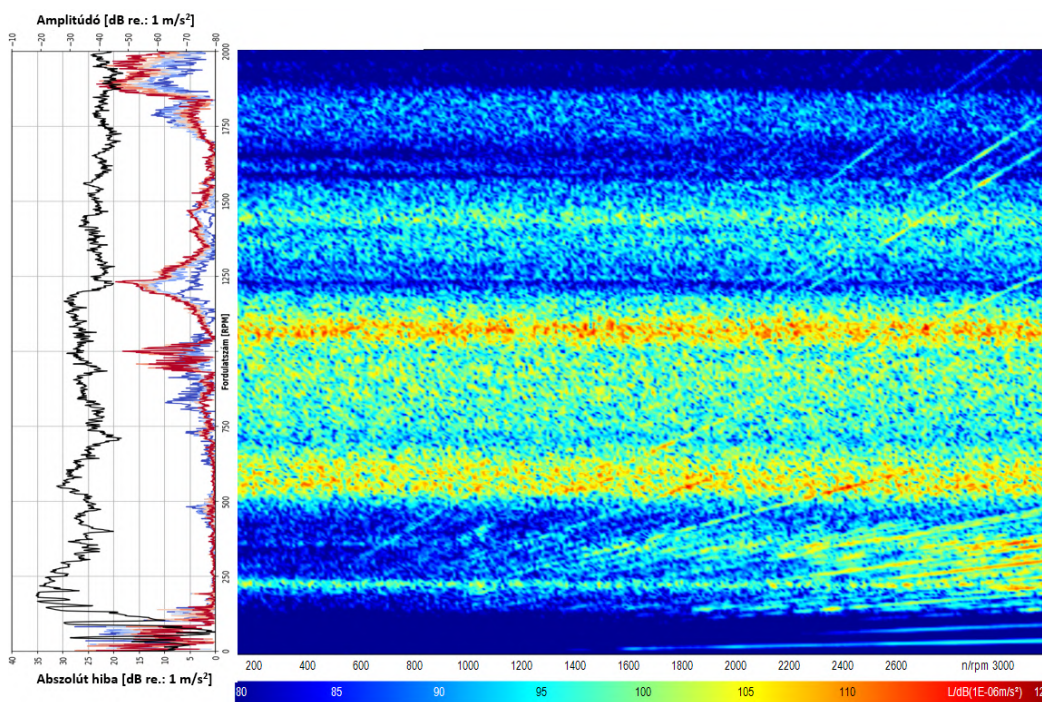
**30. ábra.** 2-es validációs szenzor Y irányának validációs eredmények különböző zajszintekre

Alacsony frekvenciatartományban a módszer előrejelzési pontossága továbbra is magas, mivel ebben a tartományban csak minimális zavar került a rendszerbe. Magasabb frekvenciák esetében azonban nagyobb eltérések figyelhetők meg. A 31. ábra az egyes zajszinteken mért és számolt értékek közötti abszolút eltérést mutatja, ahol a nagyobb intenzitású zavar melegebb színekkel került ábrázolásra.



**31. ábra.** A módszer abszolút hibája az egyes zajszinteken, a 2-es validációs szenzor Y irányán bemutatva

Végül a számolt és mért értékek közötti eltérések okainak mélyebb megértése érdekében összehasonlítottuk a mért gyorsulást a módszer abszolút hibájával és a Campbell-diagrammal. Ez az összetett elemzés segít annak megértésében, hogy a zaj hogyan befolyásolja a módszer előrejelzési pontosságát különböző frekvenciákon és zajszinteken.



**32. ábra.** Összetett vizsgálata a passzív oldali zaj hatásainak, 2-es validációs szenzor - Y irány

A 32. ábra szemlélteti, hogy bár a zajszint növekedése jelentős hatást gyakorol a számítások pontosságára, ezek a hibák különösen ott jelennek meg, ahol a magas zajszint alacsony szintű mért gyorsulással társul. Ezen eredmények kiemelik a jó jel-zaj viszonyú mérések jelentőségét, és további jelfeldolgozás technikai fejlesztések szükségességére mutatnak rá.

## 9. Rendszám alapú megközelítés

A technológia iparban történő elterjedéséhez elengedhetetlen, hogy megbízhatóan, a valósághoz hű eredményeket adjon. Ehhez megfelelő lényegkiemelő tulajdonságokra is szükség van. Fontos ugyanis, egy olyan metrika kialakítása, amit a különböző szintű passzív oldali zavarások kis mértékben torzítanak.

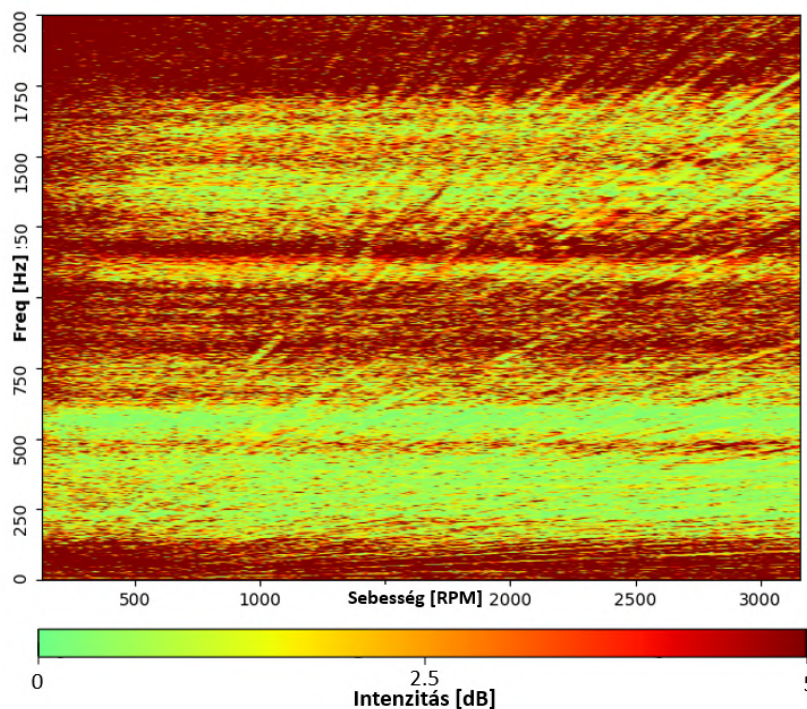
A továbbiakban ismertetjük a rendszám alapú megközelítést, illetve bemutatjuk, hogy ez az újféle vizsgálati mód mennyire felel meg az itt említett igényeknek. A módszer ilyen módon történő vizsgálata azért is releváns, ugyanis a 3.4 alfejezetben leírtaknak megfelelően az egyes zajkeltő komponensek hatása ezen rendszámok mentén figyelhető meg, így a kormányrendszerek akusztikai szempontok szerinti fejlesztése során ezen értékek lesznek hangsúlyosak.

## 9.1. A módszer pontossága

Az előzőekben láthattuk, hogy felfutásos mérés különböző RPM tartományaiból számolt ekvivalens erővel elvégzett validációs folyamat eredményeként változó minőségű eredményeket kaptunk. Ennek oka ezen tartományok eltérő jel-zaj viszonyában keresendő.

Az előző fejezet Campbell diagramjait vizsgálva (27., 28., 32. ábra) észrevehető, hogy jó jel-zaj viszony első sorban a rendszámok mentén található. Ennek az az oka, hogy a kormányrendszer zajkeltő komponensei első sorban itt gerjesztik a rendszert.

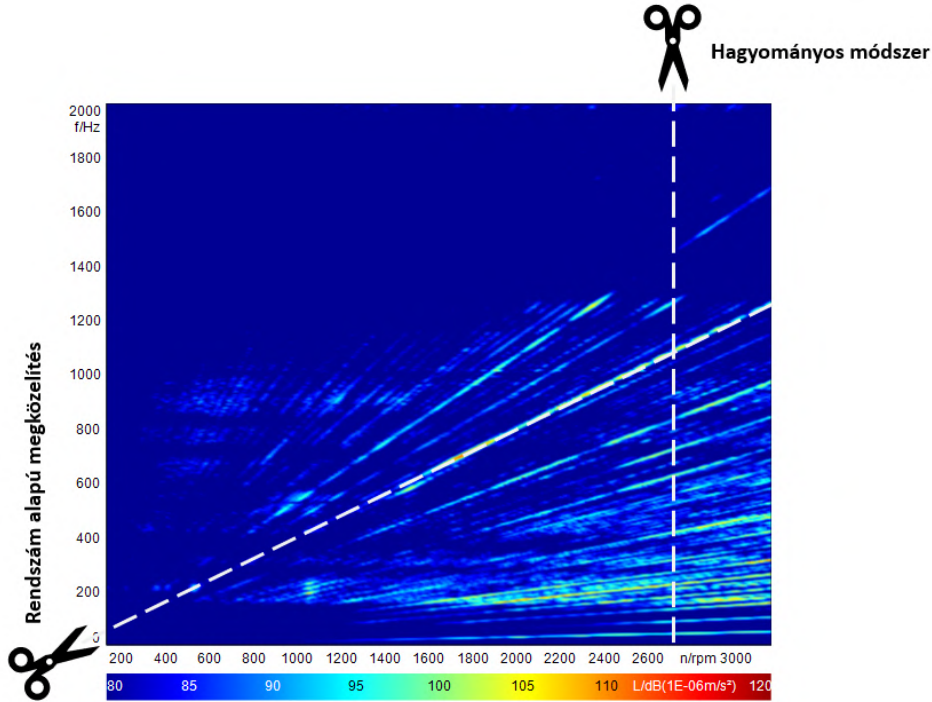
Az előző fejezetben bemutatott validációs eljárás folytán megbizonyosodtunk, hogy a jel-zaj viszony minősége jelentős módon befolyásolja a TPA számítások pontosságát. Ezt az állítást a 33. ábra is alátámasztja, ahol a számolt és mért értékek közötti eltérést a teljes RPM tartományon ábrázoltuk.



**33. ábra.** A módszer abszolút hibája a mérés teljes RPM és frekvencia tartományán, 2-es szenzor - Y irány

A 33. ábrát tekintve beláthatjuk, hogy a módszer valóban a rezonanciák, illetve a rendszámok mentén a legpontosabb, ahol a jelszint mértéke a legmegfelelőbb.

A rendszám alapú megközelítés lényege, hogy az eredményeket nem egy adott RPM tartományból számolt spektrum, hanem a rendszámok mentén értékeljük ki, (34. ábra) ahol a jel-zaj viszony kedvezőbb.



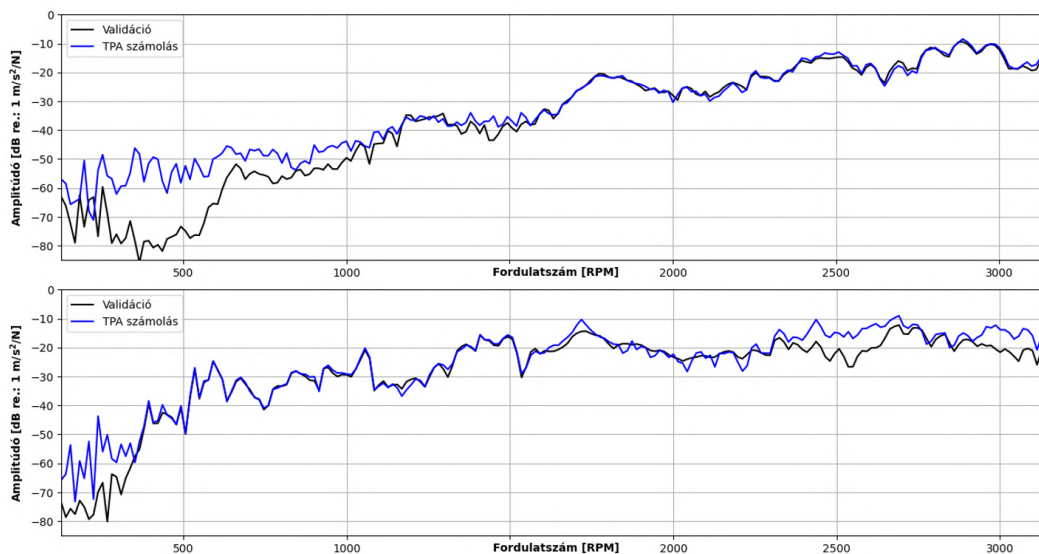
34. ábra. Rendszám alapú megközelítés szemléltetése

Ezt úgy valósítjuk meg, hogy a módszer segítségével kiszámoljuk a validációs gyorsulás spektrumát a teljes RPM tartományra, majd az egyes fordulatszámokhoz számolt spektrumból az adott rendszámhoz és fordulatszámhoz tartozó értéket választjuk ki. Tehát ha például  $n = 1200$  RPM-en a  $r = 8$ -as rendszámhoz tartozó értékre vagyunk kíváncsiak akkor a spektrumból a

$$f = \frac{n}{60} \cdot r = \frac{1200}{60} \cdot 8 = 160 \text{ Hz} \quad (56)$$

frekvenciához tartozó értéket vesszük ki.

Egy zavarásmentes mérésből, illetve az ahhoz tartozó számolásból kivágva a 8-as és 24-es rendszámot, a 35. ábrán látható validációs eredményeket kapjuk.



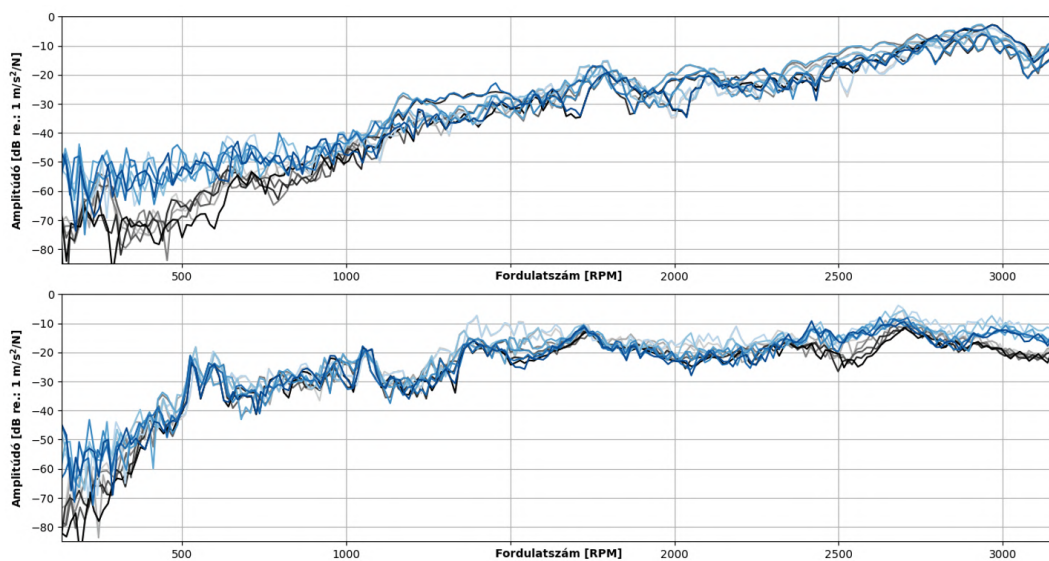
**35. ábra.** 8-as és 24-es rendszám validációja a 2-es validációs szenzor Y irányában

Láthatjuk, hogy a mért és számolt görbék a rendszámok mentén a felfutásos mérés nagy részén magas fokú egyezést mutatnak. Alacsonyabb fordulatszámokon azért tapasztalhatunk nagyobb eltérést, mivel a vizsgált szerkezet alacsony frekvenciákon nagyon merev, így itt nem tudjuk megfelelően meggerjeszteni a rendszert. A Campbell diagramokon 150 Hz felett kezdünk megfelelő mennyiségű gerjesztést látni. Ezt az 56. egyenlet alapján a nyolcadik rendszám 1200 RPM-en, a huszonnegyedik pedig 375 RPM-en éri el. A számolt és mért görbék közötti egyezés a 35. ábrán is ezen fordulatszámoktól válik megfelelővé.

## 9.2. A módszer robosztussága

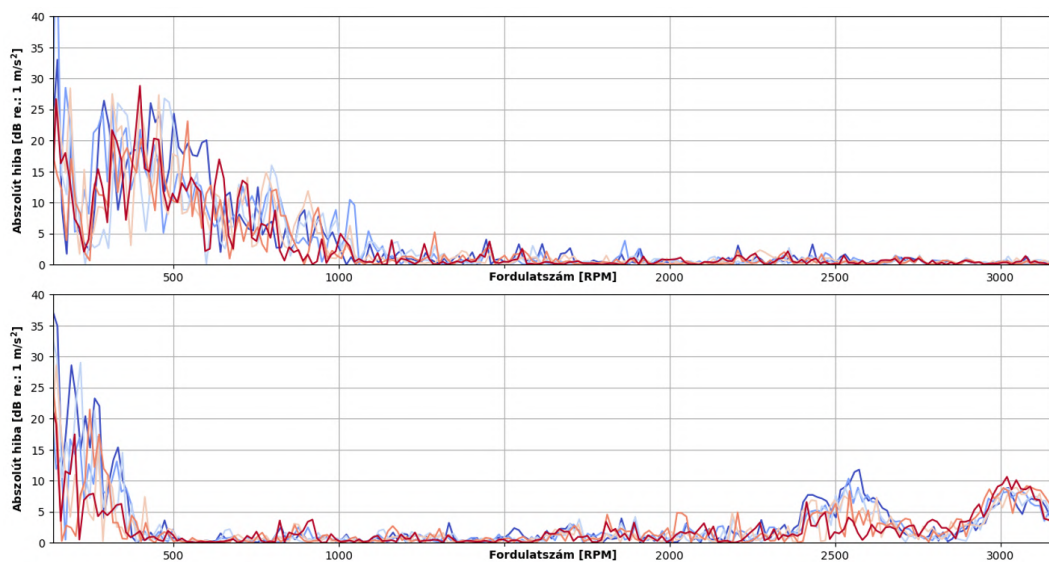
A 32. ábrán láthattuk, hogy a gyorsulásspektrum csúcsainál - ahol megfelelő szintű volt a gerjesztés - a módszer a zaj intenzitásának növelése mellett is stabil maradt. Emiatt azt várjuk, hogy a rendszámok mentén, a jó jel-zaj viszonyoknak köszönhetően passzív oldali zavarás esetén is pontos marad a számítás.

Az ismertett rendszám számolási módszert felhasználva a validációs folyamat lépéseit követve az egyes rendszámokhoz tartozó mért és számolt görbéket a vizsgált zajszinteken ábrázolhatjuk.



**36. ábra.** 8-as és 24-es rendszám validációja az egyes zajszinteken a 2-es validációs szenzor Y irányában

A 36. ábrán a számolt és mért görbék a zavarásmentes esethez hasonló szintű egyezést mutatnak. A 37. ábrán pedig azt figyelhetjük meg, hogy a módszer pontossága a zaj intenzitásának növelésével nem romlik.

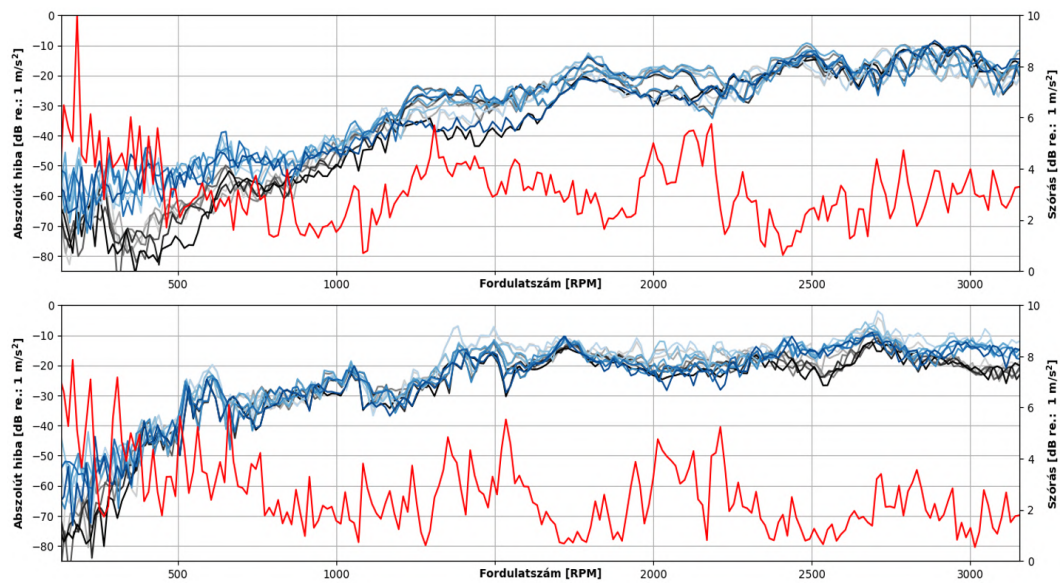


**37. ábra.** A rendszám alapú számolások hibája a különböző zajszinteken, 2-es validációs szenzor - Y irány

Megfigyelhető továbbá, hogy a mért és számolt görbék a zavarás intenzitásának változtatásának hatására sokkal kisebb mértékben módosulnak, mint az előző fejezetben bemutatott hagyományos vizsgálati módszer eredményeként kapott görbék.

Ebből azt a következtetést lehet levonni, hogy az így kapott rendszám görbék karakterisztikáját leginkább az aktív oldali gerjesztések befolyásolják, azaz a számítás sokkal ellenállóbb a passzív oldali zavarásokra.

Ez a hatás különösen a csúcsok környezetében jön elő, ahol a jel-zaj viszony a legjobb. A 38. ábrán a 2-es validációs szenzor Y irányában számolt és mért 8-as és 24-es rendszámok láthatóak az egyes zajszinteken, valamint a különböző zajszinten számolt görbék tapasztalati szórását is ábrázoltuk piros vonallal.



**38. ábra.** A különböző zajszinten kapott 8-as és 24-es rendszám szórása

Megfigyelhető, hogy a mért gyorsulási jel csúcsainál a különböző zajszinteken számolt görbék szórása lecsökken, míg alacsonyabb jelszinteken a szórás magasabb értékeket vesz fel.

## 10. Konklúzió

A komponens alapú TPA módszerek hatékonyan alkalmazhatók a kormányművekben található kis méretű szervomotorok akusztikai tulajdonságainak elemzésére.

Kutatásunk során bemutattuk, hogy bár ideális körülmények között a hagyományos elemzési módszerek is elfogadható minőségű eredményeket adnak, a gyakorlatban előforduló kihívások kezelésében a rendszám-alapú megközelítés jobb eredményeket biztosít.

Ez a vizsgálati módszer nemcsak a passzív oldalon keletkező zaj pontos és megbízható előrejelzéséhez kínál kiváló eszközt, hanem lehetőséget ad az egyes zajkeltő komponensek hozzájárulásának részletes és jól elkülönített elemzésére is. Az elemzés során a zajforrások azonosítása és hozzájárulásuk számszerűsítése lehetővé teszi, hogy célzott módosításokat végezzünk a szerkezeten, csökkentve az adott zajkeltési mechanizmus hatását. Ez különösen fontos a modern kormányművekben, ahol az elektromos motorok zajszintjének minimalizálása kritikus szerepet játszik a felhasználói élmény és a termékminőség javításában.

A módszer további előnye, hogy alkalmazható más komplex rendszerek akusztikai elemzésére is, ahol a több forrásból származó zajok elkülönítése és hatásuk optimalizálása szükséges. Így a rendszám-alapú TPA nemcsak a kormányművek zajcsökkentésére, hanem számos más területen is értékes eszköz lehet, például az autóiparban vagy az ipari gépek tervezésében.

Jövőbeli kutatásként érdemes lehet a módszer alkalmazhatóságát összetettebb komponensek (mint például a teljes kormányoszlop) akusztikai vizsgálatára is kipróbálni. Ezzel a megközelítés még szélesebb körben alkalmazhatóvá válna, és hozzájárulhatna a mérnöki rendszerek további optimalizálásához.

## Hivatkozások

- [1] Cs. L. Balogh, T. Kimpián és T. Ungvári. “An Examination of Component-Based TPA Performance and Feasibility for Steering Motors”. *Journal of Physics: Conference Series* 2677.1 (2023. dec.), 12011. old. DOI: 10.1088/1742-6596/2677/1/012011.
- [2] Topology Fundamentals és Their Basis Waveforms. *Community Infineon* (2025). URL: <https://community.infineon.com/t5/Knowledge-Base-Articles/Electronics-101-Topology-Fundamentals-and-Their-Basis-Waveforms/ta-p/412453#..>
- [3] B. Gergacz, C. L. Balogh és T. A. Kimpian. “Importance of data quality: An experimental study of passiveside noise in cTPA measurements”. *Online Proceedings ISMA2024-USD2024* (2024). ISSN: 3041-3370.
- [4] Tetsuya Hattor. “Starting With Vibration Noise Analyses Vol. 1 (Motor Edition 1)”. *Jmag International* (2025). URL: [https://www.jmag-international.com/motor\\_design\\_develop/motor\\_01/](https://www.jmag-international.com/motor_design_develop/motor_01/).
- [5] V. Klema és A. Laub. “The singular value decomposition: Its computation and some applications”. *IEEE Transactions on Automatic Control* 25.2 (1980), 164–176. old. DOI: 10.1109/TAC.1980.1102314.
- [6] Balogh Csanád Levente. “Matlab implementation of a new component based TPA method”. Dipl. BME, 2024.
- [7] Kálmán Levente. “Komponens alapú átviteli út analízis kísérleti fejlesztése elektromos kormányrendszerekhez és részegységeikhez”. Dipl. BME, 2025.
- [8] M. A. H. Rasid. “Contribution to Multi-physical Studies of Small Synchronous-reluctance Machine for Automotive Equipment”. Dissz. Universit e de Technologie de Compi‘egne, 2016.
- [9] Maarten Vincent van der Seijs. “Exprimental Dynamic Substructuring, Analysis and Design Strategies for Vehicel Development”. Dissz. Technische Universiteit Delft, 2016.
- [10] Gungl Szilárd. “Elektromos kormány szervó motorok rezgésanalízise”. *Journal of Physics: Conference Series* (2018). URL: [https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2677/1/012008?%20fbclid=IwY2xjawGTbMpleHRuA2F1bQIxM%20AABHWr63bqssQIaGwONvVdyTev7RC4izM5VMONwvHM3zDmiv40t8iXJ6oQd-Q\\_aem\\_Qp4\\_ucSIvoE6v1z1MuB04g](https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2677/1/012008?%20fbclid=IwY2xjawGTbMpleHRuA2F1bQIxM%20AABHWr63bqssQIaGwONvVdyTev7RC4izM5VMONwvHM3zDmiv40t8iXJ6oQd-Q_aem_Qp4_ucSIvoE6v1z1MuB04g).
- [11] Dr. Timar Peregrin László - Fazekas Albert - Kiss József - Miklós András S.J. Yang. *Villamos gépek zaja és rezgések*. budapest: Műszaki könyvkiadó, 1986.