



BERTÓK ZSANETT

Visszacsatolással történő linearizáció alkalmazási lehetőségei
mechatronikai rendszerekben

Konzulensek:

Dr. Budai Csaba

adjunktus (BME-GPK MOGI)

Dr. Stumpf Péter Pál

egyetemi docens (BME-VIK AUT)

Tudományos Diákköri Konferencia

Budapest, 2024

Absztrakt

A napjainkban egyre szélesebb körben elterjedt a különféle mechatronikai rendszerekben számos nemlineáris karakterisztikával jellemezhető eszköz található meg. A mechatronikai rendszerek beavatkozószervei jellemzően villamos gépek, amelyek között egyre népszerűbb az állandómágneses szinkrongépek (PMSM) és a kefenélküli egyenáramú gépek (BLDC) alkalmazása. Ezek a gépek nagy teljesítménysűrűségüknek és magas hatásfokuknak köszönhetően egyre elterjedtebben jelennek meg robotok vagy villamos járművek hajtásrendszereiben, annak ellenére, hogy mindkét motortípus nemlineáris karakterisztikával bír. Az alkalmazott villamos gépek típusain túl, a felhasználásuk során is további nemlineáris hatás jelentkezhethet, például a robotkarok mozgatása során jelentkező Coriolis vagy centrifugális erők hatása.

Ezeknek a berendezéseknek szabályozása során figyelembe kell venni a rendszermodellben található nemlinearitásokat, így összetettebb, nemlineáris irányítási módszerek alkalmazása válik szükségsszerűvé. Emellett a mikrovezérlők fejlődésének köszönhetően ma már lehetőség nyílik ún. érzékelőmentes szabályozások megvalósítására, amelyek jellemzően nemlineáris állapotmegfigyelők alkalmazásán alapulnak. Az ilyen módszerek jelentős költségmegtakarítást eredményezhetnek, miközben a megbízhatóság szempontjából is kedvezőek. Ennek következtében a korszerű, nemlineáris szabályozási és megfigyelési technikák alkalmazhatóságának vizsgálata napjainkban kiemelten fontos területté vált.

A visszacsatolással történő linearizáció egy olyan nemlineáris szabályozási megközelítés, amely állapot-visszacsatolás segítségével pontosan képes linearizálni egy rendszert. Az így létrejövő rendszer a kiinduló nemlineáris rendszer közelítésektől mentes, egzakt linearizációja, így a lineáris rendszerekhez kifejlesztett eljárások közvetlenül alkalmazhatókká válnak. A lineáris szabályozók és állapotmegfigyelők tervezésekor alkalmazott módszerek általában jól ismert, szisztematikus tervezési lépésekre épülnek, amelyek nem igényelnek bonyolult matematikai számításokat.

A visszacsatolásos linearizálás elvégzése után általában állapot-visszacsatolásos szabályozást alkalmaznak. Ennek a megközelítésnek azonban az a hátránya, hogy a belső állapotok alakulása nem követhető nyomon, ami például villamos motorok esetében nem megengedhető. Továbbá, az ilyen rendszerek esetében gyakran szükség van a szaturáció figyelembe vételére a szabályozó tervezése során, akár a belső állapotok esetén is, mivel a beavatkozószervek nem képesek tetszőleges nagyságú bemeneteket kiadni. Állapot-visszacsatolás mellett erre sincs lehetőség, ami tovább nehezíti a módszer gyakorlati alkalmazását. A dolgozat egyik célja, hogy olyan újszerű szabályozási stratégiát adjon, amely visszacsatolással linearizált rendszerekre alkalmazható. Az új módszertan egy villamos motorral hajtott inga esetén kerül bemutatásra.

További célkitűzésként a dolgozat a visszacsatolásos linearizáció állapotmegfigyelésre való alkalmazásának lehetőségét vizsgálja. A kutatómunka rávilágít arra, hogy visszacsat-

tolással linearizált rendszerekhez nemcsak tervezhető állapotmegfigyelő, hanem bármely irányítható rendszer esetén megadható egy olyan visszacsatoló tag, amely biztosítja a megfigyelhetőséget, még akkor is, ha a kiinduló rendszer nem volt megfigyelhető. Az új módszertan bemutatása egy eredetileg lineáris, de nem megfigyelhető rendszer megfigyelhetővé tételén keresztül történik.

Abstract

Mechatronic systems are becoming increasingly prevalent in today's technical world, often incorporating devices with nonlinear characteristics. The actuators of mechatronic systems typically consist of electrical motors, with permanent magnet synchronous machines (PMSM) and brushless DC machines (BLDC) increasingly gaining popularity. Due to their high power density and high efficiency, these machines are commonly found in the drive systems of robots and electric vehicles despite the nonlinear characteristics of both motors. In mechatronic systems, in addition to the actuators, additional nonlinear effects may occur during operation, such as Coriolis or centrifugal forces in the case of robotic arms.

The control of these devices must consider the nonlinearities in the system model, requiring more complex, nonlinear control methods. In addition, advances in microcontrollers now allow the implementation of so-called sensorless control schemes, typically based on the application of nonlinear state observers. Such methods can prove to be a cost-effective solution, while offering advantages in terms of reliability. As a result, investigating the applicability of advanced nonlinear control and observer techniques has become a high-priority area today.

Feedback linearization is a nonlinear control approach that can accurately linearize a system using state feedback. The resulting system is an exact linearization of the original nonlinear system, so procedures developed for linear systems can be directly applied. The design of linear controllers and state observers typically follows well-established systematic design steps that do not necessitate complex mathematical calculations.

After feedback linearization has been performed, state feedback control is usually applied. However, this approach has the drawback that the evolution of the internal states cannot be reached, which cannot be allowed for electric motors. Furthermore, it is often necessary to consider saturation in controller design for systems with actuators that cannot provide inputs of unlimited magnitude. This is also not possible with state feedback control, which further complicates the practical application of the method. One of the objectives of this paper is to provide a novel control strategy that can be applied to systems linearized with feedback. The new methodology is presented on an electric motor driven pendulum.

As a further goal, the paper examines the possibility of using feedback linearization for state observation. The research demonstrates that it is possible to design a state observer for feedback linearized systems. Additionally, a feedback term can be specified for any controllable system to ensure observability, even if the initial system was not observable. The new methodology is presented for an initially linear but unobservable system, which can be made observable through feedback linearization.

Tartalomjegyzék

Absztrakt	1
Abstract	3
1. Bevezetés	5
2. Visszacsatolásos linearizáció elméleti háttere	7
2.1. Alapfogalmak	7
2.2. Visszacsatolással történő linearizáció tervezése	8
3. Újszerű szabályozási stratégia visszacsatolással linearizált rendszerekhez	10
3.1. Visszacsatolással linearizált rendszerek szabályozása állapotvisszacsatolás segítségével	10
3.2. A javasolt szabályozási stratégia	12
3.3. A szabályozási módszer szemléltetése egy mechatronikai rendszeren	13
3.3.1. A vizsgált rendszer modellje	13
3.3.2. Visszacsatolásos linearizáció tervezése a rendszer számára	15
3.3.3. Kaszkád szabályozás tervezése	15
3.3.4. Szimulációs eredmények	18
4. Nem megfigyelhető rendszerek megfigyelhetővé tétele visszacsatolásos linearizáció alkalmazásával	21
4.1. Az irányíthatósági kanonikus alakba történő transzformáció mátrixa lineáris rendszerek esetén	21
4.2. Visszacsatolásos linearizálhatóság lineáris rendszerre	23
4.3. Motivációs példa	25
4.4. Megfigyelhetőség biztosítása módosított visszacsatolásos linearizációval . .	27
4.4.1. Bizonyítás	28
5. DC motor érzékelőmentes szabályozása visszacsatolásos linearizáció alapú megfigyelővel	31
5.1. Az egyenáramú motor modellje	31
5.2. A javasolt módszer alkalmazása egyenáramú motorra	32
5.3. Luenberger megfigyelő tervezése	34
5.4. Szimulációs eredmények	36
5.5. Kísérleti eredmények	38
6. Konklúzió	41
Hivatkozások	43

1. Bevezetés

A visszacsatolós linearizálás (*feedback linearization*) a nemlineáris szabályozás tervezésének olyan módszere, amely az utóbbi években jelentős érdeklődést váltott ki [1]. Ennek a megközelítésnek a lényege, hogy a nemlineáris rendszerek dinamikáját algebrai úton (teljesen vagy részben) linearizálja, lehetővé téve ezzel a lineáris szabályozási technikák alkalmazását. Ez alapvetően eltér a hagyományos linearizálási módszerektől (mint például a Jakobi linearizálás [2]), mivel a visszacsatolós linearizálás állapottranszformációk és visszacsatolás révén történik [3], így a dinamika lineáris közelítése helyett egzakt megoldást képes nyújtani.

A visszacsatolós linearizálást sikeresen alkalmazták különféle gyakorlati szabályozási problémák megoldására, például helikopterek [4], nagy teljesítményű repülőgépek [5], ipari robotok [6] és orvosi biológiai eszközök [7] irányításában. Továbbá a módszert egyre gyakrabban alkalmazzák robusztus [8] és adaptív [9] szabályozásokban. Ugyanakkor a visszacsatolós linearizációs megközelítésnek számos jelentős hiányossága és korlátja van. Ezek a problémák a mai napig aktív kutatási területet képeznek.

A visszacsatolással történő linearizációhoz számos megközelítés terjedt el, a teljes, ún. egzakt linearizációtól [10] kezdve egészen a részleges [11], vagy egyszerűsített módszerekig [12]. Bármely eljárás esetén a visszacsatolással linearizált rendszerekhez adódik a pólusátthe-lyezésen alapuló állapotvisszacsatolós szabályozás alkalmazása. Ez azonban nem képes a rendszer belső állapotainak dinamikáját kézben tartani, valamint a telítődéssel kapcsolatos hatásokat kezelni, amely számos mechatronikai berendezés esetén elengedhetetlen.

Jelen dolgozat két aspektusát vizsgálja a visszacsatolós linearizáció mechatronikai rendszerekben történő alkalmazhatóságának. Elsőként egy újszerű szabályozási séma kerül kidolgozásra, mely a linearizáció végrehajtása után alkalmazható, és képes a rendszer belső állapotait is szabályozni. A javasolt módszer kaszkád stratégiával szabályozza a linearizált rendszer állapotait, amelyhez akár PID szabályozók is alkalmazhatók. A belső állapotok szabályozása mellett lehetőség nyílik a rendszer működésében jelenlévő telítődési hatások kezelésére is.

A dolgozat továbbá arra a kérdésre is keresi a választ, hogy miként alkalmazható a visszacsatolós linearizáció az állapotmegfigyelési módszerekben. Az érzékelőmentes (*sensorless*) szabályozások egyre nagyobb teret hódítanak napjainkban [13], és ezek jellemzően állapotmegfigyelésre épülnek, így különösen fontos a visszacsatolós linearizáción alapuló megközelítés tanulmányozása. A dolgozat bemutatja, hogy a linearizációs technika nemcsak, hogy alkalmas az állapotmegfigyelő alapjául, hanem a visszacsatolás segítségével képes egy eredetileg nem megfigyelhető rendszert is megfigyelhetővé képes tenni.

A mechatronikai rendszerek beavatkozó szervei a legtöbb esetben villamos gépek, melyek mozgásszabályozása egyre gyakrabban alapul visszacsatolással történő linearizáción [14][15]. Ezen gépek esetében elengedhetetlen a feszültség és az áramerősség korlátozása, továbbá

szabályozásukra gyakran alkalmaznak érzékelő nélküli megoldásokat is. Így mindkét kidolgozott módszer jól szemléltethető villamos hajtásokhoz kapcsolódó példán keresztül.

A javasolt kaszkád szabályozási stratégia a nemlineáris karakterisztikával rendelkező állandómágneses szinkronmotor (*Permanent Magnet Synchronous Machine, PMSM*) példáján kerül bemutatásra, mely egy nemlineáris tehetetlenséget jelentő inverz ingával kerül kiegészítésre. A visszacsatolásos linearizáció alkalmazhatósága megfigyelhetővé tételre egy lineáris, nem megfigyelhető rendszer példáján, az egyenáramú (DC) motor szögsebesség- és pozíciójának megfigyelésén keresztül kerülnek bemutatásra. A kidolgozott állapotmegfigyelő egy érzékelőmentes szabályozásban kerül felhasználásra, ezzel igazolva az eljárás alkalmazhatóságát.

A dolgozatban először a visszacsatolással történő linearizációs módszer alapjai kerülnek bemutatásra, majd a linearizált rendszerek esetén elterjedt állapotvisszacsatolásos szabályozás kerül ismertetésre. Ezzel hasonlítható össze a javasolt kaszkád szabályozási séma. A kidolgozott módszer bemutatása után, a PMSM által hajtott inverz inga pozíciószabályozásához kerül felhasználásra, ezen keresztül szemléltetve a szabályozás tervezésének lépéseit.

A dolgozat ezt követő részében a kidolgozott állapotmegfigyelési módszer kerül bemutatásra, mely képes akár lineáris, nem megfigyelhető rendszereket visszacsatolás útján megfigyelhetővé tenni. A módszer működésének igazolásához a lineáris és nemlineáris rendszerek irányíthatósága és megfigyelhetőségi közötti összefüggések kerülnek feltérképezésre, melyek segítségével adható általános megoldás a visszacsatoló tag tervezésére. A kidolgozott módszertan egy lineáris modellel leírható, nem megfigyelhető rendszeren, a DC motoron keresztül kerül ellenőrzésre.

2. Visszacsatolós linearizáció elméleti háttere

A visszacsatolással történő linearizáció egy olyan nemlineáris irányítási megközelítés, amely képes a rendszert közelítésektől mentesen linearizálni. A módszer alkalmazásával lehetőségünk nyílik az így kapott rendszer esetén lineáris szabályozási és megfigyelési eljárások alkalmazására. A következőkben a módszer alkalmazásához szükség matematikai eszköztár, valamint a tervezés lépései kerülnek bemutatásra.

2.1. Alapfogalmak

A visszacsatolós linearizáció tervezéséhez néhány matematikai eszköz bevezetésére van szükség. Az egyik ilyen fogalom az ún. Lie-derivált (*Lie derivative*) [3][16]. Ennek bemutatásához egy általános, nemlineáris rendszer

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{1}$$

állapottér modelljéből kiindulva, ahol $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ és $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ tetszőlegesen sokszor deriválható, sima függvények (vektorterek), a Lie-derivált a következőképp definiálható.

$$\mathcal{L}_{\mathbf{f}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}),\tag{2}$$

amelynek elnevezése $\mathbf{h}$ vektormező Lie-deriváltja $\mathbf{f}$ mentén. Az (1) egyenletben megadott nemlineáris rendszerekre definiálható a Lie-zárójel (*Lie bracket*) fogalma is, ami

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})\tag{3}$$

összefüggéssel adható meg, és elnevezése $\mathbf{g}$ Lie-zárójele $\mathbf{f}$ mentén.

A megadott nemlineáris rendszert jellemzi annak relatív fokszáma (*relative degree*). A rendszer relatív fokszáma ρ , ha az y kimenő jel ρ -adik idő szerinti deriváltjában jelenik meg először az u bemenő jeltől való függés, vagyis $y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}$ kifejezésekben nem szerepel a bemenet, $y^{(\rho)}$ -ban viszont már megjelenik. Egy rendszer visszacsatolással történő linearizálhatóságának feltétele, hogy a vizsgált rendszer relatív fokszáma megegyezzen a leíró állapotok számával, $\rho = n = \dim(\mathbf{x})$, vagy másképpen a

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) & \text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}(\mathbf{x}) & \dots & \text{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}\tag{4}$$

mátrix rangja megegyezik az állapotok számával, és az ebből képzett

$$\mathcal{D} = \text{span} \left\{ \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \text{ad}_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \right\}\tag{5}$$

disztribúció involutív, vagyis a Lie-zárójel műveletre nézve zárt. Észrevehető, hogy az utóbbi megközelítésben már a visszacsatolással linearizálhatóság nem függ a kimenet

megválasztásától, ellentétben a relatív fokszámhoz kapcsolódó definícióval. Ez azért lehetséges, mert valójában a linearizálhatóság akkor is érvényes, ha található a rendszerhez egy olyan $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ fiktív kimenet, amelyre a relatív fokszám maximális. Ez akkor teljesül, ha (4) és (5) egyenletek igazak.

Így matematikailag egy rendszer akkor és csak akkor linearizálható (statikus) állapotvisszacsatolással, ha található olyan $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ függvény, hogy az általa definiált $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ kimenetre a rendszer relatív fokszáma maximális legyen.

2.2. Visszacsatolással történő linearizáció tervezése

Ha egy rendszer visszacsatolással linearizálható, vagyis a fiktív vagy valós $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ kimenetre nézve a rendszer relatív fokszáma $\rho = n = \dim(\mathbf{x})$, akkor létezik a

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

állapottranszformáció [17], illetve ennek inverz transzformációja is, vagyis a transzformáció diffeomorfizmus. A transzformációt alkalmazva az új $\mathbf{z}$ állapotvektorra nézve kapott állapotter modell a következő formában konstruálható.

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_c\mathbf{z} + \mathbf{B}_c\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) [\mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})] \quad (7)$$

$$y = \mathbf{C}_c\mathbf{z}, \quad (8)$$

ahol

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ valamint } \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

és $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$, valamint $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$ az eredeti $\mathbf{x}$ állapotvektortól függő tagok. Ekkor a bemenő jel megfelelő megválasztásával mint

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\gamma}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (9)$$

a rendszer az $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ visszacsatoló tag segítségével linearizálható. Így a linearizált rendszer állapotegyenlete

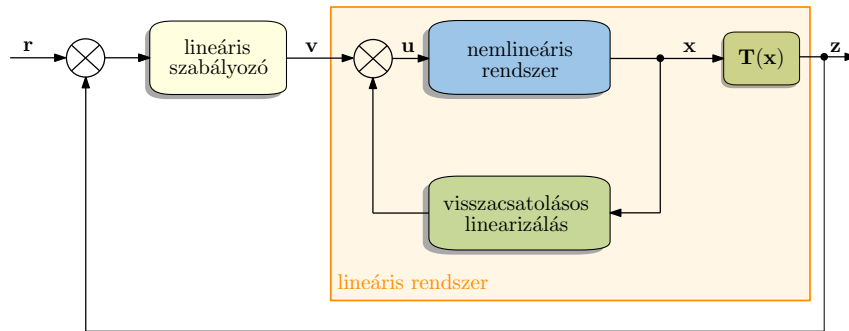
$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_c\mathbf{z} + \mathbf{B}_c\mathbf{v}. \quad (10)$$

Az így kapott rendszer irányíthatóságát vizsgálva

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c^2 \mathbf{B}_c & \dots & \mathbf{A}_c^{n-1} \mathbf{B}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

irányíthatósági mátrix adódik, amely igazolja, hogy a visszacsatolással linearizált rendszer minden esetben irányítható lesz (így a nemlineáris rendszerek relatív fokszáma és irányíthatósága között összefüggés fedezhető fel). Azonban ugyanez már nem mondható el a rendszer megfigyelhetőségéről, hiszen a linearizáció minden esetben egy olyan kimenetből indul ki, amelyre a relatív fokszám maximális. Ez lehet egy fiktív kimenet is, mely esetén a linearizáció után vissza kell térni az eredeti kimenethez, amelyre már nem feltétlen maximális a megfigyelhetőségi mátrix rangja.

A módszer alkalmazása után a kapott rendszerre alkalmazhatóvá válnak a lineáris szabályozási módszerek. A visszacsatolással linearizált rendszer felépítését a 1. ábra szemlélteti.



1. ábra. A visszacsatolással linearizált rendszer szemléltetése

3. Újszerű szabályozási stratégia visszacsatolással linearizált rendszerekhez

A visszacsatolással linearizált rendszerek jellemzően állapotvisszacsatolással kerülnek szabályozásra, hiszen az új $\mathbf{z}$ állapotterben lineáris rendszer esetén adódik, hogy egy újabb visszacsatolással egyszerűen szabályozható a rendszer. A következőekben bemutatásra kerül ez a szabályozási megközelítés, és ennek hátrányai. Ezután egy újszerű kaszkád szabályozási stratégia kerül bevezetésre, majd összehasonlításra az elterjedten alkalmazott állapotvisszacsatolásos szabályozással. A két módszer összevetése egy nemlineáris karakteristikájú állandómágneses szinkrongép által hajtott inverz inga pozícióján keresztül kerül szemléltetésre.

3.1. Visszacsatolással linearizált rendszerek szabályozása állapotvisszacsatolás segítségével

A modern szabályozáselméletben gyakran alkalmazott módszer az állapotvisszacsatolással történő szabályozás, mely során [18][19] a szabályozott rendszer pólusai állíthatók be a rendszer állapotainak egy erősítő mátrixon keresztül történő visszacsatolásán keresztül. A módszer alkalmazhatóságának feltétele a rendszer irányíthatósága, amely a visszacsatolással linearizált rendszer esetében már biztosított. A kapott

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_c \mathbf{z} + \mathbf{B}_c \mathbf{v}. \quad (12)$$

rendszerből kiindulva az állapotvisszacsatolásos szabályozás által adott beavatkozó jel

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K} \mathbf{z} \quad (13)$$

formában adható meg, ahol $\mathbf{K}$ a visszacsatoló mátrix. Ezzel az állapotegyenlet

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_c \mathbf{z} - \mathbf{B}_c \mathbf{K} \mathbf{z} = (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K}) \mathbf{z} \quad (14)$$

kifejezésre módosul, amelyből a $\mathbf{z}$ állapotok időfüggvénye

$$\mathbf{z}(t) = e^{(\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K})t} \mathbf{z}_0, \quad (15)$$

ahol $\mathbf{z}_0$ jelöli a kezdeti állapotokat. Az időfüggvény alapján észrevehető, hogy az állapotok konvergenciája a $\mathbf{K}$ erősítési mátrix megfelelő beállításával biztosítható. Az állapotok dinamikája az $(\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K})$ mátrix pólusainak megválasztásával hangolható, például Ackermann-formula [20] segítségével. Ezzel a tervezni kívánt $\mathbf{K}$ visszacsatoló tag

$$\mathbf{K} = \mathbf{e}_n^\top \mathbf{M}_c^{-1} \phi_c(\mathbf{A}_c) \quad (16)$$

összefüggéssel határozható meg, ahol $\mathbf{e}_n$ az n -edik egységvektor, $\mathbf{M}_c$ a (11) egyenlet alapján kiszámított irányíthatósági mátrix, valamint $\phi_c(\mathbf{A}_c)$ a beállítani kívánt pólusokból összeállított karakterisztikus polinom, amelybe az $\mathbf{A}_c$ mátrix kerül behelyettesítésre.

Azonban a $\mathbf{K}$ visszacsatolás beiktatásával a rendszer csak nullára szabályozható pontosan, nem nulla referencia esetén maradó hibával terhelt az eredmény. Ennek kiküszöböléséhez statikus alapjelkompenzáció kerül bevezetésre. A megfelelő kompenzációs tag kereséséhez Laplace-transzformáljuk a (14) állapotegyenletet, így

$$\mathbf{Z}(s) = [s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c\mathbf{K}_c)]^{-1} \mathbf{B}_c\mathbf{R}(s) \quad (17)$$

alakhoz jutunk, ahol s a Laplace-operátor, $\mathbf{Z}(s)$ az állapotvektor, $\mathbf{R}(s)$ a referencia Laplace-transzformáltja. Ez alapján a kimenő jel Laplace-transzformáltja

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}_c\mathbf{Z}(s) = \mathbf{C}_c [s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c\mathbf{K}_c)]^{-1} \mathbf{B}_c\mathbf{R}(s). \quad (18)$$

Az r_0 nagyságú egységugrás referenciát feltételezve végérték tétel használatával az alábbi módon számítható. Az állandósult állapotbeli kimenő jel

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\mathbf{Y}(s) = -\mathbf{C}_c [s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c\mathbf{K}_c)]^{-1} \mathbf{B}_c r_0, \quad (19)$$

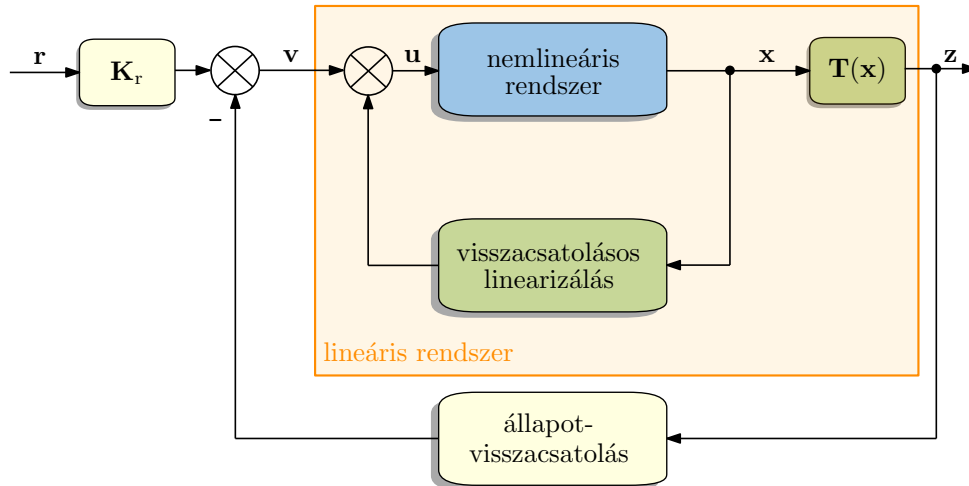
így a rendszer erősítése

$$-\mathbf{C}_c (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c\mathbf{K}_c)^{-1} \mathbf{B}_c, \quad (20)$$

vagyis

$$\mathbf{K}_r = [-\mathbf{C}_c (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c\mathbf{K}_c)^{-1} \mathbf{B}_c]^{-1} \quad (21)$$

alapjel kompenzáló tag beiktatására van szükség ahhoz, hogy bármilyen konstans értékű referenciát követni tudjon a rendszer. Az így kialakított szabályozó kör a 2. ábrán látható. Érdeemes megjegyezni, hogy a referenciakövetés biztosításához más alapjelkompenzációs módszer is használható lenne, például állapotvisszacsatolástól független kompenzáció, vagy dinamikus, integráló hatásra alapozott referenciakompenzáció is.



2. ábra. A visszacsatolással linearizált rendszer állapotvisszacsatolással történő szabályozása

Megfigyelhető, hogy az állapotvisszacsatolással szabályozott rendszer pólusai egyszerre voltak beállíthatók, vagyis az egyes belső állapotok dinamikája nem volt külön kezelhető. Tehát a szabályozás során pusztán a kimeneti jel(ek) beállása követhető nyomon, illetve állítható be a visszacsatoló tag segítségével.

3.2. A javasolt szabályozási stratégia

Mechatronikai rendszerek esetében azonban gyakori követelmény, hogy a beavatkozók szaturációs korlátait figyelembe vegyük, vagy elkerüljük a szenzorok túlterhelését, így a belső állapotok szabályozása is kiemelt figyelmet igényel. Jelenleg nincs még elterjedt megoldás, amely visszacsatolással linearizált rendszerek esetén hatékony megoldást ad a belső állapotok külön történő kezelésére.

Az új szabályozási megközelítés alapja egy kaszkád struktúra, amely a visszacsatolással linearizált rendszer állapotait egymásba ágyazott szabályozó körök segítségével képes szabályozni.

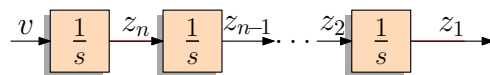
A visszacsatolással linearizált rendszerek esetén a rendszer állapottér modellje, ahogy a 2.2. fejezetben bemutatásra került, az alábbi

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}. \quad (22)$$

Tehát a kapott rendszer egy integrátor sort képez, melynek egyes állapotaira vonatkozó egyenletei

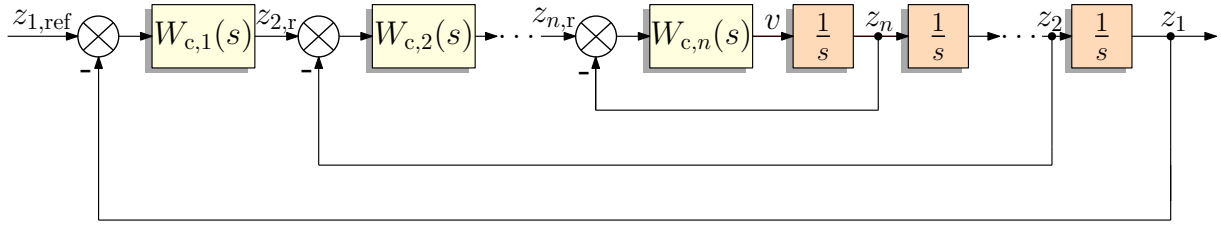
$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v. \end{aligned} \quad (23)$$

A kapott rendszer felépítését a 3. ábra illusztrálja.



3. ábra. A visszacsatolással linearizált rendszer szemléltetése

Az integrátorokká bontott rendszerhez már tervezhető a klasszikusan alkalmazott állapotvisszacsatolás helyett kaszkád szabályozás, amelyet a 4. ábra szemléltet.

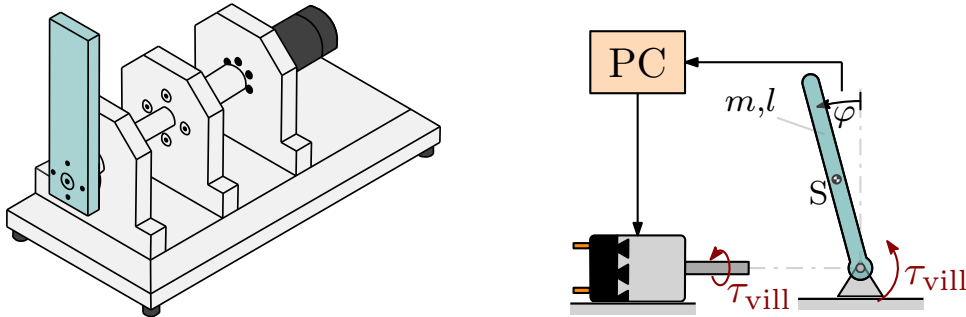


4. ábra. A javasolt szabályozási módszer felépítése

A javasolt szabályozási körben $W_{c,i}(s)$ -sel jelölt szabályozók a PID szabályozócsaládból tetszőlegesen választhatók. Ennek a módszernek az előnye, hogy az egyes PID szabályozók által irányított belső z_i állapotok tetszőlegesen hangolhatók. Továbbá, a szabályozók kimenetei, ezáltal a $z_{i,ref}$ referenciák értékénél figyelembe lehet venni szaturációs hatásokat is. A PID szabályozók tervezése és a szaturációs limitek számítása egy konkrét példán keresztül kerül bemutatásra.

3.3. A szabályozási módszer szemléltetése egy mechatronikai rendszeren

A következőkben a kidolgozott módszertan egy inverz inga pozíciószabályozásán keresztül kerül bemutatásra. A vizsgált rendszer felépítése az 5. ábrán látható.



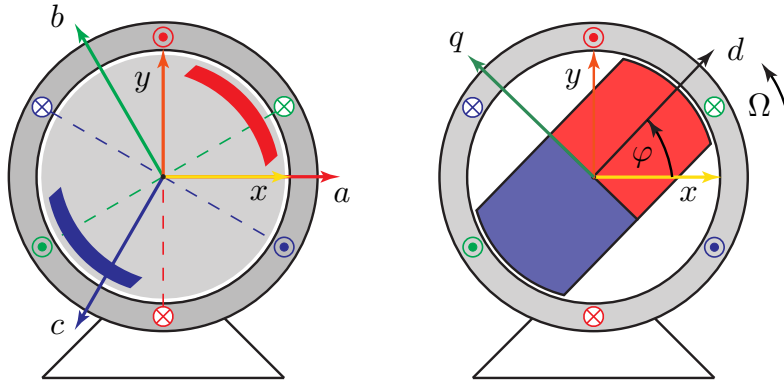
5. ábra. A vizsgált rendszer felépítése

Az inga hajtását egy önmagában is nemlineáris karakterisztikával rendelkező állandómágneses szinkronmotor (PMSM) biztosítja. A motor forgórészének szögelfordulása és szögsebessége alapján valósítható meg az inga pozíciószabályozása. Emellett szükség van a motor áramerősségének folyamatos szabályozására, ahogy a villamos motorok esetén egy bevett eljárás [21].

3.3.1. A vizsgált rendszer modellje

A PMSM hajtások rotorja állandómágneest tartalmaz. A mágnes által létrehozott állandó mágneses tér kölcsönhatásba lép az állórész áramjárta tekercsének forgó mágneses terével. Ebből a kölcsönhatásból jön létre a motor által leadott villamos nyomaték.

A szinkronmotorok mozgását jellemzően a forgórészhez rögzített d - q koordinátarendszerben írják le [22], melynek viszonyát a háromfázisú a - b - c és az állórészhez rögzített x - y koordinátarendszerrel a 6. ábra szemlélteti.



6. ábra. Az állandómágneses szinkronmotor mozgását leíró koordinátarendszerek

A rotor Ω szögsebessége és a forgó mágneses tér ω villamos szögsebessége közti kapcsolat

$$\omega = P \Omega, \quad (24)$$

ahol P a motor póluspárjainak száma. Hasonlóan az φ mechanikai szöghelyzet és a α villamos szögelfordulás közti kapcsolat

$$\alpha = P \varphi. \quad (25)$$

A motor villamos egyenletei a rotorhoz rögzített koordinátarendszerben [23] a következők

$$\begin{aligned} u_d &= R i_d + L \frac{di_d}{dt} - \omega L i_q, \\ u_q &= R i_q + L \frac{di_q}{dt} + \omega (L i_d + \psi_p), \end{aligned} \quad (26)$$

ahol u_{dq} és i_{dq} jelölik a d - q koordinátarendszerben felírt feszültség- és áramkomponenseket. Továbbá R jelöli az állórész ellenállását, L az induktivitást, míg ψ_p a rotor pólusfluxusa. Az i_q áramkomponens hozza létre a motor villamos nyomatékát, amely

$$\tau_{\text{vill}} = \frac{3}{2} P \psi_p i_q = K_t i_q \quad (27)$$

alakban adható meg szimmetrikus forgórészű motor esetén. A q irányú áramkomponens és a villamos nyomaték közti kapcsolatot a K_t nyomatékkonstans írja le. A rotorra szerelt inverz ingával kiegészített hajtás mozgásegyenletét felírva

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \tau_{\text{vill}} + \frac{1}{2} m g l \sin \varphi = K_t i_q + \frac{1}{2} m g l \sin \varphi \quad (28)$$

összefüggés adódik, ahol m az inga tömege, l a hossza, J a motor forgástengelyére számított tehetetlenségi nyomaték, vagyis $J = \frac{1}{3} m l^2$. A modellezés során feltételeztük, hogy a motor forgórészének tehetetlenségi nyomatéka elhanyagolható az inga tehetetlenségéhez képest.

3.3.2. Visszacsatolós linearizáció tervezése a rendszer számára

A rendszer villamos és mechanikai egyenletei alapján összeállítható a rendszer nemlineáris állapotter modellje

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_q \\ \Omega \\ \varphi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L}i_q - P i_d \Omega - \frac{\psi_p}{L} P \Omega \\ \frac{3K_t}{ml^2} i_q + \frac{3g}{2l} \sin \varphi \\ \Omega \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})} u_q. \quad (29)$$

Mivel az i_d áramkomponens nincs hatással a szögsebesség, illetve szögelfordulás alakulására, ezt nem szükséges állapotként felvenni. A szabályozás során ez egy teljesen különálló szabályozókörrrel nullára szabályozható.

A visszacsatolással történő linearizációhoz szükséges transzformáció felírható az alábbi alakban

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_f h(\mathbf{x}) \\ L_f^2 h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \Omega \\ \frac{3K_t}{ml^2} i_q + \frac{3g}{2l} \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Ebből a transzformált állapotterbeli állapotegyenlet felírható, mint

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_c} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_c} \underbrace{\frac{3K_t}{Lml^2}}_{\gamma} \left[\underbrace{u_q - Ri_q - \psi_p P \Omega - P i_d \Omega + \frac{gLm}{2K_t} \cos \varphi \Omega}_{-\alpha(\mathbf{x})} \right]. \quad (31)$$

Ekkor

$$u = \gamma^{-1} v + \alpha(\mathbf{x}) = \frac{Lml^2}{3K_t} v + Ri_q + \psi_p P \Omega + P i_d \Omega - \frac{gLm}{2K_t} \cos \varphi \Omega \quad (32)$$

választással élve, a következő linearizált rendszer kapható.

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_c \mathbf{z} + \mathbf{B}_c v, \quad (33)$$

amely (23)-nek megfelelően felbontható, és a PID szabályozók megtervezhetők a rendszerhez.

3.3.3. Kaszkád szabályozás tervezése

A szabályozási kör tervezését a legbelső z_n állapot szabályozásával kell kezdenünk, mely az inga esetében a z_3 állapotnak felel meg. A (30) alapján kapott homogén transzformáció szerint

$$z_3 = \frac{3K_t}{ml^2} i_q + \frac{3g}{2l} \sin \varphi, \quad (34)$$

vagyis közvetetten a motor nyomatékképző q irányú áramkomponensét képes szabályozni.

A

$$W_{p,3} = \frac{1}{s} \quad (35)$$

szakaszhoz kell valamilyen szabályozót választani a PID családból. Mivel a szakasz egy integrátor, egy egyszerű P szabályozóval is maradó hiba nélküli szabályozás kapható.

$$W_{c,3} = P_3 \quad (36)$$

szabályozó esetén a zárt köri átviteli függvény

$$W_{cl,3} = \frac{W_{c,3}W_{p,3}}{1 + W_{c,3}W_{p,3}} = \frac{\frac{P_3}{s}}{1 + \frac{P_3}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{P_3}s + 1} = \frac{1}{T_3s + 1}, \quad (37)$$

vagyis egy statikusan pontos, egytárolós rendszert kaptunk a belső körre. A P tagot az elvárt beállási idő alapján tudjuk megválasztani, amely egytárolós rendszer esetén a 2%-os sávhoz tartozó beállási időt tekintve

$$t_{2\%} = \ln(50) T_3 \approx 4T_3 = 4\frac{1}{P_3} \quad (38)$$

összefüggéssel írható le. Ebből a beállítani kívánt P tag

$$P_3 \approx \frac{4}{t_{2\%}}. \quad (39)$$

A következő lépés a közbülső szabályozó kör, vagyis a $z_2 = \Omega$ szögsebesség szabályozás megtervezése. Ebben az esetben a szakasz már

$$W_{p,2} = \frac{1}{T_3s + 1} \frac{1}{s}, \quad (40)$$

melyhez tervezhető például megvalósítható PD szabályozó. Ez esetben a szakasz átviteli függvénye

$$W_{c,2} = P_2 \frac{T_2s + 1}{T_2's + 1}, \quad (41)$$

ahol a deriváló időállandó megválasztható úgy, hogy kiejtse a szakasz időállandóját, vagyis $T_2 = T_3$. Ekkor jellemzően $T_2' = 0,1T_2$, így a felnyitott kör

$$W_{o,2} = W_{c,2}W_{p,2} = \frac{P_2}{s(T_2's + 1)} \quad (42)$$

alakú. A szabályozó P tagja például előre meghatározott fázistartalékra tervezhető.

A külső $z_1 = \varphi$ pozíciót szabályozó kör tervezéséhez a szükség van a két belső kör eredő átviteli függvényére, mely

$$W_{cl,2} = \frac{W_{c,2}W_{p,2}}{1 + W_{c,2}W_{p,2}} = \frac{P_2}{s(T_2's + 1) + P_2} \approx \frac{P_2}{s + P_2}, \quad (43)$$

ha feltételezzük, hogy $P_2 \gg T_2'$, Ez megtehető, hiszen $T_2' = 0,1T_2 = 0,1T_1 = 1/(10P_2)$ választással éltünk a tervezés során. Így a külső kör által szabályozott szakasz

$$W_{p,1} = \frac{P_2}{s + P_2} \frac{1}{s}. \quad (44)$$

Ehhez például tervezhető egy P szabályozó, így

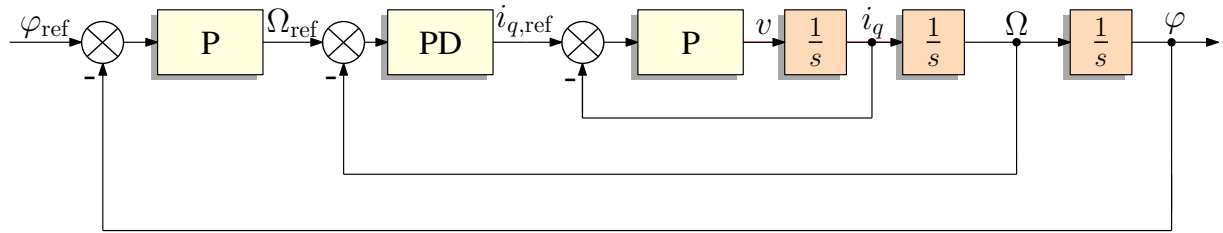
$$W_{cl,1} = \frac{W_{c,1}W_{p,1}}{1 + W_{c,1}W_{p,1}} = \frac{P_1}{s(s + P_2) + P_1} = \frac{P_1}{s^2 + P_2s + P_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}, \quad (45)$$

vagyis a zárt kör egy kéttárolós tagnak felel meg. Ekkor a szabályozó megtervezhető a kéttárolós tag minőségi jellemzőinek beállításával. Mivel $P_2 = 2\zeta\omega_n$ értéket már korábban meghatároztuk

$$P_1 = \omega_n^2 = \left(\frac{P_2}{2\zeta}\right)^2, \quad (46)$$

vagyis a csillapítási tényező alapján meghatározható a külső kör szabályozójának erősítése.

Ezzel a vizsgált rendszer a 7. ábrán látható struktúra segítségével pozíciósabályozható.



7. ábra. A PMSM által hajtott inverz inga szabályozásának felépítése

A P és PD szabályozókhoz állítható szaturáció, ezzel biztosítható, hogy ne adjanak olyan kimenetet, amelyet a vizsgált rendszer nem képes kezelni. A belső kör esetében a v bemenet korlátozható úgy, hogy a linearizáción belüli u_q feszültség ne lépje át a motor névleges feszültségét. Ehhez a linearizációhoz használt (32) összefüggésből indulhatunk ki. Ez alapján

$$u \approx \gamma^{-1}v = \frac{Lml^2}{3K_t}v \quad (47)$$

közelítéssel adható meg a linearizált és a nemlineáris rendszer beavatkozó jele közti kapcsolat, a visszacsatoló tag elhagyásával. Így, ha a szaturációs limit a hajtás névleges U_n feszültsége, a v bemenetre

$$v < \frac{3K_t}{Lml^2}U_n \quad (48)$$

korlátozás állítható be a belső P szabályozóhoz.

Villamos hajtások esetén jellemzően az áramszabályozó kör számára adott referenciához is alkalmaznak szaturációt, ezzel biztosítva, hogy ne lépjük túl a motor névleges áramerősségeit. Mivel az i_q áramkomponens a visszacsatolásos linearizáció után a z_3 állapotban jelenik meg, ezek között lehetséges összefüggést meghatározni. Mivel a (30) egyenlet alapján

$$z_3 = \frac{3K_t}{ml^2}i_q + \frac{3g}{2l}\sin\varphi, \quad (49)$$

ahol a szinuszfüggvény csak -1 és 1 közötti értékeket vehet fel, így a z_3 állapot korlátozásának beállítása

$$z_3 < \frac{3K_t}{ml^2}i_{\max} \pm \frac{3g}{2l} \rightarrow z_3 < \frac{3K_t}{ml^2}i_{\max} - \frac{3g}{2l} \quad (50)$$

összefüggéssel határozható meg, ahol $i_{\max}$ az a maximális áramerősség, amit nem léphet át a hajtás. Az ez alapján kapott limitet szükséges a PD szabályozó számára beállítani.

A fenti korlátozások mellett, a szögsebesség referencia esetén is állítható szaturációs limit. Mivel $z_2 = \Omega$, a külső P szabályozó közvetlenül a szögsebességet szabályozza, ennek közvetlenül is állítható a szaturációs limitje.

3.3.4. Szimulációs eredmények

A javasolt szabályozókör szimulációja a 7. ábra alapján került összeállításra MATLAB Simulink környezetben. Emellett a 3.1. fejezetben bemutatott állapotviszacsatolás alapú szabályozás is megvalósításra került.

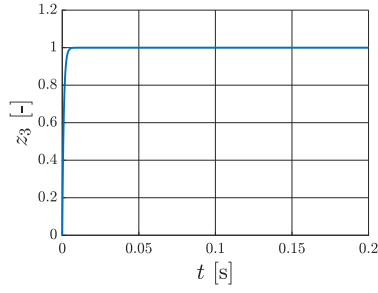
A szimulált hajtás és inga adatait a 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat. A vizsgált rendszer adatai

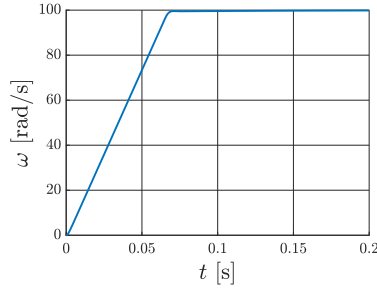
Paraméter	Értéke
Póluspárok száma (P)	1
Névleges feszültség (U_n)	36 V
Maximális áramerősség ($i_{\max}$)	8 A
Ellenállás (R)	4,37 Ω
Induktivitás (L)	0,493 $\cdot 10^{-3}$ H
Pólusfluxus (ψ_p)	0.0225 Wb
Nyomatékkonstans (K_t)	0,0338 Nm/A
Tehetetlenségi nyomaték (J)	13,5 $\cdot 10^{-7}$ kgm ²
Viszkózus csillapítási tényező (B)	1,5 $\cdot 10^{-5}$ Ns/m
Inga hossza (L)	150 mm
Inga tömege (m)	69,039 g

Ezen paraméterek ismeretében hangolhatók a PID szabályozók. A belső közvetetten áramot szabályozó kör esetén 0,005 s-os beállási idő került beállításra, a középső szögsebességszabályozás 45°-os fázistartalékra lett hangolva, míg a külső kör esetén $\zeta = 0,8$ értékű csillapítási tényező került beállításra.

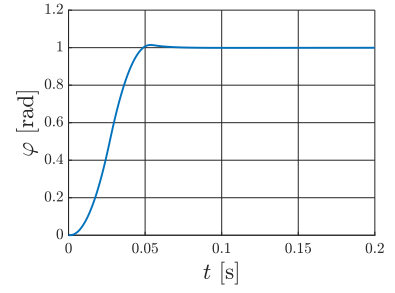
A hajtás névleges feszültsége és maximális árama alapján beállításra kerültek a PID szabályozók szaturációs limitjei is (48) és (50) egyenletek alapján. A szimulációs eredményeket a 8. ábra tartalmazza.



(a) z_3 állapot szabályozása



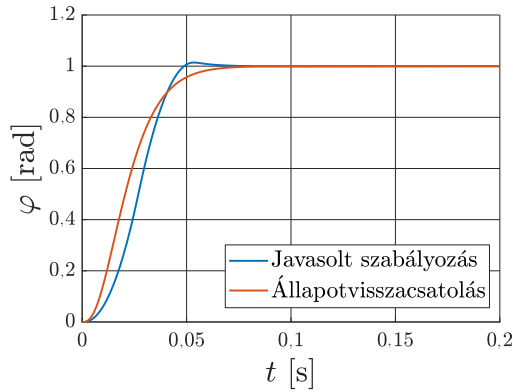
(b) z_2 állapot szabályozása



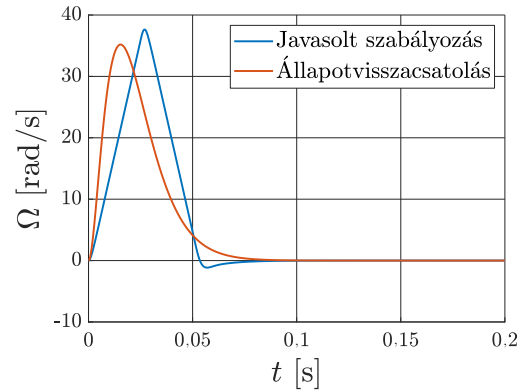
(c) z_1 állapot szabályozása

8. ábra. Az egyes szabályozókörök beállításai

Látható, hogy az egyes szabályozó körök beállása megfelel a beállított jellemzőknek. A javasolt módszer az állapotviszacsatolásos szabályozással is összehasonlításra került. Az állapotviszacsatolás esetén a (16) egyenlet segítségével beállított pólusok $s_{1,2,3} = -100$ értékre lettek hangolva. Ezzel a két szabályozási kör hasonló beállási idővel bír. A PMSM hajtás d irányú, fluxusképző áramkomponense mindkét esetben egy különálló szabályozókörrel nullára lett szabályozva. Az összehasonlítás eredményét a 9. és 10. ábrák szemléltetik.

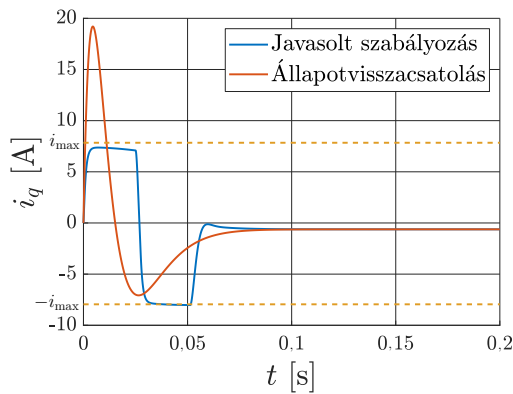


(a) Szögelfordulás

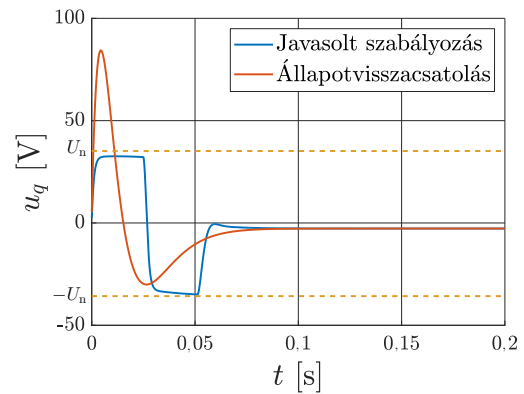


(b) Szögsebesség

9. ábra. A vizsgált rendszer állapotainak időfüggvényei



(a) Áramerősség



(b) Feszültség

10. ábra. A vizsgált rendszer i_q áramerősségének és u_q feszültségének időfüggvényei, a beállítani kívánt szaturációs korlátokhoz viszonyítva (sárgával)

Megfigyelhető, hogy a két megközelítés hasonló beállási idővel rendelkezett, azonban míg az állapotviszacsatolás a szabályozás során átlépte a motor feszültség- és áramkorlátjait, a javasolt kaszkád struktúra képes volt ezt figyelembe venni, így a kidolgozott módszer eredményesnek bizonyult.

4. Nem megfigyelhető rendszerek megfigyelhetővé tétele visszacsatolásos linearizáció alkalmazásával

A következőkben bemutatásra kerül a lineáris rendszerek irányíthatóságának és megfigyelhetőségének kapcsolata a visszacsatolással linearizálhatósággal. Ebből levezethető, hogy hogyan található lineáris rendszerekhez olyan kimenet, amelyre nézve a rendszer relatív fokszáma maximális, így visszacsatolással linearizálható.

Ezután igazolásra kerül, hogy a linearizáció folyamata miként eredményezhet megfigyelhető rendszert, valamint hogyan garantálható, hogy a visszacsatolásos linearizációs módszer minden esetben megfigyelhető rendszert biztosítson. Ehhez a linearizációs módszer módosítására van szükség, mellyel lehetőség nyílik arra, hogy bármilyen nem megfigyelhető rendszer esetén meghatározzunk egy olyan módosított visszacsatoló tagot, amely képes megfigyelhetővé tenni a rendszert.

4.1. Az irányíthatósági kanonikus alakba történő transzformáció mátrixa lineáris rendszerek esetén

A lineáris modellel leírható, szigorúan szabályos (*strictly proper*) rendszerek állapotter modellje általános formában

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{51}$$

Bármely rendszer irányíthatósági kanonikus alakra transzformálható, mely a következő állapotter modellel írható le.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} &= \mathbf{A}_c\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c\mathbf{z}(t),\end{aligned}\tag{52}$$

ahol $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, valamint

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.\tag{53}$$

Felhasználva, hogy $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}$, az állapotrepresentációk mátrixai közötti kapcsolat

levezethető, mint

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c &= \mathbf{TAT}^{-1} \\ \mathbf{B}_c &= \mathbf{TB} \\ \mathbf{C}_c &= \mathbf{CT}^{-1}.\end{aligned}\tag{54}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixra vonatkozó egyenletből kiindulva

$$\mathbf{A}_c \mathbf{T} = \mathbf{TA},\tag{55}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n \end{bmatrix},\tag{56}$$

vagyis

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n \end{bmatrix} \mathbf{A}.\tag{57}$$

Elvégezve a mátrixszorzást a következő egyenlet adható meg.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n \\ -a_0 \mathbf{T}_1 - a_1 \mathbf{T}_1 \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n \end{bmatrix} \mathbf{A},\tag{58}$$

amiből észrevehető, hogy a transzformációs egyenlet egyes elemei

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_i \mathbf{A}\tag{59}$$

összefüggéssel megadhatók, amely a következő rekurzív formulához vezet.

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_1 \mathbf{A}^{i-1},\tag{60}$$

így a transzformációs mátrix megadható mint

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{T}_1 \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_1 \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}.\tag{61}$$

A kapott összefüggést helyettesítsük be a $\mathbf{B}$ -re kapott egyenletbe, így

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{T}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_1\mathbf{A}\mathbf{B} \\ \mathbf{T}_1\mathbf{A}^2\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_1\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}. \end{bmatrix} \quad (62)$$

Mivel a mátrix elemei konstansok, ez megegyezik

$$\mathbf{B}_c = (\mathbf{T}_1\mathbf{M}_c)^\top \quad (63)$$

állítással, amelyből

$$\mathbf{B}_c^\top = \mathbf{T}_1\mathbf{M}_c, \quad (64)$$

vagyis

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{B}_c^\top \mathbf{M}_c^{-1}. \quad (65)$$

vezethető le a transzformációs mátrix első elemére. Mivel $\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ez a kifejezés az $\mathbf{M}_c^{-1}$ mátrix utolsó sorát választja ki. Ezt az utolsó sort nevezzük el ℓ -nak, így a transzformációs mátrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \ell \\ \ell\mathbf{A} \\ \ell\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \ell\mathbf{A}^{n-1}. \end{bmatrix} \quad (66)$$

alakban adható meg.

4.2. Visszacsatolós linearizálhatóság lineáris rendszerre

Ahogy az korábban említésre került, egy rendszer akkor és csak akkor linearizálható visszacsatolással, hogyha található hozzá olyan kimenet, amelyre a vizsgált rendszer relatív fokszáma maximális. Ahhoz, hogy egy rendszer relatív fokszáma teljes legyen, a következő feltételeknek kell teljesülnie [24]

$$\mathcal{L}_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (67)$$

amely biztosítja, hogy a kimeneti egyenletben nem jelenik meg a bemenet. Emellett

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (68)$$

is szükséges, amely azt biztosítja, hogy a kimenet első idő szerinti deriváltja nem függ a bemenettől. Ennek egészen a kimenet $(n-2)$ -edik deriváltjáig, vagyis

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-2} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (69)$$

összefüggésig teljesülnie kell. Az $(n-1)$ -edik derivált esetén már meg kell jelennie a bemenetnek, így

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \quad (70)$$

Összefoglalva

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (71)$$

egyenletrendszernek kell teljesülnie. Vizsgáljuk meg az egyenletrendszer első tagját.

$$\mathcal{L}_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (72)$$

ahol lineáris rendszer esetén $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}$. Észrevehető továbbá, hogy $\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_1} \end{bmatrix}$ éppen megegyezik a lineáris rendszerek $\mathbf{C}$ kimeneti mátrixával, vagyis lineáris esetben $\mathcal{L}_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{CB} = \mathbf{0}$. A (71) egyenletrendszer második tagját vizsgálva

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_g (\mathcal{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathcal{L}_g \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right), \quad (73)$$

ahol lineáris esetben $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$. Ez alapján $\mathcal{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_g (\mathbf{CAx})$ és

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\delta(\mathcal{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\delta \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{\delta(\mathbf{CAx})}{\delta \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{CAg}(\mathbf{x}) = \mathbf{CAB}. \quad (74)$$

A következő tag

$$\mathcal{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\delta(\mathcal{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\delta \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\delta(\mathbf{CAx})}{\delta \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{CAf}(\mathbf{x}) = \mathbf{CA}^2 \mathbf{x} \quad (75)$$

összefüggés segítségével

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\delta(\mathcal{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\delta \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{CA}^2 \mathbf{B} \quad (76)$$

formában adódik lineáris rendszer esetén. Ezek alapján a következő rekurzív formula adható meg az egyenletrendszer tagjaira.

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^i \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\delta(\mathcal{L}_f^i \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\delta \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{CA}^i \mathbf{B}, \quad (77)$$

amiből

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} \\ \mathbf{CAB} \\ \mathbf{CA}^2 \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Az egyenlet transzponálása, valamint $\mathbf{C}$ kiemelése után

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Vagyis a $\mathbf{C}$ kimeneti mátrix, amire a rendszer visszacsatolással linearizálható (vagyis irányítható),

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{M}_c^{-1}. \quad (80)$$

Észrevehető, hogy az így kapott $\mathbf{C}$ ekvivalens a 4.1. fejezetben látott $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{T}_1$ vektorral. Megjegyezhető, hogy ezek alapján az, hogy létezik az $\boldsymbol{\ell}$ vektor, vagyis az irányíthatósági kanonikus alakba történő transzformáció mátrixának létezése a feltétele a lineáris rendszer visszacsatolással történő linearizálhatóságának is. Ez összhangban van a rendszer irányíthatóságával szemben támasztott elvárásokkal, hiszen az irányíthatóság feltétele az $\mathbf{M}_c$ irányíthatósági mátrix, valamint annak inverzének létezése (vagyis, hogy a mátrix rangja maximális).

Emellett az is megállapítható, hogy ezen feltételek teljesülése esetén az (66) alapján $\mathbf{C} = \boldsymbol{\ell}$ mátrix felhasználásával kapott transzformációs mátrix megegyezik a kiválasztott kimenettel képzett $\mathbf{M}_o$ megfigyelhetőségi mátrixszal, azaz

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (81)$$

mátrixszal. Tehát összefoglalva elmondható, hogy ha a rendszer irányítható, akkor található hozzá olyan kimeneti mátrix, amelyre nézve megfigyelhető lesz a rendszer, és ez a kimenet lesz ugyanaz a fiktív kimenet, amelyre visszacsatolással linearizálható lesz a rendszer. Természetesen a linearizáció elvégzése után szükséges visszatérni az eredeti kimenetre, amelyet immár az új $\mathbf{z}$ állapotvektor segítségével kell meghatározni.

4.3. Motivációs példa

Vegyük egy lineáris rendszert, amely irányítható, de nem megfigyelhető, például

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (82)$$

rendszert. A rendszer irányíthatósági mátrixa

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (83)$$

valóban teljes rangú, vagyis irányítható, míg megfigyelhetőségi mátrixa

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad (84)$$

nem teljes rangú. A megfelelő kimeneti mátrix kereséséhez szükség van az irányíthatósági mátrix inverzére, mely

$$\mathbf{M}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Ennek utolsó sora adja meg azt a kimeneti mátrixot, melyre a rendszer visszacsatolással linearizálható (és megfigyelhető), így

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (86)$$

A fiktív kimenet felhasználásával a linearizálni kívánt rendszer

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{x} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 \\ -2x_2 + x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})} u \\ \tilde{y} &= \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} = \underbrace{x_1}_{\mathbf{h}(\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (87)$$

A 2.2. fejezetben bemutatott visszacsatolásos linearizáció tervezésnek megfelelően az új állapotvektor

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}^2\mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A} \\ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 + x_2 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Így az új állapotvektor felhasználásával kapott állapotegyenlet

$$\frac{d}{dt}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u + 4x_1 - 4x_2 + x_3]. \quad (89)$$

Így

$$u = v - 4x_1 + 4x_2 - x_3 \quad (90)$$

visszacsatolás alkalmazásával a rendszer linearizálható. Végül a linearizált rendszer fiktív kimenete helyett vissza kell térni az eredeti $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = x_2$ kimenetre, ami a (88) egyenlet alapján

$$x_2 = z_2 + 2x_1 = z_2 + 2z_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}. \quad (91)$$

Ekkor a linearizált rendszer állapottér modellje

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{z} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_c} \mathbf{z} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_c} v, \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_c} \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (92)$$

A kapott rendszer megfigyelhetőségi mátrixa

$$\mathbf{M}_{o,c} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (93)$$

vagyis az így kapott rendszer megfigyelhető. Tehát az eredetileg nem megfigyelhető lineáris rendszerhez a visszacsatolós linearizáció technikát alkalmazva található olyan visszacsatoló tag, amely képes a rendszert megfigyelhetővé tenni.

4.4. Megfigyelhetőség biztosítása módosított visszacsatolós linearizációval

Ahogy az előzőekben bemutatásra került, amennyiben az eredeti rendszer irányítható, található olyan kimenet, amelyre a rendszer visszacsatolással linearizálható. A 4.3. fejezet motivációs példája esetében látható volt, hogy a linearizáció elvégzése után, az eredeti kimenetre való visszatérés után lehetséges, hogy már önmagában egy megfigyelhető rendszert kaptunk eredményül.

Azonban a linearizáció elvégzése nem biztosítja, hogy a linearizált rendszer megfigyelhető. Lehetséges, hogy olyan $\mathbf{C}_c$ kimeneti vektor adódik, melyre nem megfigyelhető a rendszer. Ebben az esetben a linearizáció visszacsatoló tagjának módosításával biztosítható a linearizált rendszer megfigyelhetősége.

Ehhez az 2.2. fejezet visszacsatoló tagját a következőképpen kell módosítani

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\gamma}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (94)$$

ahol $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ pont megegyezik az első z_1 állapotváltozóval, így az állapotegyenlet a következő-

képp módosul

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{c,m}} \mathbf{z} + \mathbf{B}_c \gamma(x) \left[\underbrace{\mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha}(x) - \gamma^{-1}(\mathbf{x})z_1}_{-\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})} \right], \quad (95)$$

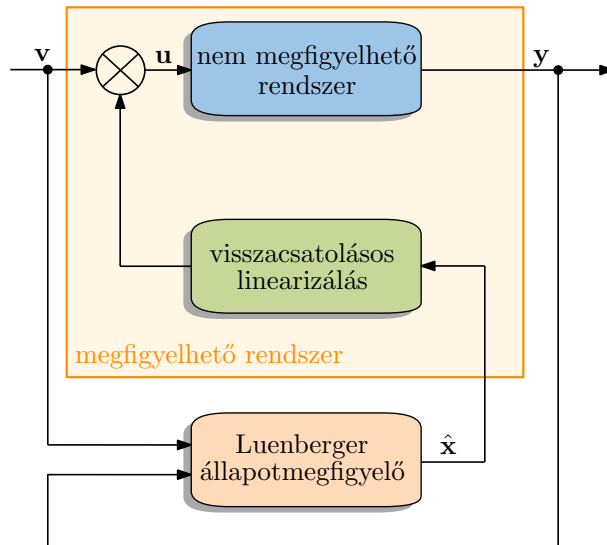
vagyis (94) egyenlettel kapott

$$\mathbf{u} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) + \gamma^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (96)$$

bemenet megválasztás alkalmazásával a linearizált rendszer állapotegyenlete

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{c,m}\mathbf{z} + \mathbf{B}_c\mathbf{v}, \quad (97)$$

melyre már tetszőleges $\mathbf{C}_c$ kimeneti mátrix esetén megfigyelhető a rendszer, így a 11. ábrán látható módon tervezhető hozzá megfigyelő is.



11. ábra. A visszacsatolásos linearizációra alapozott megfigyelés felépítése

4.4.1. Bizonyítás

Az így kapott $\mathbf{A}_c$ mátrix esetén [25], hogyha a $\mathbf{C}_c$ mátrix egyetlen nem nulla elemet tartalmaz, azaz

$$\mathbf{C}_c = \left[\underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{m-1 \text{ db}} \quad c \quad \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{n-m \text{ db}} \right], \quad (98)$$

ahol $c \neq 0 (\in \mathbb{R})$ az n elemű kimeneti mátrix m -edik eleme. Ekkor az

$$\mathbf{M}_{o,c,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_{c,m} \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_{c,m}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_{c,m}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (99)$$

megfigyelhetőségi mátrix első sora maga $\mathbf{C}_c$, a következő elem $\mathbf{C}_c \mathbf{A}_{c,m}$ pont az $\mathbf{A}_{c,m}$ mátrix m -edik sora. Az állapotmátrix (95) egyenletben megadott formájából adódóan az m -edik sorban az $m+1$ -edik helyen szerepel c , vagyis

$$\mathbf{C}_c \mathbf{A}_{c,m} = \left[\underbrace{0 \ \dots \ 0}_{m \text{ db}} \ c \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{n-(m+1) \text{ db}} \right]. \quad (100)$$

Ezek alapján elmondható, hogy $\mathbf{C}_c \mathbf{A}_{c,m}$ mindenképpen lineárisan független $\mathbf{C}_c$ -től, hiszen a megjelenő c érték eggyel nagyobb sorszámú elem lesz. Az $m = n$ esetben különbség, hogy ekkor az utolsó sort választja ki a kimeneti mátrix, ahol az 1 érték nem az $n+1$ -edik helyen, hanem az első helyen van, vagyis ebben az esetben is $\mathbf{C}_c$ -től lineárisan független sort kaptunk.

A következő sor esetén $\mathbf{C}_c \mathbf{A}_{c,m}^2$ előállításához az előzőekben kapott sorvektorral szorozzuk az $\mathbf{A}_{c,m}$ mátrixot, így megint eggyel „tolódni” fog a kapott sorvektorban c helye. Így megállapítható, hogy mindig

$$\mathbf{C}_c \mathbf{A}_{c,m}^k = \left[\underbrace{0 \ \dots \ 0}_{m+k-1 \text{ db}} \ c \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{n-(m+k) \text{ db}} \right] \quad (101)$$

lesz a k -adik sorvektor. Amennyiben $m + k = n$, az utolsó sor kerül kiválasztásra, majd a $m + k > n$ esetben a mátrix első sorától kezdve választjuk ki a sorokat. Mivel az állapotmátrix sorai is lineárisan függetlenek voltak, és megfigyelhető, hogy sorcserékkel egységmátrixszá alakítható, az ebből $k = 0 \dots n-1$ értékek esetén mindig egymástól lineárisan független sorokat kapunk. Az így előállt megfigyelhetőségi mátrix

$$\mathbf{M}_{o,c} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(n-m \times n-m)} \\ \mathbf{I}_{(m \times m)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (102)$$

formában adódik, ahol a $\mathbf{I}$ elemek a megadott dimenzióval rendelkező egységmátrixok. Az így kapott megfigyelhetőségi mátrix tehát teljes rangú lesz, vagyis a Kálmán-féle rangfeltétel értelmében megfigyelhető.

Mivel a megfigyelés során általában az eredeti állapottér egyik állapota a kimenet, vagyis $\mathbf{C}_c$ -re igaz, hogy egy nem nulla elemet tartalmaz, előfordulhat, hogy $\mathbf{C}_c = \mathbf{C} \mathbf{T}(\mathbf{x})$

mátrixban több nem nulla értékű elem is szerepel. Ebben az esetben ez a kimeneti vektor felbontható egy nem nulla elemmel rendelkező sorvektorok összegére, vagyis

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{C}_{c,1} + \mathbf{C}_{c,2} + \cdots + \mathbf{C}_{c,r}, \quad (103)$$

ahol r a nem nulla elemek száma. Mivel a mátrixszorzás az összeadásra nézve disztributív művelet

$$\mathbf{C}_c \mathbf{A}_{c,m}^k = (\mathbf{C}_{c,1} + \mathbf{C}_{c,2} + \cdots + \mathbf{C}_{c,r}) \mathbf{A}_{c,m}^k = \mathbf{C}_{c,1} \mathbf{A}_{c,m}^k + \mathbf{C}_{c,2} \mathbf{A}_{c,m}^k + \cdots + \mathbf{C}_{c,r} \mathbf{A}_{c,m}^k. \quad (104)$$

Hasonlóan felbontva a megfigyelhetőségi mátrixot

$$\mathbf{M}_{o,c} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{c,1} \\ \mathbf{C}_{c,1} \mathbf{A}_{c,m} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{c,1} \mathbf{A}_{c,m}^{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{c,2} \\ \mathbf{C}_{c,2} \mathbf{A}_{c,m} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{c,2} \mathbf{A}_{c,m}^{n-1} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{c,r} \\ \mathbf{C}_{c,r} \mathbf{A}_{c,m} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{c,r} \mathbf{A}_{c,m}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (105)$$

mátrixok összegeként adódik. Az előzőekben beláttuk, hogy egy nem nulla elemet tartalmazó sorvektorból és az $\mathbf{A}_{c,m}$ állapotmátrixból összeállítva a megfigyelhetőségi mátrixot, ennek rangja $\text{rank}(\mathbf{M}_{o,c}) = n$. Így az összeg tagjai mind megfigyelhető mátrixok. Mivel mindegyik esetén másik helyen van a nem nulla érték a $\mathbf{C}_{c,i}$ sorvektorban, ezek összege is teljes rangú, vagyis megfigyelhető lesz, kivéve azt az esetet, amikor $r = n$.

Így tehát belátható, hogy a visszacsatolással linearizált struktúra módosításának köszönhetően tetszőleges $\mathbf{C}_c$ mátrix esetén megfigyelhető lesz a rendszer.

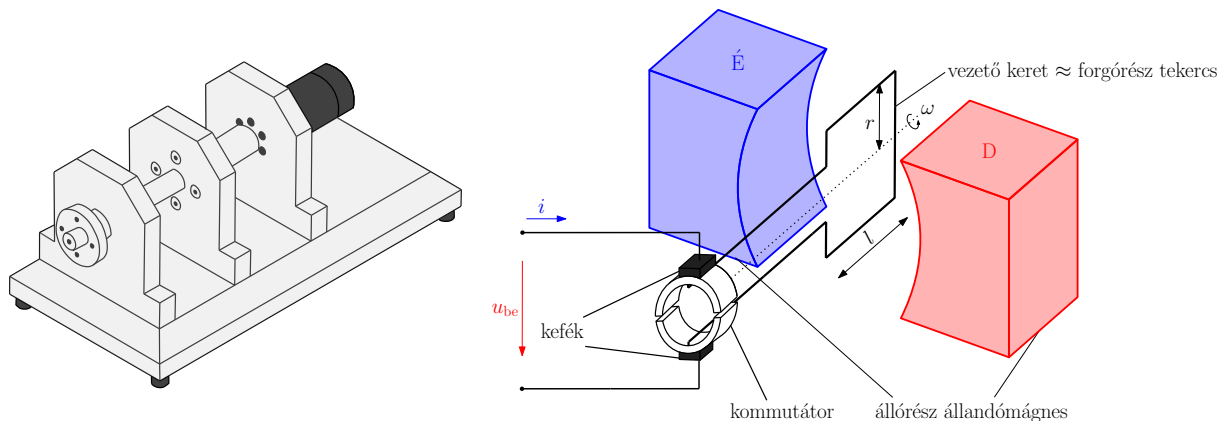
5. DC motor érzékelőmentes szabályozása visszacsatolásos linearizáció alapú megfigyelővel

A következőkben egy egyenáramú (DC) motor érzékelőmentes szabályozása kerül megvalósításra a javasolt módszer segítségével. Az érzékelő nélküli szabályozások során a hajtás szögsebessége és szöghelyzete csupán a motorra adott feszültség és a mért armatúra áramerősség segítségével kerül becslésre. A becsléshez állapotmegfigyelő tervezésére van szükség a hajtás számára, mely a motor szögsebességét, és -pozícióját becsli.

A DC motor egy lineáris modellel leírható villamos gép, viszont szenzormentes szabályozás esetén nem megfigyelhető, így az előzőekben bemutatott új módszertan ennek példáján kerül bemutatásra. A javasolt eljárást alkalmazva a motor megfigyelhetővé tehető, vagyis a visszacsatolással történő linearizációt végrehajtva a kapott (továbbra is) lineáris rendszer megfigyelhetővé válik. Ezzel lehetővé teszi, hogy Luenberger állapotmegfigyelő is tervezhető legyen a rendszerhez, amely az érzékelő nélküli szabályozás alapját fogja képezni.

5.1. Az egyenáramú motor modellje

A DC motorok állórésze jellemzően állandómágnest tartalmaz, amely által létrehozott homogén mágneses mezőbe kerül a tekercselt forgórész. A motor működése egy állandó mágneses mezőben forgó vezető keretként modellezhető, elvi felépítését a 12. ábra szemlélteti.



12. ábra. A vizsgált egyenáramú hajtás és a motor elvi felépítése

A motor villamos egyenlete [26]

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_{\text{ind}}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + k_e \omega(t). \quad (106)$$

formában írható fel, ahol $u(t)$ a motor armatúra feszültsége, $u_{\text{ind}}(t)$ az indukált feszültség, $i(t)$ az armatúra áramerősség, $\omega(t)$ a rotor szögsebessége. R és L rendre az állórész tekercs ellenállása és induktivitása, k_e a villamos konstans.

A hajtás mechanikai egyenlete a következőképp adható meg.

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = \tau_{\text{vill}}(t) - B\omega(t) = k_m i(t) - B\omega(t), \quad (107)$$

ahol $\tau_{\text{vill}}(t)$ a motor villamos nyomatéka, amely a k_m nyomatékállandó segítségével számítható az armatúra áramerősségből. Továbbá J és B jelölik a rotor forgástengelyére számított tehetetlenségi nyomatékát, valamint a hajtás csillapítási tényezőjét.

A motor villamos (106) és mechanikai (107) egyenletének ismeretében elkészíthető a hajtás állapotter modellje. Az állapotegyenlet

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_e}{L} & 0 \\ \frac{k_m}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u(t), \quad (108)$$

ahol a motor állapotai az i armatúra áramerősség, a motor φ szögelfordulása és az ω szögsebesség, hiszen ezekre van szükség az érzékelőmentes szabályozás megvalósításához. Mivel a szöghelyzet és -sebesség becslését az áramerősség mérése útján szeretnénk elérni, a kimeneti egyenlet

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad (109)$$

hiszen állapotmegfigyelés során a kimenő jel mindig az az állapot, amit mérünk. A kapott állapotter modell alapján az

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{R}{L} & -\frac{k_e}{L} & 0 \\ \frac{R^2}{L^2} - \frac{k_m k_e}{JL} & \frac{Rk_e}{L^2} + \frac{Bk_m}{JL} & 0 \end{bmatrix} \quad (110)$$

megfigyelhetőségi mátrix konstruálható. Megállapítható, hogy ebben a formában a rendszer valóban nem megfigyelhető.

5.2. A javasolt módszer alkalmazása egyenáramú motorra

A kidolgozott módszer alkalmazásához először egy olyan kimenetet keresni, amelyre a rendszer visszacsatolással linearizálható a 4.2. fejezetben látottaknak megfelelően. Ehhez szükség van a rendszer irányíthatósági mátrixára, mely

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} & \frac{R^2}{L^2} - \frac{k_e k_m}{JL^2} \\ 0 & \frac{k_m}{JL} & -\frac{Bk_m}{J^2} - \frac{Rk_m}{JL^2} \\ 0 & 0 & \frac{k_m}{JL} \end{bmatrix} \quad (111)$$

alakban adható meg, vagyis a rendszer irányítható. Az irányíthatósági mátrix inverze

$$\mathbf{M}_c^{-1} = \begin{bmatrix} L & \frac{JR}{k_m} & \frac{k_e k_m + BR}{k_m} \\ 0 & \frac{JL}{k_m} & \frac{BL + JR}{k_m} \\ 0 & 0 & \frac{JL}{k_m} \end{bmatrix}. \quad (112)$$

Ez alapján a visszacsatolással történő linearizáláshoz használható a

$$y = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \varphi \quad (113)$$

fiktív kimenet, hiszen a $\tilde{\mathbf{C}}$ kimeneti vektor az $\mathbf{M}_c^{-1}$ utolsó sorától csak egy konstans szorzóban tér el. Ennek felhasználásával az új megfigyelhetőségi mátrix

$$\tilde{\mathbf{M}}_o = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A} \\ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{k_m}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \end{bmatrix}, \quad (114)$$

amely már teljes rangú, vagyis erre megfigyelhető a rendszer, és egyben visszacsatolással linearizálható is. A visszacsatolós linearizáció elvégzéséhez az új állapotvektor

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{M}}_o \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ \frac{k_m}{J}x_1 - \frac{B}{J}x_2 \end{bmatrix} \quad (115)$$

transzformációval kapható. A transzformált állapotter állapotegyenlete

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_c} \mathbf{z} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_c} \left[\frac{k_m}{J} \left(-\frac{R}{L}i - \frac{k_e}{L}\omega + \frac{1}{L}u \right) - \frac{B}{J} \left(\frac{k_m}{J}i - \frac{B}{J}\omega \right) \right], \quad (116)$$

amelyből a bemenet

$$u = \frac{JL}{k_m}v + Ri + k_e\omega + \frac{BL}{J}i - \frac{B^2L}{Jk_m}\omega = \gamma^{-1}v + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (117)$$

módon történő megválasztásával

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}_c\mathbf{z} + \mathbf{B}_cv \quad (118)$$

állapotegyenlethez jutunk. Az eredeti kimenet azonban az i armatúra áramerősség volt, így a kimeneti egyenlet meghatározása

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}) \quad (119)$$

összefüggéssel történik, ahol

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{B}{k_m}z_2 + \frac{J}{k_m}z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Tehát

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{B}{k_m} & \frac{J}{k_m} \end{bmatrix} \mathbf{z}. \quad (121)$$

Az új kimeneti mátrix segítségével meghatározható a linearizált rendszer megfigyelhetőségi mátrixa

$$\mathbf{M}_{o,c} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{B}{k_m} & \frac{J}{k_m} \\ 0 & 0 & \frac{B}{k_m} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (122)$$

Látható, hogy az így kapott rendszer még nem megfigyelhető, ezért a visszacsatolást módosítani kell a 4.4. fejezetnek megfelelően. Így a visszacsatoló tag

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \gamma^{-1} z_1 = \alpha(\mathbf{x}) + \gamma^{-1} \varphi \quad (123)$$

módosításával,

$$\mathbf{u} = \tilde{\alpha}(\mathbf{x}) + \gamma^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \quad (124)$$

bemenet választással élve, a módosított rendszer állapotmátrixa

$$\mathbf{A}_{c,m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (125)$$

A módosított linearizációval kapott rendszer megfigyelhetőségi mátrixa

$$\mathbf{M}_{o,c,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_{c,m} \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_{c,m}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{B}{k_m} & \frac{J}{k_m} \\ \frac{J}{k_m} & 0 & \frac{B}{k_m} \\ \frac{B}{k_m} & \frac{J}{k_m} & 0 \end{bmatrix}, \quad (126)$$

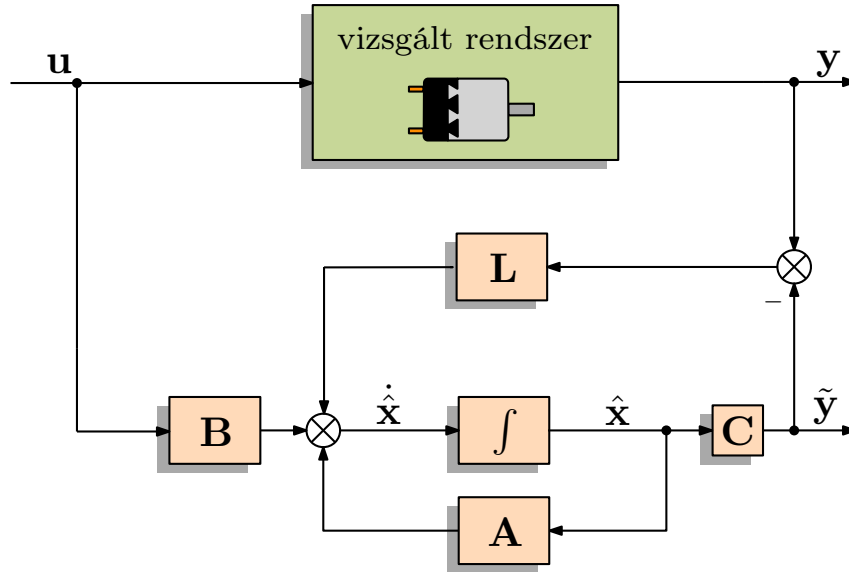
vagyis az így kapott rendszer megfigyelhető. Ezzel nem megfigyelhető, lineáris modellel leírható DC motort sikerült megfigyelhetővé tenni, így lehetővé téve lineáris állapotmegfigyelő tervezését a rendszer számára.

5.3. Luenberger megfigyelő tervezése

Egy megfigyelhető, lineáris rendszerhez, melynek állapottér modellje

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (127)$$

tervezhető Luenberger állapotmegfigyelő [27][28], amelynek felépítését a 13. ábra szemlélteti.



13. ábra. A Luenberger állapotmegfigyelő felépítése

A cél, hogy a megfigyelt $\hat{\mathbf{x}}$ állapotok aszimptotikusan közelítsék a valós $\mathbf{x}$ állapotokat. Ennek teljesülése érdekében egy mérhető állapotot tekinthetünk kimenetnek, ennek $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ hibája ismert. A hiba egy arányos $\mathbf{L}$ taggal korrigálva hozzáadásra kerül az állapotbecslő bemeneti jeléhez, ezzel szabályozva az állapotbecslés hibáját. Az állapotmegfigyelő állapotegyenlete

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (128)$$

alakban írható fel. A kimeneti egyenletből adódóan $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, valamint $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$. Ezt felhasználva

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} \quad (129)$$

egyenlet kapható. Ez alapján vizsgáljuk meg az állapotbecslés $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ hibáját.

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - ((\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}), \quad (130)$$

vagyis

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}, \quad (131)$$

ahol $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ az állapotbecslés hibája. A kapott differenciálegyenlet megoldása

$$\mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})t} \mathbf{e}_0, \quad (132)$$

ahol $\mathbf{e}_0$ a kezdeti hiba. Amennyiben az $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ mátrix sajátértékei negatívak, a hibafüggvény valóban nullához konvergál, így a hiba eltűnik. Az $\mathbf{L}$ mátrix elemeinek meghatározásával lehet beállítani a hiba eltűnésének dinamikáját, így ezt az elvárt beállási tulajdonságoknak megfelelően kell megválasztani. Minél nagyobb negatív sajátértékekkel rendelkezik $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$, annál gyorsabban fog eltűnni a hiba, így ügyelni kell, hogy a szabályozó működésénél gyorsabb beállású legyen az állapotmegfigyelő.

A megfigyelő pólusainak, vagyis az $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ mátrix sajátértékeinek beállítása történhet például Ackermann-formula segítségével. A formulával az $\mathbf{L}$ mátrix

$$\mathbf{L}_d = \phi_o(\mathbf{A})\mathbf{M}_o^{-1}\mathbf{e}_n \quad (133)$$

formában számítható, ahol $\phi_o(\mathbf{A})$ a kívánt pólusokból képzett karakterisztikus polinom, amelybe az $\mathbf{A}$ mátrix kerül behelyettesítésre, mint változó. $\mathbf{M}_o$ a rendszer megfigyelhetőségi mátrixa, $\mathbf{e}_n$ az n -edik egységvektort jelöli. Így az elvárt dinamika, és az ehhez tartozó pólusok definiálása után a szükséges visszacsatoló mátrix (133) egyenlet alapján egyszerűen meghatározható, amennyiben a rendszer megfigyelhető.

A visszacsatolásos linearizációval megfigyelhetővé tett DC motor állapotter modellje

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \mathbf{A}_{c,m}\mathbf{z} + \mathbf{B}_c v, \\ y &= \mathbf{C}_c \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (134)$$

Mivel a rendszer (126) egyenletnek megfelelően megfigyelhető, ehhez is tervezhető Luenberger állapotmegfigyelő az 11. ábrán látható módon.

Mivel az állapotmegfigyelő a visszacsatolással linearizált rendszerhez tervezhető, a (128) egyenletben látható $\mathbf{A}$ mátrix helyett $\mathbf{A}_{c,m}$ mátrixot, $\mathbf{C}$ helyett $\mathbf{C}_c$ mátrixot kell használni a megfigyelő megtervezéshez.

5.4. Szimulációs eredmények

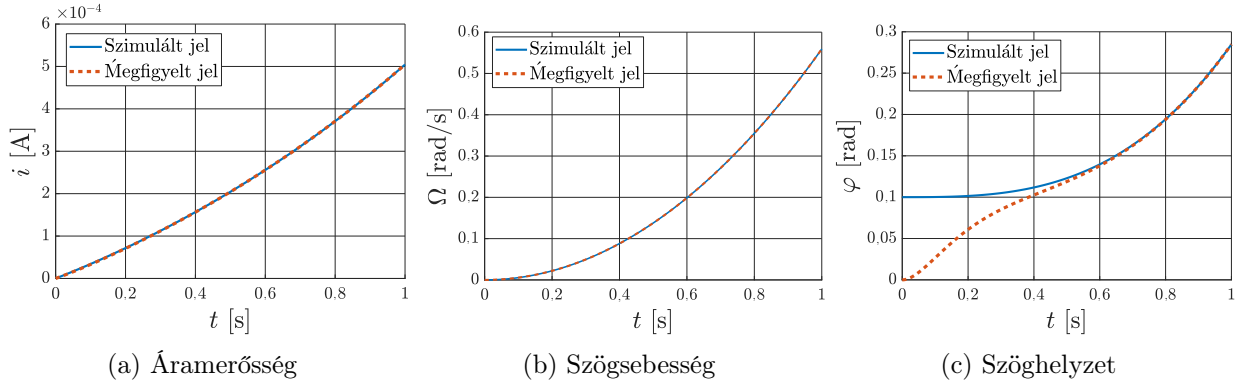
A szimulációs vizsgálat MATLAB Simulink környezetben került megvalósításra. A vizsgált rendszer egy Maxon gyártmányú 339154 típusú keféscs DC motor volt, melynek katalógusadatai a 2. táblázatban láthatók.

2. táblázat. A vizsgált motor katalógusadatai

Tulajdonság	Értéke
Póluspárok száma (P)	1
Ellenállás (R)	4,37 Ω
Induktivitás (L)	0,493 $\cdot 10^{-3}$ H
Sebességkonstans (k_e)	29,5310 rad/Vs
Nyomatékkonstans (k_m)	0,0338 Nm/A
Tehetetlenségi nyomaték (J)	13,5 $\cdot 10^{-7}$ kgm ²
Viszkózus csillapítási tényező (B)	1,5 $\cdot 10^{-5}$ Ns/m

A szimulációk során először maga a megfigyelő működése lett igazolva, melyhez a szimuláció felépítése a 11. ábrának megfelelő volt. A megfigyelő pólusai $s_{1,2,3} = -10$

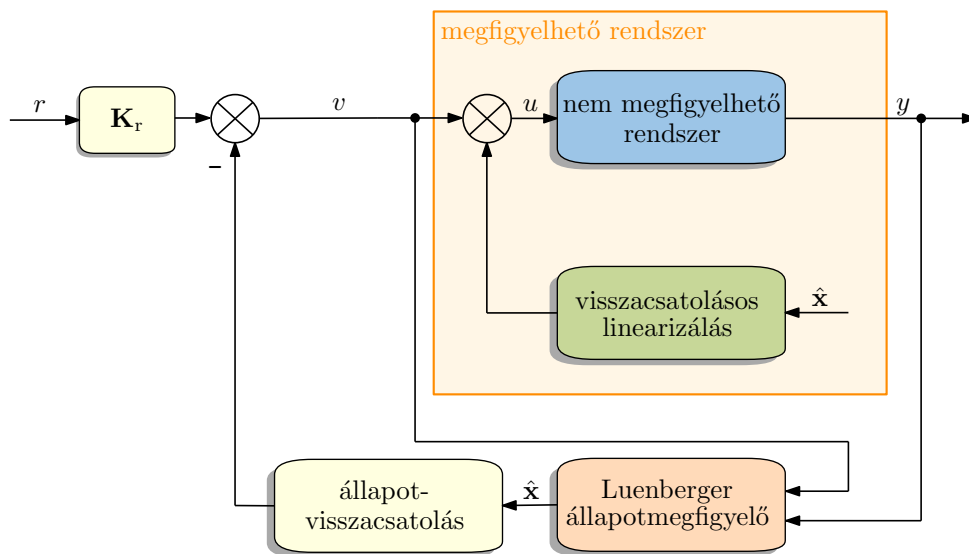
értékre lettek hangolva (133) segítségével. Mivel valós eszközök esetén nem állítható be pontosan a motor kezdeti pozíciója, a vizsgálat során egy kis értékű pozícióeltérés lett beállítva a szimulált motor és a megfigyelő szöghelyzete között. A megfigyelő működését a 14. ábra szemlélteti.



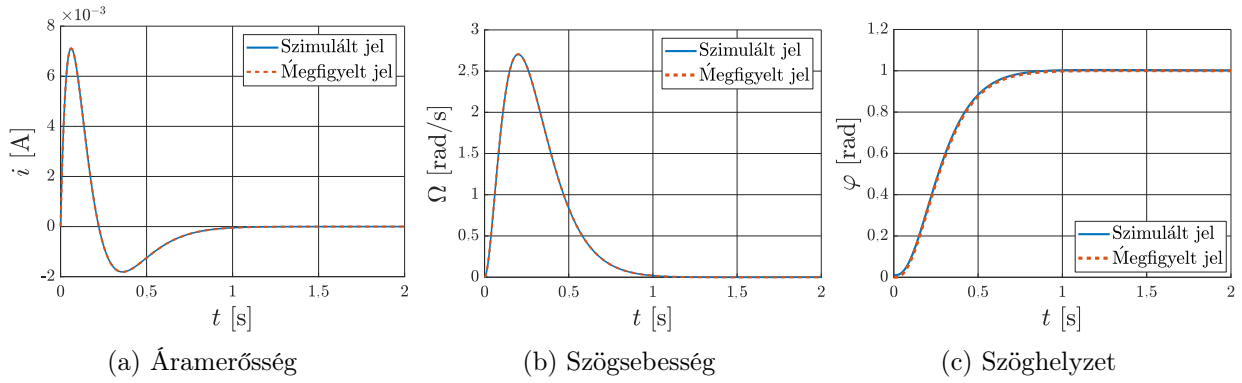
14. ábra. A megfigyelő állapotainak beállása

Az ábra alapján elmondható, hogy a rendszer megfigyelése sikeresnek bizonyult. A visszacsatolásos linearizáció lehetővé tette, hogy stabil működésű megfigyelőt lehessen tervezni az eredetileg nem megfigyelhető rendszerhez.

Emellett az is igazolható volt a szimulációkkal, hogy az így kapott megfigyelő alkalmas arra, hogy szabályozó kör számára becsülje az állapotokat. A tervezett érzékelőmentes szabályozás felépítését illusztrálja a 15. ábra, míg a szimulációk eredményei a 16. ábrán láthatók. A szimulációk során az állapotvisszacsatolásos szabályozás került megtervezésre a 3.1. fejezet alapján. A szabályozás pólusai $s_{c1,2,3} = -10$ értékre lettek beállítva, míg a megfigyelő pólusai ennél egy nagyságrenddel gyorsabbra $s_{o1,2,3} = -100$ lettek hangolva Ackermann-formula alkalmazásával.



15. ábra. A visszacsatolásos linearizációra alapozott érzékelőmentes szabályozás felépítése

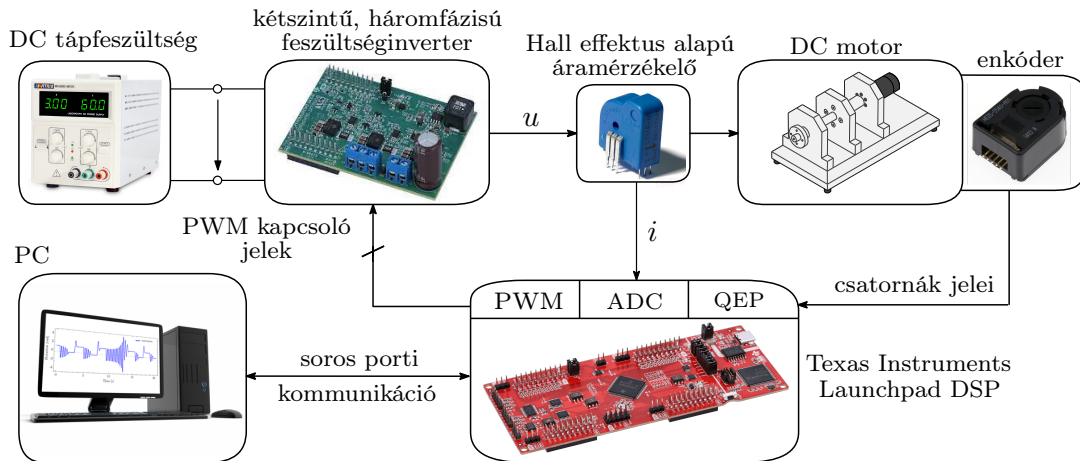


16. ábra. Az érzékelőmentes szabályozás állapotainak időfüggvénye

Az ábrák alapján elmondható, hogy a szenzormentes szabályozó kör stabil működésűnek adódott, vagyis az eredetileg nem megfigyelhető rendszer a módosított visszacsatolásos linearizáció elvégzése után alkalmasnak bizonyult megfigyelésre, amelyre továbbá érzékelőmentes szabályozás alapozható. Tehát valóban lehetséges a javasolt módszerrel olyan visszacsatoló tagot előállítani, amely lehetővé teszi a nem megfigyelhető rendszer megfigyelését.

5.5. Kísérleti eredmények

A bemutatott érzékelőmentes szabályozás egy valós DC motoros hajtáson is megvalósításra került. A mérési összeállítást a 17. ábra szemlélteti.



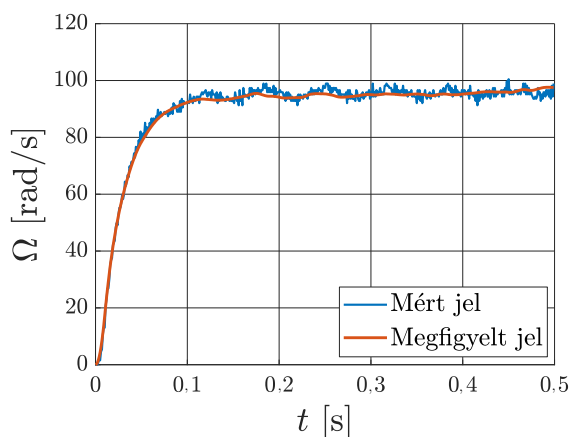
17. ábra. A kísérleti összeállítás

A kísérletek során a Texas Instruments LaunchPad típusú digitális jelfeldolgozó processzoron (DSP) futnak a szabályozáshoz szükséges számítások, vagyis a visszacsatolásos linearizáció, az állapotmegfigyelő, valamint az állapotvisszacsatolásos szabályozás. A mikrovezérlő határozza meg az inverterkártya számára a kapcsolójeleket, ami impulzusszélességmoduláció (PWM) segítségével adja ki a feszültséget a motorra.

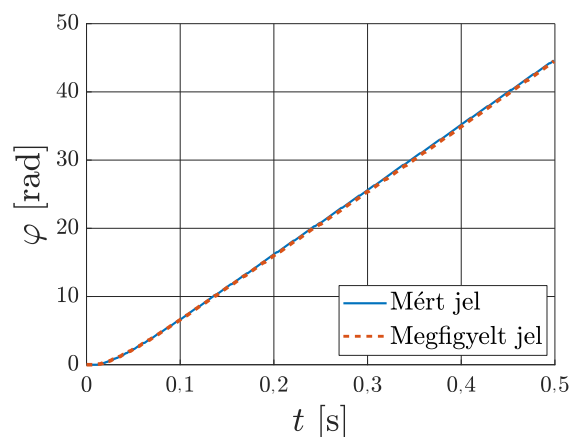
Az áramméréshez egy Hall effektuson alapuló áramszensor került felhasználásra, amelyet a DSP analóg-digitális átalakító (ADC) modulja dolgoz fel. Továbbá, a motor forgórészén található egy inkrementális enkóder, mellyel ellenőrizhető az állapotmegfigyelő helyes működése. Az enkóder A és B csatonáinak jeleit a DSP célirányos enkóder modulja (QEP) dolgozza fel. A mért adatokat a LaunchPad soros porti kommunikáció segítségével képes továbbítani a számítógépre, ahol MATLAB környezetben kerültek feldolgozásra.

A vizsgált hajtás paraméterei megegyeznek a 2. táblázatban található motorparaméterekkel, azzal a különbséggel, hogy az összeszerelt hajtás tehetetlenségi nyomatéka a tengely és terhelés rögzítő geometriai elemek figyelembevételével $J = 44,37 \text{ gcm}^2$, a csapágyazások miatt viszkózus csillapítási tényezője $B = 0,26 \text{ mNms/rad}$.

A megvalósított érzékelőmentes szabályozás eredményeit a 18. és 19. ábra mutatja be. Ezúttal szögsebességszabályozás került megvalósításra, mely során a rendszer 100 rad/s értékű referenciát kapott. A szabályozás pólusai $s_{c1,2,3} = -50$ értékre lettek beállítva, míg a megfigyelő pólusai ennél egy nagyságrenddel gyorsabbra $s_{o1,2,3} = -500$ lettek hangolva.

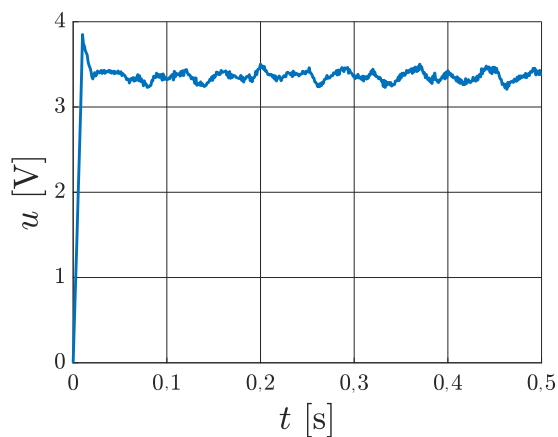


(a) Szögsebesség

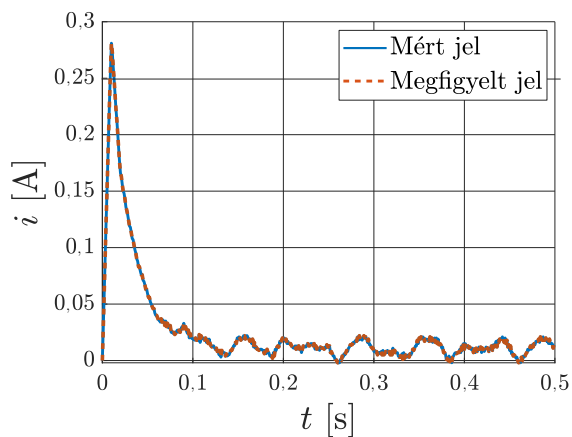


(b) Szöghelyzet

18. ábra. Az érzékelőmentes szabályozás mért és megfigyelt jeleinek időfüggvénye



(a) Feszültség



(b) Áramerősség

19. ábra. Az érzékelőmentes szabályozás armatúra feszültségének és áramerősségének időfüggvénye

Megállapítható, hogy az állapotmegfigyelő a mérés kezdetétől kezdve sikeresen becsülte a hajtás szögsebességét és pozícióját, vagyis az eredetileg nem megfigyelhető rendszer valóban megfigyelhetővé tehető a linearizáció elvégzésével. A visszacsatolásos linearizáción alapuló megfigyelőre érzékelőmentes szabályozás is alapozható volt, a megvalósított szabályozás stabil működést mutatott.

6. Konklúzió

A visszacsatolással történő linearizációs módszert egyre elterjedtebben használják mechatronikai rendszerek szabályozására, a beavatkozószervektől kezdve egészen a nemlineáris mechanikai hatások kezeléséig.

A mechatronikai rendszerek aktuátorai jellemzően villamos gépek, melyek szabályozása esetén kiemelt fontosságú a telítődési hatások figyelembe vétele, annak érdekében, hogy ne lehessen a szabályozás során túlterhelni őket. Visszacsatolásos linearizáció végrehajtása után azonban a legtöbb esetben állapotvisszacsatolásos szabályozást alkalmaznak, mely során az egyes belső állapotok dinamikája nem állítható önállóan, így a szaturáció sem kezelhető. Jelen dolgozatban bemutatásra került egy újszerű szabályozási eljárás ezen problémák kiküszöbölésére.

A kidolgozott módszer egy kaszkád szabályozási stratégián alapul, mely a visszacsatolással linearizált rendszer állapotait képes szabályozni egymásba ágyazott szabályozókörök segítségével. A bemutatott eljárás alkalmazása során az egyes körökhöz különállóan tervezhetők a szabályozók, amelyek kimenetén szaturáció is beállítható, így elkerülhetővé válik a belső állapotok, például feszültség, vagy áramerősség túlterhelése.

A javasolt módszer egy állandómágneses szinkrongép által hajtott inverz inga példáján keresztül került bemutatásra szimulációk segítségével. A cél az inga pozíciószabályozása volt, melyhez három körrel rendelkező kaszkád szabályozó került alkalmazásra. A szimulációk során megállapítható volt, hogy a kidolgozott módszer alkalmazásával az egyes belső állapotok dinamikája külön tervezhetővé vált, valamint a hajtás szaturációs korlátjai is figyelembe vehetővé váltak.

A dolgozat további célkitűzése volt annak bemutatása, hogy a visszacsatolással történő linearizálás nemcsak a mechatronikai rendszerek szabályozására, hanem megfigyelésére is alkalmazható. Továbbá kidolgozásra került egy olyan módszertan, amellyel a linearizálás felhasználhatóvá válik arra, hogy megfigyelhetővé tegye a vizsgált rendszereket. Ehhez a linearizációs eljárás módosítására volt szükség, amely lehetővé tette, hogy tetszőleges rendszer esetén található legyen olyan visszacsatoló tag, amely megfigyelhető linearizált rendszert eredményez, vagyis biztosítja a kapott rendszer megfigyelhetőségét.

A javasolt módszer egy lineáris, eredetileg nem megfigyelhető rendszer, a DC motor érzékelőmentes szabályozásán keresztül került bemutatásra. A kidolgozott módosított visszacsatolás alapú linearizáció valóban képes volt megfigyelhetővé tenni a rendszert, ami szimulációk és valós eszközön végzett kísérletek segítségével is igazolásra került. A tervezett megfigyelő valóban képes volt megbízhatóan becsülni a hajtás állapotait, továbbá érzékelőmentes szabályozás alapjául is felhasználhatónak bizonyult.

A dolgozat a Kulturális és Innovációs Minisztérium EKÖP-24-2-BME-342 kódszámú Egyetemi Kutatói Ösztöndíj Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.



Hivatkozások

- [1] Guido O. Guardabassi and Sergio M. Savaresi. Approximate linearization via feedback — an overview. *Automatica*, 37(1):1–15, January 2001.
- [2] M Ababneh, M Salah, and K Alwidyan. Linearization of nonlinear dynamical systems: A comparative study. *Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, 2011.
- [3] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer London, 1995.
- [4] Daewon Lee, H. Jin Kim, and Shankar Sastry. Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 7(3):419–428, May 2009.
- [5] Sheng Zhang, Fei Liao, Yan-Qing Cheng, and Kai-Feng HE. Aircraft trajectory control with feedback linearization for general nonlinear systems. In *2020 Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, pages 3937–3944. IEEE, August 2020.
- [6] Anurag Singh, Omveer Singh, and Nidhi Singh Pal. Robot motion control dynamics using feedback linearization technique. In *2020 IEEE International Conference on Computing, Power and Communication Technologies (GUCON)*, pages 280–283. IEEE, October 2020.
- [7] Mohamed Amine Fnaiech, Hazem Nounou, Mohamed Nounou, and Aniruddha Datta. Intervention in biological phenomena via feedback linearization. *Advances in Bioinformatics*, 2012:1–9, November 2012.
- [8] José de Jesús Rubio. Robust feedback linearization for nonlinear processes control. *ISA Transactions*, 74:155–164, March 2018.
- [9] Arijit Ganguly, Anik Sarkar, Arnab Ghosh, Parijat Bhowmick, and Sawan Sen. *Application of Feedback Linearization in Adaptive Controller Design*, pages 111–127. Springer Nature Singapore, 2024.
- [10] Sahibzada M. Ali, Muhammad Jawad, Feng Guo, Arshad Mehmood, Bilal Khan, Jacob Glower, and Samee U. Khan. Exact feedback linearization-based permanent magnet synchronous generator control: Pmsg grid-interfaced differential geometric control. *International Transactions on Electrical Energy Systems*, 26(9):1917–1939, January 2016.
- [11] K. Pathak, J. Franch, and S.K. Agrawal. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(3):505–513, June 2005.

- [12] Tomasz Tarczewski and Lech M. Grzesiak. Constrained state feedback speed control of pmsm based on model predictive approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(6):3867–3875, June 2016.
- [13] Harshit Mohan, Mukesh Kumar Pathak, and Sanjeet Kumar Dwivedi. Sensorless control of electric drives – a technological review. *IETE Technical Review*, 37(5):504–528, September 2019.
- [14] Qiong Wang, Shuanghong Wang, and Chuanhai Chen. Review of sensorless control techniques for pmsm drives. *IEEE Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, 14(10):1543–1552, July 2019.
- [15] F. Briz, M.W. Degner, P. Garcia, and R.D. Lorenz. Comparison of saliency-based sensorless control techniques for ac machines. In *38th IAS Annual Meeting on Conference Record of the Industry Applications Conference, 2003.*, volume 2 of *IAS-03*, pages 1142–1149. IEEE.
- [16] John M. Lee. *Lie Derivatives*, pages 464–493. Springer New York, 2003.
- [17] A. J. Krener. *Feedback Linearization*, pages 66–98. Springer New York, 1999.
- [18] Deutscher J. Hippe, P. *State Feedback Control*, pages 17–26. Springer London, 2009.
- [19] Béla Lantos. *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I.* Akadémiai Kiadó, 2016.
- [20] J. Ackermann. Der entwurf linearer regelungssysteme im zustandsraum. *auto*, 20(1–12):297–300, December 1972.
- [21] Juan Camilo Nustes, Danilo Pietro Pau, and Giambattista Gruosso. Modelling the field oriented control applied to a 3-phase permanent magnet synchronous motor. *Software Impacts*, 15:100479, March 2023.
- [22] Vladislav M. Bida, Dmitry V. Samokhvalov, and Fuad Sh. Al-Mahturi. Pmsm vector control techniques — a survey. In *2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus)*, pages 577–581. IEEE, January 2018.
- [23] Andrea Cervone, Obrad Dordevic, and Gianluca Brando. General approach for modeling and control of multiphase pmsm drives. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 36(9):10490–10503, September 2021.
- [24] Nathan Jacobson. Abstract derivation and lie algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 42(2):206–224, 1937.

- [25] Zsanett Bertók. Állapotmegfigyelő tervezése állandómágneses gépek számára. *Tudományos Diákköri Konferencia 2023, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem*, 2023.
- [26] Miklós Kuczmann. Review of dc motor modeling and linear control: Theory with laboratory tests. *Electronics*, 13(11):2225, June 2024.
- [27] David G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2):74–80, 1964.
- [28] D. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(2):190–197, April 1966.