



Nagy Vanda Orsolya

A mintavételezés okozta harmonikusok alkalmazási
lehetőségei a haptikus technológiában

Konzulens:

Dr. Budai Csaba

adjunktus (BME-GPK MOGI)



Tudományos Diákköri Konferencia

Budapest, 2024

Összefoglaló

A haptikus technológia segítségével lehetőség nyílik arra, hogy a felhasználó tapintáson keresztül érintkezzen a virtuális környezettel. Ez rendszerint erő-visszacsatolás segítségével valósítható meg, erők, rezgések vagy mozgások létrehozásán keresztül. A technológia egészen hétköznapi területeken is megjelenik, mint például a mobiltelefonok érintőképernyője esetében vagy virtuális valóságban. A hétköznapi felhasználásokon túl, a haptikus technológia orvostechnikai alkalmazása is jelentős.

Az orvostechnika területén az elsődleges cél a tapintásérzet szimulálása, azért, hogy a felhasználó valósághű visszajelzést kaphasson a különböző orvosi eszközökkel vagy virtuális környezettel való interakció közben. Szó lehet például sebészeti szimulációkról, aminek lehetősége kiszélesíti és szélesebb körben elérhetővé teszi a sebészek számára az egyes beavatkozások gyakorlását, illetve a tanulási folyamatot. Másik felhasználási területe a különböző robotsebészeti beavatkozások fejlesztése. A tapintási visszajelzés a szövetek valósághű szimulálásával érhető el, ez magában foglalja a különböző szövetek természetes rugalmasságának, sűrűségének és ellenállásának pontos modellezését.

A dolgozatban egy egy szabadsági fokú haptikus eszköz tervezése kerül bemutatásra, első lépésben ennek szerkezeti kialakítása, valamint a megfelelő konstrukció megalkotása. Ezt követi az eszköz modelljének meghatározása, majd az állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozás tervezése.

Napjainkban a szabályozás megvalósítása szinte kizárólag valamilyen digitális számítógépen keresztül történik. Így célszerű megvizsgálni az eredő mintavételes rendszer stabilitását, különféle esetekben és feltételek mellett. Ezen vizsgálat során megfigyelhetővé válnak, a szabályozási paraméterektől függő, különféle karakterisztikák. A szabályozási tényezők megválasztása mellett észrevehető, hogy a stabil viselkedés megőrzése mellett, különféle lengésképek alakulnak ki. A kialakuló rezgések jellemzésén keresztül különféle anyagi viselkedések megvalósíthatósága vizsgálható.

Abstract

Haptic technology enables users to interact with virtual environments through touch. This is typically accomplished through force feedback, which is achieved by generating forces, vibrations, or movements. The technology is also being applied in everyday areas, such as the use of touch screens on mobile phones and virtual reality. In addition to its applications in everyday technology, haptic technology has significant potential in the field of medical technology.

The primary objective in medical technology is to simulate haptic sensation in order to provide users with realistic feedback during interaction with medical devices or virtual environments. To illustrate, surgical simulations can be used to expand and generalise the opportunity for surgeons to practise specific procedures and the learning process. Another area of application is the development of various robotic surgical interventions. Tactile feedback can be achieved through the realistic simulation of tissue, including the accurate modelling of the natural elasticity, density and resistance of different tissues.

This study presents the design of a single degree of freedom haptic device, beginning with its structural design and the creation of an appropriate construction. Subsequently, the device model is defined, and a control design based on state feedback is proposed.

Currently, control is primarily executed through the use of digital computers. It is therefore beneficial to examine the stability of the resulting sampling scheme in a variety of scenarios. During this examination, different characteristics dependent on the control parameters can be observed. By selecting appropriate control factors, it is possible to obtain different oscillation patterns while maintaining stability. Through the characterisation of the resulting oscillations, the potential for different material behaviours can be investigated.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Egy szabadságfokú haptikus eszköz tervezése	6
2.1. Kiindulási alap	6
2.2. Kritikai elemzés és továbbfejlesztés	7
2.3. A megvalósított eszköz modellje	9
2.4. Állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozás tervezése	15
3. Mintavételes rendszer stabilitásvizsgálata	17
3.1. Nyomatékszabályozás esetén	20
3.2. Feszültségszabályozás esetén	24
3.3. Időkésés figyelembe vétele a vizsgálat során	25
4. Mintavételes rendszer esetén, a szabályozás során előforduló karakterisztikák vizsgálata	29
4.1. A különböző karakterisztikák jelentősége a haptikus technológiában	30
4.2. Kialakuló lengésképek vizsgálata	31
4.3. Megvalósítható anyagmodellek	37
5. Mérési eredmények	41
5.1. Mérési elrendezés	41
5.2. Mérési és szimulációs eredmények összevetése	45
6. Összegzés	48

1. Bevezetés

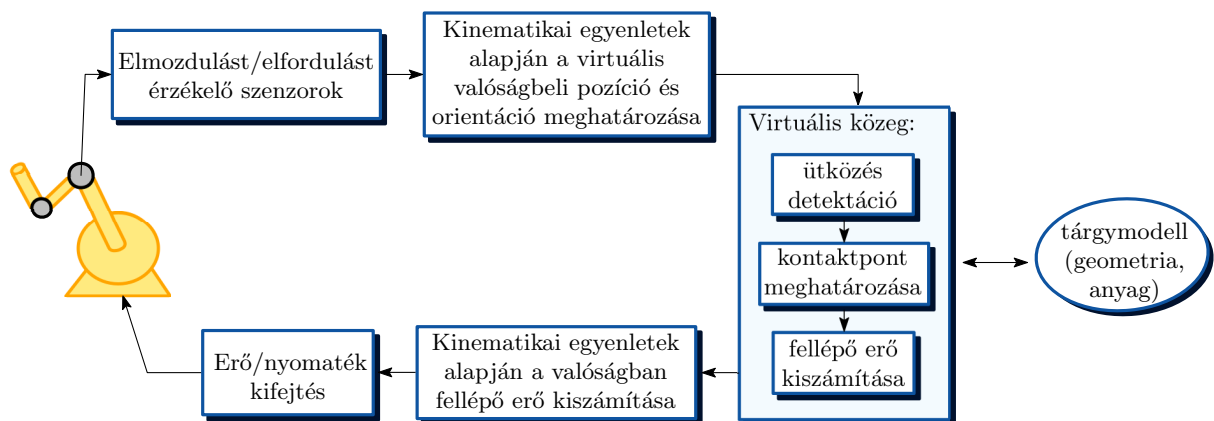
A haptikus technológia lehetőséget nyújt arra, hogy a felhasználó virtuálisan generált tárgyakat (objektumokat) érintsen meg, illetve ezekre hatást fejtson ki úgy, hogy a tapintás által valóságosnak érzékelje. A virtuális valóság és a felhasználó közötti kapcsolatot az ún. haptikus eszköz segítségével lehet biztosítani azáltal, hogy erőket, rezgéseket vagy mozgásokat közvetít a felhasználó felé. Alapvetően egy haptikus rendszer két fő részre bontható: felhasználói oldal, illetve maga az eszköz.

A felhasználói oldal alapvetően három további alrészre osztható fel: a mechanikai alrészre, az érzékelést biztosító receptorokra, illetve az idegrendszerre. A mechanikai alrész alatt a felhasználónak azon testrészeit lehet érteni, melyeken keresztül kapcsolatba lép a haptikus eszközzel. Ez legtöbb esetben az ember karját, ezen belül is a kezét jelenti. Az érzékelési egységek az idegrendszer receptorai, az interakcióból adódó fizikai ingerek hatására aktiválódnak. Végül, a kognitív mechanizmus maga az agy, ami feldolgozva az ingerületeken keresztül kapott információkat, irányítja a mechanikus komponenseket [1]. Az érzékelés érintésen keresztül megy végbe, fő szerve az ember bőre, melyben különféle receptorok dolgozzák fel a külső ingereket. A bőr azonban nem az egyetlen érzékszerve a tapintásnak, az izmok, inak, ízületek receptorai is részt vesznek az érzékelésben. Például, egy tárgy ujjakkal való megérintésében mind a taktilis, mind a kinesztetikus érzékelés szerepet játszik.

A taktilis érzékelés passzív bőrérzékelés által közvetített észlelés, tehát kizárólag a bőrön keresztül történik, a bőrben található receptorokra támaszkodva. Meghatározható általa az adott tárgy formája, textúrája, tömege, hőmérséklete illetve érzékelhető a kéz mozgása az adott tárgy felületén. Ezzel szemben a kinesztetikus érzékelés a test mozgásának és helyzetének tudatos érzékelését jelenti, legyen hely- és helyzetváltoztatás, testtartás, vagy akár az általunk valamilyen külső felületre kifejtett erő érzékelése. Egy tárgy megfogása esetén ez jelentheti a kéz térbeli helyzetének érzékelését, az ujjak egymáshoz viszonyított pozíciójának meghatározását. Ebben az esetben az információkat az izmok feszültségének mértékéből, illetve az inak, ízületek receptoraiból lehet kinyerni. A haptikus érintés a taktilis érzékelés kiegészülése kinesztetikus érzékeléssel. Ez az jelenti hogy a bőr, az izmok, inak és ízületek receptorainak információinak együttese, egymással való kölcsönhatása fogja meghatározni az érintés élményét [2], [3].

A haptikus eszköz, mellyel a felhasználó kapcsolatba lép szenzorok által érzékeli az ember által kifejtett erőt vagy az eszköz elmozdulását. Az információkat a központi számítógépnek továbbítja, melynek feladata az adatok feldolgozása, illetve a rendszer válaszához szükséges számítások elvégzése. A válaszreakció aktuátorok segítségével valósul meg, melyeken keresztül erőt vagy nyomatékot fejt ki a haptikus eszközre, amit a felhasználó, mint visszacsatolt erőt, érzékel. Szabályozás szempontjából két típus különíthető el, az admittancia és az impedancia szabályozók. Mechanikai rendszerek esetén ezek a fogalmak

az erők és sebességek közötti kapcsolatot írják le. Érdeemes megjegyezni, hogy e két típusú szabályozás tárgyalásakor az impedancia $Z = \frac{F}{v}$ hányadosként van definiálva, míg az admittancia ennek az inverze. A mechanikai rendszerek leírására két fő analógia létezik, az impedancia, más néven Maxwell-analógia és a mobilitási, vagy Firestone-analógia. A Maxwell-analógia esetén két típusú változót különböztetünk meg, az erő vagy erőfeszítés (*effort variable*) és az áramlás (*flow variable*) változót. Villamos rendszerek esetén az erőfeszítés változó a feszültség, ennek mechanikai rendszerbeli megfelelője az erő, az áramlás változó pedig az elektromos áram, melyek megfelelője a sebesség. A villamos rendszerekre felírható Ohm törvény által látható, hogy az impedancia nem más mint az erő és a sebesség hányadosa. Impedancia szabályozás esetén a haptikus eszköz elmozdulását mérjük, ez a rendszer bemenete, míg a kimenet, azaz a felhasználó által érzékelt hatás az erő, ez látható az 1. ábrán. Így a kezelő érzékelni fogja az eszköz tömegét és súrlódását is. Ezt a hatást csökkenteni lehet megfelelő nyomaték-szabályozással, illetve már a mechanikai tervezés során, ehhez hozzátartozik a könnyű szerkezetre való törekvés és a súrlódás csökkentése. Admittancia szabályozás esetén a felhasználó által a haptikus eszközre gyakorolt erőt mérjük, az a bemenet, míg az eszköz ennek megfelelő elmozdulással reagál. Ezt a szabályozást megvalósítva a mechanizmus lehet jóval robusztusabb és nagyobb erőket kifejtésére lehet képes, mint impedancia szabályozás esetén [4],[5].



1. ábra. Impedancia szabályozás

Az orvostechikában is jelentős szerepet játszanak a haptikus rendszerek. A robotsebészeti eljárások esetén a hagyományos műtéti eljárásokkal ellentétben, nincs közvetlen kapcsolat a sebész és a páciens között. Ezekben az esetekben a vizuális visszajelzés ugyan rendelkezésre áll, viszont a legtöbb ilyen rendszer nem biztosít haptikus visszajelzést. Ennek következtében az orvosoknak a szövetekre gyakorolt erőt a vizuális deformáció alapján kell megbecsülniük. Egy haptikus visszacsatolási rendszer használata nagyban javíthatja a teljesítményt, a pontosságot, illetve a rendszer használatához szükséges tanulási időt is csökkenti. A haptikus visszajelzés ilyen esetekben megvalósítható erő visszacsatolással,

ekkor a rendszer a szövetekre és szervekre gyakorolt erőket és nyomatékokat mérés útján továbbítja a sebész felé. Így ténylegesen azt az érzést lehet kelteni, mintha közvetlen kapcsolat lenne az orvos és a páciens között [6].

A sebészeti robotika területén a haptikus visszajelzéshez kifejezetten fontos a szövetek különböző erőbehatásokra történő deformációjának vizsgálata. A szövetek viszkoelasztikus természetüknek köszönhetően modellezhetőek tömeg-rugó-csillapítás rendszerként [7], [8]. Leggyakoribb modellek a Maxwell, Kelvin-Voigt és az SLS (*standard linear solid*) modell [9]. Paramétereik meghatározásához leggyakrabban valamilyen *in vivo* (élő szervezeten elvégzett) vizsgálatra van szükség [10], [11].

A dolgozatban egy egy szabadsági fokú haptikus eszköz tervezése és vizsgálata során az előzőekben említett különféle anyagi viselkedések megvalósíthatósága is szerepet kap. Mintavételes rendszer esetén, a stabilitási tartomány további elemzése során, a szabályozási tényezők megváltoztatásával, a stabil tartományon belül maradva, különféle lengésképeket tapasztalhatunk [12]. Az anyagi viselkedések megvalósíthatósága ezeken keresztül vizsgálható.

2. Egy szabadságfokú haptikus eszköz tervezése

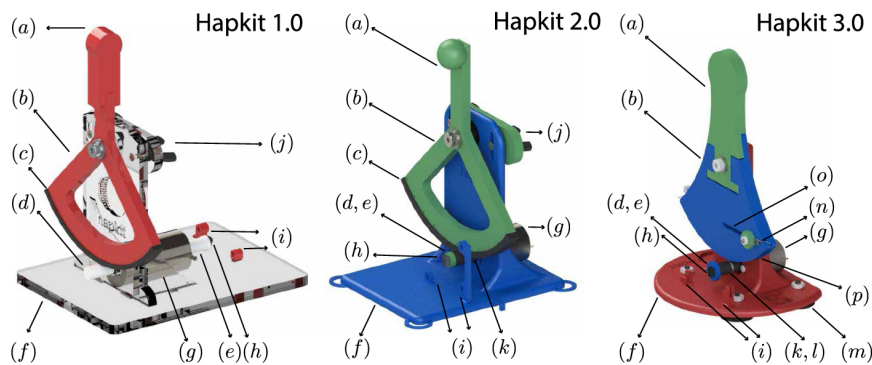
A fejezetben a későbbiekben vizsgált haptikus eszköz tervezési folyamata, a modellalkotás és szabályozás tervezése kerül bemutatásra. Az eszköz modellje nyomaték és feszültség szabályozás eseteire készül el, illetve a megvalósítási módot is figyelembe véve, mindezek diszkrét idejű rendszermodellje is szerepet kap.

2.1. Kiindulási alap

Az eszköz kiindulási alapja egy, a Stanford Egyetem Hapkit projektje [13] keretein belül kifejlesztett haptikus eszköz. Ez a projekt az ún. *Haptic Paddle* egy változata, mellyel már az 1990-es évek óta foglalkoztak az oktatásban és a kutatásban is. Ezek az eszközök négy fő közös tulajdonsággal rendelkeznek. Minden eszköz egy szabadsági fokú, ezzel csökkentve a költségeket, leggyakrabban egyenáramú motorral működtethetőek. A felhasználó egy joystick-szerű fogón keresztül lép kapcsolatba az eszközzel és mozgást visz be a rendszerbe, kimenetként pedig erőt érzékel, azaz a létrehozott erővisszacsatolás impedancia típusú. A Hapkit eszközök ezektől nem sokban térnek el, a capstan meghajtást egyes modellek esetén felváltotta a dörzshajtás, illetve erő mérésére további szenzorok kerültek beépítésre. Az elektronika egy egyedileg gyártott áramköri lap, kifejezetten az eszközhöz tervezve.

A Hapkit eszközök három verzióban készültek el, melyek a 2. ábrán láthatóak. Az első (Hapkit 1.0) lézerrel vágott keretét (tartó alap és inga) felépítő alkatrészek rögzítése ragasztással történik, a nyomatékátvitel dörzshajtás által, az inga rögzítése a talapzat-

hoz siklócsapágyazáson keresztül valósul meg. Az ezt követő verzió (Hapkit 2.0) kerete már 3D nyomtatással készült, így az alkatrészek száma is csökkent és ragasztani is csak a dörzshajtás megvalósításához szükséges gumiszalagot szükséges, az inga rögzítésének módja nem változott. Végül a harmadik verzió (Hapkit 3.0) szintén 3D nyomtatott, de a keret megjelenése szempontjából nagyban eltér az előzőektől. Ebben az esetben is siklócsapágyazás kerül alkalmazásra, viszont a nyomatékvitelhez kötélhajtást alkalmaznak (*capstan drive*). A 2. ábrának megfelelően, a Hapkit eszközök alkatrészei: (a) fogó, melyen keresztül a felhasználó kapcsolatba lép az eszközzel, (b) hajtott oldali ingarész, (c) neoprén szalag, (d) hajtókerék, (e) mágnes tartó, (f) alap, (g) motor, (h) mágnes, (i) áramköri lap rögzítőelemei, (j) magasság állításához szükséges tartórúd, (k) neoprén cső, (l) capstan meghajtáshoz szükséges kábel, (m) tapadókorongok, (n) kábelelvezetéshez szükséges geometriai kialakítás, és (o) a kábel feszességének állításához szükséges vájat [14].



2. ábra. Hapkit eszköz különböző verziói [14]

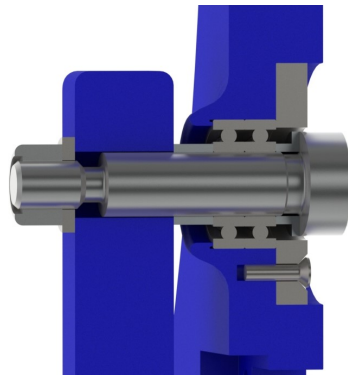
A szerkezeti kialakításon kívül ezek az eszközök eltérő DC motorokat használnak, illetve a saját fejlesztésű áramköri lap is módosult a fejlesztések során.

2.2. Kritikai elemzés és továbbfejlesztés

A végleges és megvalósított eszköz alapjául legfőképp a Hapkit 3.0 szolgált, ennek legnagyobb oka az ott alkalmazott kötélhajtás (*capstan drive*). Ezen rendszerek esetén a dörzshajtással szembeni előnye, hogy nincs holtjátéka, ami pontosabb nyomatékvitelt jelent illetve attól függően, hogy a hajtó tengelyre hányszor lesz a kötel (vagy jelen szerkezet esetén damil/drót) felcsévélve növelhető a súrlódás, ezáltal kiküszöbölhető a megcsúszás. Azonban ehhez elengedhetetlen a megfelelő megfeszítés, ami bonyolíthatja a szerelést. Ugyan a capstan hajtás korlátozza a hajtott oldal mozgástartományát, de ez a vizsgált eszköz esetében nem jelent problémát, hiszen a szükséges mozgástartomány továbbra is biztosított marad.

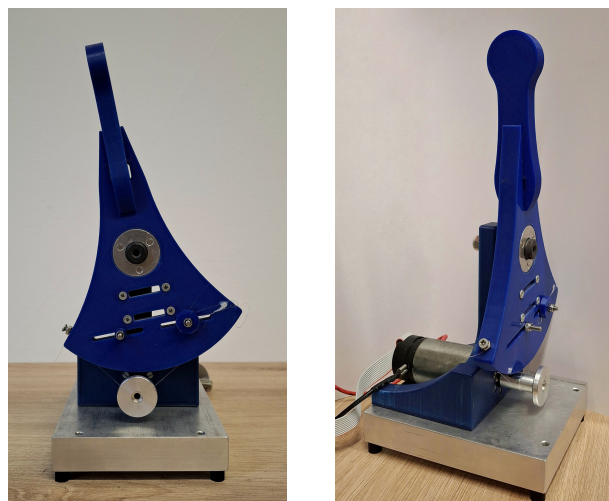
Az eszköz keretének kiindulási modelljében is célszerű volt módosításokat eszközölni. Maga a talapzat, melyhez a DC motor is csatlakozik az alkalmazott motor méretbeli kü-

lönbségei miatt módosult, illetve a műanyag alap a későbbi változtatások során a tapasztalatok alapján fém alapra lett cserélve, így stabilabbá téve az eszközt. Így a fém alaphoz kapcsolódik az a tartószerkezet, amelyre az eszköz inga része csatlakozik (a Hapkit 3.0 esetében ezek egy alkatrészként kerültek nyomtatásra). A korábban felsorolt Hapkit eszközök mindegyikénél az inga rögzítése siklócsapágyazáson keresztül valósul meg, amelyeknek az áttervezett verzióban golyóscsapágyak kerültek a helyére, ez látható a 3. ábrán.



3. ábra. A csapágyazás kialakítása

A gördülőcsapágyak legnagyobb előnye, hogy a gördülési ellenállás kisebb, mint a csúszó, tehát a siklócsapágyak esetében, ahol a tengely és a persely közvetlenül érintkezik egymással, nagyobb súrlódó erők lépnek fel, mint a golyóscsapágyak alkalmazása esetén. A csapágytípus váltás miatt az inga rész kialakításának is változnia kellett. Egyrészt a csapágyazást előnyös, ha nem két, hanem egy alkatrészen kell keresztülvezetni, így ez a darab nem két egymásba pattintható és összeragasztandó részből áll, hanem a megfogó rész (ahol a felhasználó érintkezésbe tud lépni az eszközzel) és a hajtott oldali ingarész egymásba tolható, és az alsó felén helyezkedik el a csapágyazáshoz, illetve esetleges szenzor számára kialakított rész is. A végleges kialakítás, és maga az eszköz a 4. ábrán látható.

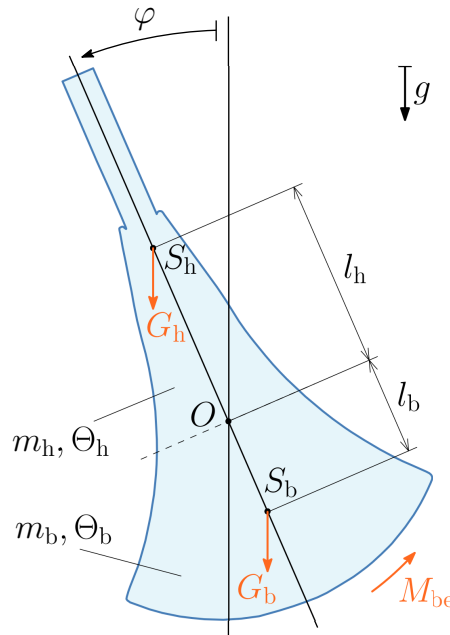


4. ábra. A megvalósított haptikus eszköz

A pozíció meghatározása az eredeti eszköz esetében MR (magnetorezisztív) szenzor által történt, aminek alapja, hogy a vagy ferromágneses anyagból vagy félvezetőből készült érzékelők ellenállása a mágneses tér hatására változik. Ebben az esetben egy mágnes szükséges rögzíteni a motor forgó tengelyéhez, így ahogy az a motorral együtt forog, a mágneses tere is folyamatosan változik, ez pedig mérhető a korábban említett kétféle anyagból készült szenzor segítségével. Mindezek helyett a pozíció meghatározása a választott DC motorra szerelt, szintén MR szenzor által is lehetséges. A szenzor segítségével kellően kis felbontás mellett meghatározható a pozíció, így az eredeti eszköz MR szenzora nem kerül alkalmazásra. Ellenben a további fejleszthetőség érdekében az MR szenzorhoz szükséges mágnes helye ki van alakítva a megvalósított eszközön is, hogy esetleges motorcsere esetén se okozzon gondot a pozíció mérése.

2.3. A megvalósított eszköz modellje

A konstrukció modellezése során a csapágyazott, mozgó rész tekinthető egy ingának, mely a befogás mentén két részre osztható fel. Ezt a megközelítést az 5. ábra szemlélteti.



5. ábra. Az eszköz sematikus ábrája

A rendszer mozgásegyenlete meghatározható a Lagrange-függvény segítségével

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}, \quad (1)$$

ahol $\mathcal{T}$ a kinetikus, $\mathcal{U}$ a potenciális energia. Az Euler-Lagrange egyenlet felírásakor figyelembe kell venni, hogy a rendszer nem konzervatív, így Q általános erő komponenseivel is számolni kell (az általános erők komponensei attól függően lehetnek nyomaték vagy

erő dimenziójúak, hogy az általános koordináta elfordulás vagy elmozdulás jellegű-e) [15], [16]. Ezek alapján az Euler-Lagrange egyenlet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k, \quad (2)$$

ahol $k = 1$, mivel a rendszer egy szabadsági fokú. Tehát egy általános koordináta lesz, ami nem más mint az inga időtől függő szöge, $q_1 = \varphi$. A kinetikus energia az alábbi formában írható fel

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \Theta_h \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_h v_h^2 + \frac{1}{2} \Theta_b \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_b v_b^2, \quad (3)$$

ahol Θ_h és Θ_b a felső (*handler*) és alsó (*body*) részek tehetetlenségi nyomatékai, m_h és m_b a két rész tömege, v_h és v_b a két rész súlypontjainak sebessége. Figyelembe véve, hogy $v_h = l_h \dot{\varphi}$ és $v_b = l_b \dot{\varphi}$ (ahol l_h és l_b a súlypontok távolsága a befogástól),

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} (\Theta_h + \Theta_b + m_h l_h^2 + m_b l_b^2) \dot{\varphi}^2. \quad (4)$$

A potenciális energia

$$\mathcal{U} = m_h g \cos(\varphi) l_h - m_b g \cos(\varphi) l_b, \quad (5)$$

amennyiben a nullpotenciál helye megegyezik a befogás helyével. A (2) egyenletbe visszaírva

$$(\Theta_h + \Theta_b + m_h l_h^2 + m_b l_b^2) \ddot{\varphi} + (m_b l_b - m_h l_h) g \sin(\varphi) = M_{be}, \quad (6)$$

mivel az inga szabályozása nyomaték segítségével megy végbe. Az egyenlet egyszerűsítésének céljából az alábbi jelölések vezethetők be:

$$J_i = \Theta_h + \Theta_b + m_h l_h^2 + m_b l_b^2 \quad (7)$$

$$K_i = (m_b l_b - m_h l_h) g, \quad (8)$$

illetve mivel a mozgás során az egyensúlyi helyzettől való kitérések kis mértékűek, lineárizálni lehet az egyensúlyi helyzet ($\varphi = 0$) körül, ekkor $\sin(\varphi) = \varphi$, így

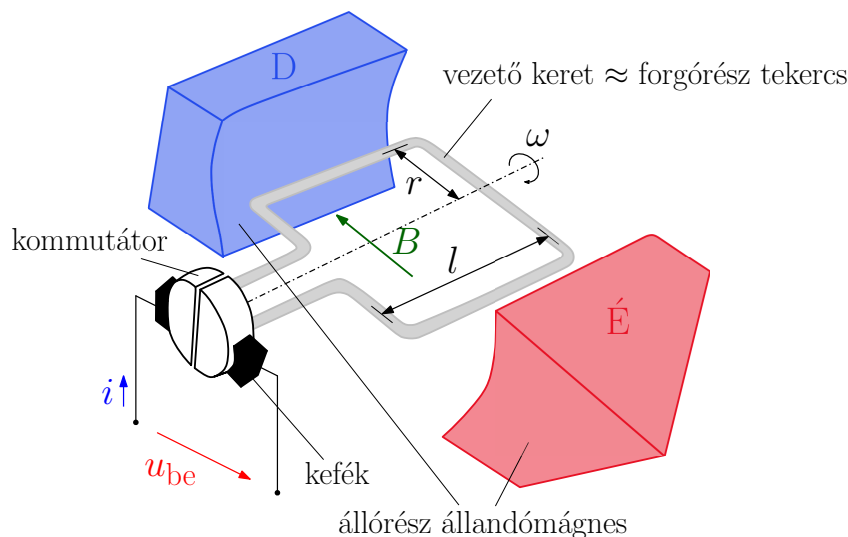
$$\ddot{\varphi} = -\frac{K_i}{J_i} \varphi + \frac{1}{J_i} M_{be}. \quad (9)$$

Haptikus eszközök esetében a bemenetet vizsgálata szempontjából a szabályozásból adódó beavatkozásokon (legyen az nyomaték vagy a későbbiekben ismertetett feszültség) felül az emberi hatás is megjelenik. Az operátor rendszerre kifejtett hatása jellemzően lineáris másodrendű rendszer hatásaként írható le, amely tömeggel, rugalmassággal és csillapítással rendelkezik. Az emberi impedancia széles tartományon tud mozogni, így a stabil területet is nagyban tudja befolyásolni. Azonban a tanulmányok azt mutatják, hogy az emberi impedancia hozzáadása a rendszerhez a stabil tartományt bővíti, ebből kifolyólag az operátor elhanyagolásával meghatározott stabilitási határok a legrosszabb

stabilitási határokként értelmezhetőek. Ebből kifolyólag jelen dolgozat is ezzel a feltételezéssel él [17].

A modell megalkotásánál az volt a feltételezés, hogy a beavatkozás nyomatékkaal megy végbe, a szabályozás ezen keresztül valósul meg. Azonban a gyakorlatban a szabályozás egyenáramú (DC) motoron keresztül fog megvalósulni, tehát feszültséggel történik a beavatkozás. Így meg kell alkotni a DC motor és az eszköz együttes, eredő modelljét.

A DC motorok rendszerint álló és forgó részből állnak. Az állórész legtöbb esetben egy állandómágnest tartalmaz, amely homogén mágneses mezőt hoz létre. Ebben a mágneses mezőben helyezkedik el a tekercselt forgórész. Működés szempontjából a motor modellezhető úgy, mint egy állandó mágneses mezőben forgó vezető keret, amely elvi felépítését a 6. ábra szemlélteti.

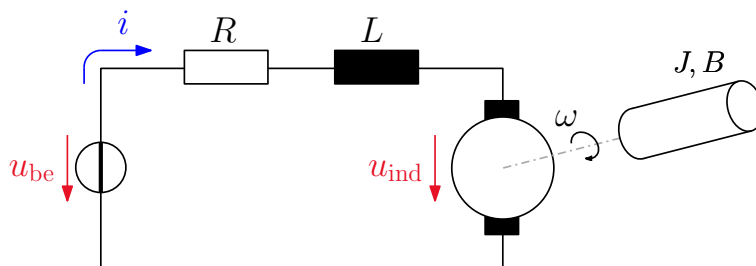


6. ábra. Egyenáramú gép elvi felépítése

A mágneses mezőben időben változó ω szögsebességgel forgó vezető keret által indukált, szintén időben változó feszültség az alábbi módon írható fel

$$u_{\text{ind}} = k_e \omega, \quad (10)$$

ahol k_e a motorra jellemző konstans, az elektromos állandó. Értéke függ az állandó mágnes pólusai között létrejövő mágneses indukciótól és a vezető keresztmetszetének területétől. Az egyenáramú gép leírható a 7. ábrán látható helyettesítő villamos képpel. A forgórész tekercsének modellezésére egy R ellenállás és egy L induktivitás alkalmas, a körre kapcsolt u_{be} , időben változó feszültség hatására i (időtől függő) áram fog folyni.



7. ábra. DC motor helyettesítő képe

A felírható villamos egyenlet

$$u_{be} = Ri + L \frac{di}{dt} + u_{ind} = Ri + L \frac{di}{dt} + k_e \omega. \quad (11)$$

A motor villamos nyomatékát az áramjárta keretre ható Lorenz-erőből adódó forgatónyomaték adja, ami egyenesen arányos az áramerősséggel

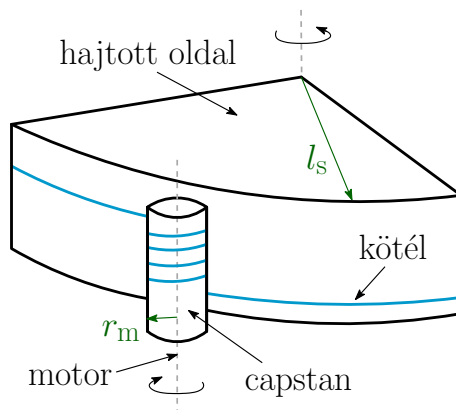
$$M_v = k_m i, \quad (12)$$

ahol k_m a nyomatékállandó, amely értéke szintén az állandó mágnes pólusai között létrejövő mágneses indukciótól és a vezető keresztmetszetének területétől függ. A motort ez az M_v villamos nyomaték gyorsítja, így a hajtás mozgásegyenlete

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_v - B\omega - M_t = k_m i - B\omega - M_t, \quad (13)$$

ahol J a rotor tehetetlenségi nyomatéka, B a viszkózus csillapítás (a forgórész csapágyázásából eredő veszteséget modellezi), M_t pedig a terhelő nyomaték.

Az eredő modell meghatározásához először meg kell vizsgálni a két rendszer közti kapcsolatot. A nyomatékátvitel egyfajta kötélhajtással (*capstan drive*) kerül megvalósításra, amely működése súrlódáson alapszik. A hajtott oldalon rögzített a kötel (vagy drót), míg a hajtást végző tengelyre vagy dobra (ezt nevezik *capstan*-nak) fel van csévélve, ez látható a 8. ábrán. A súrlódás mértékét az befolyásolja, hogy a kötel hányszor lett felcsévélve a hajtó tengelyre, ez akadályozza meg a kötel megcsúszását.



8. ábra. A capstan drive elvi felépítése

Az áttétel a két oldal átmérőinek arányától függ, tehát

$$N = \frac{r_m}{l_s}, \quad (14)$$

ahol r_m a motorra szerelt tengely sugara. A két rendszer közötti kapcsolatot az

$$\omega_i = \frac{r_m}{l_s} \omega_r, \quad (15)$$

$$M_i = \frac{l_s}{r_m} M_v \quad (16)$$

egyenletek írják le, ahol ω_i az inga, ω_r a rotor szögsebessége és M_i az ingára ható, M_v pedig a villamos nyomaték.

Az inga (9) mozgásegyenlete, a motor villamos (11) és mechanikai (13) egyenletei, illetve a két rendszer közötti kapcsolatot leíró egyenletek (15), (16) ismeretében megalkotható az eredő rendszert leíró differenciálegyenlet. Laplace transzformáció segítségével felírható az inga mozgásegyenlete és a motor működését leíró egyenletek

$$\Omega_i s = -\frac{K_i}{J_i s} \Omega_i + \frac{1}{J_i} M_{be}, \quad (17)$$

$$U_{be} = (R + Ls)I + k_e \Omega_r, \quad (18)$$

$$J \Omega_r s = k_m I - B \Omega_r - M_t, \quad (19)$$

ahol Ω_i az inga és Ω_r a villamos motor szögsebessége. A motoron eső terhelő nyomaték (M_t) az inga bemenő nyomatékából (M_{be}) ered, így először érdemes kifejezni M_t -t

$$M_t = \frac{k_m}{R + Ls} U_{be} - \left(B + Js + \frac{k_m^2}{R + Ls} \right) \Omega_r. \quad (20)$$

Figyelembe véve a (15) és (16) kapcsoló egyenleteket

$$\left(J_i s + \frac{(B + Js)l_s^2}{r_m^2} + \frac{K_i}{s} + \frac{k_m^2 l_s^2}{r_m^2 (R + Ls)} \right) \Omega_i = \frac{k_m l_s}{r_m (R + Ls)} U_{be}, \quad (21)$$

majd átrendezve

$$\begin{aligned} \Omega_i (K_i R r_m^2 + k_m^2 l_s^2 s + B l_s^2 R s \\ + K_i L r_m^2 s + B L l_s^2 s^2 + J l_s^2 R s^2 + J_i R r_m^2 s^2 + J L l_s^2 s^3 + J_i L r_m^2 s^3) = k_m l_s r_m s U_{be}, \end{aligned} \quad (22)$$

amiből

$$\begin{aligned} \Phi [(J L l_s^2 + L J_i r_m^2) s^3 + (B L l_s^2 + J l_s^2 R + J_i R r_m^2) s^2 \\ + (k_m^2 l_s^2 + B l_s^2 R + K_i L r_m^2) s + K_i R r_m^2] = k_m l_s r_m U_{be}. \end{aligned} \quad (23)$$

Elvégezve az inverz Laplace transzformációt

$$\begin{aligned} (JLl_s^2 + LJ_1r_m^2) \ddot{\varphi} + (BLl_s^2 + Jl_s^2R + J_1Rr_m^2) \dot{\varphi} \\ + (k_m^2l_s^2 + Bl_s^2R + K_iLr_m^2) \varphi + K_iRr_m^2\varphi = k_m l_s r_m u_{be}, \end{aligned} \quad (24)$$

ahol u_{be} a bemenő feszültség. Szimulációs vizsgálatok alapján a $\ddot{\varphi}$ tag, azaz a szöggyorsulás változása elhanyagolható, így a (24) egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = -\frac{k_m^2l_s^2 + Bl_s^2R + K_iLr_m^2}{BLl_s^2 + Jl_s^2R + J_1Rr_m^2} \dot{\varphi} - \frac{K_iRr_m^2}{BLl_s^2 + Jl_s^2R + J_1Rr_m^2} \varphi \\ + \frac{k_m l_s r_m}{BLl_s^2 + Jl_s^2R + J_1Rr_m^2} u_{be}. \end{aligned} \quad (25)$$

A könnyebb követhetőség érdekében az alábbi jelölések kerülnek bevezetésre

$$a_2 = BLl_s^2 + Jl_s^2R + J_1Rr_m^2, \quad (26)$$

$$a_1 = k_m^2l_s^2 + Bl_s^2R + K_iLr_m^2, \quad (27)$$

$$a_0 = K_iRr_m^2, \quad (28)$$

$$b_0 = k_m l_s r_m. \quad (29)$$

Felhasználva az új jelöléseket, az eredő rendszer mozgásegyenlete az alábbi alakban adható meg

$$\ddot{\varphi} = -\frac{a_1}{a_2} \dot{\varphi} - \frac{a_0}{a_2} \varphi + \frac{b_0}{a_2} u_{be}. \quad (30)$$

Az eszköz (9) és az eredő rendszer (30) mozgásegyenletének ismeretében elkészíthető az állapottér modell mind nyomatékkal és feszültséggel történő beavatkozás esetén. Az állapotegyenletek

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_i}{J_1} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_n} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_n} M_{be}, \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_f} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_0}{a_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_f} u_{be}. \quad (32)$$

2.4. Állapotviszacsatoláson alapuló szabályozás tervezése

Lineáris rendszerek esetén adott $x(t)$ állapotot akkor lehet teljesen irányíthatónak nevezni, ha létezik egy olyan $u(t)$ bemenet, ami véges T idő alatt az állapotot az állapottér origójába juttatja el. A rendszer irányíthatóságának kritériumát a Kálmán-féle rangfeltétel adja meg [18], amely alapján egy rendszer irányítható, ha az ún. $\mathbf{M}_c$ irányíthatósági mátrix rangja megegyezik az n állapotváltozók számával, azaz

$$\text{rank}(\mathbf{M}_c) = n. \quad (33)$$

Amennyiben SISO (*Single Input Single Output*) rendszert vizsgálunk, az egyenlet is egyszerűsödik $\det(\mathbf{M}_c) \neq 0$ alakra. Az irányíthatósági mátrix a rendszer- és a bemeneti mátrix segítségével állítható elő

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{B}. \quad (34)$$

Nyomatékkal történő szabályozás esetén ez

$$\mathbf{M}_{c,n} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_i} \\ \frac{1}{J_i} & 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

feszültségszabályozás esetén pedig

$$\mathbf{M}_{c,f} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_0}{a_2} \\ -\frac{b_0}{a_2} & -\frac{a_1 b_0}{a_2^2} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Látható hogy mindkét esetben az irányíthatósági mátrix rangja $\text{rank}(\mathbf{M}_c) = 2$ (illetve a determinánsa sem zérus), tehát mindkét rendszer állapotirányítható.

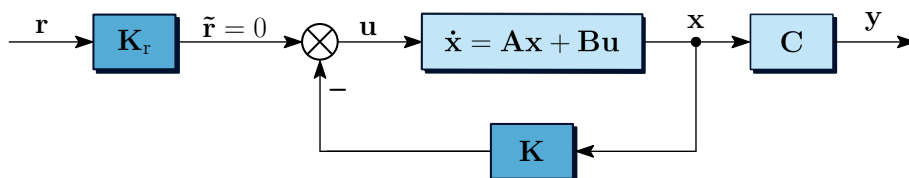
A rendszer állapottér modelljének felírásakor az előrecsatolási tag elhanyagolható, azaz $\mathbf{D} = 0$, így az állapottér modell az alábbi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (37)$$

formában ismert. Az állapotviszacsatoláson alapuló szabályozás az alábbi szabályozási törvénnyel valósítható meg

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_r \mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (38)$$

ezt 9. ábra szemlélteti.



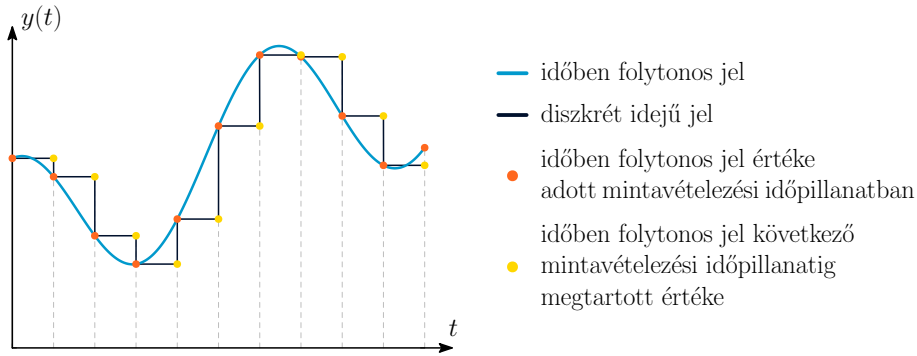
9. ábra. Az állapotviszacsatolás struktúrája

Amennyiben $\tilde{\mathbf{r}} = 0$ teljesül, az állapotegyenlet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{K}\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \quad (39)$$

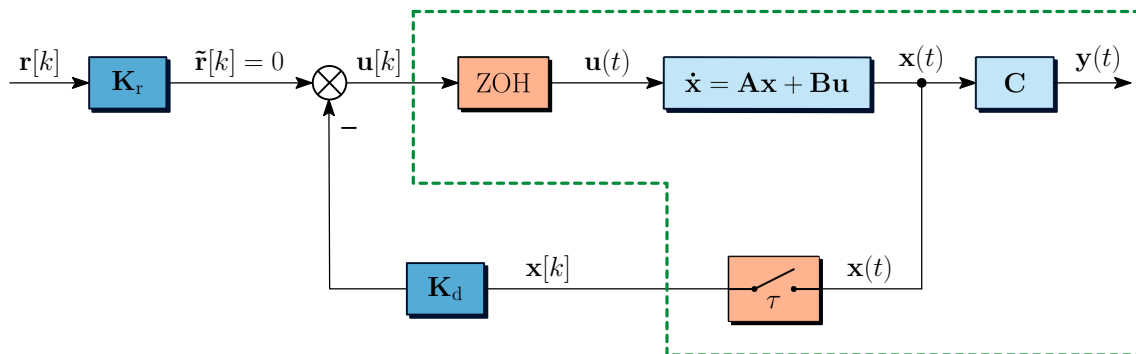
ahol $\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ az új (módosított) rendszermátrix [18].

Napjainkban a szabályozási lánc megvalósítása szinte kizárólag valamilyen digitális eszköz felhasználásával történik (számítógép, mikrokontroller, mikroprocesszor), melyek a bemenő jeleket analóg/digitális (ADC), a kimenő jeleket digitális/analóg (DAC) átalakítókkal állítják elő. Így célszerű a DC motor szabályozására, mint mintavételes, diszkrét idejű szabályozásra tekinteni. A folytonos idejű szabályozott szakasz állapotegyenletei a (37) egyenlet alapján adottak, a bemenet szintén folytonos idejű, így egy DAC átalakítót szükséges elé helyezni, amit meg lehet valósítani nulladrendű tartó (ZOH - *zero order hold*) segítségével.



10. ábra. Nulladrendű tartó

A ZOH mintavételezi a jelet egy adott időpillanatban, majd ezt az értéket megtartja a következő mintavételezési pillanatig, ennek működése látható a 10. ábrán [19]. A szabályozott szakasz után egy ADC átalakító kell álljon, hiszen maga a szabályozás diszkrét időben történik [18]. A mintavételezett rendszer állapotviszacsatoláson alapuló szabályozási körének felépítését a 11. ábra szemlélteti.



11. ábra. A mintavételezett rendszer szabályozási körének felépítése

A diszkrétizált állapottermodell, amely a 11. ábrán látható zölddel bekeretezett rész diszkrét idejű modellje

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[k] \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}[k], \end{aligned} \quad (40)$$

ahol

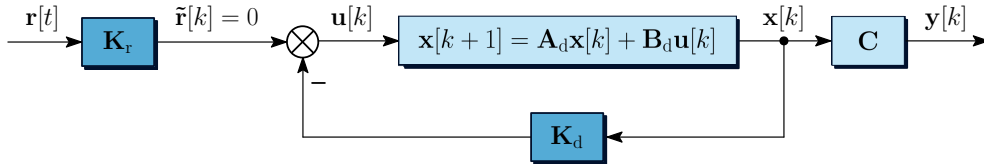
$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= e^{\tau \mathbf{A}}, \\ \mathbf{B}_d &= \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}_d - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}, \\ \mathbf{C}_d &= \mathbf{C} \end{aligned} \quad (41)$$

és τ a mintavételezési idő (a kimeneti egyenlet mátrixai diszkrét időben nem változnak, az előreecsatolási tag ez esetben is elhanyagolható). Az irányíthatósági mátrix ebben az esetben is felírható és $\mathbf{A}_d$ illetve $\mathbf{B}_d$ ismeretében meghatározható, az alábbi alakban

$$\mathbf{M}_{c,d} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_d & \mathbf{A}_d^2 & \dots & \mathbf{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{B}_d. \quad (42)$$

A megvalósított állapotviszacsatoláson alapuló diszkrét idejű szabályozás a 12. ábrán látható, az állapotegyenlet

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] - \mathbf{B}_d \mathbf{K}_d \mathbf{x}[k] = (\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K}_d) \mathbf{x}[k] = \tilde{\mathbf{A}}_d \mathbf{x}[k]. \quad (43)$$



12. ábra. A diszkrét idejű állapotviszacsatolás struktúrája

3. Mintavételes rendszer stabilitásvizsgálata

Időben folytonos, lineáris, időinvariáns (LTI) rendszerek esetén a stabilitást meg lehet fogalmazni úgy, hogy a rendszer akkor stabil, ha korlátos bemenő jelre korlátos választ ad (*BIBO - bounded input bounded output*). A bemenő jel korlátossága azt jelenti, hogy létezik egy konstans, melynél a jel abszolút értéke nem lesz nagyobb, tehát $\exists A : |u(t)| \leq A < \infty$.

Ez esetben a kimenő jelet egységimpulzus vizsgáló jelre, mint bemenetre meghatározva azt arra lehet következtetni, hogy a kimenő jel akkor lesz korlátos, ha a rendszer súlyfüggvénye (impulzusválasza) abszolút integrálható, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)| dt < \infty$ [20]. A súlyfüggvény értékének ebből kifolyólag zérushoz kell tartania, azaz $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ kell legyen. Laplace-tartományban vizsgálva az egységimpulzus jel $U(s) = 1$, ennek megfelelően a kimenő jel

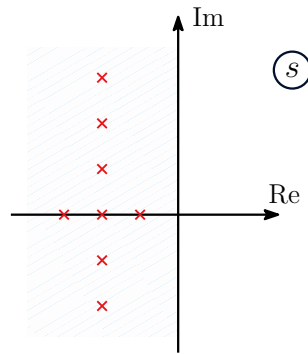
Laplace transzformáltja $Y(s) = W(s)U(s) = W(s)$, azaz maga az átviteli függvény. A függvény felírható gyöktényezős alakban, ami

$$W(s) = \frac{b_r \prod_{i=0}^r (s - z_i)}{a_n \prod_{i=0}^n (s - p_i)}, \quad (44)$$

ahol r a számláló, n a nevező fokszáma, z_i -k a számláló gyökei, azaz a zérusok, p_i -k pedig a nevező gyökei, azaz a pólusok. Ekkor a kimenő jel az alábbi alakban írható fel (amennyiben a gyökök egyszeresek)

$$y(t) = w(t) = \sum_{i=1}^n g_i e^{s_i t}, \quad (45)$$

ahol s_i -k a rendszer pólusai, melyek a (44) egyenlet alapján az átviteli függvény nevezőjének gyökei. Az átviteli függvény nevezőjét hívják karakterisztikus polinomnak, ebből képezhető a $p(s) = 0$ karakterisztikus egyenlet, melynek megoldásai a pólusok. A (45) egyenletből kiindulva azt lehet megállapítani, hogy a rendszer aszimptotikusan stabil lesz, amennyiben a pólusok valós része a negatív félsíkon helyezkedik el, a komplex számsíkon, azaz $\text{Re}(s_i) < 0$ (egyéb esetben $e^{s_i t}$ nem lecsengő lenne) [21]. A stabil területet a kék sraffozás jelöli a 13. ábrán.



13. ábra. Folytonos idejű LTI rendszerek stabilitása

A vizsgált rendszerek viselkedése állapottér egyenletekkel (31), (32) írható le, illetve az állapotviszacsatoláson alapuló szabályozás tervezése során definiálható a módosított rendszer mátrix, (39) egyenlet. A cél, hogy az állapottér modell és az átviteli függvény kapcsolatát meghatározva, megfogalmazható legyen a stabilitás feltétele. Az átviteli függvény kiszámításához első lépésben az állapottér modell általános egyenleteit, (37) kell Laplace transzformálni

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s). \end{aligned} \quad (46)$$

Az egyenletek átrendezésével és $\mathbf{x}(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (47)$$

amiből az átviteli mátrix

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \quad (48)$$

Tehát a karakterisztikus polinom

$$p(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}), \quad (49)$$

így a pólusok az $\mathbf{A}$ rendszermátrix sajátértékei lesznek.

Az állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozás során az állapotegyenletet a (39) egyenlet írja le, ennek Laplace transzformáltja ($\tilde{\mathbf{r}} \neq 0$ esetén)

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{R}}(s) - \mathbf{K}\mathbf{X}(s)) \quad (50)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s).$$

Feltételezve a kezdeti nyugalmi állapotot és átrendezve az egyenletet

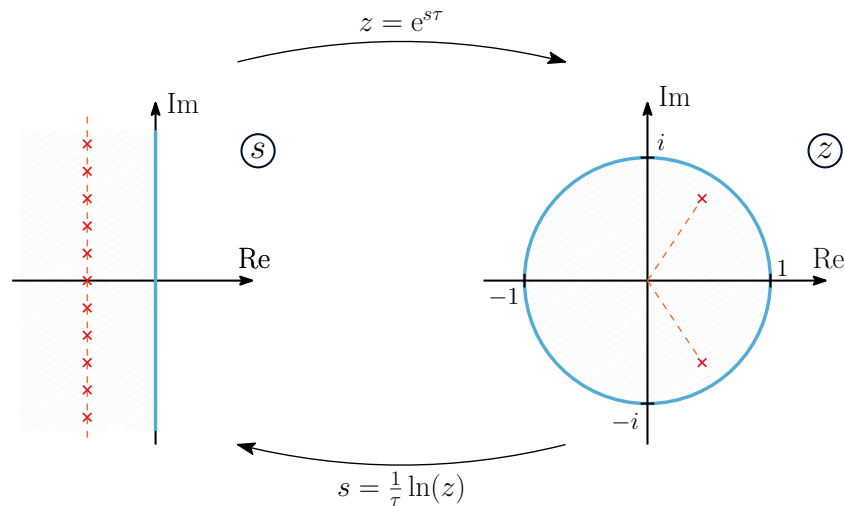
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})]^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}}(s), \quad (51)$$

ebből

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{B}, \quad (52)$$

tehát a pólusok az $\tilde{\mathbf{A}}$ módosított rendszermátrix sajátértékei lesznek [21].

A szabályozás diszkrét időben történik, így a stabilitást érdemes diszkrét időben is vizsgálni. Mintavételes rendszerben a folytonos idejű rendszermátrixnak a (41) egyenlet alapján megkapott $\mathbf{A}_d$ mátrix felel meg. Az $\mathbf{A}$ mátrix s_i sajátértékei az exponenciális függvény szerint z tartományban $z_i = e^{s_i\tau}$ pólusoknak felelnek meg, ahol τ a mintavételezési idő. Az s és z tartományok közötti kapcsolat a 14. ábrán látható. A leképezésből adódóan a diszkrét idejű LTI rendszer akkor lesz stabil, ha a pólusok a komplex egységkörön belül helyezkednek el, azaz $|z_i| < 1$ [21].



14. ábra. Az s és z tartományok közötti kapcsolat

3.1. Nyomatékszabályozás esetén

Nyomatékszabályozás esetén a rendszer folytonos időbeli viselkedését a (31) egyenlet írja le. A paraméterek számának csökkentése érdekében érdemes dimenziótlanítani. Ehhez először meg kell vizsgálni a szabályozás paramétereit. Az inga állapotegyenletébe (31) behelyettesítve a szabályozási törvényt állapotvisszacsatolás esetén (38)

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_i}{J_i} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_n} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_i} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_n} \underbrace{\begin{bmatrix} k_p & k_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_n} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Felírva az állapotegyenletet $\ddot{\varphi}$ -re

$$\ddot{\varphi} + \frac{K_i}{J_i} \varphi = -\frac{k_p}{J_i} \varphi_j - \frac{k_d}{J_i} \dot{\varphi}_j, \quad (54)$$

ahol $t_j = j\tau$, $j \in \mathbb{Z}^+$ és τ a mintavételezési idő. Ekkor bevezethető

$$T := \omega_n \tau \quad (55)$$

dimenziótlan idő, ahol $\omega_n = \sqrt{\frac{K_i}{J_i}}$ [22]. Az egyenlet dimenziótlanításához szükséges az idő szerinti derivált meghatározása, a dimenziótlan T idő figyelembe vételével (ennek jelölése a továbbiakban $'$ -al történik). Felhasználva, hogy $t = \frac{1}{\omega_n} T$

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{df(t)}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{df(t)}{dT} \omega_n \frac{dT}{dt} = \\ &= \omega_n \frac{df(t)}{dT} = \omega_n f'(t). \end{aligned} \quad (56)$$

Így az egyenlet

$$\varphi'' + \varphi = -\frac{k_p}{J_i \omega_n^2} \varphi_j - \frac{k_d}{J_i \omega_n} \varphi'_j. \quad (57)$$

Kifejezhetőek a visszacsatolási mátrix dimenziótlanított paraméterei

$$\begin{aligned} p &:= \frac{k_p}{J_i \omega_n^2}, \\ d &:= \frac{k_d}{J_i \omega_n}. \end{aligned} \quad (58)$$

A k_p és k_d paraméterek azon értékeinek meghatározásához, amelyekre a rendszer stabil, a módosított rendszermátrix sajátértékeit szükséges vizsgálni (diszkrét idejű szabályozás esetében). A sajátértékek a

$$p(z) = \det(z\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_d) = z^2 - \text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d)z + \det(\tilde{\mathbf{A}}_d) = 0 \quad (59)$$

karakterisztikus polinom megoldásai.

Diszkrét idejű rendszer esetén a stabilitás feltétele az, hogy a pólusok a komplex egységkörön belül helyezkedjenek el, azaz $|z_i| < 1$. A stabil terület meghatározásához azonban nincs feltétlen szükség a pólusok pontos értékének ismeretére. Folytonos időben, ahol a stabilitás feltétele az, hogy a pólusok valós része negatív legyen, használható az ún. Routh-Hurwitz kritérium. A kritérium alapján a stabilitás szükséges feltétele, hogy az adott $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ karakterisztikus polinom minden együtthatója definíció szerint azonos előjelű legyen, az elégséges feltétel pedig, hogy az ún. Hurwitz **(H)** mátrix minden egyes főátlójára feszített aldeterminánsa azonos előjelű legyen [23]. A Hurwitz mátrix az alábbi $n \times n$ -es mátrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_0 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

A kritérium segítségével a pólusok valós részének előjelét lehet vizsgálni, így a $|z_i| < 1$ feltétel teljesülését nem lehetséges közvetlenül vizsgálni általa. Ahhoz hogy a kritériumot fel lehessen használni Möbius transzformációt kell végezni a $p(z)$ karakterisztikus polinomon. A Möbius transzformáció során az alábbi módon lehet áttérni w tartományba

$$z = \frac{w+1}{w-1}. \quad (61)$$

Az (59) egyenletbe beírva

$$p(w) = \left(\frac{w+1}{w-1} \right)^2 - \text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d) \left(\frac{w+1}{w-1} \right) + \det(\tilde{\mathbf{A}}_d) = 0, \quad (62)$$

ezt átrendezve

$$p(w) = w^2 \left[1 - \text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d) + \det(\tilde{\mathbf{A}}_d) \right] + w \left[2 - 2 \det(\tilde{\mathbf{A}}_d) \right] + \left[1 + \text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d) + \det(\tilde{\mathbf{A}}_d) \right] = 0. \quad (63)$$

Az együtthatók és a rájuk vonatkozó feltételek ez esetben

$$a_2 = 1 - \text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d) + \det(\tilde{\mathbf{A}}_d) > 0, \quad (64)$$

$$a_1 = 2 - 2 \det(\tilde{\mathbf{A}}_d) > 0, \quad (65)$$

$$a_0 = 1 + \text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d) + \det(\tilde{\mathbf{A}}_d) > 0. \quad (66)$$

A Hurwitz mátrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}, \quad (67)$$

az ebből adódó feltételek

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad (68)$$

$$\Delta_2 = a_1 \cdot a_0 > 0, \quad (69)$$

melyek mindig teljesülnek, amennyiben a szükséges feltételek is. Nyomatékszabályozás esetén a módosított rendszermátrix a dimenziótlanítás következtében az alábbi alakra egyszerűsödik

$$\tilde{\mathbf{A}}_{d,n} = \begin{bmatrix} \cosh(T) - d \sinh(T) & (1-p) \sinh(T) \\ d - d \cosh(T) + \sinh(T) & p + (1-p) \cosh(T) \end{bmatrix}, \quad (70)$$

így

$$\text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_{d,n}) = p - (p-2) \cosh(T) - d \sinh(T), \quad (71)$$

$$\det(\tilde{\mathbf{A}}_{d,n}) = 1 - p + p \cosh(T) - d \sinh(T). \quad (72)$$

A (64), (65) és (66) egyenletekből meghatározhatóak a stabil tartomány határoló egyenesei ezek az alábbiak

$$a_2 = (p-1)(\cosh(T) - 1) = 0, \quad (73)$$

$$a_1 = p(1 - \cosh(T)) + d \sinh(T) = 0, \quad (74)$$

$$a_0 = 1 + \cosh(T) - d \sinh(T) = 0. \quad (75)$$

A módosított rendszermátrix további vizsgálatával megfigyelhető, hogy a pólusok egymáshoz való viszonyai hogyan függenek a k_p és k_d értékektől. Az (59) egyenletre alkalmazhatóak a Viete-formulák

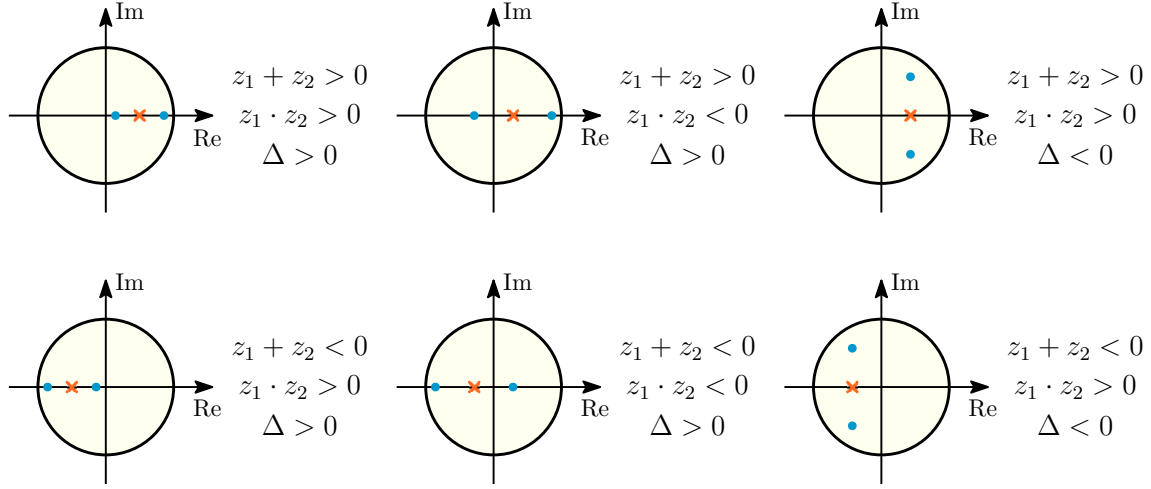
$$z_1 + z_2 = \text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_{d,n}), \quad (76)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \det(\tilde{\mathbf{A}}_{d,n}), \quad (77)$$

illetve a diszkriminánst

$$\Delta = \text{tr}^2(\tilde{\mathbf{A}}_{d,n}) - 4 \det(\tilde{\mathbf{A}}_{d,n}) \quad (78)$$

vizsgálva elkülöníthetők a komplex gyökök is. A póluspárok kategorizálását a 15. ábra szemlélteti, ahol jelölve vannak a pólusok, illetve azok valós részeinek számtani közepe (narancssárga kereszt).



15. ábra. Póluspárok kategorizálása

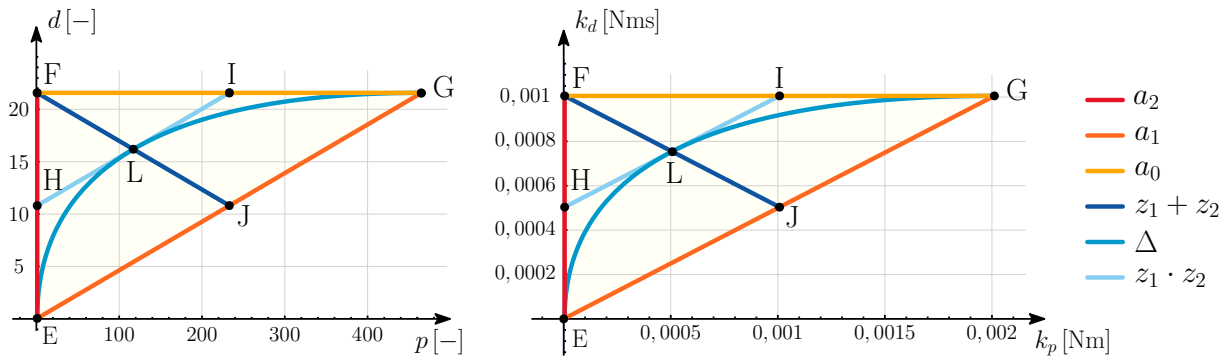
A kategorizálás során a Δ determináns előjele dönti el, hogy a pólusok komplex konjugált párt alkotnak vagy valósak, $z_1 \cdot z_2$ szorzat előjele alapján különíthetők el az azonos és ellentétes előjelű póluspárok, és a $z_1 + z_2$ összeg előjele pedig arról ad információt, hogy a pólusok számtani közepének mi az előjele. Mindhárom esetben előjelet vizsgálunk, így ezek az egyenletek is felírhatóak, mint határoló görbék, azonban ezek a stabil tartományt bontják további 6 tartományra. A határoló görbék

$$z_1 + z_2 = 1 - p + p \cosh(T) - d \sinh(T) = 0, \quad (79)$$

$$z_1 \cdot z_2 = p - (p - 2) \cosh(T) - d \sinh(T) = 0, \quad (80)$$

$$\Delta = \sinh\left(\frac{T}{2}\right) [4 + d^2 - 4p + p^2 + (d^2 + (p - 2)^2) \cosh(T) + 2d(p - 2) \sinh(T)] = 0. \quad (81)$$

A szabályozás megvalósításához a gyakorlatban a visszaszámolt $k_p - k_d$ értékekre van szükség, ezeket az (58) egyenletek alapján lehet meghatározni. A stabilitástérkép, azaz a stabil tartományt ábrázoló $p - d$ és $k_p - k_d$ diagram a 16. ábrán látható.



16. ábra. $p - d$ és $k_p - k_d$ stabilitástérkép, $\tau = 1 [s]$ mellett

3.2. Feszültségszabályozás esetén

Feszültségszabályozás esetén a rendszer viselkedését folytonos időben a (32) egyenlet írja le, ebbe behelyettesítve a (38) szabályozási törvényt az alábbi

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_f} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_0}{a_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_f} \underbrace{\begin{bmatrix} k_p & k_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_f} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (82)$$

egyenletet kapjuk. Ahogy a 3.1. fejezetben olvasható, érdemes dimenziótlanítani, majd a módosított rendszermátrix alapján meghatározni a $p(z)$ karakterisztikus polinomot, Möbius transzformáció által létrehozni a $p(w)$ karakterisztikus polinomot, ahol így alkalmazható a Routh-Hurwitz kritérium. A nyomatékszabályozás esetéhez hasonlóan ez esetben is kiszámolhatóak a határoló görbék.

A dimenziótlanításhoz fel kell írni az állapotegyenletet $\ddot{\varphi}$ -re

$$\ddot{\varphi} + \frac{a_0}{a_2}\varphi + \frac{a_1}{a_2}\dot{\varphi} = -k_p\frac{b_0}{a_2}\varphi_j - k_d\frac{b_0}{a_2}\dot{\varphi}_j, \quad (83)$$

ahol $t_j = j\tau$, $j \in \mathbb{Z}^+$ és τ a mintavételezési idő. Bevezethető a

$$T := \omega_n \tau \quad (84)$$

dimenziótlan idő, illetve legyen $\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ és $\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$ [22]. A dimenziótlan idő meg egyezik a korábban tárgyalttal, így az idő szerinti derivált a dimenziótlan idő figyelembe vételével is azonos lesz. Ekkor az egyenlet

$$\varphi'' + \varphi + 2\zeta\varphi' = -k_p\frac{b_0}{a_2\omega_n^2}\varphi_j - k_d\frac{b_0}{a_2\omega_n}\varphi_j'. \quad (85)$$

A dimenziótlanított visszacsatolási mátrix paraméterek

$$\begin{aligned} p &:= k_p \frac{b_0}{a_2\omega_n^2}, \\ d &:= k_d \frac{b_0}{a_2\omega_n}. \end{aligned} \quad (86)$$

A $p(z)$ karakterisztikus polinom megoldásai ez esetben is a rendszermátrix sajátértékei lesznek, ahogy az (59) egyenletben látható. A Möbius transzformációt elvégezve adott a $p(w)$ karakterisztikus polinom (62), majd a Routh-Hurwitz kritériumot alkalmazva az együttthatókra vonatkozó feltételek is. A módosított rendszermátrix ez esetben az alábbi alakban írható fel

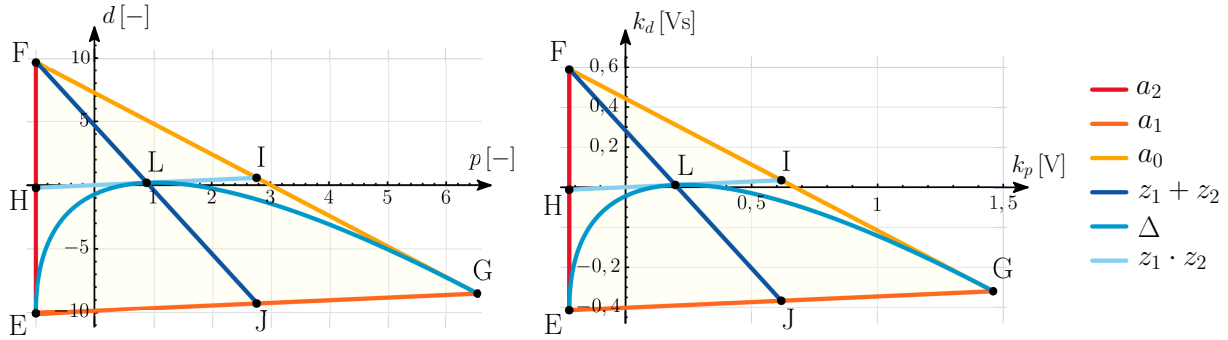
$$\tilde{\mathbf{A}}_{d,f} = \begin{bmatrix} e^{-T\zeta} \left[\text{ch}_T - \frac{(d+\zeta)\text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right] & e^{-T\zeta} \frac{(1-p)\text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ d + e^{-T\zeta} \left[-d \text{ch}_T + \frac{(1-d\zeta)\text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right] & p - e^{-T\zeta} (p-1) \text{ch}_T - e^{-T\zeta} \frac{(p-1)\zeta\text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \end{bmatrix}, \quad (87)$$

ahol $\text{ch}_T = \cosh\left(T\sqrt{1-\zeta^2}\right)$ és $\text{sh}_T = \sinh\left(T\sqrt{1-\zeta^2}\right)$. Ebből adódóan

$$\text{tr}\left(\tilde{\mathbf{A}}_{d,f}\right) = e^{-2T\zeta} \left[1 - p + e^{T\zeta} p \text{ch}_T - \frac{e^{T\zeta}(d+p\zeta)\text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right], \quad (88)$$

$$\det\left(\tilde{\mathbf{A}}_{d,f}\right) = p - e^{-T\zeta}(p-2)\text{ch}_T - \frac{e^{-T\zeta}(d+p\zeta)\text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (89)$$

A 3.1 fejezetben leírtak alapján, a stabil tartomány határoló görbéi a (64), (65) és (66) egyenletekből feszültségszabályozás esetében is meghatározhatóak. A Viete-formulákat alkalmazva és megvizsgálva a diszkrimináns értékét, a belső görbék is felírhatóak. A stabilitástérkép $p - k$ és $k_p - k_d$ paraméterektől függően a 17. ábrán látható.



17. ábra. $p - d$ és $k_p - k_d$ stabilitástérkép, $\tau = 1$ [s] mellett

3.3. Időkésés figyelembe vétele a vizsgálat során

A szabályozási lánc megvalósítása a gyakorlatban valamilyen digitális eszköz által megy végbe, ami adott mintavételezési időpillanatokban képes mérni a szabályozáshoz szükséges adatokat (szög, szögsebesség) és ehhez hasonlóan a szabályozás paramétereit (k_p , k_d) is csak ezekben az adott időpillanatokban számolja újra és állítja át. Az előzőekben a feltételezés az volt, hogy a paraméterek megváltoztatása azonnal megtörténik, amint beolvasásra kerültek a szükséges adatok (vagy elhanyagolhatóan kevés idő szükséges hozzá), így az adott időpillanatban kapott értékek rögtön felhasználásra kerülnek a szabályozásban. Ezt a feltételezést azonban nem minden esetben lehet megtenni, amennyiben a szabályozást biztosító digitális eszköz nem képes megfelelő gyorsasággal reagálni, a rendszerben időkésés jelenik meg. Ez alatt azt kell érteni, hogy az adatok beolvasásának pillanatában a szabályozás paramétereinek beállítása nem ezen értékek szerint, hanem a korábban mért adatok alapján történik meg.

A diszkrét idejű, állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozás esetén az állapotegyenlet a (43) egyenlet, amennyiben az időkésés nem elhanyagolható ez az alábbiaknak megfelelően módosul

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] - \mathbf{B}_d \mathbf{K}_d \mathbf{x}[k-1], \quad (90)$$

azaz

$$\begin{bmatrix} \varphi[k+1] \\ \dot{\varphi}[k+1] \\ \vdots \\ \varphi[k] \\ \dot{\varphi}[k] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_d & -\mathbf{B}_d \mathbf{K}_d \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_d} \begin{bmatrix} \varphi[k] \\ \dot{\varphi}[k] \\ \vdots \\ \varphi[k-1] \\ \dot{\varphi}[k-1] \end{bmatrix}. \quad (91)$$

A módosított rendszermátrix ekkor

$$\tilde{\mathbf{A}}_d = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_d & -\mathbf{B}_d \mathbf{K}_d \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (92)$$

ami nyomatékszabályozás esetén, a 3.1. alfejezetben leírtak alapján a dimenziótlanítást elvégezve

$$\tilde{\mathbf{A}}_{d,n} = \begin{bmatrix} \cosh(T) & \sinh(T) & -d \sinh(T) & -p \sinh(T) \\ \sinh(T) & \cosh(T) & d - d \cosh(T) & p - p \cosh(T) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (93)$$

feszültségszabályozás esetén

$$\tilde{\mathbf{A}}_{d,f} = \begin{bmatrix} e^{-T\zeta} \left[\text{ch}_T - \frac{\zeta \text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right] & e^{-T\zeta} \frac{\text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} & -e^{-T\zeta} \frac{d \text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} & -e^{-T\zeta} \frac{p \text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ e^{-T\zeta} \frac{\text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} & e^{-T\zeta} \text{ch}_T + e^{-T\zeta} \frac{\zeta \text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} & d + e^{-T\zeta} \left[-d \text{ch}_T - \frac{d\zeta \text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right] & p - e^{-T\zeta} p \text{ch}_T - e^{-T\zeta} \frac{p\zeta \text{sh}_T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (94)$$

A rendszermátrix sajátértékeinek meghatározásával a $p(z)$ karakterisztikus polinom megoldásai is meghatározhatóak, hiszen ezek megegyeznek. Mivel a stabil terület határai a keresettek, a Routh-Hurwitz kritériumot lehet felhasználni, amihez először ez esetben is Möbius transzformációt kell végrehajtani. Végül ez egy

$$p(w) = a_3 w^3 + a_2 w^2 + a_1 w + a_0 \quad (95)$$

alakú polinomot fog jelenteni (3.1. alfejezetben leírtak alapján). A szükséges feltétel szerint $a_3 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 > 0$ és $a_0 > 0$ egyenlőtlenségeknek teljesülnie kell, illetve az elégséges feltétel teljesülésének vizsgálataként a Hurwitz mátrixot is fel kell írni, ami ez esetben (az előző esetektől eltérő módon)

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}, \quad (96)$$

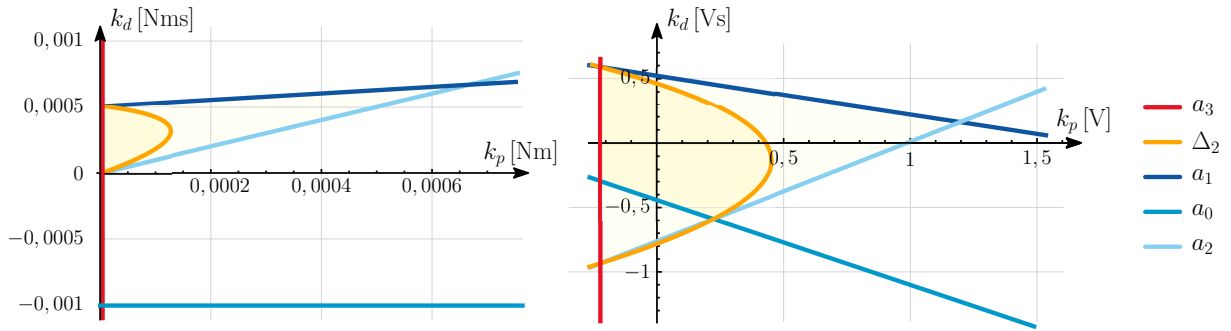
azaz

$$\Delta_1 = a_2, \quad (97)$$

$$\Delta_2 = a_2 a_1 - a_0 a_3, \quad (98)$$

$$\Delta_3 = a_0 \Delta_2. \quad (99)$$

Azt lehet tapasztalni, hogy a Hurwitz mátrix vizsgálata során plusz egy feltétel jelenik meg ($\Delta_1 > 0$ teljesül a szükséges feltételekből és $\Delta_3 > 0$ teljesül, ha $\Delta_2 > 0$ is), ami egy görbét fog jelenteni, csökkentve a stabil területet. Összességében a feltételek négy határoló egyenest és egy határoló görbét jelentenek, melyek közül a stabil tartományt az $a_3 = 0$, feszültségszabályozás esetén a $a_0 = 0$ is, és a $\Delta_2 = 0$ görbék fogják meghatározni. A stabilitástérképek $k_p - k_d$ paraméterekre, nyomaték- és feszültségszabályozás esetén a 18. ábrán láthatóak.



18. ábra. $k_p - k_d$ stabilitástérkép nyomaték- és feszültségszabályozás esetén ($\tau = 1$ [s])

A stabil zóna további tartományokra bontásához, érdemes megvizsgálni a gyököket. A karakterisztikus polinom harmadfokú, így három gyöke lesz, melyek vagy mind valósak vagy egy valós és egy komplex gyökpár lesznek. Ezek vizsgálatához érdemes alkalmazni a Cardano formulát [24], azaz ha adott a

$$p(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (100)$$

harmadfokú polinom, akkor $z = x - \frac{a_2}{3a_3}$ helyettesítéssel a

$$x^3 + px + q = 0 \quad (101)$$

egyenletet adódik, ahol $p = \frac{3a_3 a_1 - a_2^2}{3a_3^2}$ és $q = \frac{2a_2^3 - 9a_3 a_2 a_1 + 27a_3^2 a_0}{27a_3^3}$. Amennyiben az egyenlet diszkriminánsa

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0, \quad (102)$$

akkor az egyenletnek egy valós és egy komplex konjugált pár megoldása van. A valós megoldás

$$x_1 = \sqrt[3]{\underbrace{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}_{u_1}} + \sqrt[3]{\underbrace{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}_{u_2}} = \sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2}, \quad (103)$$

a komplex megoldások

$$x_2 = \varepsilon_1 \sqrt[3]{u_1} + \varepsilon_2 \sqrt[3]{u_2} \quad (104)$$

$$x_3 = \varepsilon_2 \sqrt[3]{u_1} + \varepsilon_1 \sqrt[3]{u_2}, \quad (105)$$

ahol $\varepsilon_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ és $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Behelyettesítve

$$\begin{aligned} x_2 &= \sqrt[3]{u_1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + \sqrt[3]{u_2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \\ &= -\frac{1}{2} (\sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt[3]{u_1} - \sqrt[3]{u_2}) i \\ x_3 &= \sqrt[3]{u_1} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + \sqrt[3]{u_2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \\ &= -\frac{1}{2} (\sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} (-\sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2}) i. \end{aligned} \quad (106)$$

A gyökök egymáshoz képesti viszonyainak meghatározásához érdemes összehasonlítani a gyökök valós részeinek egymáshoz való viszonyát, ezek előjelét. A (103) és a (106) egyenletek alapján

$$\operatorname{Re}(x_{2,3}) = -\frac{1}{2} (\sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2}) = -\frac{1}{2} x_1, \quad (107)$$

visszaszámolva z -re

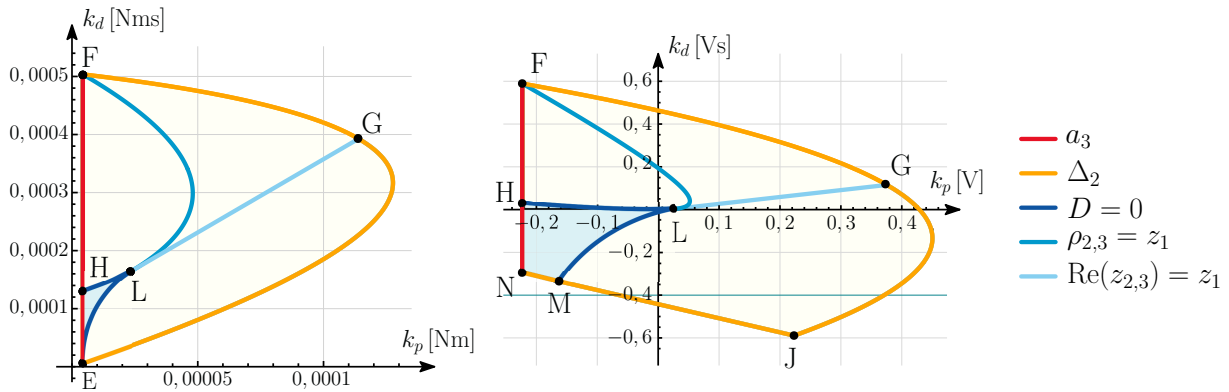
$$z_1 = x_1 - \frac{a_2}{3a_3} \quad (108)$$

$$z_{2,3} = x_{2,3} - \frac{a_2}{3a_3} \quad (109)$$

$$\operatorname{Re}(z_{2,3}) = \operatorname{Re}(x_{2,3}) - \frac{a_2}{3a_3} = -\frac{1}{2} x_1 - \frac{a_2}{3a_3}, \quad (110)$$

tehát a gyökök valós része akkor egyezik meg, ha $x_1 = 0$.

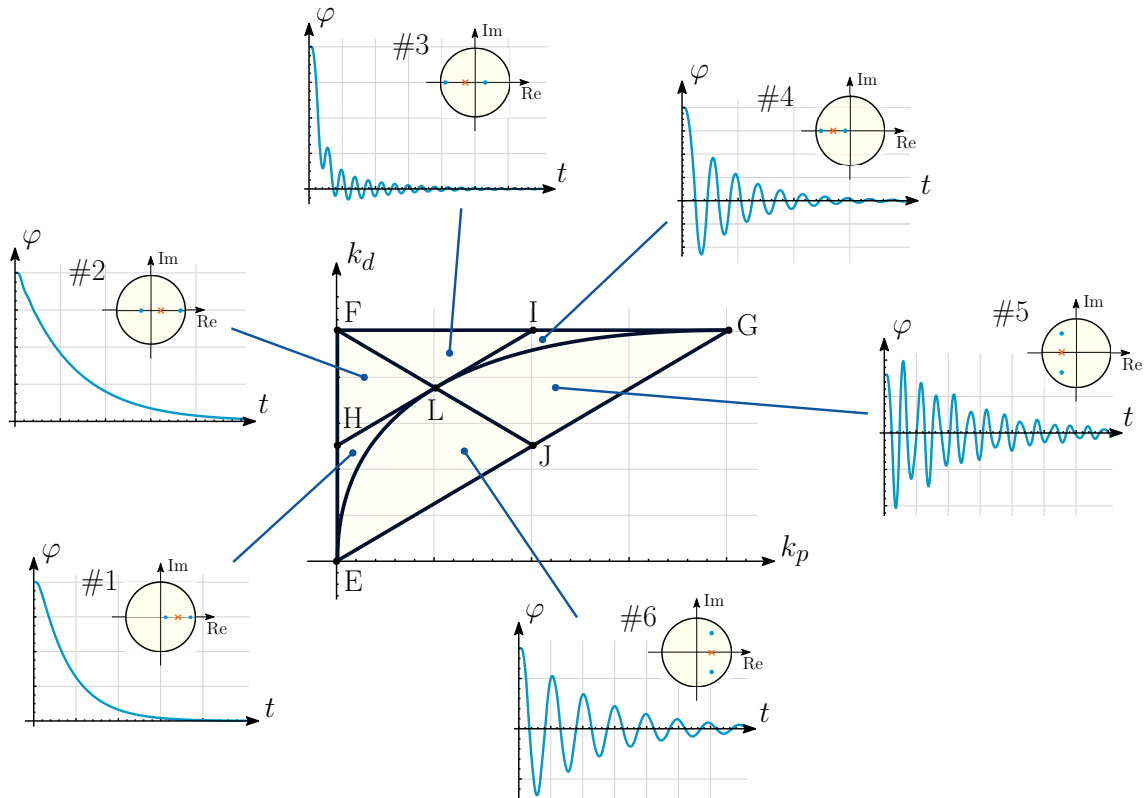
Amennyiben $D < 0$ lesz, az egyenlet három valós megoldással fog rendelkezni, $D = 0$ esetén két valós megoldással, úgy hogy $x_2 = x_3 = -\frac{1}{2}x_1$. A stabilitástérkép és annak további felosztása nyomaték- illetve feszültség szabályozás esetén a 19. ábrán látható.



19. ábra. $k_p - k_d$ stabilitástérképek további felbontása ($\tau = 1$ [s])

4. Mintavételes rendszer esetén, a szabályozás során előforduló karakterisztikák vizsgálata

Az előző fejezet tartalmazta a mintavételes rendszer stabilitásának vizsgálatát és a stabil terület felosztását annak megfelelően, hogy mi jellemző a pólusokra. A pólusok ugyanis a lengésképet nagyban befolyásolják. Mind nyomaték- (3.1. fejezet) és feszültség szabályozás (3.2. fejezet) esetén 6 további tartományra lehetett bontani a stabil területet, a póluspárok tulajdonságait és a hozzájuk tartozó területet a 20. ábra szemlélteti.

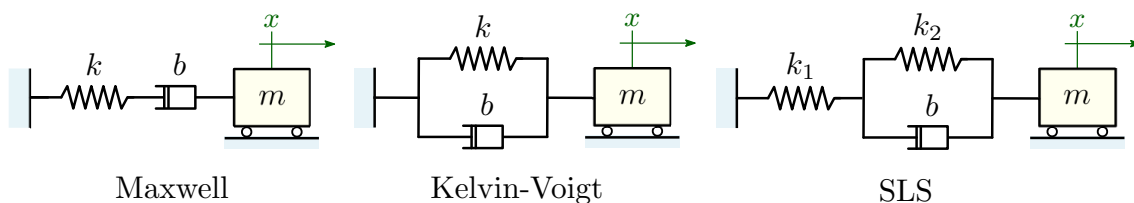


20. ábra. Póluspárok kategorizálása a stabilitástérkép tartományainak megfelelően

A valós pólusok exponenciálisan változó, lengésmentes beállást fognak okozni. A 3. fejezet bevezetése alapján ekkor a rendszer kimenete a (45) egyenletnek megfelelően írható le, és amennyiben $s_i \in \mathbb{R}$, ez (stabil esetben) lecsengő exponenciális függvények összegét jelenti. Ezzel szemben a komplex pólusok oszcilláló beállást okoznak, ez esetben a (45) egyenletben s_i helyén komplex számok állnak, még hozzá komplex konjugált párok (a komplex pólusok párosan jelentkeznek), így a kimenet felírható harmonikus függvényekkel, felhasználva, hogy $\sin(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$ és $\cos(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ [25].

4.1. A különböző karakterisztikák jelentősége a haptikus technológiában

Ahogy a bevezetésben (1. fejezet) is szóba került, a szövetek különböző erőbehatásokra történő deformációjának vizsgálata kifejezetten fontos a sebészeti robotika területén, amennyiben haptikus visszajelzést megvalósítása a cél. A humán szövetek összetett mechanikai tulajdonságokkal rendelkeznek, de kis távolságok esetén viszkoelasztikus természetüknek köszönhetően tömeg-rugó-csillapítás modellekkel megfelelően reprezentálhatóak. Bár ezen modellek esetében gondot okozhat a nyírás vagy térfogat helyes megjelenítése illetve a folytonosság hiánya (amelyre például valamilyen véges elemes módszer megoldást jelenthet), azonban ezek a modellek képesek a hullámok terjedését megfelelően szimulálni [26]. Gyakori tömeg-rugó-csillapítás modell a Maxwell, Kelvin-Voigt, illetve az SLS modell. A Maxwell modell egy sorosan kapcsolt rugóból (k) és csillapításból (b), a Kelvin-Voigt párhuzamosan kapcsolt rugóból (k) és csillapításból (b) tevődik össze, az SLS modell pedig egy párhuzamosan kapcsolt rugó (k_1) és csillapítás (b) sorosan kapcsolva egy rugóval (k_2), ezek láthatóak a 21. ábrán [9].



21. ábra. Szövetek modellezésére használt leggyakoribb anyagmodellek

A jelenlegi cél annak a vizsgálata, hogy egy egy szabadsági fokú haptikus eszközzel milyen karakterisztikákat lehet megvalósítani, és ezeket milyen anyagmodelleknek lehet megfeleltetni. Ezen felül annak a megfigyelése, hogy egy egy szabadsági fokú eszközzel lehetséges-e két szabadsági fokú rendszerre jellemző rezgéseket létrehozni.

4.2. Kialakuló lengésképek vizsgálata

A kialakuló lengésképek, így azok meghatározása is tartományonként változó. Ebben az alfejezetben valamennyi modell említésre kerül, azonban részletesen csak azon modellek vizsgálata kerül bemutatásra, amelyek valamely összetett anyagi viselkedéssel hozhatók kapcsolatba. A cél minden esetben, a diszkrét idejű pólusok átszámolása folytonos időbe, az $s = \frac{1}{\tau} [\ln(\rho) + \vartheta i]$ egyenlet segítségével, $\tau = 1$ [s] feltételezéssel (a számítások és az összefüggések egyszerűsítése végett).

Az #1-es tartományban (20. ábra) a pólusok valósak és $z_{1,2} > 0$. Ekkor

$$\rho_1 = z_1 \quad \text{és} \quad \rho_2 = z_2, \quad (111)$$

tehát

$$s_1 = \ln(\rho_1) \quad \text{és} \quad s_2 = \ln(\rho_2). \quad (112)$$

Ez az eset tekinthető kritikus csillapítású esetnek, amikor

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \underbrace{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}_0 i = -\omega_n, \quad (113)$$

tehát többszörös gyökök lesznek. A rendszer időtartománybeli mozgását leíró függvény

$$\varphi(t) = (\varphi_0 + (\omega_n \varphi_0 + \dot{\varphi}_0) t) e^{-\omega_n t}, \quad (114)$$

ahol $\varphi_0 = \varphi(0)$ és $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0)$ a kezdeti értékek. Nagy t értékek esetén a $t e^{-\omega_n t}$ függvény közelítéssel $e^{-\omega_n t}$ -nek megfelelően viselkedik, tehát a rendszer viselkedését a

$$\varphi(t) = (\varphi_0(1 + \omega_n) + \dot{\varphi}_0) e^{-\omega_n t} = g_1 e^{-\omega_n t} \quad (115)$$

függvény írja le, ahol g_1 a kezdeti értékektől függő konstans [22],[27]. Az ω_n és ζ értékek így

$$\omega_{n,1} = -\ln(\rho_1) \quad \text{és} \quad \zeta_1 = 1 \quad (116)$$

$$\omega_{n,2} = -\ln(\rho_2) \quad \text{és} \quad \zeta_2 = 1,$$

A #2-es és #3-as tartományokon a pólusok szintén valósak, azonban $z_1 > 0$ és $z_2 < 0$. Ekkor

$$\rho_1 = z_1 \quad \text{és} \quad \rho_2 = |z_2|, \quad (117)$$

azaz

$$s_1 = \ln(\rho_1) \quad \text{és} \quad s_{2,3} = \ln(\rho_2) \pm \pi i \quad (118)$$

lesznek a domináns pólusok [27]. Ezáltal

$$\omega_{n,1} = -\ln(\rho_1) \quad \text{és} \quad \zeta_1 = 1$$

$$\omega_{n,2} = \sqrt{\ln^2(\rho_2) + \pi^2} \quad \text{és} \quad \zeta_2 = \frac{\sqrt{\omega_{n,2}^2 - \pi^2}}{\omega_{n,2}}. \quad (119)$$

figyelembe véve, hogy $s_{2,3} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}i$. Mivel $\vartheta = \pi$, így $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \vartheta = \pi$ lesz, tehát a csillapított sajátkörfrekvencia állandó. Ugyanezen okból kifolyólag az $\omega_{n,2} - \zeta_2$ értékek egy adott görbén helyezkednek el, ami

$$\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (120)$$

alakban írható fel. A különbség a két tartomány között az, hogy a #2-es tartományon a pozitív pólus a dominánsabb, így az elsőrendű dinamika jellemző, míg a #3-as tartományon a rezgés (a negatív pólus domináns).

A #4-es tartományon a pólusok valósak és $z_{1,2} < 0$, ennek megfelelően

$$\rho_1 = |z_1| \quad \text{és} \quad \rho_2 = |z_2|, \quad (121)$$

illetve

$$s_{1,2} = \ln(\rho_1) \pm \pi i \quad \text{és} \quad s_{3,4} = \ln(\rho_2) \pm \pi i \quad (122)$$

a domináns pólusok [27]. Így

$$\begin{aligned} \omega_{n,1} &= \sqrt{\ln^2(\rho_1) + \pi^2} \quad \text{és} \quad \zeta_1 = \frac{\sqrt{\omega_{n,1}^2 - \pi^2}}{\omega_{n,1}} \\ \omega_{n,2} &= \sqrt{\ln^2(\rho_2) + \pi^2} \quad \text{és} \quad \zeta_2 = \frac{\sqrt{\omega_{n,2}^2 - \pi^2}}{\omega_{n,2}}. \end{aligned} \quad (123)$$

A #2-es és #3-as zónához hasonlóan $\vartheta_0 = \pi$ így az $\omega_n - \zeta$ értékek a (120) egyenletben szereplő görbén helyezkednek el.

Az #5-ös és #6-os tartományokon a pólusok már komplex konjugált gyökpárok lesznek. Ismert a gyököket megadó $p(z) = 0$, (59) egyenlet, ami alapján

$$z_{1,2} = \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d)}{2} \pm i\sqrt{-\frac{\text{tr}^2(\tilde{\mathbf{A}}_d)}{4} + \det(\tilde{\mathbf{A}}_d)}, \quad (124)$$

így

$$\text{Re}(z_{1,2}) = \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d)}{2}, \quad (125)$$

$$\text{Im}(z_{1,2}) = \sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d) - \frac{\text{tr}^2(\tilde{\mathbf{A}}_d)}{4}}, \quad (126)$$

$$\rho := \rho_{1,2} = \sqrt{\text{Re}^2(z_{1,2}) + \text{Im}^2(z_{1,2})} = \sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)}, \quad (127)$$

illetve

$$\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi, \quad (128)$$

$$\vartheta_0 = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}(z_{1,2})}{\operatorname{Re}(z_{1,2})} \right) = \arctan \left(\sqrt{\frac{4\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)}{\operatorname{tr}^2(\tilde{\mathbf{A}}_d)} - 1} \right). \quad (129)$$

Az #5-ös tartományon $\operatorname{Re}(z_{1,2}) < 0$, így

$$s_{1,2} = \ln(\rho) \pm \vartheta_0 i \quad \text{és} \quad s_{3,4} = \ln(\rho) \pm (2\pi - \vartheta_0)i \quad (130)$$

lesznek a gyökök folytonos időben, ahol $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$ [27]. Ebből adódóan

$$-\zeta\omega_n = \ln(\rho), \quad (131)$$

$$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \vartheta_0 \quad \text{vagy} \quad \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 2\pi - \vartheta_0,$$

ebből

$$\begin{aligned} \omega_{n,1} &= \sqrt{\ln^2(\rho) + \vartheta_0^2} \quad \text{és} \quad \zeta_1 = -\frac{\ln(\rho)}{\omega_{n,1}} \\ \omega_{n,2} &= \sqrt{\ln^2(\rho) + (2\pi - \vartheta_0)^2} \quad \text{és} \quad \zeta_2 = -\frac{\ln(\rho)}{\omega_{n,2}}. \end{aligned} \quad (132)$$

Érdemes megvizsgálni, hogy milyen tartományon belül mozoghatnak ezek az $\omega_n - \zeta$ értékek. Ehhez a tartomány határait kell vizsgálni, ezek az $a_1 = 0$ (65) egyenes, a $z_1 + z_2 = 0$ (76) egyenes és a $\Delta = 0$ (78) görbe. Tudjuk, hogy az $a_1 = 0$ egyenes a stabil tartomány határa, így az egyenesen a gyökök nagysága, $\rho = 1$ lesz. Ebből

$$s_{1,2} = \pm \vartheta_0 i \quad \text{és} \quad s_{3,4} = \pm (2\pi - \vartheta_0)i, \quad (133)$$

mivel $\ln(\rho) = \ln(1) = 0$. Felírható, hogy

$$-\zeta\omega_n = 0, \quad (134)$$

ami két módon lehetséges, vagy $\omega_n = 0$, de ekkor $\vartheta_0 = 0$ lenne, ami ellentmond a feltétellel, hogy $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$. A másik lehetőség, hogy $\zeta = 0$, ekkor $\omega_{n,1} = \vartheta_0$, illetve $\omega_{n,2} = 2\pi - \vartheta_0$. Mivel $z_{1,2} \in \mathbb{C}$ konjugált párok, akkor tudnak a $z_1 + z_2 = 0$ egyenesen elhelyezkedni, ha a valós részük zérus, így a (125) egyenlet alapján

$$\operatorname{Re}(z_{1,2}) = 0 \rightarrow \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d) = 0 \quad (135)$$

lesz. Ebből a (127) egyenlet alapján $\rho = \sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)}$ és a (129) egyenlet által $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$. Tehát a folytonos idejű gyökök

$$s_{1,2} = \ln \left(\sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)} \right) \pm \frac{\pi}{2}i \quad \text{és} \quad s_{3,4} = \ln \left(\sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)} \right) \pm \frac{3\pi}{2}i, \quad (136)$$

amelyek páronként meg fognak egyezni, mivel $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ és $\vartheta_0 = -\frac{3\pi}{2}$ esetén azonos nagyság mellett a két komplex szám azonos, és ugyanez mondható el $\vartheta_0 = -\frac{\pi}{2}$ és $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{2}$ esetében is. Az $\omega_n - \zeta$ értékek

$$\begin{aligned}\omega_{n,1} &= \sqrt{\ln^2 \left(\sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)} \right) + \frac{\pi^2}{4}} \quad \text{és} \quad \zeta_1 = -\frac{\ln \left(\sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)} \right)}{\omega_{n,1}}, \\ \omega_{n,2} &= \sqrt{\ln^2 \left(\sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)} \right) + \frac{9\pi^2}{4}} \quad \text{és} \quad \zeta_2 = -\frac{\ln \left(\sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)} \right)}{\omega_{n,2}}.\end{aligned}\tag{137}$$

Mivel ϑ_0 adott, így ω_d állandó lesz és az $\omega_n - \zeta$ értékek 1-1 görbén helyezkednek el, melyek az alábbiak

$$\omega_{n,1} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 - \zeta_1^2}} \quad \text{és} \quad \omega_{n,2} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{\sqrt{1 - \zeta_2^2}}.\tag{138}$$

Végül a $\Delta = 0$ görbe határolja a tartományt, ami a valós és komplex gyököket választja el egymástól. Ezen a görbén a polinom diszkriminánsa zérus, így a gyökök valósak lesznek és egymással megegyezők, tehát

$$z_1 = z_2 = \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d)}{2} = \rho.\tag{139}$$

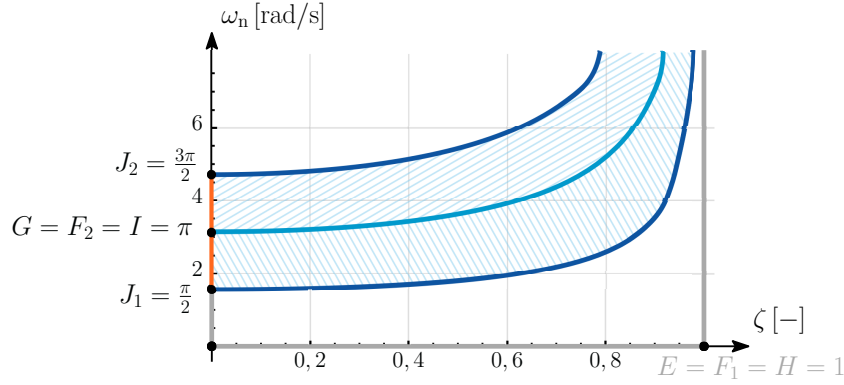
A (127) egyenlet alapján $\vartheta_0 = \pi$, így

$$s_{1,2,3,4} = \ln \left(\sqrt{\text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d)} \right) \pm \pi i.\tag{140}$$

Szintén megállapíthatjuk, hogy ϑ_0 állandó, így az $\omega_n - \zeta$ értékek a

$$\omega_{n,1,2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta_{1,2}^2}}\tag{141}$$

görbén helyezkednek el. Érdeemes megfigyelni, hogy ez a görbe megegyezik a (120) egyenletben meghatározott görbével, amin a #4-es tartomány $\omega_n - \zeta$ értékei találhatók. Ez a görbe fogja két részre osztani az #5-ös régiót, és az $\omega_{n,1} - \zeta_1$ és $\omega_{n,2} - \zeta_2$ párokat. A (138) és (141) egyenletek alapján az $\omega_{n,1} - \zeta_1$ párok a tartomány alsó felében, míg az $\omega_{n,2} - \zeta_2$ párok a felső felében helyezkednek el. A tartományt és a határoló görbéket a 22. ábra szemlélteti.



22. ábra. Az #5-ös tartományon adódó $\omega_n - \zeta$ értékpárok tartománya

A #6-os tartományon $\text{Re}(z_{1,2}) > 0$, így

$$s_{1,2} = \ln(\rho) \pm \vartheta_0 i \quad (142)$$

gyököket kapunk folytonos időben, ahol $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ [27]. Ebből megállapítható, hogy

$$-\zeta \omega_n = \ln(\rho), \quad (143)$$

$$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \vartheta_0, \quad (144)$$

azaz

$$\omega_n = \sqrt{\ln^2(\rho) + \vartheta_0^2} \quad \text{és} \quad \zeta = -\frac{\ln(\rho)}{\omega_n} \quad (145)$$

Ez esetben is megvizsgálható a tartomány, amelyen belül ezek az $\omega_n - \zeta$ értékek mozognak. Az #5-ös tartományhoz hasonlóan tartomány határai közé tartozik az $a_1 = 0$ (65) egyenes, a $z_1 + z_2 = 0$ (76) egyenes, illetve a $\Delta = 0$ (78) görbe. Ezek közül a két tartományt a $z_1 + z_2 = 0$ egyenes választja el. Az $a_1 = 0$ egyenes a stabil tartomány határa, tehát a gyökök nagysága, $\rho = 1$ lesz, így

$$s_{1,2} = \pm \vartheta_0 i, \quad (146)$$

ezáltal felírható, hogy

$$-\zeta \omega_n = 0, \quad (147)$$

ami az előzőekhez hasonlóan két módon lehetséges, vagy $\omega_n = 0$, ami miatt $\vartheta_0 = 0$, ami ez esetben lehetséges, ekkor $0 < \zeta < 1$ között bármilyen értéket felvehet. A másik lehetőség, hogy $\zeta = 0$ és $\omega_n = \vartheta_0$. A $z_1 + z_2 = 0$ egyenesen, mivel a gyökök konjugált gyökpárok, a valós részük zérus kell legyen. Ebből adódóan a (125) egyenlet alapján

$$\text{Re}(z_{1,2}) = 0 \rightarrow \text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d) = 0 \quad (148)$$

lesz. A (127) egyenlet alapján $\rho = \sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)}$ és a (129) egyenlet alapján $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$. A folytonos idejű gyökök

$$s_{1,2} = \ln\left(\sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)}\right) \pm \frac{\pi}{2} i. \quad (149)$$

Az $\omega_n - \zeta$ értékek

$$\omega_{n,1} = \sqrt{\ln^2 \left(\sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)} \right) + \frac{\pi^2}{4}} \quad \text{és} \quad \zeta_1 = -\frac{\ln \left(\sqrt{\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)} \right)}{\omega_{n,1}}. \quad (150)$$

Mivel ϑ_0 adott az $\omega_n - \zeta$ értékek egy görbén helyezkednek el, ami

$$\omega_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (151)$$

Végül a $\Delta = 0$ görbe határolja a tartományt, ami mentén a gyökök valósak lesznek és egymással megegyezők, azaz

$$z_1 = z_2 = \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d)}{2} = \rho. \quad (152)$$

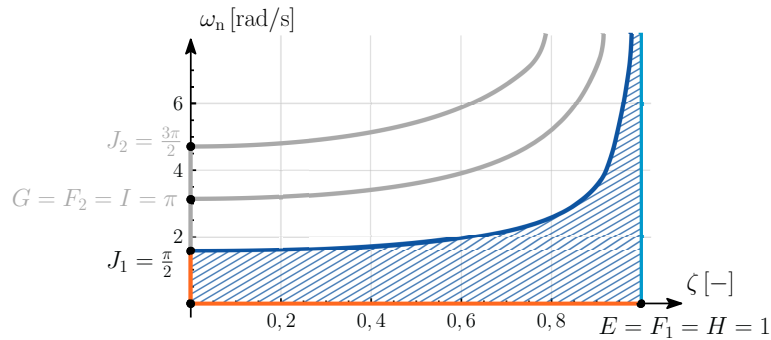
A (127) egyenlet alapján $\vartheta_0 = 0$, így

$$s_{1,2} = \ln \left(\sqrt{\text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d)} \right), \quad (153)$$

tehát

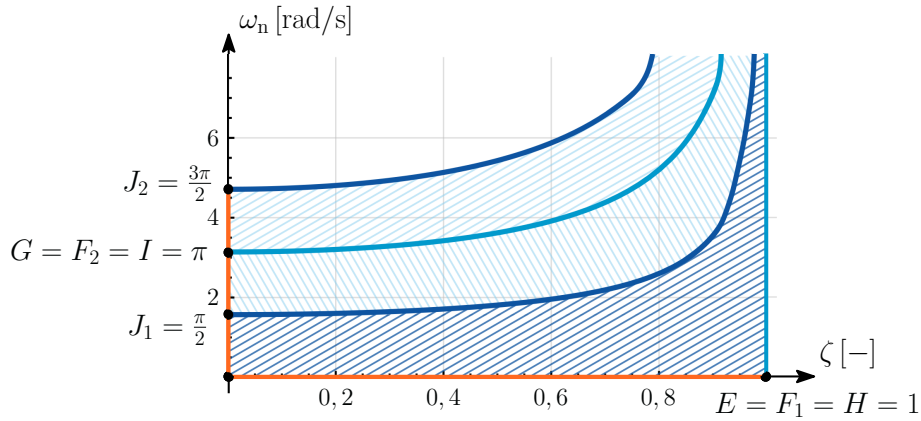
$$\omega_{n,1} = -\ln \left(\sqrt{\text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d)} \right) \quad \text{és} \quad \zeta_1 = 1. \quad (154)$$

A tartományt és a határoló görbéket a 23. ábra szemlélteti.



23. ábra. Az #6-os tartományon adódó $\omega_n - \zeta$ értékpárok tartománya

Azt lehet megállapítani, hogy a #6-os tartomány felső határoló görbéje megegyezik az #5-ös alsó határoló görbéjével, ami a $z_1 + z_2 = 0$, a tartományokat elválasztó egyenesből származik. Az #5-ös és #6-os tartományokból adódó $\omega_n - \zeta$ értékek tartománya a 24. ábrán látható.

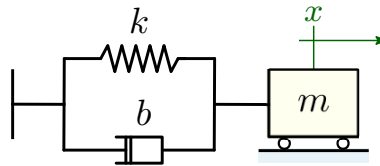


24. ábra. Az #5-ös és #6-os tartományon adódó $\omega_n - \zeta$ értékpárok tartománya

4.3. Megvalósítható anyagmodellek

Az egyes tartományokban megvalósuló lengésképek különböző $\omega_n - \zeta$ párral vagy párokkal rendelkeznek, amelyek másodfokú lengéseket írnak le. Ezek a karakterisztikák megfeleltethetők bizonyos anyagmodelleknek, például a szövetek modellezésére használt modellek egyikének, ezek a 21. ábrán láthatóak.

A Kelvin-Voigt modell, mely a 25. ábrán látható



25. ábra. A Kelvin-Voigt modell

egy k merevségű rugó és a b viszkozus csillapítású csillapítás párhuzamosan kapcsolva egy m tömeghez. Ez esetben a rendszer átviteli függvénye zérus kezdeti feltételek esetén, amennyiben a rendszer gerjesztése erővel történik és a szabályozni kívánt tulajdonság a pozíció

$$W_{KV} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{A\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (155)$$

tehát a rendszer sajtkörfrekvenciája és relatív csillapítási tényezője is meghatározható.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{és} \quad \zeta = \frac{b}{2m} \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (156)$$

Az a tartomány, amelyen egy $\omega_n - \zeta$ pár adódik és emellett $\zeta \neq 0$, az a #6-os tartomány. Ebben a zónában

$$\ln(\rho) = -\zeta\omega_n \quad \text{és} \quad \vartheta_0 = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (157)$$

tehát $s_{1,2} = \ln(\rho) \pm \vartheta_0 i$ is meghatározható. Ebből a (127) egyenlet alapján

$$\det(\tilde{\mathbf{A}}_d) = \rho^2 \quad (158)$$

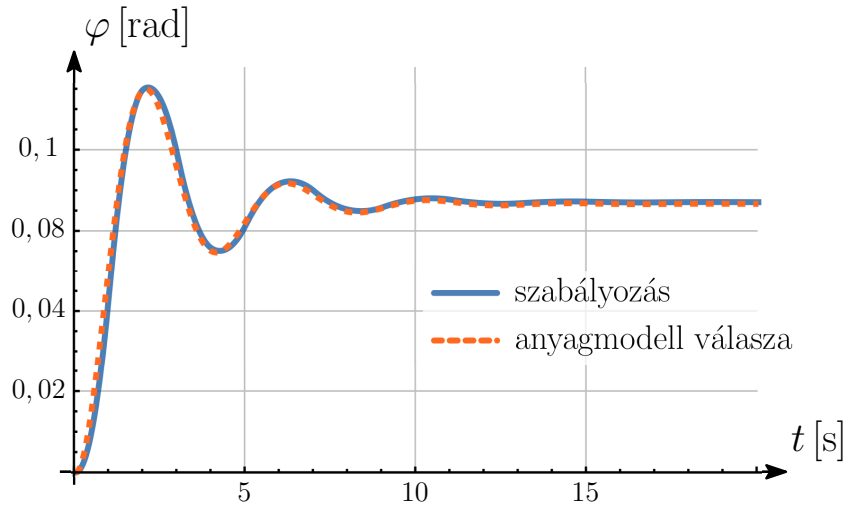
és a (129) egyenlet alapján

$$\text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}_d) = \sqrt{\frac{4\det(\tilde{\mathbf{A}}_d)}{\tan^2(\vartheta_0) + 1}}. \quad (159)$$

A (124) egyenlet alapján $z_{1,2}$ gyökök kiszámolhatóak illetve nyomatékszabályozás esetén a (72) és (71) egyenletekből, feszültség szabályozás esetén a (89) és (88) egyenletekből meghatározhatóak a visszacsatolás dimenziótlanított $p-d$ paraméterei. Ezekből pedig az (58) illetve a (86) egyenletek alapján a $k_p - k_d$ értékek is számolhatóak. A szabályozás ez esetben zérus kezdeti feltételek mellett történik, illetve a φ_d kívánt értéket (*desired*) az anyagmodellnek megfelelően kell meghatározni

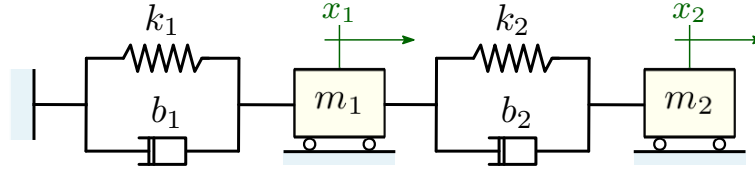
$$\varphi_d = \lim_{s \rightarrow 0} s W_{KV} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} W_{KV} = \frac{1}{k}, \quad (160)$$

egységugrás bemenet esetén. A 26. ábrán látható adott m , k és b paraméterű Kelvin-Voigt modell ugrásválasza, illetve a (nyomatékkal) szabályozott rendszer válasza. A kis mértékű eltérés a szabályozás maradó hibájából adódik.



26. ábra. A rendszer és a modell válasza $m=6$ kg, $b=5$ Ns/m és $k=15$ Nm mellett

Amennyiben két Kelvin-Voigt modellt szeretnénk sorosan egymás után kapcsolni, hogy komplexebb lengésképet tudjunk megvalósítani, akkor azt a 27. ábrán látható módon lehet megtenni.



27. ábra. A Kelvin-Voigt modell kétszer sorban kapcsolva

A rendszer átviteli függvénye ekkor (zérus kezdeti feltételek esetén) erőgerjesztésre, x_2 -t szabályozva

$$W_{2KV} = \frac{m_1 s^2 + (b_1 + b_2)s + k_1 + k_2}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (161)$$

ahol

$$a_0 = k_1 k_2,$$

$$a_1 = b_1 k_2 + b_2 k_1,$$

$$a_2 = k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2 + b_1 b_2, \quad (162)$$

$$a_3 = b_1 m_2 + b_2 m_2 + b_2 m_1,$$

$$a_4 = m_1 m_2.$$

Ez esetben már nem egyértelmű, hogy milyen $\omega_n - \zeta$ párok lesznek azok, amelyekből vissza lehet számolni a szabályozó paramétereit. Az ismert, hogy két csillapítatlan sajtkörfrekvencia - relatív csillapítás párt lehet létrehozni, amennyiben a szabályozási paraméterek az #5-ös tartományból kerülnek megválasztásra. Tehát ezáltal két másodfokú rezgést lehet összehangolni, az alábbi módon

$$W_{\omega_n \zeta} = F_1 \frac{A_1 \omega_{n,1}^2}{s^2 + 2\zeta_1 \omega_{n,1} s + \omega_{n,1}^2} + F_2 \frac{A_2 \omega_{n,2}^2}{s^2 + 2\zeta_2 \omega_{n,2} s + \omega_{n,2}^2}. \quad (163)$$

A két átviteli függvény W_{KV2} és $W_{\omega_n \zeta}$ összehangolásához ezeket azonos alakra szükséges hozni, majd az együtthatók megfeleltetésével összeszinkronizálni az anyagmodellt és a két rezgést. Ismerve $\omega_n - \zeta$ párokat el lehet kezdeni vizsgálni az #5-ös tartományt. Ebben a zónában

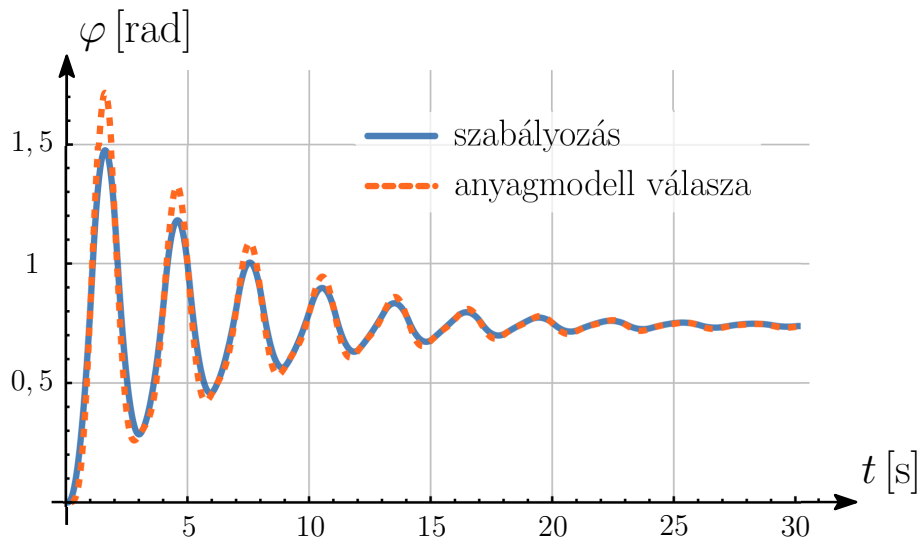
$$\ln(\rho) = -\zeta_1 \omega_{n,1} = -\zeta_2 \omega_{n,2} \quad \text{és} \quad (164)$$

$$\vartheta_0 = \sqrt{\omega_{n,1}^2 - \ln^2(\rho)} = 2\pi - \sqrt{\omega_{n,2}^2 - \ln^2(\rho)},$$

amiből azt lehet tapasztalni, hogy az egyes paraméterek is függenek egymástól, így kézenfekvőbb nem az anyagmodell paramétereit megválasztani, hanem az ω_n illetve ζ értékeket, melyekből ki lehet számolni a tömegek, rugók és csillapítások értékeit. Ezt az

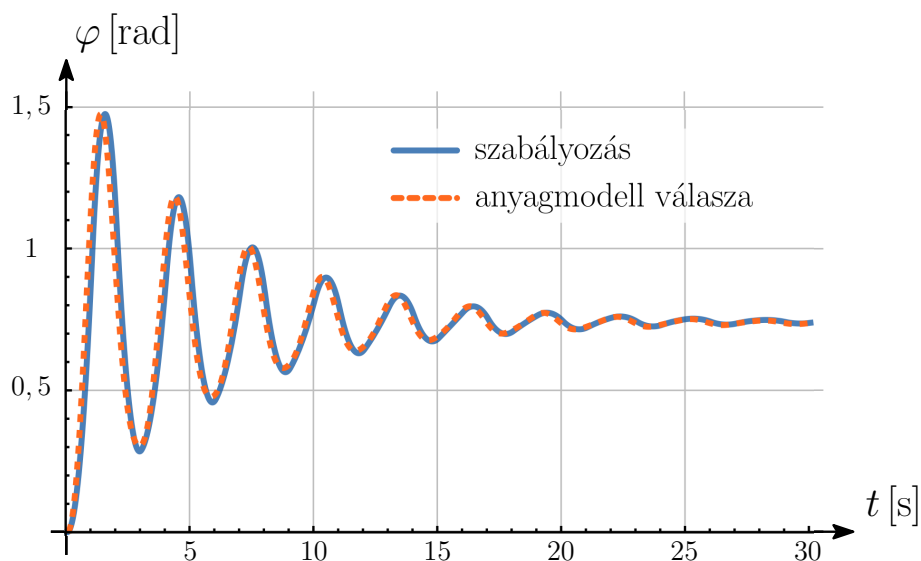
előzőekben ismertetett módon az együtthatók megfeleltetésével lehet megtenni. Ekkor az ismert paraméterek száma 6, a felírható egyenletek száma 7, míg az ismeretlenek száma 8. Ennek feloldása érdekében F_1 paramétert tetszőlegesen lehet megválasztani. Az ω_n , ζ értékek meghatározásának következtében ρ és ϑ_0 is adott, így ezek után megkezdhető a $k_p - k_d$ értékek meghatározása. Ahogy a Kelvin-Voigt modell esetén, a módosított rendszer mátrix determinánsa és nyoma meghatározható a (127) és (129) egyenletekből, így a (124) egyenletből kiszámolhatóak a $z_{1,2}$ gyökök. Nyomatékszabályozás esetén a (72) és (71) egyenletekből, feszültség szabályozás esetén a (89) és (88) egyenletekből megkaphatóak a visszacsatolás $p - d$ dimenziótlanított paraméterei. Ezekből az (58) illetve a (86) egyenletek alapján a $k_p - k_d$ értékek is számolhatóak.

A tapasztalat azt mutatja, hogy a lengés karakterisztikája ez esetben megfelelő lesz, ám az illeszkedés nem tökéletes, ez látható a 28. ábrán.



28. ábra. A rendszer és a modell válasza szabadon megválasztott F_1 paraméter mellett

Ez a szabadon megválasztott F_1 paraméternek köszönhető, tehát ez esetben nem lehetséges az anyagmodellhez tervezni a szabályozást, a szabályozáshoz kell tervezni az anyagmodellt, azt lehet vizsgálni, hogy milyen paraméterekkel lehet ezeket felruházni a szabályozásnak megfelelően. Az F_1 paraméter megválasztásához segítségül lehet a függvény első maximuma, hiszen ahogy a 28. ábrán is látható, a csúcsok azok, amik jelentősen eltérnek. Amint F_1 (és ezáltal F_2) paraméter megfelelően megválasztásra kerül, az illeszkedés is jelentősen javul, ez látható a 29. ábrán. Ezen rendszer megvalósíthatósága mutatja, hogy az egy szabadsági fokú eszközzel lehetséges két szabadsági fokú rendszerre jellemző rezgéseket is létrehozni.



29. ábra. A rendszer és a modell válasza $\omega_{n,1} = 2.13$ és $\zeta_1 = 0.08$ mellett

5. Mérési eredmények

A 4. fejezetben tárgyalt karakterisztikák megvalósíthatóságának vizsgálatára a 2. fejezetben ismertetett, elkészített haptikus eszközzel való mérés ad teret. A szimulációs, és kísérleti eredmények összehasonlítása során szükséges az eszköz paramétereit mérésekkel identifikálni, esetlegesen pontosítani a korábban feltételezett értékeket, valamint az eszköz modellezése során a fellépő súrlódási veszteségeket is figyelembe kell venni. A fejezetben sor kerül ezen paraméterek meghatározására, illetve a korábban tárgyalt karakterisztikák megvalósításának lehetőségére.

5.1. Mérési elrendezés

A vizsgált eszközt működtető beavatkozó egység egy Maxon gyártmányú A-max 32 típusú egyenáramú motor, melynek paramétereit az 1. táblázatban láthatók.

1. táblázat. A motor katalógusadatai SI egységben

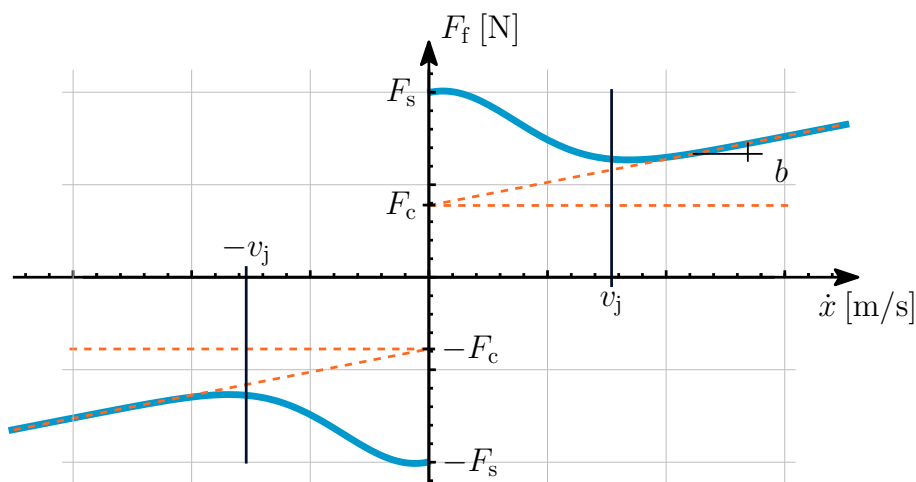
Adat	Érték	Mértékegység
Névleges feszültség (U_N)	30	V
Ellenállás (R)	7,02	Ω
Induktivitás (L)	$0,954 \cdot 10^{-3}$	H
Nyomatékkonstans (k_m)	$46,1 \cdot 10^{-3}$	Nm/A
Elektromos állandó (k_s)	21,677	rad/Vs
Tehetetlenségi nyomaték (J)	$44,02 \cdot 10^{-7}$	kgm ²

Az eredő rendszer a motorból és egy ingából áll (5. ábra). A DC motor nem ismert paramétereinek és az inga pontos adatainak meghatározásához (amihez kiindulási alapot a CAD modellből, az eszköz tervezése során kinyert adatok adnak) identifikációt szükséges végrehajtani. A paramétereken felül az is fontos, hogy a megfelelő súrlódási modell is azonosításra kerüljön. A vizsgálatok során a motor esetében Stribeck súrlódás illetve viszkózus csillapítás feltételezett, a ingánál megjelenő súrlódás (csapágyazás) pedig a Coulomb-féle súrlódási modell segítségével írható le.

A Stribeck súrlódási modell értelmében a súrlódás nagysága a sebesség függvényében változik. Nyugalmi helyzetben ($v = 0$) a tapadási súrlódás (F_s) van figyelembe véve, majd a sebesség növekedésével a súrlódás nagysága lecsökken a Coulomb-súrlódás nagyságára (F_c). Ezen felül a viszkózus csillapítás (b) is megjelenik a modellben, melynek mértéke a sebesség növekedésével lineárisan nő. Így a súrlódási erő

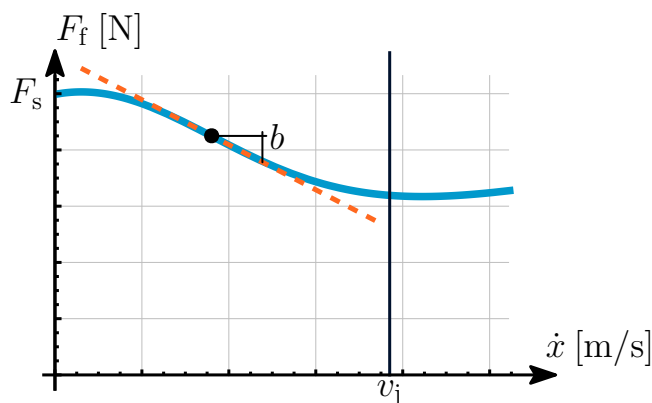
$$F_f(\dot{x}) = \left[F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{\dot{x}}{v_s}\right)^2} + b|\dot{x}| \right] \text{sgn}(\dot{x}), \quad (165)$$

ahol v_s az úgynevezett Stribeck-sebesség [28]. Ennek megfelelően a 30. ábrán látható a súrlódási erő változása a sebesség függvényében.



30. ábra. A Stribeck-súrlódási modell

Amennyiben a rendszer működésére jellemző sebességtartomány beleesik a 30. ábrán látható $|\dot{x}| < v_j$ tartományba, és a sebesség egy, ezen tartományon belüli munkapont körül kis mértékben változik, akkor a súrlódás hatása negatív előjelű viszkózus csillapításként jelenik meg. Ennek nagysága a súrlódást leíró görbe adott munkapontbeli meredekségével megegyező, ezt szemlélteti a 31. ábra [29]. Következménye, hogy csökkenti a további fizikai csillapítást és destabilizáló hatást fejt ki a rendszerre.

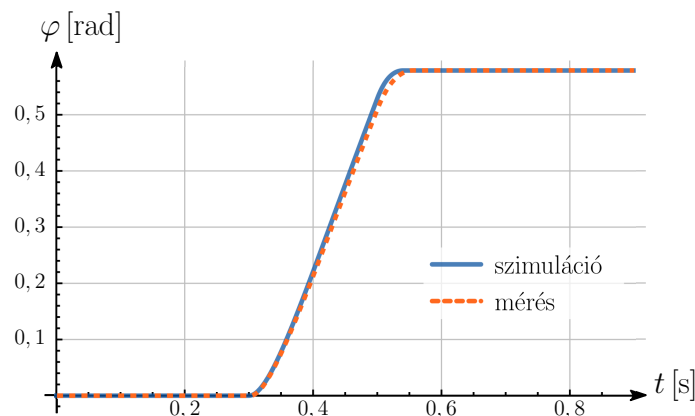


31. ábra. A Stribeck-súrlódási modell

Az identifikáció során tehát a súrlódási modellek paramétereinek és az inga adatainak pontos meghatározása a cél. Ehhez az eredő rendszerre Δt ideig, u_m nagyságú feszültséget kell kapcsolni és emellett mérni az inga szögelfordulását (azaz a rendszer kimenetét). A rendszert leíró (25) egyenlettel és a súrlódás figyelembe vételével szimulálható a rendszer válasza. Ezek után a paraméterek változtatása mellett kell megfigyelni, hogy a mérési és a szimulációs eredmény mennyire tér el egymástól, a paramétereket úgy kell beállítani, hogy ez az eltérés minimális legyen. A szögelfordulást leíró, mérésből, illetve a szimulációból adódó görbék a 32. ábrán láthatóak, a paramétereket a 2. táblázat tartalmazza. Mivel a két görbe jó egyezést mutat, így a modellt és annak paramétereit elfogadhatónak lehet tekinteni.

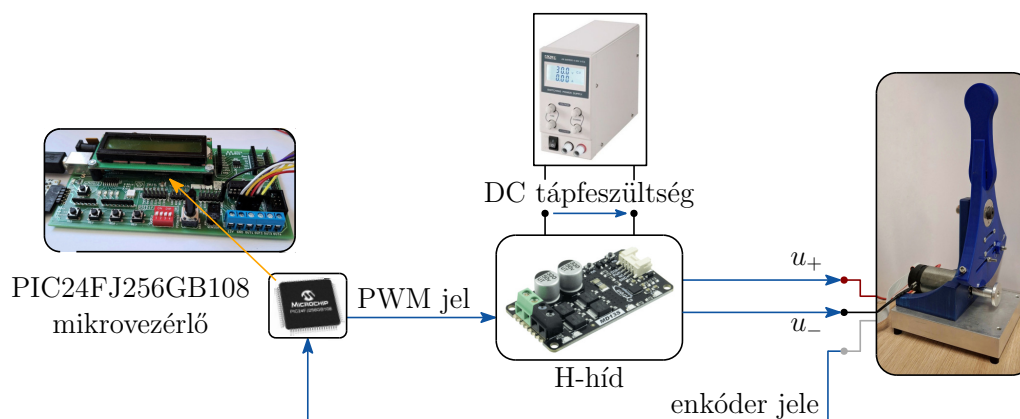
2. táblázat. Az eredő rendszer paramétere

Adat	Érték	Mértékegység
Alsó fél hossza (l_b)	$35,2 \cdot 10^{-3}$	m
Felső fél hossza (l_h)	$49,1 \cdot 10^{-3}$	m
Alsó fél tömege (m_b)	$65 \cdot 10^{-3}$	kg
Felső fél tömege (m_h)	$22 \cdot 10^{-3}$	kg
Alsó fél tehetetlenségi nyomatéka (Θ_b)	$1 \cdot 10^{-5}$	kgm ²
Felső fél tehetetlenségi nyomatéka (Θ_s)	$0,06 \cdot 10^{-3}$	kgm ²
Motorra szerelt tárcsa sugara (r_m)	$5,5 \cdot 10^{-3}$	m
Tapadási súrlódási nyomaték nagysága ($M_{s,m}$)	$0,262678 \cdot 10^{-2}$	Nm
Csúszási (Coulomb) súrlódási nyomaték nagysága ($M_{c,m}$)	$0,262474 \cdot 10^{-2}$	Nm
Stribeck-sebesség (v_s)	10	rad/s
Viszkózus csillapítás nagysága (B)	$0,242 \cdot 10^{-4}$	Nms
Csúszási (Coulomb) súrlódási nyomaték nagysága ($M_{c,i}$)	$0,358252 \cdot 10^{-2}$	Nm



32. ábra. Identifikációs mérés, $\Delta t = 0,2$ [s] és $u_m = 1,2$ [V] mellett

A mérési összeállítást a 33. ábra mutatja. A szabályozás illetve az ehhez szükséges pozíciómérés digitálisan valósul meg. Ehhez egy PIC24FJ256GB108-as mikrovezérlő kerül felhasználásra, ez 16 bites, a PIC24-es családhoz tartozik, illetve a méréshez és a motor irányításához elengedhetetlen, hogy több I/O (in/out) porttal rendelkezik.



33. ábra. Mérési összeállítás

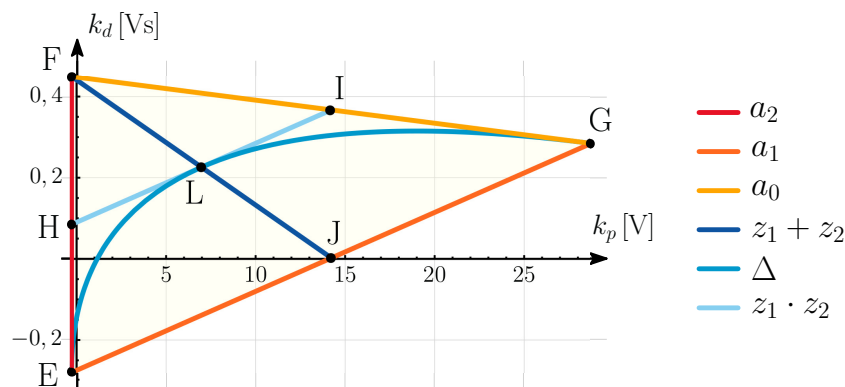
A mikrovezérlő csatlakozik egy Cytron MD13S típusú H-hídhoz, melyen keresztül történik az egyenáramú motor hajtása. A H-hidak négy tranzisztor segítségével szabályozzák a motoron átfolyó áram irányát és így a forgásirányt is, illetve a motorra jutó feszültséget a mikrovezérlőből a H-híd felé kiadott PWM jel segítségével lehet beállítani. A PWM (pulzus-szélesség moduláció) olyan módszer, amely a teljesítmény állítása érdekében változtatja a jel impulzusainak szélességét. A sebesség, amellyel a PWM jel ismétlődik másodpercenként, az a PWM frekvencia, minél nagyobb ez a frekvencia, annál egyenletesebb lehet a motor áramellátása. A H-híd áramköre ehhez a frekvenciához alkalmazkodik, azaz ennek megfelelő gyorsasággal váltja át az egyes kapcsolóelemeket. A Cytron MD13S típusú H-híd által a maximálisan megvalósítható PWM frekvencia akár 20 kHz is lehet, a jelen esetben ez 16 kHz-re van beállítva. A feszültségforrás egy AXIOMET márkájú,

AX-3005DS típusú laboratóriumi tápegység. A szögelfordulás méréséhez a DC motorra rögzített MR (magnetorezisztív) szenzor használható, amely működése a mágneses tér-erősség változásán alapul. Típusát tekintve inkrementális forgójeladó (enkóder), azaz az elmozdulás irányáról és mértékéről nyerhető ki információ, az abszolút helyzetről nem. Ezen enkóderek esetén a teljes fordulat felosztásra kerül kisebb lépésekre, és ezen kisebb lépések megtétele detektálható, a használt MR szenzor 3 csatornás (A, B és index) és 1024 lépésre oszt fel egy teljes fordulatot. A motor szögelfordulásából számolható az inga szöge illetve szögsebessége (a mintavételezési időnél nagyságrendekkel kisebb időközönként történik a sebesség számolása, ezáltal közelítve azt a sebességértéket, amely minta közvetlen mérésből származtatott érték lenne).

A mikrovezérlőn futtatott algoritmus a 12. ábra megvalósításával szabályozza a rendszert. A mért pozícióadatokat, illetve a számolt feszültség értékeket MATLAB szoftver segítségével soros porton keresztül lehet kiolvasni, majd feldolgozni.

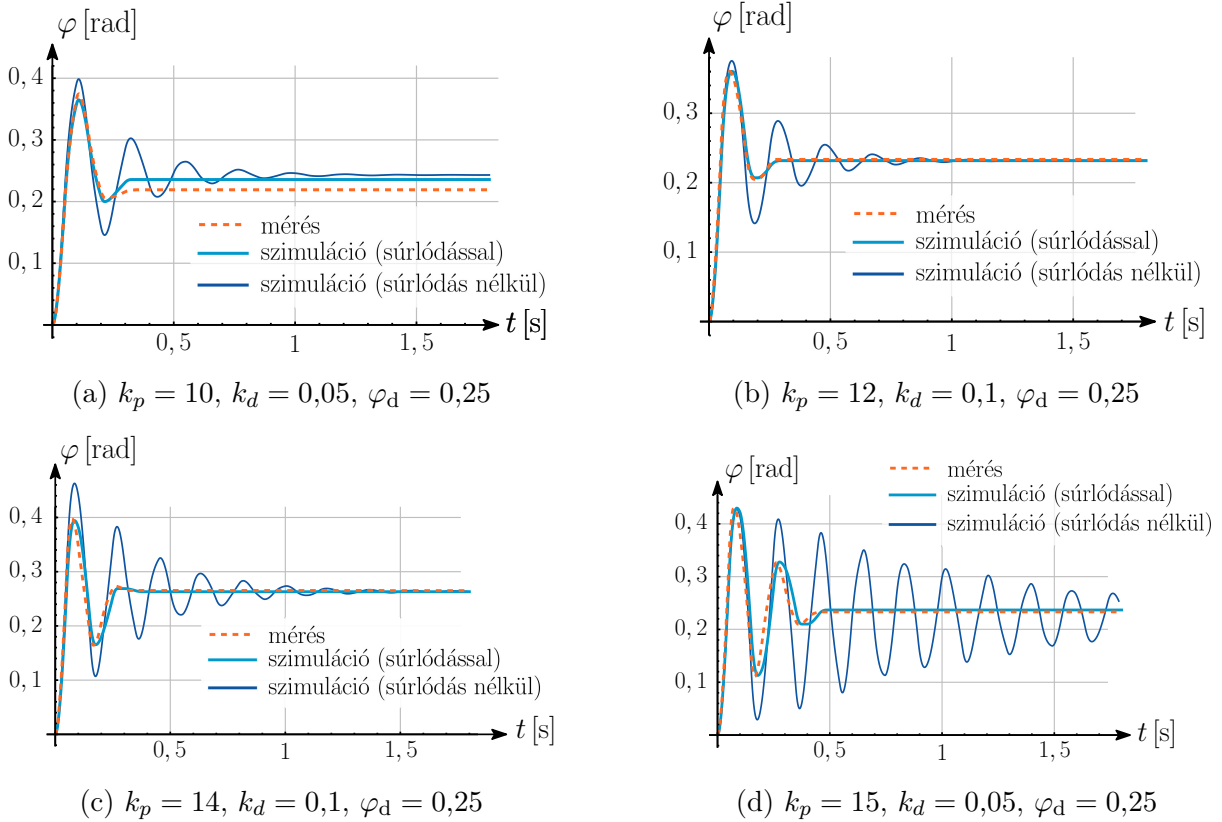
5.2. Mérési és szimulációs eredmények összevetése

A mérés során fontos szempont a megfelelő mintavételezési idő (τ) megválasztása. A mintavételezési idő csökkentésével a $k_p - k_d$ tartományon értelmezett stabil tartomány növekszik (közelebb kerül a folytonos időbeli szabályozáshoz), így a szabályozási törvényből, (38) egyenlet alapján a beavatkozó feszültség is nagyobb értékeket vehet fel. Jelen esetben a feszültség nagysága nagy szerepet játszik a megvalósíthatóságban, mivel túl alacsony értékek esetén a tapadási súrlódás hatása miatt, túl nagy értékek esetén pedig a korlátozott mozgástartomány, illetve a motor névleges feszültsége miatt adódhatnak korlátok. Illetve azt is figyelembe kell venni, hogy a sebességértékek számításához, amennyiben ez jóval gyakrabban történik, mint a szabályozás (a pontosabb értékek meghatározása érdekében), a mintavételezési időnél sokkal gyakrabban kell számításokat végezni, ez is korlátozhatja az ideális τ értéket. Jelen esetben $\tau = 0,05$ [s] mellett a stabilitástérkép a 34. ábrán látható.



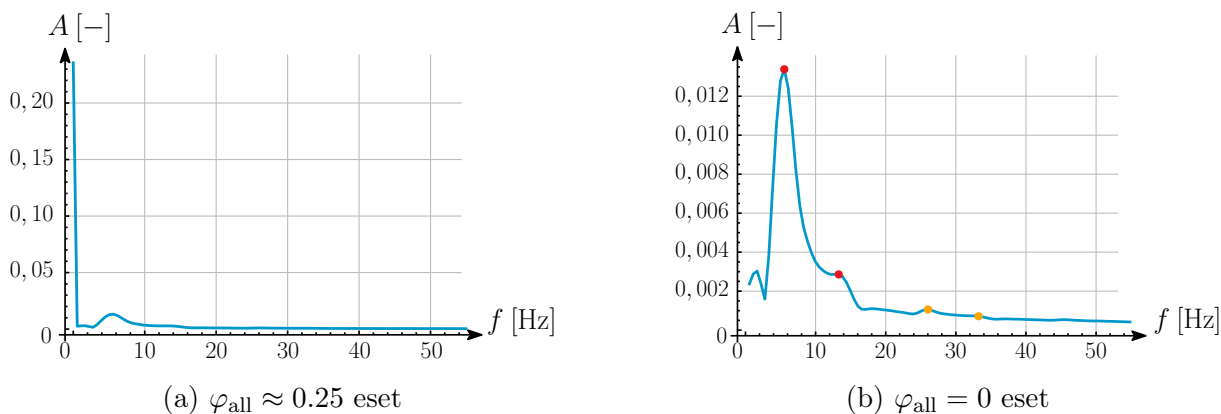
34. ábra. $k_p - k_d$ stabilitástérkép, $\tau = 0,05$ [s] mellett

A mérések során a két részletesebben feldolgozott tartományból (#5-ös és #6-os) kerültek megválasztásra a szabályozási paraméterek. A mért értékek és a szimulációból adódó rendszerválaszok összehasonlításai a 35. ábrán láthatóak.



35. ábra. Mérési eredmények és a szimuláció összehasonlítása

Az anyagmodellek vizsgálata során azt lehetett tapasztalni, hogy amennyiben az #5-ös zónából választott paraméter párokkal történik a szabályozás, a eszköz két szabadsági fokú viselkedést is képes megvalósítani. A méréseket tekintve ilyen például a 35d. ábrán látható mérési eredmény. Ahhoz, hogy látható legyen a rezgés két szabadsági fokú természete érdemes Fourier-transzformáció végrehajtásával megvizsgálni a lengés spektrumát. A transzformáció lényege, hogy egy adott rezgést fel lehessen bontani harmonikus függvények (sinus, cosinus) súlyozott összegeként, majd a spektrumon ezeket a rezgéseket lehet megjeleníteni frekvencia tartományban (amplitúdó-frekvencia síkban). Amennyiben a vizsgált rezgés valóban több rezgésből tevődik össze, annak a spektrumon is látszódnia kell. Véve a $k_p = 15$ és $k_d = 0,05$ szabályozási paraméterekkel előállított válaszfüggvényt és Fourier-transzformációt végezve rajta a 36a. ábrán látható spektrum adódik. A jel átlagértéke megegyezik az állandósult állapotban felvett értékkel, ami a tapadási súrlódás miatt nem pontosan, de közel $\varphi_d = 0,25$, ez látható a spektrumon is. A további felharmonikusok vizsgálata érdekében a jel eltolható ezzel az értékkel, jobban kirajzolva a további csúcsokat, ez látható a 36b. ábrán.

36. ábra. $k_p = 15$, $k_d = 0,05$ mérési eredmény spektruma

A 36b. ábrán láthatóak $f_1 \approx 5,52$ [Hz] és $f_2 \approx 13,57$ [Hz] frekvenciáknál a domináns csúcsok, melyek megmutatják, hogy a rezgés valóban a kívánt karakterisztikát mutatja. A további vizsgálatok során célszerű lehet megvizsgálni különböző súrlódáskompenzációs eljárások lehetőségeit, ezáltal csökkentve a súrlódás hatását, amelynek következtében még pontosabban lehet az anyagmodelleknek megfelelő erőérzetet létrehozni.

6. Összegzés

A dolgozatban bemutatásra kerül egy egy szabadságfokú haptikus eszköz tervezése, szabályozásának vizsgálata, majd a diszkrét idejű szabályozásból adódó karakterisztikák megfigyelése illetve ezek elemzése az egyes anyagmodellek megalkotásának szempontjából. Ennek vizsgálata azért fontos, mert a haptikus rendszerek a hétköznapi felhasználáson felül az orvostechikában is jelentős szerepet játszanak. Az orvostechikai eszközök ellátása haptikus visszacsatolással nagy segítséget jelenthet az orvosok, sebészek számára, mivel a szervekre, szövetekre gyakorolt erőt nem a vizuálisan kapott információk segítségével kell megbecsülniük, hanem úgy érezhetik, mintha valóban megérintették volna az adott szöveteket. Ehhez fontos annak a vizsgálata, hogy az egyes szövetek milyen rendszerként modellezhetőek és hogy ezeknek a rendszereknek a viselkedését hogyan lehet megvalósítani egy haptikus eszközön keresztül.

Az eszköz tervezése során a Stanford Egyetem Hapkit projektjének keretein belül kifejlesztett haptikus eszköz került továbbfejlesztésre, többek között a hajtást végző motor, a csapágyazás, illetve nyomatékatadás szempontjából. Ezek után az eszköz modellkéjének megalkotása következett, melyet mint egy ingaként lehet felfogni és meghatározni a mozgásegyenletét, nyomaték általi szabályozás esetén. Figyelembe véve, hogy a szabályozás egy egyenáramú DC motoron keresztül valósul meg, el kellett készíteni az eszköz és a DC motor eredő modelljét is, ez esetben már a szabályozás a motorra kapcsolt bemeneti feszültségen keresztül valósulhatott meg.

A rendszermodellek megalkotása után a szabályozás tervezése következett. A szabályozás állapotvisszacsatoláson keresztül történt, mely esetben a bemenet az állapot és a referencia különbségéből adódik (a megfelelő szabályozási paraméterek mellett). A megvalósítás során azt is figyelembe kellett venni, hogy a szabályozás megvalósításához valamilyen digitális eszköz kerül felhasználásra. Ebből adódóan a szabályozás diszkrét időben megy végbe, tehát el kellett készíteni az említett rendszerek diszkrét idejű állapottér modelljeit is.

Mintavételes rendszerek esetén a szabályozási paraméterektől függő stabil terület jóval kisebb, mint folytonos időben lenne, így ennek vizsgálata elengedhetetlen. A stabilitásvizsgálat során a rendszerek módosított rendszermátrixainak vizsgálatával meg lehet határozni a stabil zónákat, illetve a rendszer pólusainak megfigyelése során ezeket további tartományokra lehet felbontani. A stabil területek vizsgálatára nyomaték- és feszültség-szabályozás esetén, illetve időkésés figyelembe vétele esetén is sor került.

Az említett stabil zónák további felbontásával, a pólusok egymáshoz képesti kapcsolata alapján a rendszer válaszában más és más lengésképek alakulnak ki. A kialakuló lengésképek vizsgálata során azt lehetett megállapítani, hogy a rendszer kéttárolós tagként (avagy kéttárolós tagok összegeként) fog viselkedni, így a lengés vagy lengések csillapítatlan körfrekvenciái és a relatív csillapítási tényezők is meghatározhatók. Ezen paraméterek az

adott zónáknak megfelelően különböző tartományokon vagy görbéken helyezkedhetnek el a csillapítatlan sajátkörfrekvencia és a relatív csillapítási tényező síkján. A cél annak a vizsgálata volt, hogy egyes tartományokból választva a szabályozás paramétereit, milyen anyagmodellek valósíthatóak meg. Gyakori anyagmodell a szövetek modellezése esetében a Kelvin-Voigt modell, illetve ennek egy összetettebb, bonyolultabb dinamikát megvalósító esete ha két Kelvin-Voigt modell kapcsolódik össze. Mindkét esetben a megfelelő szabályozási paraméterek megválasztásával lehetséges az adott anyagi viselkedés megvalósítása. Illetve érdemes lehet további vizsgálatok alá vetni a dolgozatban nem vizsgált tartományokat is, bonyolultabb anyagmodellek, például SLS anyagmodell megvalósítása céljából.

Ahhoz, hogy az előzőekben említett anyagi viselkedések megvalósíthatóságát a gyakorlatban is tesztelni lehessen, a megalkotott haptikus eszközön kellett méréseket végezni. A paraméteridentifikációt követően a mérések során azt lehetett vizsgálni, hogy milyen mintavételezési idő mellett, milyen paraméterekkel lehet a kívánt karakterisztikákat elérni, illetve ez esetben már a súrlódás hatásától sem lehetett eltekinteni.

Összességében azt lehet elmondani, hogy egy egy szabadsági fokú haptikus eszközzel is képesek lehetünk olyan karakterisztikák létrehozására, melyek szövetek modellezésére használt anyagmodellek válaszait valósítják meg, még olyan esetben is, ha az adott anyagmodell két szabadsági fokkal rendelkezik.

Hivatkozások

- [1] M. Sreelakshmi and T. Subash, „Haptic technology: A comprehensive review on its applications and future prospects,” *Materials Today: Proceedings*, vol. 4, no. 2, pp. 4182–4187, 2017. doi:[10.1016/j.matpr.2017.02.120](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.02.120)
- [2] M. Fulkerson, „The unity of haptic touch,” *Philosophical Psychology*, vol. 24, no. 4, pp. 493–516, Aug. 2011. doi:[10.1080/09515089.2011.556610](https://doi.org/10.1080/09515089.2011.556610)
- [3] E. P. Gardner, „Somatosensory cortical mechanisms of feature detection in tactile and kinesthetic discrimination,” *Canadian Journal of Physiology and Pharmacology*, vol. 66, no. 4, pp. 439–454, Apr. 1988. doi:[10.1139/y88-074](https://doi.org/10.1139/y88-074)
- [4] C. Ott, R. Mukherjee, and Y. Nakamura, „Unified impedance and admittance control,” in *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, May 2010. doi:[10.1109/robot.2010.5509861](https://doi.org/10.1109/robot.2010.5509861)
- [5] R. van der Linde and P. Lammertse, „Hapticmaster – a generic force controlled robot for human interaction,” *Industrial Robot: An International Journal*, vol. 30, no. 6, pp. 515–524, Dec. 2003. doi:[10.1108/01439910310506783](https://doi.org/10.1108/01439910310506783)
- [6] I. El Rassi and J.-M. El Rassi, „A review of haptic feedback in tele-operated robotic surgery,” *Journal of Medical Engineering Technology*, vol. 44, no. 5, pp. 247–254, Jun. 2020. doi:[10.1080/03091902.2020.1772391](https://doi.org/10.1080/03091902.2020.1772391)
- [7] E. S. Barjuei, S. Toxiri, G. A. Medrano-Cerda, D. G. Caldwell, and J. Ortiz, „Bond graph modeling of an exoskeleton actuator,” in *2018 10th Computer Science and Electronic Engineering (CEECE)*, vol. 20. IEEE, Sep. 2018. doi:[10.1109/ceec.2018.8674199](https://doi.org/10.1109/ceec.2018.8674199) pp. 101–106.
- [8] H. V. Chorney, J. R. Forbes, and M. Driscoll, „System identification and simulation of soft tissue force feedback in a spine surgical simulator,” *Computers in Biology and Medicine*, vol. 164, p. 107267, 2023. doi:[10.1016/j.compbiomed.2023.107267](https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2023.107267)
- [9] A. Pappalardo, A. Albakri, C. Liu, L. Bascetta, E. De Momi, and P. Poignet, „Hunt–crossley model based force control for minimally invasive robotic surgery,” *Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 29, pp. 31–43, Aug. 2016. doi:[10.1016/j.bspc.2016.05.003](https://doi.org/10.1016/j.bspc.2016.05.003)
- [10] L. Barbe, B. Bayle, M. de Mathelin, and A. Gangi, „In vivo model estimation and haptic characterization of needle insertions,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 26, no. 11–12, pp. 1283–1301, Nov. 2007. doi:[10.1177/0278364907082666](https://doi.org/10.1177/0278364907082666)

- [11] P. Moreira, N. Zemiti, C. Liu, and P. Poignet, „Viscoelastic model based force control for soft tissue interaction and its application in physiological motion compensation,” *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, vol. 116, no. 2, pp. 52–67, Sep. 2014. doi:[10.1016/j.cmpb.2014.01.017](https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2014.01.017)
- [12] C. Budai, L. L. Kovács, J. Kövecses, and G. Stépán, „Combined effects of sampling and dry friction on position control,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 98, no. 4, pp. 3001–3007, Dec. 2019. doi:[10.1007/s11071-019-05101-7](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05101-7)
- [13] „Hapkit. (n.d.),” [Last accessed: 2024-11-10]. [Online]. Available: <https://hapkit.stanford.edu/about.html>
- [14] M. Orta Martinez, C. M. Nunez, T. Liao, T. K. Morimoto, and A. M. Okamura, „Evolution and analysis of hapkit: An open-source haptic device for educational applications,” *IEEE Transactions on Haptics*, vol. 13, no. 2, pp. 354–367, Apr. 2020. doi:[10.1109/toh.2019.2948609](https://doi.org/10.1109/toh.2019.2948609)
- [15] Dr. Csernák Gábor, Dr. Stépán Gábor, *A műszaki rezgés tan alapjai*, 2012, ch. A másodfajú Lagrange-egyenlet, [Last accessed: 2024-11-09]. [Online]. Available: https://www.mm.bme.hu/targyak/bsc/rezgtan/downloads/muszaki_rezgestan_bmarks.pdf
- [16] Dr. Szabó Zsolt, Budai Csaba, Dr. Kovács László, Dr. Lipovszki György, *Robotmechanizmusok*. BME MOGI, 2014, ch. Merev test rendszerek dinamikája. ISBN 978-963-313-170-1
- [17] J. Gil, A. Avello, A. Rubio, and J. Florez, „Stability analysis of a 1 dof haptic interface using the routh–hurwitz criterion,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 4, pp. 583–588, Jul. 2004. doi:[10.1109/tcst.2004.825134](https://doi.org/10.1109/tcst.2004.825134)
- [18] B. Lantos, *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I.* Akadémiai Kiadó, 2016. ISBN 978-963-059-848-4
- [19] S. Palani, *Sampling*. Springer International Publishing, Aug. 2021, pp. 1057–1070. ISBN 978-303-075-742-7
- [20] „Signals and Systems (Baraniuk et al.),” sep 30 2024, [Last accessed: 2024-10-16]. [Online]. Available: <https://eng.libretexts.org/@go/page/22833>
- [21] Dr. Bokor József, Dr. Gáspár Péter, Dr. Szabó Zoltán, *Irányításelmélet*, B. MOGI, Ed. BME MOGI, 2014. ISBN 978-963-313-175-6
- [22] Dr. Csernák Gábor, Dr. Stépán Gábor, *Rezgés tan*. Akadémiai Kiadó, 2019, ch. Egy szabadsági fokú lengőrendszerek. ISBN 978-963-454-473-9

- [23] F. R. Gantmacher, „Lectures in analytical mechanics,” 1975, [Last accessed: 2024-11-09]. [Online]. Available: <https://archive.org/details/lectures-in-analytical-mechanics-f.-gantmacher/page/202/mode/2up>
- [24] R. Wituła and D. Słota, „Cardano’s formula, square roots, chebyshev polynomials and radicals,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 363, no. 2, pp. 639–647, Mar. 2010. doi:[10.1016/j.jmaa.2009.09.056](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.09.056)
- [25] Széchenyi István EgyetemGépészmérnöki, Informatikai és Villamosmérnöki Kar Gépek Tervezése Tanszék, „Minőségi követelmények 2,” [Last accessed: 2024-11-09]. [Online]. Available: https://gtt.sze.hu/images/Mechatronika/iranyitastechnika/ITT_Minosegi_kovetelmenyek.pdf
- [26] Udaya B. Rongala and Andre Seyfarth and Vincent Hayward and Henrik Jörntell, „The import of skin tissue dynamics in tactile sensing,” *Cell Reports Physical Science*, vol. 5, no. 5, p. 101943, 2024. doi:[10.1016/j.xcrp.2024.101943](https://doi.org/10.1016/j.xcrp.2024.101943)
- [27] Budai, Csaba, „Vibrations in single-degrees-of-freedom sampled-data linear mechanical systems,” *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, vol. 66, no. 1, p. 90–98, 2022. doi:[10.3311/PPme.19150](https://doi.org/10.3311/PPme.19150)
- [28] J. Wojewoda, A. Stefański, M. Wiercigroch, and T. Kapitaniak, „Hysteretic effects of dry friction: modelling and experimental studies,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 366, no. 1866, pp. 747–765, Oct. 2007. doi:[10.1098/rsta.2007.2125](https://doi.org/10.1098/rsta.2007.2125)
- [29] A. Mashayekhi, S. Behbahani, A. Nahvi, M. Keshmiri, and M. Shakeri, „Analytical describing function of lugre friction model,” *International Journal of Intelligent Robotics and Applications*, vol. 6, no. 3, pp. 437–448, Jan. 2022. doi:[10.1007/s41315-021-00220-0](https://doi.org/10.1007/s41315-021-00220-0)