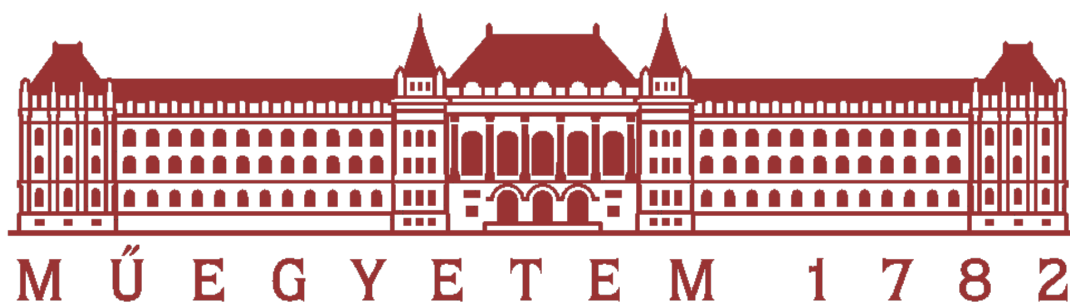




OROSZ KOLOS

Országos Tudományos Diákköri Konferencia Dolgozat

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR  
MECHATRONIKA, OPTIKA ÉS GÉPÉSZETI INFORMATIKA  
TANSZÉK



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR  
MECHATRONIKA, OPTIKA ÉS GÉPÉSZETI INFORMATIKA TANSZÉK

# Omnidirekcionális robotok hajtásának vizsgálata a kinematika és a hajtáslánc szemszögéből

Orosz Kolos

Országos Tudományos Diákköri Konferencia

Konzulensek:

*Dr. Czmerk András*

Adjunktus

BME GPK MOGI

*Raj Levente*

Tanársegéd

BME GPK MOGI

BUDAPEST, 2025

# Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Czmerk Andrásnak a BME Mechatonika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék adjunktusának az iránymutatását, támogatását munkám egésze során, és segítségét, tiszta magyarázatait mind elméleti, mind praktikai kérdésekben. Szintén szeretnék köszönetet mondani Raj Leventének a BME Mechatonika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék tanársegédének segítségéért egyes felmerülő kérdések megértésében.

# Kivonat

Omnidirekcionális vagy holonomikus hajtású robotok a robotika egy olyan altípusa, amelyeket logisztikai feladatokra és több iparágban széleskörűen használnak. Ezen robotok bármely irányba képesek mozogni orientációjuk megváltoztatása nélkül. Egyszerű matematikai egyenletek segítségével az alapvető mozgások könnyedén irányíthatók, azonban ipari felhasználásra, ahol a pozíciós és orientációs követelmények szigorúan meghatározottak, egy sokkal összetettebb és pontosabb irányítás szükséges.

A hagyományos differenciális hajtással ellentétben a kerek forgásuk során lényegesen nagyobb hatással vannak egymásra. Egyetlen kerék meghajtása a többi kerékben is szögsebességet indukál, amely szögsebesség annak motorjára is visszahat. A probléma még jelentősebbé válik, ha mindegyik kereket meghajtjuk és ezen effektusok egymással interakcióba kerülnek. A modellezés során a talaj és a robot kerekei közötti kapcsolat csúszásmentesnek feltételezhető. Ezen feltételezés mentén a meghajtó motorok és azok kerekein keresztül a talajjal való kapcsolatuk meghatározható. Tisztán látható, hogy valós környezetbeli helyzetekben a szabályozás igazán komplikálttá válik.

Kutatásomban felmérem és feldolgozom ezen a területen végzett kutatói eredményeket, a fennálló jelenségeket szimulálva. Munkám során a kinematikai egyenleteket felírva és a meghajtásból származó összefüggéseket meghatározva külön-külön vizsgálom azok teljes rendszerre gyakorolt hatásait.

# Abstract

Omnidirectional or holonomic drive robots are a sub-type of robots used in the field of robotics extensively for logistics, research purposes in many industries. These robots can move in any direction without changing their orientation. Using simple mathematical equations the basic movements of these robots can be easily controlled, but for industry purposes, where position and orientation requirements are strictly determined, a more complex and precise solution is required.

Contrary to conventional differential drives, the wheels act upon each other much more considerably when turning. If one wheel is turned and others are stationary, an angular velocity will be induced in the other wheels, leading to an angular velocity working on the motors. Furthermore, in the model we assume slipless contact between the ground and the wheels. If we add all things together in the case of one rotating wheel, the rotating wheel induce some motion, rotation on the other wheels, which have effects on the rotating wheel, and they also all influence their corresponding motor. The problem becomes even more prominent, if we use all of the wheels and these effects are affecting each other. It is clear that in real world scenarios the control becomes truly complicated.

In my research I assess the work done in this field, simulating the described ramifications. My objective is to differentiate between the consequences coming from the kinematic equations and from the relations derived from the drivetrain regarding their effects on the whole system.

# Tartalomjegyzék

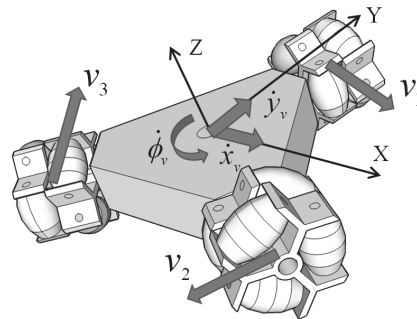
|                                                   |           |
|---------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>                               | <b>2</b>  |
| 1.1. Holonomikus robotok feltörekvése . . . . .   | 2         |
| 1.2. Célkitűzések . . . . .                       | 2         |
| <b>2. Előzetes tudás</b>                          | <b>4</b>  |
| 2.1. Matematikai és Fizikai alaptételek . . . . . | 4         |
| 2.2. Redukciós képlet . . . . .                   | 6         |
| 2.3. Időfüggő rendszerek . . . . .                | 6         |
| 2.4. Használt szoftverek . . . . .                | 6         |
| 2.5. Kapcsolódó irodalom . . . . .                | 7         |
| <b>3. Fizikai modell</b>                          | <b>9</b>  |
| 3.1. Mechanikai modell . . . . .                  | 10        |
| 3.1.1. Pillanati görbületi középpont . . . . .    | 10        |
| 3.1.2. WMRs . . . . .                             | 10        |
| 3.2. Villamos modell . . . . .                    | 12        |
| 3.2.1. Szenzorok . . . . .                        | 12        |
| 3.2.2. Hajtáslánc . . . . .                       | 13        |
| 3.3. Összetett modell . . . . .                   | 17        |
| <b>4. Kinematikai modellek</b>                    | <b>18</b> |
| 4.1. Kerék . . . . .                              | 18        |
| 4.2. Test . . . . .                               | 20        |
| <b>5. Szimulációk és megfigyelések</b>            | <b>25</b> |
| 5.1. Intuíció szerzése . . . . .                  | 25        |
| 5.2. Szimulációs környezet . . . . .              | 26        |
| 5.3. Szimulációk . . . . .                        | 27        |
| 5.4. Eredmények kiértékelése . . . . .            | 33        |
| <b>6. Konklúzió</b>                               | <b>34</b> |
| <b>7. Jövőbeli munkák</b>                         | <b>35</b> |

# 1. Bevezetés

## 1.1. Holonomikus robotok feltörekvése

A robotika megjelenése az ipari alkalmazásokban 1960 után kezdődött. A '70-es és '80-as években az automatizálás implementálása a repetitív feladatokban jelent meg, az autóipari felhasználásokon túl. Ilyen területek az elektronikai cikkek-, gyógyszerek előállítása és a nehézipari alkalmazások. Ezen robotok legfőkébb stacionáriusak voltak, olyan ismétlődő feladatokat végeztek, ahol a pontosság és a gyorsaság a voltak a legfőbb szempontok.

A nagy cégek és velük együtt a nagy raktárházak megjelenésével, a termékek logisztikájában dolgozó agilis robotok központi fejlődési céllá váltak. A robotika ilyen használata az ipar bevett szokásává vált, [2] a fontosságukat emeli ki. Az omnidirekcionális robotok kiemelkedőbbek a tárgyak transzportálásában, mint a differenciálhajtással felszerelt robotok több szempontnak köszönhetően. A holonomi-



**1. ábra.** Kiwi-hajtású robot omnidirekcionális kerekekkel. [1]

kus robotok bármely irányban képesek mozogni orientációjuk megváltoztatása nélkül, ezáltal nagyobb rugalmassággal manőverezhetők. Hatékonyabban tudják pozíciójukat megváltoztatni és nem igényelnek komplex manővereket ahhoz, hogy megfelelően orientálják magukat. Tehát az omni-kerekekkel felszerelt robotok - a négykerekű robotokon használt mecanum kerékhez hasonlóan - egy helyben tudják orientációjukat változtatni. Nem rendelkeznek kormányzási mechanizmussal, egy robosztusabb hajtást eredményezve. Az omnidirekcionális robotok nagyobb stabilitással is rendelkezhetnek. Hátrányuk azonban, hogy szofisztikáltabb kontroll rendszereket igényelnek. Egy kontroll metódust részletezése [3] olvasható.

## 1.2. Célkitűzések

Az omnidirekcionális robotok kevesebb bonyolult egységet igényelnek, azonban ebből kifolyólag, a kívánt pontosság elérése érdekében, a robot mozgásainak leírásához kompli-

kált kinematikai modellek szükségesek. Munkám során szeretném megismerni a releváns kutatásokat és elmélyülni az összetett rendszerek kinematikai modellezésében.

Az első célkitűzése a kutatásomnak, hogy egy egyszerűsített, empirikus, azonban realisztikus modellt készítek szimulációs környezetben. Egy pontos modell szimulációs környezetbe való implementálása után, a fejlesztett modell tesztelés általi validálása történik. A tesztelés során nagy mennyiségű adat keletkezik, amely elemzése által beláthatunk a modell jellemzőibe. Az analízis után a fő célom, hogy megkülönböztessem a kényszereket, amelyek a robot kerekeiből és a kinematikai egyenletekből eredeztethetők. Két hatásuk van: az egyik magára a kerékre hat és surlódásként lép föl, míg a másik a motorokból eredeztethető, amelyek közvetetten meghajtódnak a kerekekkel való összeköttetés által. Ezen erőknek nagy behatásuk van a modell pontosságára.

## 2. Előzetes tudás

### 2.1. Matematikai és Fizikai alaptételek

#### *Alaptudás*

A cikkben javasolt munka megértéséhez elengedhetetlen a vektorok és mátrixok ismerete. A kinematikai modell alapja a vektor-mátrix műveletek alkalmazása. Szükséges a vektor-mátrix szorzás, a skaláris szorzat és a vektoriális szorzat alapos megértése. Alapvető fizikai ismeretek is szükségesek, különösen a sebesség, a gyorsaság, a szögsebesség és a súrlódási erők jellemzői. Mélyebb fizikai jártasság előnyös, de nem kötelező. A fontos elveket megfelelő magyarázat kíséretében tárgyaljuk.

#### *Forgatási mátrixok*

A legkönnyebben egy példán keresztül érthetjük meg a forgatás mátrixok működését. Legyen  $\mathbf{v}$  egy vektor egy euklideszi térben,  $(x, y, z)$  koordináta-rendszerben. Egy egyszerű példaként vegyük:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A forgatási mátrixok lehetővé teszik, hogy egy vektort elforgassunk egy tengely körül  $\alpha$  fokkal. Ha ezt a vektort a  $z$  tengely körül akarjuk elforgatni, az alábbi transzformációs mátrixot használjuk:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ha a  $\mathbf{v}$  vektort 45 fokkal szeretnénk elforgatni úgy, hogy párhuzamos legyen a  $yz$ -síkkal =  $\{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ -ot helyettesítünk az (1) mátrixba, és megkapjuk, hogy:

$$\mathbf{R}_{45^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ha ezt megszorozzuk a vektorral, megkapjuk annak elforgatott változatát:

$$\mathbf{v}_{45^\circ} = \mathbf{R}_{45^\circ} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Láthatjuk, hogy a vektor hossza nem változott, és a vektort a  $z$  tengely körül, pozitív irányba, az óramutató járásával ellentétesen forgattuk el. Észrevehetjük, hogy annak a tengelynek, amely körül forgatunk, 1 szerepel a mátrixban értékül, és nullák a megfelelő sorban és oszlopban. A forgás irányát megváltoztathatjuk, ha az (1) mátrixot az alábbi elrendezésre módosítjuk:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ha ismét  $\alpha = 45^\circ$ -ot helyettesítünk be, és kiszámítjuk az (2) egyenletet, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\mathbf{v}_{-45^\circ} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Így most az óramutató járásával megegyező irányban forgattuk el a vektort, és a vektor most az  $xz$ -síkon  $= \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$  található.

Ez csupán a forgatási mátrixok egy rövid bevezetése volt, számtalan példa és alkalmazása található a matematikában és a tudományban, különösen a 3D grafika területén. Mivel a kinematikai modell 5 különböző koordináta-rendszerben van ábrázolva, meg kell határoznunk az ezek közötti kapcsolatot. Ehhez forgatási mátrixokat fogunk használni.

### ***Használt jelölések***

Az alkalmazott jelölések megfelelnek a matematikában és fizikában használt szabványos szimbólumoknak és konvencióknak. Azokhoz a fogalmakhoz, amelyek nem általánosan elterjedtek ezekben a tudományterületekben, logikus és érthető jelöléseket használunk. A változók rendszerét az *A Függelékben* található nómenklatúra részletesen ismerteti a tisztánlátás érdekében.

## 2.2. Redukciós képlet

A sebességredukciós képlet a kinematika egyik alapvető egyenlete. Egy merev test  $A$  és  $B$  pontjai közötti sebességvektorokra a következő egyenlet érvényes:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (5)$$

ahol  $\boldsymbol{\omega}$  a test szögsebesség vektora ([rad/s]),  $\mathbf{r}_{AB}$  pedig az  $A$  pontból a  $B$  pontba mutató irányvektor ([m]). Az egyenlet bizonyítását nem mutatjuk be, mivel ez meghaladja a dolgozat kereteit.

## 2.3. Időfüggő rendszerek

Az időfüggőség azt írja le, hogyan változik egy rendszer az idő múlásával. A mozgásokat időfüggő függvényekkel ábrázoljuk. A mozgások ezáltal modellezése egy determinisztikus jelleget biztosít minden adott időpillanathoz. Az időfüggő függvényt  $f(t)$  konvenció szerint jelöljük.

A rendszerek lehetnek lineárisak, ahol az időfüggő függvény más változókkal lineáris kapcsolatban van. A nemlineáris rendszerek azonban összetettebbek, és leírásukhoz nemlineáris egyenleteket szükséges használnunk. Az időfüggő függvények segítségével kihasználhatjuk az idő szerinti deriváltak jelentéseit. Ez azt jelenti, hogy ha  $f(t)$  az egy helyfüggvény, akkor az idő szerinti deriváltja a sebességfüggvényt adja meg:

$$v(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

és a második idő szerinti derivált megadja a gyorsulás függvényt:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

## 2.4. Használt szoftverek

Munkám során különböző szoftvereket használtam a modellek tesztelésére, szimulálására, valamint illusztrációk készítésére a fogalmak tisztább megértése érdekében. A modell helyességének ellenőrzésére a **Wolfram Mathematica**-t alkalmaztam, mivel nagy pontosságot és széleskörű funkcionalitást biztosít. A szimulációs környezet fejlesztését **MATLAB** programozási környezetben végeztem, amelyet megbízhatósága miatt széleskörben alkalmaznak különböző iparágak. A mátrixok könnyen kezelhetők különböző számításokhoz,

és magas fokon optimalizált a mátrixokkal végezhető műveletekhez, ezáltal gyors futási időt eredményez a szimulációk során. A szimulált adatokat hatékonyan lehet vizualizálni és elemezni. Az illusztrációk készítéséhez *Inkscape*-et használtam, amely egy nyílt forráskódú szoftver robosztus eszközkészlettel. Lehetővé teszi összetett grafikák létrehozását magas vektorgrafikus felbontásban.

## 2.5. Kapcsolódó irodalom

A robotika és automatizálás területén az omnidirekcionális hajtások egyre nagyobb szerepet kapnak az iparágakban, a különböző vezérlési módszerek kifejlődésével és azok egyre magasabb pontosságával. Csak néhány példát említve: használják őket az egészségügyi iparban, a logisztikában és az ellátási lánc menedzsmentben, anyagkezelésre, AS/RS rendszerek részeként és így tovább. Ebben a szekcióban bemutatom az omnidirekcionális robotikával kapcsolatos kutatásokat és ismertetem azokat a munkákat, amelyeket munkám során elemeztem.

### [4] Omni directional mobile robots, mechanisms and navigation approaches

Egyre több terület alkalmazza az omnidirekcionális meghajtású robotokat egyszerű felépítésük és a széles alkalmazási lehetőségeik miatt. Ez a tanulmány összegzi a különböző keréktípusokat és robot topológiákat. A munka különböző vezérlési és útvonaltervezési megközelítéseket is tartalmaz. A cikk kiváló összefoglalója a gyakori omnidirekcionális kerekeknek, kezdve az egyszerű irányítható görgős kerekektől a bonyolultabb megoldásokig.

### [5] A Comparative Study of Omnidirectional and Differential Drive Systems for Mobile Manipulator Robots

A differenciál- és az omnidirekcionális hajtások közötti különbségek eltérő, különböző alkalmazásokhoz vezetnek. Ez a tanulmány ezen két hajtástípus erősségeit és gyengeségeit vizsgálja. Bemutatja a különböző típusú kerekeket és mechanizmusokat, és rövid bevezetést ad ezen platformok kinematikai modellezéséhez. Bemutatja továbbá a fő környezeteket, ahol a differenciál- és az omnidirekcionális meghajtású robotokat alkalmazzák. Kiemeli, hogy az omnidirekcionális platformok érzékenyebbek a környezeti tényezőkre, és leginkább zárt térben, sima felületeken, szűk helyeken, ahol nagy pontosság szükséges alkalmazhatóak. A differenciálhajtások felülmúlják az egyenesen, durva felületeken való al-

kalmazásokban és a nehéz terhek szállításában. Összességében a tanulmány megerősítette, hogy az omnidirekcionális hajtások előnyösebbek a nagyobb pontosság és manőverezhetőség terén, a rendszer bonyolultságának árán, míg a differenciálhajtások robusztusabbak, ám alacsonyabb pontosság és manőverezhetőség jellemző rájuk.

## **[6] Introduction to Mobile Robot Control**

Az Introduction to Mobile Robot Control című könyv az egyik legátfogóbb munka a robotvezérlés területén. Több mint 600 oldalon át részletesen mutatja be a robotplatformok típusait, a kerekeket, érzékelőket, a kinematikai-, dinamikai- és állapotter modellezési megközelítéseket, a robotok különböző alkalmazásait és még sok mást. Az omnidirekcionális robotikával kapcsolatos leírás a könyvben még ma is rendkívül releváns.

## **[7] Modelling and simulation of the drivetrain of an omnidirectional mobile robot**

*Raj Levente és Dr. Czmerk András* munkája képezi kutatásom alapját. Cikkükben egy átfogó állapotter modellt mutatnak be a kiwi-hajtású robotokhoz. Leírják az omnidirekcionális hajtásrendszer kinematikai- és dinamikai modelljeit. Munkámban ihletet merítettem a cikkben bemutatott kinematikai modellből.

Kapcsolódó irodalmak, amelyek említést érdemelnek: [8] visszakapcsolásos kontroll megoldásokat mutat be omnidirekcionális robotokhoz, [9] kiváló, mint egy rövid bevezetés az omnidirekcionális robotok kinematikai modellezésébe és [10], amely az OWMR-ek kinematikai modellezését részletezi.

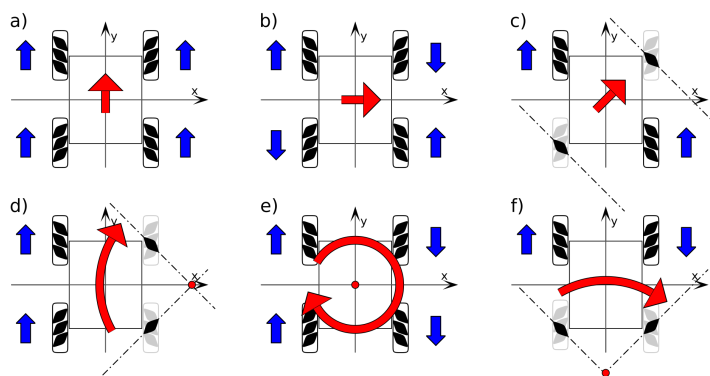
### 3. Fizikai modell

A holonomikus robotok számos formában megtalálhatók az ipar különböző területein. A legfontosabb különbség a differenciálhajtású robotokhoz képest az, hogy a kerekek nem generálnak oldalirányú erőt. Egy klasszikus megoldás a differenciálhajtású robotok holonomikussá tételére a kerekek olyan forgatási képessége, amely lehetővé teszi, hogy tengelyük a talajra merőleges irányban forduljon el. Ez a megoldás azonban lassú, és csak álló helyzetben hajtható végre hatékonyan.

A nagy áttörést az 1972-ben Bengt Erland, egy svéd mérnök által kifejlesztett mecanum kerék hozta meg. A mecanum kerekek alkalmazása lehetővé tette az egyszerű átmenetet a klasszikus hajtásról a holonomikus hajtásra. Mivel a kerekek által a talajra gyakorolt erők 45 fokos szögben helyezkednek el, a kerekek megfelelő irányú forgatásával omnidirekcionális mozgás érhető el, ahogy azt a 2. ábra mutatja.

Ez az elrendezés különösen elterjedt targoncák esetében, ahol lehetővé teszi a sokkal szűkebb fordulást, hosszú tárgyak manőverezését, amelyek hagyományos targoncákkal nem lehetségesek, valamint a termelékenység javítását, különösen szűk helyeken. A mecanum kerekek részletes kinematikai elemzését a [11] cikk tartalmazza.

A holonomikus képességek eléréséhez használt kerék másik fő típusa az omni-kerék, amely részletesen a 3.1.2. szekcióban kerül bemutatásra. A mecanum és omni-kerekek kísérleti elemzése megtalálható a [12] cikkben.



**2. ábra.** Holonomikus mozgás elérése mecanum kerekek használatával.

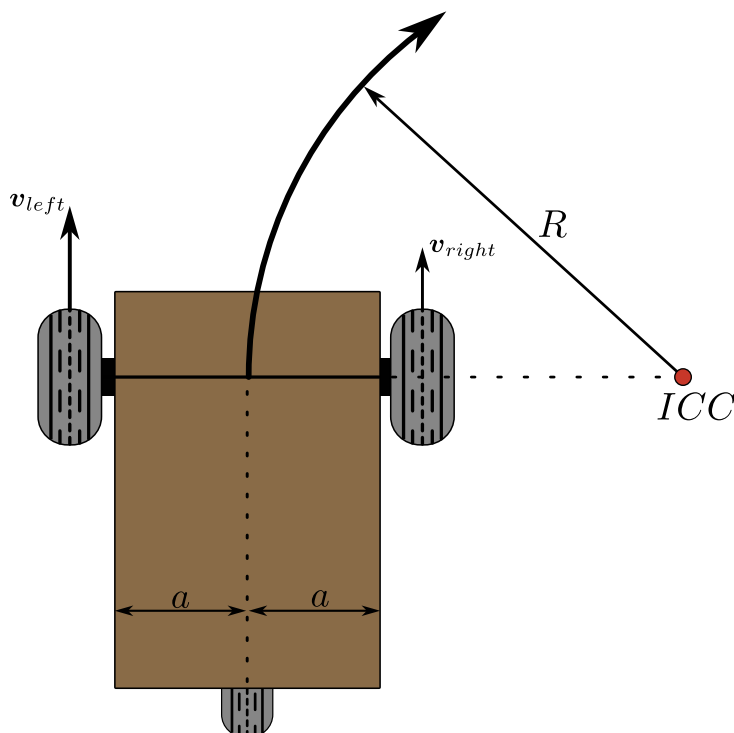
*kék:* Kerék forgási iránya.

*piros:* Jármű testének mozgási iránya. [Wikipedia]

## 3.1. Mechanikai modell

### 3.1.1. Pillanatnyi görbületi középpont

Ahhoz, hogy megértsük a robotok mozgásmintázatát, és azt, hogy miért különlegesek az omnidirekcionális hajtások, be kell vezetnünk a *pillanatnyi görbületi középpont* (ICC) fogalmát. Ahogy a neve is sugallja, ez az a pont, amely körül a robot görbületi pályán mozog. A differenciálhajtású robotok ICC-je különböző keréksebességek esetén a 3 ábrán látható.



3. ábra. ICC ábrázolása differenciálhajtások esetén.

### 3.1.2. WMRs

Ahhoz, hogy megértsük a holonomikus robotokat, először is különbséget kell tennünk a *kerekes mobil robotok* (WMRs) között. A WMR-ek síkbeli manőverezhetőségét a szabadságfokuk (DoF) jellemzi a síkban. A nem holonomikus robotoknak kevesebb mint három szabadságfoka van a síkban. A holonomikus robotok bármilyen irányba képesek mozogni a síkban, szabadságfokuk három. Ezt a képességet hívjuk omnidirekcionális vagy holonomikus mozgásnak.

Számos WMR hajtástípus létezik, a legjelentősebbek a következők:

- Differenciálhajtás
- Omnidirekcionális hajtás
- Szinkronhajtás
- Ackermann-kormányzás

A *differenciálhajtás* két fix, meghajtott kerékből áll, amelyek a robot jobb és bal oldalán helyezkednek el, és egymástól függetlenül vezérelhetők. A stabilitást egy vagy két görgős kerék biztosítja. Ha a kerekek azonos sebességgel forognak, a robot egyenes vonalban halad; ha az egyik kerék lassabban forog, a robot egy íven halad. Ha a kerekek ellentétes irányban forognak, a platform a két hajtott kereket összekötő szakasz középpontja körül fordul el. A differenciálhajtás esetében az  $R$  sugár könnyen kiszámítható az alábbi képletből:  $\frac{(v_l - v_r)}{2a} = \frac{v_r}{R - a}$ . Átrendezve az egyenletet  $R$ -re kapjuk, hogy:

$$R = \frac{a \cdot (v_l + v_r)}{v_l - v_r} \quad v_l \geq v_r$$

Az ICC segítségével egyértelműen leírhatjuk a robot mozgását. Ha  $v_l = v_r$ , akkor  $R = \infty$ , ami egyenes mozgást jelent, míg ha  $v_l = -v_r$ , akkor  $R = 0$ , ami forgást jelent.

Az *omnidirekcionális hajtású* járművek legtöbb esetben három vagy négy kereket használnak, de lehetnek több omnidirekcionális keréssel felszereltek is. A robotikában az *omni-kerék* a leggyakoribb megoldás a holonomikus mozgás elérésére. Ezek a kerekek a kerék peremén  $90^\circ$ -ban elhelyezett kisebb görgőkkel vannak ellátva. Négykerekű omnidirekcionális járművek általában a 3. szekcióban ismertetett és a 2. ábrán bemutatott mecanum kerekeket használják, de megfelelő platform használatával omni-kerekekkel is konfigurálhatók.

A *szinkronhajtások* szintén képesek holonomikus mozgásra. Három vagy négy kerék kapcsolódik ugyanahhoz a motorhoz egy speciális szinkronizált mechanizmussal. Ez harmonikus mozgást biztosít, mivel egyszerre csak egy motor működik, így az esetleges pontatlanságok egyenletesen oszlanak el. Egy másik motor felelős a robot irányának megváltoztatásáért. Ez egyszerűbb kialakítás (a többi omnidirekcionális hajtáshoz képest) és precíz megoldás, amelyet széles körben használnak automatizált robotokban.

Az *Ackermann-kormányzás* két szomszédos kerék közötti kapcsolaton keresztül működik. Ez a geometria lehetővé teszi, hogy a kerekek ne csússzanak, miközben egy íven haladnak.

A kapcsolat mindkét kereket együtt fordítja, így az ICC olyan pontban található, ahol bármilyen kormányzóg esetén a kerekek által leírt körök egy közös pontra esnek. Az Ackermann-kormányzás alapját az adja, hogy a mozgó nyomtávrúd rövidebb, mint a tengely.

A mecanum kerekű járművek és az omni-kerekű robotok ICC-je megegyezik a robot elrendezésének tömegközéppontjával. Ez a tulajdonság biztosítja azt a képességet, hogy a robot helyben tud fordulni.

## 3.2. Villamos modell

Ebben a részben a robotok fő elektronikai alkotóelemeit tárgyaljuk. A leírt komponensek nem kizárólag az omnidirekcionális robotokra jellemzőek, csak a robotok fő építőelemeit említjük, a későbbi szimulációk könnyebb érthetősége érdekében.

### 3.2.1. Szenzorok

Ahhoz, hogy a robotok hatékonyan manőverezzenek, pontos adatokra van szükségük környezetükről és helyzetükről. Ezt számos különböző típusú szenzor segítségével érhetjük el, akár egyetlen roboton belül is.

A szenzorokat két fő kategóriába sorolhatjuk:

- *digitális szenzorok*,
- *analóg szenzorok*.

Az *analóg szenzorok* folyamatos kimenetet adnak, amelyeket analóg-digitális (A/D) átalakítóval kell digitalizálni. A *digitális szenzorok* ezzel szemben általában pontosabbak, mint az analóg szenzorok, és diszkrét kimenettel rendelkeznek, vagyis meghatározott frekvenciával végeznek méréseket. A megfelelő szenzor kiválasztásakor az alábbi jellemzők a legfontosabbak:

- Működési tartomány,
- Felbontás,
- Linearitás,
- Sávszélesség,
- Érzékenység,

- Pontosság,
- Precizitás.

A dinamikai tartomány az érzékelő helyes működés esetében a szélső bemeneti értékek közötti különbség, amelyet az alábbi egyenlettel számíthatunk ki:

$$\text{tartomány} = 20 \log \left[ \frac{\max \text{ bemenet}}{\min \text{ bemenet}} \right] \quad [\text{dB}]$$

A felbontás a mért változó azon legkisebb különbsége, amelyet az érzékelő még felismerni képes.

A linearitás azt a tulajdonságot jelenti, hogy egy szenzor kimenete lineárisan viselkedik, tehát  $f(k_1x + k_2y) = k_1f(x) + k_2f(y)$ , ahol  $k \in \mathbb{R}$  konstans.

A sávszélesség az a maximális olvasási gyakoriság, amelyet az érzékelő másodpercenként biztosít, *hertz*-ben mérve.

Az érzékenység azt fejezi ki, hogy a bemeneti jelek milyen mértékben változtatják meg a kimeneti jeleket.

A pontosság azt méri, hogy a mért jelek milyen mértékben egyeznek meg a bemeneti jelek valós értékével:

$$\text{pontosság} = 1 - \frac{\|\text{hiba}\|}{x},$$

ahol  $x$  a jel valós értéke.

A precizitás az alábbi módon számítható:

$$\text{precision} = \frac{\text{range}}{\sigma}$$

A mi alkalmazásunkhoz a kerekek forgási sebességének mérésére van szükség. Ezt megtehetjük például a hajtásláncban zárt hurkú motorvezérlővel vagy impulzusszélesség-modulációval. Mivel a robot helyzete a környezetében nem releváns a céljaink szempontjából, nem tárgyaljuk a térbeli érzékelés különböző módjait.

### 3.2.2. Hajtáslánc

A robot hajtásláncát úgy képzelhetjük el, mint egy motorblokkot, amely tartalmazza magát a motort, a kerekeket és az ezeket összekötő mechanizmust.

A kerekek típusait a *3.1.2 szekcióban* tárgyaltuk.

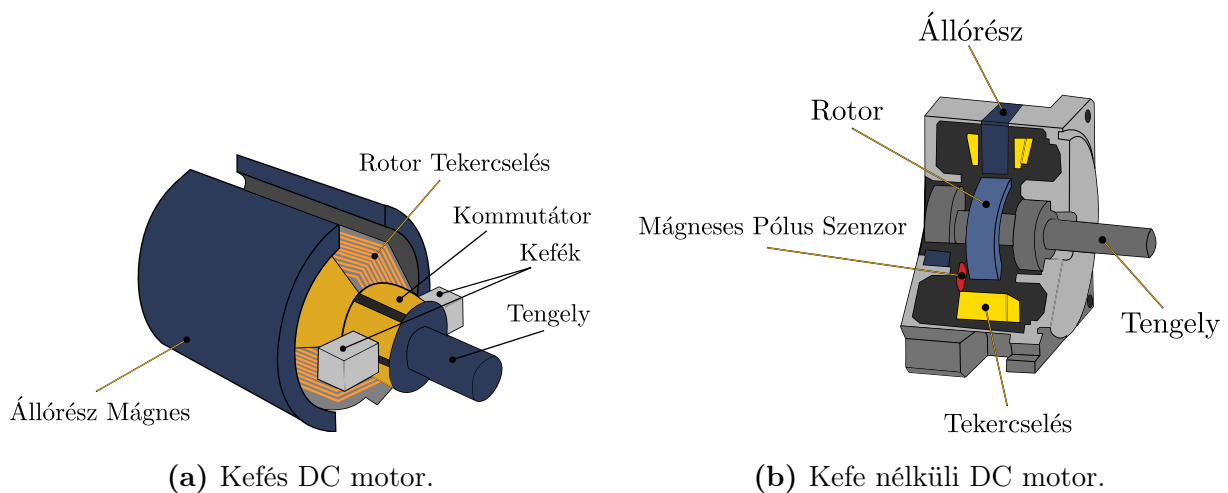
A motor és a kerék többféleképpen összeköthető. A legegyszerűbb megoldás az, ha közvetlenül egy tengelyen kapcsoljuk össze őket. Ez könnyen karbantartható megoldás, de

nagyobb konstrukciókhoz vezethet, és behatárolt motorelhelyezést igényel. Kompaktabb és sokoldalúbb megoldásokhoz gyakran használnak szíjakat. Ezek több gondoskodást igényelnek, de nagy rugalmasságot biztosítanak konstrukciójukban, esetükben a csatlakozó forgórészek határozzák meg a kimeneti forgási sebességet. Ha nagyobb precizitásra és a kerék sebességének szabályozására van szükség, fogaskerekes hajtómű használata is egy lehetőség.

A robotikában leggyakrabban használt motorok:

- *Kefés/Kefe nélküli DC motor*
- *Áttételes DC motor*
- *Szervó motors*
- *Léptető motors*

A DC motorok a robotikai közösség legelterjedtebb motorjai. Ez tartósságuknak, egyszerű használhatóságuknak és megfizethetőségüknek köszönhető. Motorvezérlők használatával könnyen irányíthatóak. A DC motoroknak két fő típusa van: kefés és kefe nélküli. Ezek működési elvükben különböznek, amit a dolgozat keretein belül nem tárgyalunk. A motorok alkotóelemeit a 4. ábra mutatja be. A DC motorok modellezési és vezérlési módszereit a [13] és a [14] cikkek tárgyalják.



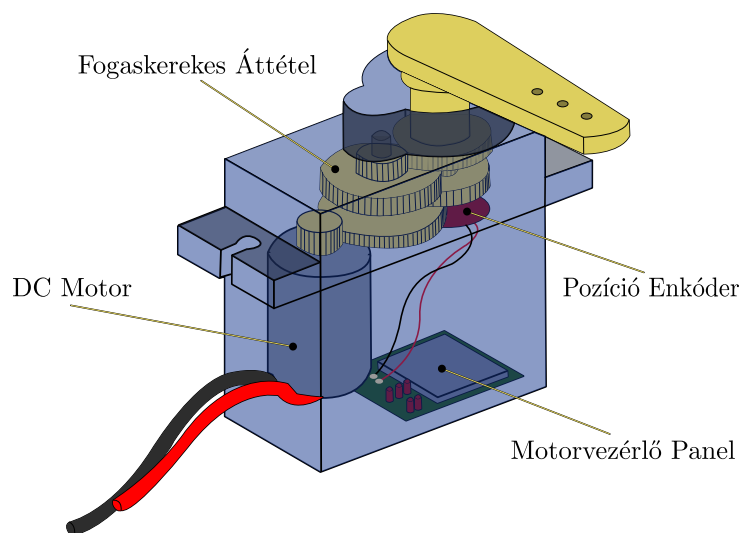
**4. ábra.** DC motorok fő komponensei.

Az áttételes DC motorok hagyományos DC motorok, amelyekhez egy fogaskerekes hajtómű (gearbox) kapcsolódik. Ez csökkenti a motor sebességét, miközben növeli a nyomatékot. Ezáltal a könnyen forgatható DC motor sokkal nehezebben visszaforgathatóvá válik.

Ahogy később a szimulációk során látni fogjuk (5. szekció), ez a tulajdonság jelentős hatással lesz a robot mozgására.

A szervómotorok hasonlóak a áttételes DC motorokhoz, de egy zárt hurkú visszacsatolást is tartalmaznak. A motor egy DC motorból, fogaskerekekből, egy enkóderből és egy vezérlőlappból áll. Az enkóder segítségével meghatározható a tengely szöghelyzete. A szervómotorok alkotóelemei a 5. ábrán láthatók.

A léptetőmotorok legnagyobb különbsége a DC motorokhoz képest az, hogy lépésekben mozognak. Amikor a motorvezérlő áramot vezet, a tengely egy lépést fordul. A működésükből adódóan a léptetőmotorok rendkívül precízek visszacsatolás használata nélkül is. Széles körben használják őket a robotikában, különösen robotkarokban, 3D nyomtatásban és CNC gépekben.



**5. ábra.** Szervó motorok komponensei.

A hajtáslánc szimuláció szempontjából kulcsfontosságú tulajdonságai:

- *Ellenelektromotoros erő (CEMF)*
- *Viszkózus csillapítás*
- *Tehetlenségi nyomaték*

Az ellenelektromotoros erő (CEMF), amely jele  $V_E$ , az a feszültség, amely ellen hat az azt létrehozó feszültségnek. A DC motorok esetében ez arányos a  $\omega$  szögsebességgel, és a

motorra ellenkező irányú nyomatékot gyakorol:

$$\tau_{emf} = -k_{emf}\omega \quad (6)$$

ahol  $k_{emf}$  a CEMF állandó [Nm/rad/s] dimenzióval, és az (6) egyenlet átrendezésével számítható ki.

A súrlódási ellenállás szintén ellenkező irányú nyomatékot gyakorol a motorra, amit  $\tau_{friction}$  jelöl. A súrlódás a hajtáslánc egészében jelen van, különösen a csapágyaknál, a használt csatlakozásoknál és egyéb mechanikai alkatrészeknél. Az ellenkező irányú nyomatékot az alábbiak szerint számíthatjuk:

$$\tau_{friction} = -B_r\omega \quad (7)$$

ahol  $B_r$  a súrlódási együttható.

A tehetetlenségi nyomaték  $I$  leírja a merev testre ható nyomaték és az ebből eredő szögsebesség kapcsolatát. Az adott szögyszerű gyorsulás előidézéséhez szükséges nyomaték mennyisége arányos a test tehetetlenségi nyomatékával. Ezt a következőképpen határozhatjuk meg:

$$I = \frac{L}{\omega} \quad (8)$$

Kör alakú kerékre a tehetetlenségi nyomaték számítható:

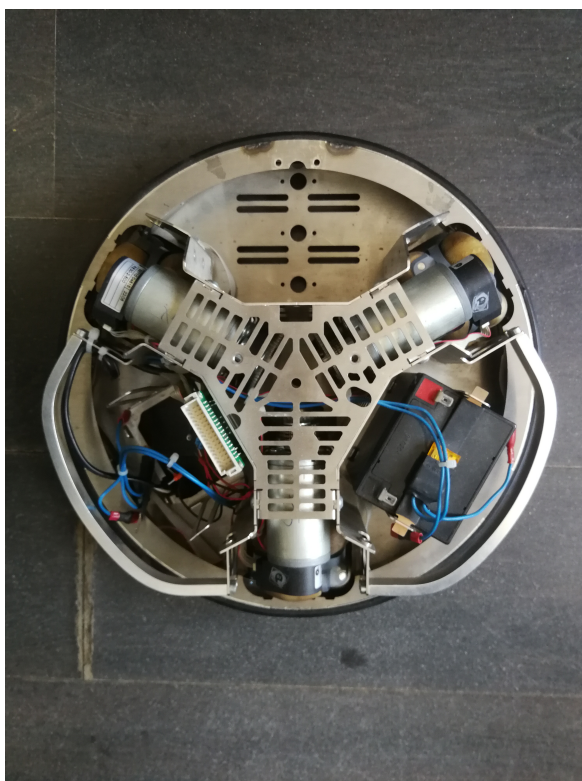
$$I = \frac{1}{2}mr^2 \quad (9)$$

ahol  $m$  a kerék tömege és  $r$  a kerék sugara.

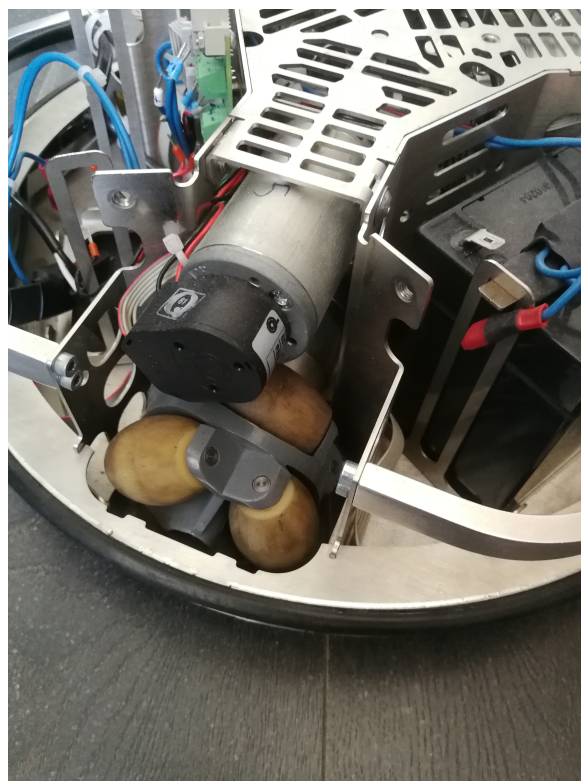
A súrlódási ellenállás és a tehetetlenségi nyomaték meghatározásának módszereiről részletes áttekintést nyújt a [15] cikk.

### 3.3. Összetett modell

A szimulációban használt paraméterek a *Festo Robotino* robotból származnak. Az összetett modell 3 motorblokkból áll. Mindegyik motorblokk egy DC motort és egy omni-kereket tartalmaz, a kapcsolatot köztük egy bolygóműves hajtómű biztosítja. A robot a 6. ábrán látható.



(a) Felső nézet a robotról.



(b) Közeli nézet a motorblokkról.

6. ábra. *Festo Robotino* robot

## 4. Kinematikai modellek

A objektum kinematikai modelljének ismerete elengedhetetlen egy hatékony kontroll algoritmus kialakításához. Ez egy széles körben kutatott terület a robotikában, különösen az omnidirekcionális robotok esetében. Ebben a részben bemutatjuk a kinematikai modellt, először a kerekre vonatkozóan, majd kibővítjük a látókörünket és az egész robotra alkalmazzuk a modellt. Az általunk felvázolt kinematikai modell egy háromkerekű kiwhajtású robotra vonatkozik.

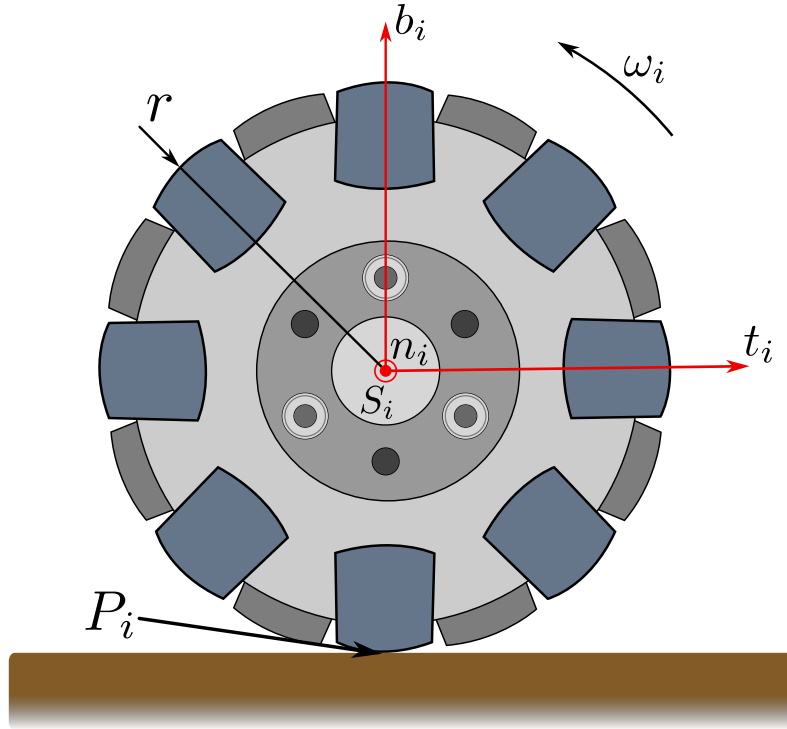
### 4.1. Kerék

Ahhoz, hogy meghatározhassuk a rendszer kinematikai viselkedését, bizonyos feltételezésekkel kell élnünk. Ezek a következők:

- Mindegyik kerék egy ponton kell hogy érintkezzen a talajjal egy adott időpillanatban
- A kerekcsúszásmentesen gördülnek a talajon

Ezek a feltételek elengedhetetlenek, mivel nélkülük a modell végtelenül bonyolult lenne. Ha csúszás megengedett lenne, a modell determinisztikus volta helyett sztochasztikussá válna, tehát figyelembe kéne vennünk véletlenszerű, valószínűségi jelenségeket is.

Minden keréknek van egy hozzá rögzített derékszögű koordináta-rendszere  $\mathcal{F}_i$ , ahol az  $i$  index az egyes kerekeket jelöli, tehát  $i \in [1, 2, 3]$ . A koordináta-rendszerek úgy vannak rögzítve, hogy a normális tengely  $n_i$  párhuzamos a kerek tengelyével, a binormális tengely  $b_i$  merőleges a talajra, a tangenciális tengely  $t_i$  pedig párhuzamos a talajjal. Ezek egy jobbsodrású koordináta-rendszert alkotnak. A kerek koordináta-rendszereinek konfigurációját a 7. ábra mutatja be.



**7. ábra.** Omni-kerék oldalnézete az  $\mathcal{F}_i\{S_i; n_i, t_i, b_i\}$  hozzárendelt koordináta rendszer feltüntetésével.

A kerekek szögsebessége  $\dot{\varphi}_{ni}(t)$ , amelynek iránya párhuzamos a normális tengellyel, ennek megfelelően vektoriális formában:

$$\omega_i(t) = \dot{\varphi}_i(t) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{ni}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{n_i t_i b_i} \quad (10)$$

Mivel feltételezzük, hogy a kerekek nem csúsznak, az érintkezési pont sebességére a következő írható fel:

$$\mathbf{v}_{P_i}(t) = \begin{bmatrix} \dot{n}_i(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{n_i t_i b_i} \quad (11)$$

ahol  $\dot{n}_i(t)$  a másik kettő kerék által produkált kényszer sebesség, az adott kerék nézetéből.

A sebességredukciós képletet alkalmazva beláthatjuk, hogy a kerék középpontjának sebessége:

$$\mathbf{v}_{S_i}(t) = \mathbf{v}_{P_i}(t) + \omega_i(t) \times \mathbf{r}_w \quad (12)$$

ahol  $\mathbf{r}_w$  a kerek sugarának vektoriális alakja:

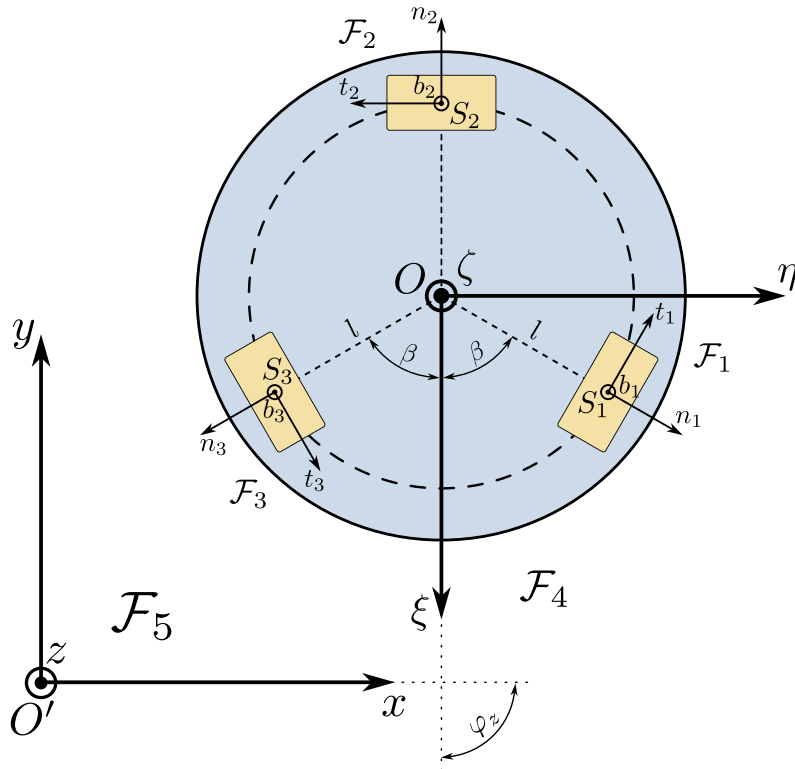
$$\mathbf{r}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}_{n_i t_i b_i} \quad (13)$$

Az (12) egyenletet mindegyik kerékre alkalmazva beláthatjuk az összes kerékre, hogy a tömegközéppontjaik az alábbi sebességállapottal rendelkeznek:

$$\mathbf{v}_{S_i}(t) = \begin{bmatrix} \dot{n}_i(t) \\ -r\dot{\varphi}_{n_i}(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{n_i t_i b_i} \quad (14)$$

## 4.2. Test

A kinematikai modell célja a robot test pozíciójának meghatározása. Ehhez két további derékszögű koordináta-rendszerre van szükségünk: az egyik a robot testéhez van rögzítve, a másik pedig a robot térbeli mozgását leíró globális koordináta-rendszer. A kinematikai modellben használt koordináta-rendszerek konfigurációja a 8. ábrán látható.



**8. ábra.** Idealizált kiwi-drive felülnézete feltüntetve a kerek koordináta rendszereit  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{F}_3$ , a robot testének koordináta rendszerét  $\mathcal{F}_4$  és a globális koordináta rendszert  $\mathcal{F}_5$ .

Legyen  $\mathcal{F}_4\{O; \xi, \eta, \varsigma\}$  a robot testének koordináta-rendszere. Az  $\mathcal{F}_4$  origója a robot tömegközéppontja  $O$ , amely megegyezik az ICC pontjával. Ez a koordináta-rendszer a robotoz van rögzítve, így  $\xi$  az  $n_1$  és  $n_3$  tengelyek között azonos szögtávolságot tart. Ezt a szöget jelöljük  $\beta$ -val, és mivel ebben az esetben háromkerekű platformról van szó,  $\beta = 60^\circ$  állandó. Ebben a modellben  $\beta$  egy konstrukciós paraméter, amely lehetővé teszi más szimmetrikus konstrukciók kezelését is. Az  $\mathcal{F}_4$  koordináta-rendszer határozza meg a robot testének orientációját, ami elengedhetetlen a mozgásának leírásához.

Legyen  $\mathcal{F}_5\{O'; x, y, z\}$  a globális környezet koordináta-rendszere. Ez rögzített a térben, és a robot helyzetét az  $O'$  origóhoz viszonyítva írja le. A kinematikai modell célja, hogy kapcsolatot teremtsen a keréksebességek és a test  $\mathcal{F}_5$  referencia-koordináta-rendszerbeli sebességállapota között.

Ahhoz, hogy a kerekre ható sebességeket a robot koordináta-rendszerében ábrázoljuk, forgatási mátrixokat kell alkalmaznunk. Ezek olyan transzformációs mátrixok, amelyek forgatásokat hajtanak végre, és általános magyarázatuk a *2.1. szekcióban* olvasható.

Gondos elemzés után az  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$  és  $\mathcal{F}_4$  közötti kapcsolatot leíró forgatási mátrixokat az alábbiak szerint írhatjuk fel:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_3^T = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}(-1, -1, 1) \quad (16)$$

Az  $\mathbf{R}_1$  és  $\mathbf{R}_3$  mátrixok az adott  $b_i$  tengelyek körül  $\beta$  szöggel forgatnak. A szimmetria miatt a transzponált kapcsolatuk könnyen felismerhető. Ebben az esetben  $\beta$  állandó értékű ( $60^\circ$ ), így a mátrixok numerikus értékekkel a következő formát öltik:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Miután a robot állapotát  $\mathcal{F}_4$ -ben kiszámítottuk, át kell transzformálnunk a globális  $\mathcal{F}_5$  koordináta-rendszerbe. Ehhez a globális koordináta rendszer  $x$  tengelye és a robot koordináta rendszerének  $\xi$  tengelye közötti szöget használjuk, amelyet  $\varphi_z(t)$ -vel jelölünk. Így az  $\mathcal{F}_4$  és  $\mathcal{F}_5$  közötti transzformáció a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{R}_G = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z(t) & \sin \varphi_z(t) & 0 \\ -\sin \varphi_z(t) & \cos \varphi_z(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

A robot koordinátasebességei és a kerék szögsebességei közötti kívánt kapcsolat eléréséhez meg kell oldanunk a következő egyenletet  $i \in \mathbb{N} \cap [1, 3]$  esetén:

$$\mathbf{v}_{S_i}(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_{OS_i} \quad (20)$$

A  $\mathbf{v}_{S_i}(t)$  vektorok a kerekek sebességhelyzetét írják le az  $\mathcal{F}_5$  koordináta rendszerben.

$\mathbf{v}_O(t)$  a robot testének sebessége az  $\mathcal{F}_5$  koordináta rendszerben leírva:

$$\mathbf{v}_O(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{xyz} \quad (21)$$

$\boldsymbol{\omega}(t)$  a robot szögsebessége az  $\mathcal{F}_5$ -ben leírva:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_z(t) \end{bmatrix}_{xyz} + \mathbf{R}_G \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i \dot{\varphi}_i(t) \quad (22)$$

$\mathbf{r}_{OS_i}$  az egyes kerekhez tartozó vektorok, amelyek a robot középpontjából a kerek

tömegközéppontjába mutatnak:

$$\mathbf{r}_{OS_1} = \mathbf{R}_G \begin{bmatrix} l \cdot \cos \beta \\ l \cdot \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{r}_{OS_2} = \mathbf{R}_G \begin{bmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{r}_{OS_3} = \mathbf{R}_G \begin{bmatrix} l \cdot \cos \beta \\ -l \cdot \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

ahol  $l$  a kerek síkjainak érintőkörének sugara.

Behelyettesítve  $\beta$  értékét az  $r_{OS_1}$  és  $r_{OS_3}$  egyenleteibe kapjuk, hogy:

$$\mathbf{r}_{OS_1} = \mathbf{R}_G \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}l \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{r}_{OS_3} = \mathbf{R}_G \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}l \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Az egyenleteket kombinálva a (20) egyenlettől a (25) egyenletig:

$$\mathbf{R}_G \mathbf{R}_i \mathbf{v}_{S_i}(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_{OS_i} \quad (28)$$

Meg kell oldanunk ezen egyenletet az  $i \in [1, 2, 3]$  esetekre, hogy megkapjuk  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ ,  $\dot{\varphi}_z(t)$ ,  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$ ,  $n_3(t)$  értékeket. Az egyenlet nullára való átrendezése után és a sebességek kir szletez se után, a robot középpontjának sebességállapota kifejezhető a következő alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\varphi}_z(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{robot} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{n1}(t) \\ \dot{\varphi}_n(t) \\ \dot{\varphi}_{n3}(t) \end{bmatrix} \quad (29)$$

vagy másmilyen jelölésekkel:

$$\begin{bmatrix} v_{O_x}(t) \\ v_{O_y}(t) \\ \dot{\varphi}_z(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{robot} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{n1}(t) \\ \dot{\varphi}_{n2}(t) \\ \dot{\varphi}_{n3}(t) \end{bmatrix} \quad (30)$$

ahol  $\mathbf{T}_{robot}$  a keresett kapcsolat a kerekek szögsebességei és a robot sebességhelyzete között a globális koordináta rendszerben.

$$\mathbf{T}_{robot} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (31)$$

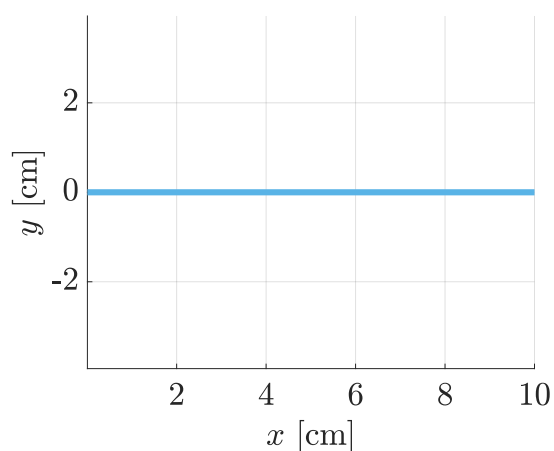
A  $T_{robot}$  mátrix elemeinek értékeinek részletezése *B Függelék*-ben található.

## 5. Szimulációk és megfigyelések

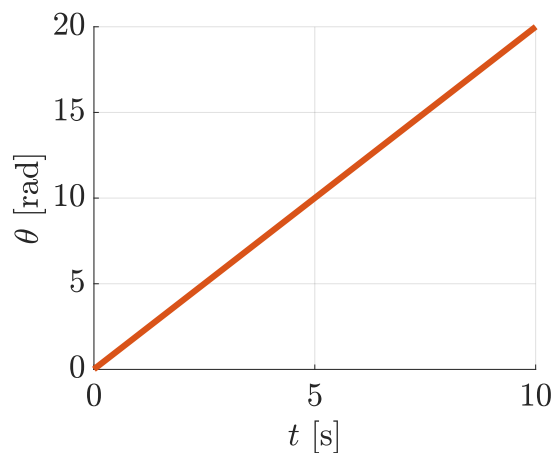
### 5.1. Intuíció szerzése

Ahhoz, hogy megértsük, hogyan viselkedik a robot, érdemes kiindulni egy merev tárcsa kinematikájának általános vizsgálatából. Ez intuitív alapot ad, és megkönnyíti a későbbi szimulációk megértését.

Tegyük fel, hogy a tárcsa középpontja a  $(0, 0)$  pontban helyezkedik el az  $(x, y)$  síkban. Feltételezzük, hogy a mozgás során nincs súrlódás. Szimuláljuk a tárcsa mozgását és forgását egy pozitív tangenciális irányú impulzus hatására, amely a  $(0, -r)$  pontban (ahol  $r$  a tárcsa sugara) éri a tárcsát. A középpont sebessége párhuzamos lesz az  $x$  tengellyel, és a tárcsának szögsebessége  $\omega$  lesz. Ezek alapján időfüggő modellt hozhatunk létre, és a tárcsa geometriájára tetszőleges értékeket megadva szimulálhatjuk a változókat. A középpont mozgását a *9a ábra* ábrázolja, míg az elfordulás szögét a *9b ábra* mutatja be.



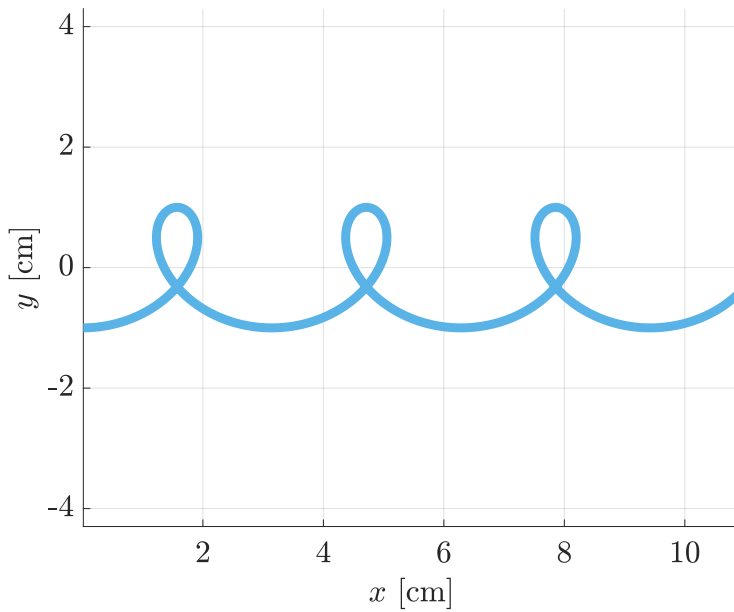
(a) A középpont által bejárt pálya az idő függvényében.



(b) Szög az idő függvényében.

**9. ábra.** A tárcsa pályája és a szöge az idő függvényében.

Hasznos lehet az impulzus behatási pontjának pályáját is ábrázolni. Mivel a tárcsa egyszerre forog és halad, az impulzus pontja egy hurkolt ciklois görbét követ, amely a *10. ábra* látható.



**10. ábra.** Az impulzus támadáspontja által bejárt pálya.

## 5.2. Szimulációs környezet

A kutatás fő célja annak vizsgálata, hogy a motorblokkok hogyan hatnak egymásra, és ez hogyan befolyásolja a robot mozgását. Ezeket a hatásokat a *4. szekcióban* leírt kinematikai modell segítségével vizsgálhatjuk. A robotot tárcsaként modellezzük, a motorblokkokat pedig egyetlen objektumként kezeljük, amely tartalmazza a motort és a mechanikai alkatrészeket. A modell részleteit a *3. szekcióban* részleteztük.

A szimulációs szoftver a kinematikai modell speciális implementációja. Ez az implementáció lehetővé teszi bizonyos értékek konstansként kezelését a mozgás során, valamint a paraméterek rugalmas megváltoztatását. A szimulációkhoz geometriai paraméterként a Festo Robotino robot méreteit használjuk, amelyek a *C Függelékben* találhatók. A kereknek két oldaluk van, így az érintkezési pontok ritmikusan váltakoznak. Ez a tulajdonság eltérő értékeket eredményez az  $l$  osztókör sugarára. A szimulációhoz a külső és belső sugarak átlagát használjuk, hogy kiküszöböljük ennek az ingadozó jelenségnek a hatását.

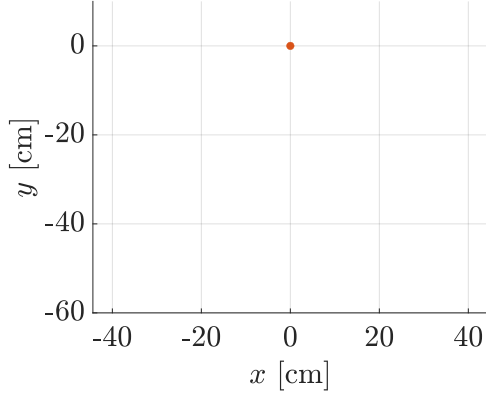
### 5.3. Szimulációk

A robot mozgás közbeni viselkedésének megértéséhez szimuláljuk, hogyan befolyásolják a mozgást, ha csak egyetlen kereket hajtunk meg. Ez mélyebb betekintést nyújt, anélkül hogy több kerék egyidejű hajtása káoszt okozna.

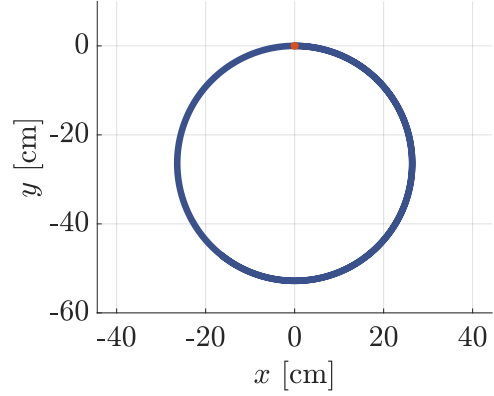
Tegyük fel, hogy a robotban csak egyfajta motorblokkot használunk. Különböző típusú motorblokkok eltérő tulajdonságokkal rendelkeznek. Egy standard DC motor esetében például, ha ki van kapcsolva, könnyen elforgatható a tengelye. Ha azonban egy áttétellel egészítjük ki, amely több fogaskerékből áll, akkor a nagy fordulatszámú, alacsony nyomatékú motor kimenetét kisebb fordulatszámú, nagyobb nyomatékú kimenetté alakítja. Így sokkal nehezebben lesz visszaforgatható a motor tengelye.

A fent leírtakat tekinthetjük a két szélső helyzetnek. A robot esetében a meghajtott motor forgási sebességet ( $\omega$ ) hoz létre a robot testében. A kinematikai modell szerint, mivel feltételezzük, hogy a kerék nem csúszik, nyomatékot kelt a kerekeken ( $\omega_i$ ). Az egyik szélső helyzetben a nem hajtott kerekek azonos szögsebességgel forognak, ha a motorblokkoknak nincs ellenállásuk; a másik szélső helyzetben a nem meghajtott kerekeknek zérus a szögsebessége, ha végtelen a motorblokkok ellenállása.

A robot mozgását a szimulációs környezetben vizsgálhatjuk. Kezdeti helyzetben a robot középpontja  $O$  egybeesik a globális  $\mathcal{F}_5$  koordináta-rendszer  $O'$  pontjával. A robot orientációja azonos a 8. ábrán bemutatottal. A (2)-es motorblokkot állandó egységnyi ( $\omega_2 = 1[\text{rad/s}]$ ) szögsebességgel hajtjuk meg. A szimulációk 100 másodpercig tartanak. A középpontok mozgását a két szélső helyzet esetén a 11. ábra mutatja.



(a) A motorblokk ellenállása nulla.



(b) A motorblokk ellenállása végtelen.

**11. ábra.** A középpont által bejárt pálya a két szélső helyzetben. A narancs pont mutatja a robot középpontjának kiinduló pontját.

Az eredményekből látható, hogy amikor a motorblokk ellenállása zérus, a robot helyben forog. A 4. szekcióban leírt kinematikai modell alapján ez érthető. Ha a motorblokkok ellenállnak az őket érő kényszer nyomatékoknak, a robot egy körön mozog egy, a robot lábnyomán kívüli pont körül. Elsőre ez egyáltalán nem tűnik triviálisnak, és logikai úton más következtetésre is juthatnánk. A logikai érvelés szerint a robotnak nem szabadna mozognia. Ez a viselkedés a geometriai jellemzők segítségével is bebizonyítható.

A 12. ábra mutatja az imént leírt konfigurációt. Tudjuk, hogy  $v_{S_2\eta} = \omega_2 r$  ugyanaz  $\mathcal{F}_5$ -ben, mint  $\mathcal{F}_4$ -ben. Az  $v_{S_2\xi}$  ismeretlen. Az adott elrendezés alapján felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

$$\mathbf{v}_{S_2} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PS_2} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PS_2} \quad (32)$$

$$v_{S_2} = \frac{r_{PS_2}}{\sin \beta} = \dot{\varphi}_2 \cdot r \quad (33)$$

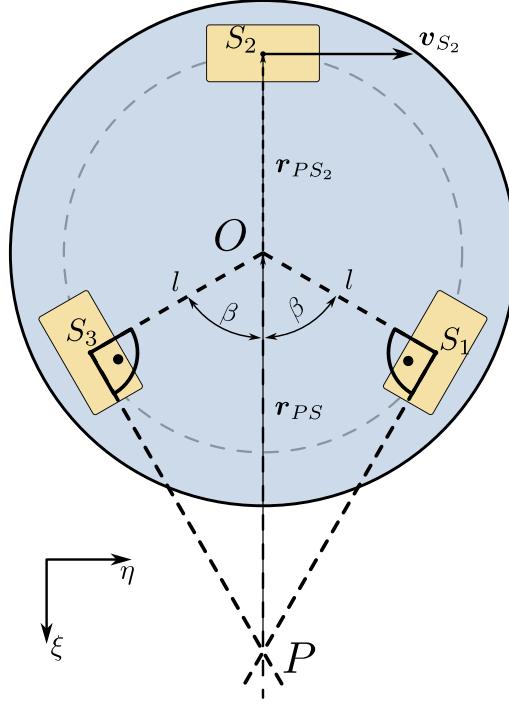
$$\omega = \frac{1}{r_{PS_2}} v_{S_2} \quad (34)$$

$$\sin \beta = \frac{l}{r_{PS}} \quad (35)$$

$$r_{PS} = \frac{l}{\sin \beta} \quad (36)$$

$$r_{PS_2} = r_{PS} + l = \frac{l \cdot (1 + \sin \beta)}{\sin \beta} \quad (37)$$

$$\omega = \frac{\sin \beta}{1 + \sin \beta} \cdot \frac{1}{l} v_{S_2} = \frac{r}{l} \cdot \frac{\sin \beta}{1 + \sin \beta} \cdot \dot{\varphi}_2 = \frac{r}{l} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \omega_2 \quad (38)$$



12. ábra. Végtelen motorblokk ellenállás esete.

Ezáltal, a geometriai és a kinematikai összefüggésekből kiszámítható a robot sebessége, szögsebessége, valamint a robot középpontjától ( $O$ ) a pillanatnyi sebességpólusba ( $P$ ) mutató vektor.

A szélső helyzetek vizsgálata által jobban megértettük, hogy hogyan viselkedik a robotunk. Valós helyzetben azonban előfordulhatnak olyan esetek, amikor a robot szögsebessége forgást idéz elő a kerekeken, mert a rájuk ható nyomaték olyan tartományban van, ahol sem szabadon forgás, sem teljes ellenállás nem valósul meg.

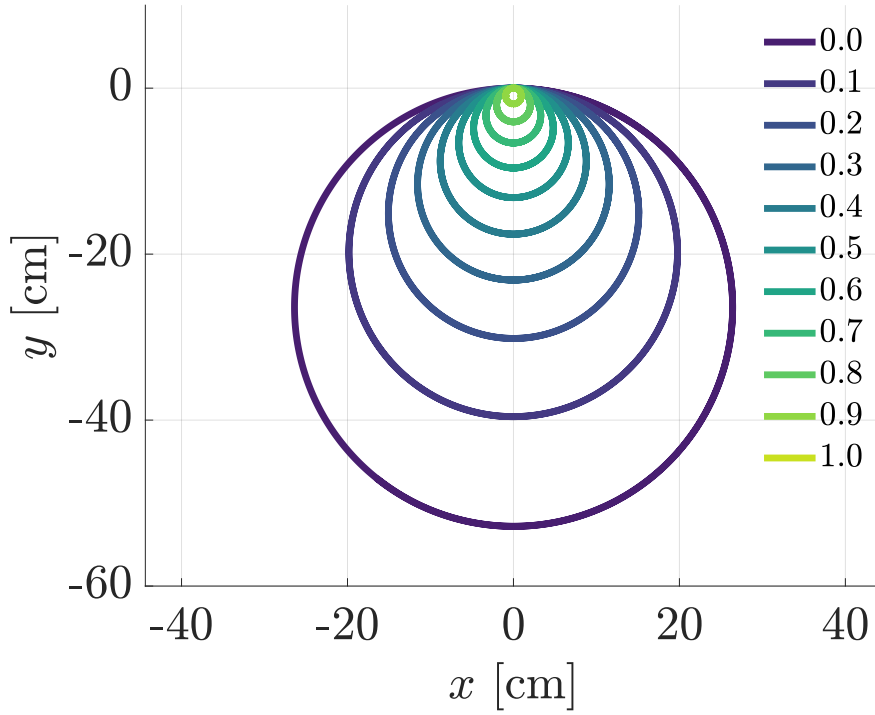
Ezen helyzetek leírása érdekében bevezetünk egy új konstanst, amelyet **szögsebességátviteli tényező**nek hívunk és jele legyen  $\kappa_\omega$ . Ez a tényező leírja a kapcsolatot a robot két kereke között. Értelmezési tartománya  $\kappa_\omega \in [0, 1]$  és a következő egyenlőség teljesül:

$$\omega_{indukalt} = \kappa_\omega \omega_{driven} \quad (39)$$

ahol  $\omega_{indukalt}$  a kerék szögsebessége amelyet a másik meghajtott kerék  $\omega_{meghajtott}$  indukál.

Belátható, hogy a robot különböző  $\kappa_\omega$  értékek esetén eltérő pályákat követ. A  $\kappa_\omega$  értékeit 0.0 és 1.0 között ábrázolva megfigyelhetjük, hogyan befolyásolja ez az együttható a pályákat. Az eltérő értékekhez tartozó pályák a 13. ábrán láthatók.

Megfigyelhető, hogy a robot mindig körpályát követ, és a pálya sugara csökken a  $\kappa_\omega$



**13. ábra.** A robot középpontja által bejárt pálya különböző  $\kappa_\omega$  értékek esetében.

növekedésével.

Most már tudjuk, hogyan viselkedik a robot, ha egyetlen kereket folytonosan meghajtunk. Amennyiben  $\kappa_\omega$  kisebb, mint egy, a nem meghajtott kerekek szögsebessége kisebb lesz, mint a meghajtott kereké. Látható, hogy amikor a meghajtó motorblokk leáll, a nem meghajtott kerekek lassító hatást fognak kifejteni a robot kerekeire, a robot megállásához vezetve.

A motorblokkok többféle lassító hatást gyakorolnak. Szimulációinkban csak a viszkozus csillapítás és a motorok által generált ellenelektromotoros erő (CEMF) hatásait vesszük figyelembe. A 3.2.2. szekcióban levezetett (6) és (7) egyenletek alapján a  $k_{emf}$  állandó az alábbi egyenlettel becsülhető:

$$k_{emf} = \frac{V_E}{\omega_0} \quad (40)$$

ahol  $V_E$  a generált ellenfeszültség és  $\omega_0$  az ismert szögsebesség.

$B_r$  esetében a leglényegesebb surlódási csillapítás a kerékcsapágyakból származik. Értékét elméleti közelítéssel tudjuk megbecsülni:

$$B_r = \frac{\mu N r}{\omega_0} \quad (41)$$

ahol  $\mu$  a csapágy surlódási együtthatója,  $N$  a normálerő és  $r$  a kerék sugara. A *C Függelékben* található értékeket és a megbecsült általános értékeket behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$k_{emf} = 0.05 \quad (42)$$

$$B_r = 0.007848 \quad (43)$$

Ezek becsült értékek, amelyeket szimulációhoz használunk az intuitív látásmód szerzés érdekében. Valós alkalmazásokban ezek kiszámítása munkaigényesebb és összetettebb. Ennek mélyebb vizsgálata nem tartozik a leírt kutatás keretei közé, így mélyebben nem fogjuk vizsgálni.

Az (6) és az (7) egyenletek segítségével kifejezhető a szögsebesség lassulása:

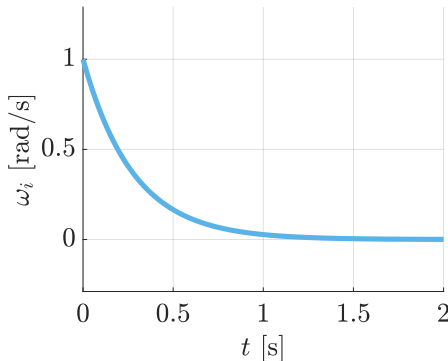
$$I \frac{d\omega}{dt} = -k_{emf} \omega \quad (44)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = -B_r \omega \quad (45)$$

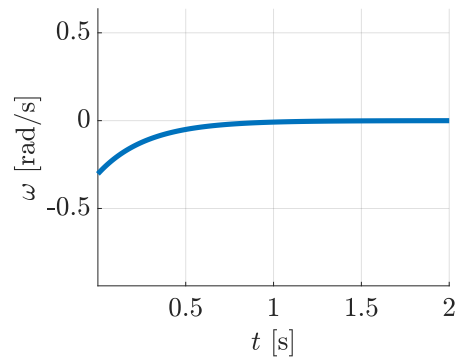
Az hatásokat összeadva a differenciál egyenlet megoldásával kapjuk, hogy a  $\omega$  időfüggő függvény:

$$\omega(t) = \omega_0 \cdot \exp\left(-\frac{B_r + k_{emf}}{I} t\right) \quad (46)$$

Az (46) egyenlet alapján szimulálhatjuk, hogyan lassulnak a kerekek az idő múlásával. A szimuláció során a 2-es motorblokkot egy impulzusfüggvénnyel rövid ideig meghajtjuk, majd leállítjuk. Elsőként szimuláljuk hogyan lassulnak a robot szögsebességei, ha  $\kappa_\omega = 1$ . A 14a ábrán látható, hogy a kerekek szögsebessége exponenciális jelleggel csökken. A 14b ábráról leolvasható, hogy a robot körülbelül 2 másodperc alatt áll meg.



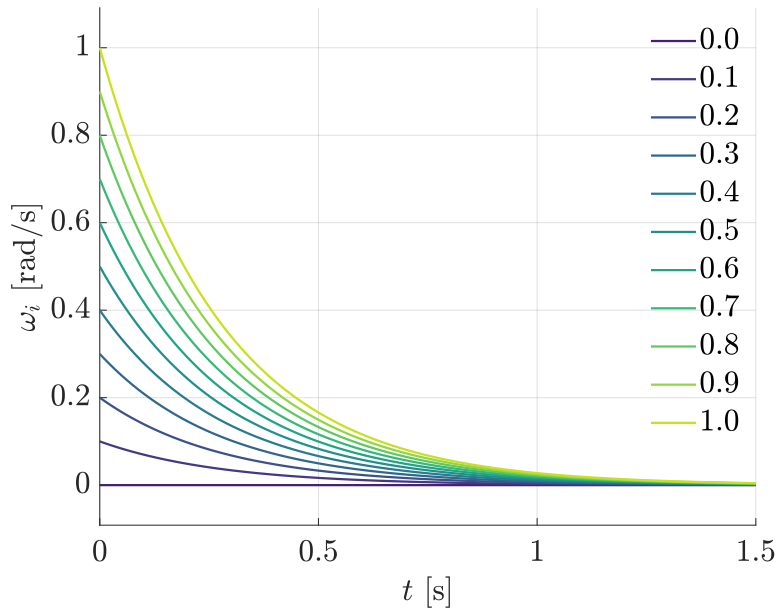
(a) A kerekek szögsebességei az idő függvényében.



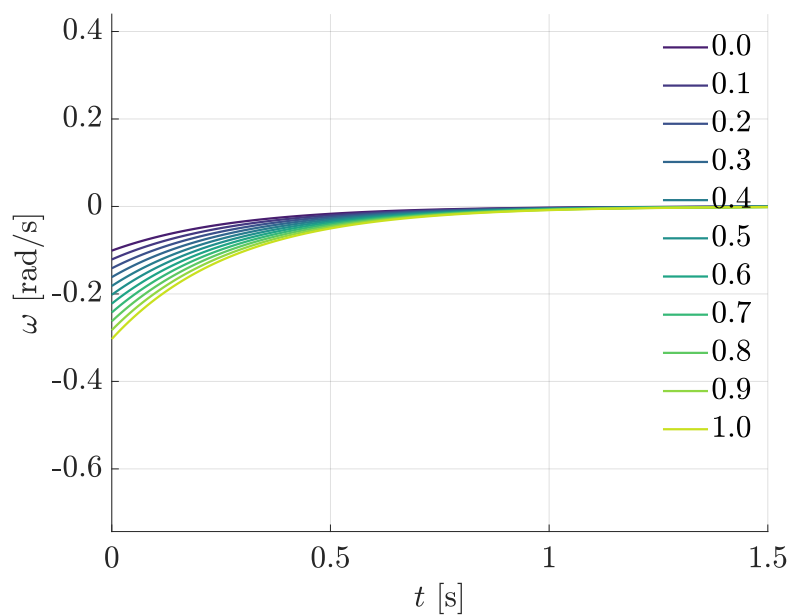
(b) A robot szögsebessége az idő függvényében.

**14. ábra.** A szögsebességek csökkenése amikor  $\kappa_\omega$  egyenlő eggyel.

A  $\kappa_\omega$  változásával elvárható, hogy a csillapító hatás eltérjen a nem meghajtott kerekek esetében. A 15. ábra azt mutatja, hogyan csillapodnak a nem meghajtott kerekek különböző  $\kappa_\omega$  értékek esetében. A 16. ábra azt ábrázolja, hogy hogyan csökken a robot szögsebessége különböző  $\kappa_\omega$  értékek esetén. Itt fontos megjegyezni, hogy a negatív  $\omega$  a robot forgási irányát jelzi, amely ebben az esetben az óramutató járásával megegyező irány a globális koordináta-rendszerben.



**15. ábra.** A nem meghajtott kerekek szögsebessége az idő függvényében.

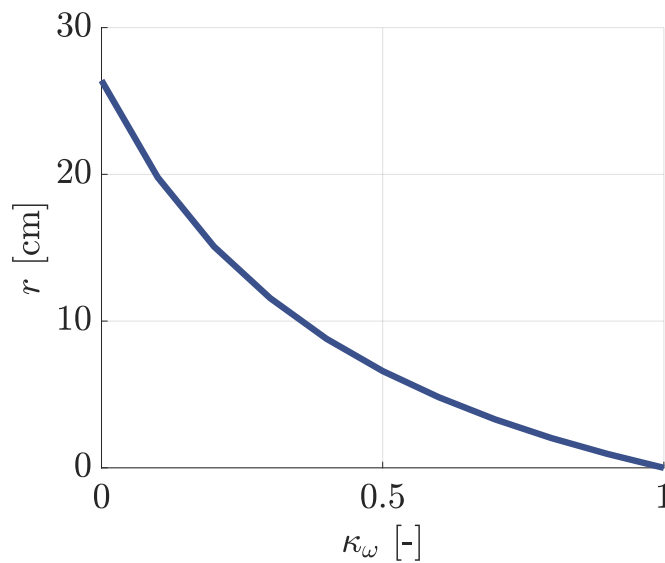


**16. ábra.** A robot szögsebessége az idő függvényében.

## 5.4. Eredmények kiértékelése

A legfontosabb szimulációk elemzéséhez a 13. ábrától kezdve a 16. ábráig terjedő eredményeket vizsgáljuk.

Először elemezzük a 13. ábrát. Ez a robot által megtett pálya és a  $\kappa_\omega$  érték közötti kapcsolatot ábrázolja. Világosan mutatja, hogy a szögsebességátviteli tényező növekedése csökkenti a robot által bejárt körpálya átmérőjét. Kapcsolatukat a 17. ábra mutatja. Beláthatjuk, hogy a kapcsolatuk nem lineáris, hanem a kör sugara hiperbolikus jelleggel csökken a  $\kappa_\omega$  növekedésével.



**17. ábra.** Kapcsolat a robot által bejárt körpálya sugara és a sebességátviteli tényező között.

A 14a ábra azt mutatja, hogy a kerekek sebessége exponenciálisan csökken az idő múlásával, és a csillapító hatások miatt nullához konvergál. A 14b ábra hasonló eredményeket mutat a robot testének szögsebességére vonatkozóan. Ezek a megfigyelések azonban nem teljesen pontosak, és egy bizonyos pont után nem tükrözik a valós helyzeteket, mivel az ábrázolt szögsebességek soha nem érik el a nullát. Tudjuk, hogy ez nem igaz. A 15. ábrán és a 16. ábrán látható, hogy nagyobb  $\kappa_\omega$  értékek gyorsabb relatív szögsebesség csökkenéseket eredményeznek.

## 6. Konklúzió

A szimulációk futtatása után betekintést nyertünk a robot platformunk viselkedésébe. Elsőre intuitívnak tűnhet a robotot egy tárcsaként modellezni a nem meghajtott motorblokkok figyelembe vétele nélkül. Azonban megfigyeltük, hogy a tárcsa viselkedése mérhetetlenül eltér, még akkor is, ha a motorblokkok ellenállása zérus, tehát  $\kappa_\omega = 1$ , szóval minden irányban szabadon mozog. Mint beláttuk a tárcsa hasonló leírásában, azonban dirac-delta függvény impulzus hatására egy egyenes mentén mozog, ahelyett, hogy egy helyben forogna, mint a robot.

Hasonló konklúzióra jutottunk abban az esetben is, amikor a motorblokk ellenállása végtelen, tehát  $\kappa_\omega = 0$ . Egyáltalán nem triviális, hogy a robotunk ilyen esetben mozgásra képes. Bebizonyítottuk, hogy a robotunk valóban képes mozogni ezen feltétel mellett, mind szimulációs környezetben, mind numerikus elemzéssel.

A meghajtott és a nem meghajtott kerekek közötti kapcsolat leírására bevezettük a szögsebességátviteli tényezőt, amely jeléül  $\kappa_\omega$  választottuk. Ez meghatározza a viszonyt a meghajtott és a nem meghajtott kerekek szögsebességei között. Ezáltal, a tényező segítségével szimuláltuk hogyan függ a robot által bejárt pálya az értéke függvényében. Az eredmények analízise után azt láttuk, hogy a robot minden esetben körpályán fog haladni, és a körpályának a sugara hiperbolikus jelleggel csökken a  $\kappa_\omega$  növekedésével.

A motorblokkok a szögsebességre ható csillapítását is vizsgáltuk. A motorblokkok közvetlenül a kerekre hatnak, amelyeken keresztül közvetetten a robot szögsebességét is befolyásolják. A modellezés során az ellenelektromotoros erőből (CEMF) és a viszkózus csillapításból származó nyomatékokat vettük figyelembe. Mind a kerek, mind a robot szögsebességének csökkenését szimuláltuk, beláttuk exponenciális jellegüket. A  $\kappa_\omega$  függvényében is vizsgáltuk a leírtakat.

## 7. Jövőbeli munkák

A modellben több szimplifikációval éltünk, például a csillapító hatások vizsgálata során. Több változó a modellbe való beszámításával még precízebbé és realisztikusabbá tehetnénk a szimulációkat. A dinamikai egyenleteket inkorporálva a modellbe, a robot egy átfogóbb leírásához jutnánk, amely pontosabban jellemezné a valós világi helyzeteket.

Egy lényeges egyszerűsítés a modellünkben a kerék érintőkörök sugarainak átlagának használata. Emiatt a visszaható nyomaték a motorblokkokra egyenletes. Valós világi applikációkban a kerekek és a talaj érintkezési pontja váltakozik a kerekek felei között, ezáltal változtatva az érintőkör sugarának értékét. Ez a karakterisztika pulzáló hatásként fog megjelenni a visszaható nyomatékokban, amely a robot pályájának változását és a csillapító nyomatékok befolyásolja. Ezen hatás leírása nagy jelentőséggel bírhat.

A  $\kappa_\omega$  tényező használata segített leírni a motorblokkok közötti kapcsolatot. Ez egy központi része a modellünknek. Egy rendkívül komplex paraméter, amelyet sok változó befolyásol. Számszerűsítése és egy kiszámításához szükséges képlet kidolgozása szignifikáns potenciált tartogat.

## Hivatkozások

- [1] W. Masayoshi and H. Takahiro, „Research for an omnidirectional mobile robot using acrobat, the active-caster with a dual-ball transmission,” *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, vol. 51, no. 6, pp. 400–408, 2015.
- [2] R. Goel and P. Gupta, „Robotics and industry 4.0,” *A Roadmap to Industry 4.0: Smart Production, Sharp Business and Sustainable Development*, pp. 157–169, 2020.
- [3] R. Rojas and A. G. Förster, „Holonomic control of a robot with an omnidirectional drive,” *KI-Künstliche Intelligenz*, vol. 20, no. 2, pp. 12–17, 2006.
- [4] H. Taheri and C. X. Zhao, „Omnidirectional mobile robots, mechanisms and navigation approaches,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 153, p. 103958, 2020.
- [5] R. Vestman, „A comparative study of omnidirectional and differential drive systems for mobile manipulator robots: A performance review of strengths and weaknesses,” 2023.
- [6] S. G. Tzafestas, *Introduction to mobile robot control*. Elsevier, 2013.
- [7] L. Raj and A. Czmerk, „Modelling and simulation of the drivetrain of an omnidirectional mobile robot,” *Journal for Control, Measurement, Electronics, Computing and Communications*, vol. 58, no. 2, pp. 232–243, 2017.
- [8] K. Watanabe, Y. Shiraishi, S. G. Tzafestas, J. Tang, and T. Fukuda, „Feedback control of an omnidirectional autonomous platform for mobile service robots,” *Journal of Intelligent and Robotic systems*, vol. 22, pp. 315–330, 1998.
- [9] P. F. Muir and C. P. Neuman, „Kinematic modeling for feedback control of an omnidirectional wheeled mobile robot,” *Autonomous robot vehicles*, pp. 25–31, 1990.
- [10] Y. Leow, K. Low, and W. Loh, „Kinematic modelling and analysis of mobile robots with omni-directional wheels,” in *7th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, 2002. ICARCV 2002.*, vol. 2, pp. 820–825, IEEE, 2002.
- [11] A. Gferrer, „Geometry and kinematics of the mecanum wheel,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 25, no. 9, pp. 784–791, 2008.

- [12] S. Soni, T. Mistry, and J. Hanath, „Experimental analysis of mecanum wheel and omni wheel,” *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*, vol. 1, no. 3, pp. 292–295, 2014.
- [13] P. Pillay and R. Krishnan, „Modeling, simulation, and analysis of permanent-magnet motor drives. ii. the brushless dc motor drive,” *IEEE transactions on Industry applications*, vol. 25, no. 2, pp. 274–279, 1989.
- [14] T. Abut, „Modeling and optimal control of a dc motor,” *Int. J. Eng. Trends Technol*, vol. 32, no. 3, pp. 146–150, 2016.
- [15] G. Á. Sziki, A. Szántó, and E. Ádámkó, „Review of methods for determining the moment of inertia and friction torque of electric motors,” *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 21, no. 4, 2024.

## Függelék A: Nomenklatúra

### Kifejezések

| Abbreviation | Full Meaning                           |
|--------------|----------------------------------------|
| CEMF         | Counter Electromotive Force            |
| DoF          | Degree of Freedom                      |
| EMF          | Electromotive Force                    |
| ICC          | Instantaneous Centre of Curvature      |
| OWMRs        | Omni-directional Wheeled Mobile Robots |
| WMRs         | Wheeled Mobile Robots                  |

### Változók

| Jelölés             | Leírás                                                                    | Mértékegység |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------|--------------|
| $\omega$            | A robot szögsebessége                                                     | rad/s        |
| $\omega_i$          | Az $i$ indexű motorblokk kerekének szögsebessége                          | rad/s        |
| $v_{S_i}$           | Az $i$ motorblokk kerekének középpontjának sebessége $\mathcal{F}_i$ -ben | m/s          |
| $v_O$               | A robot középpontjának sebessége                                          | m/s          |
| $\mathbf{r}_{OS_i}$ | A robot középpontjából az $i$ motorblokkba mutató vektor                  | m            |
| $i$                 | A motorblokk indexe, $i \in [1, 3]$                                       | -            |
| $B_r$               | Surlódási együttható                                                      | Nm/rad/s     |
| $k_{emf}$           | CEMF állandó                                                              | Nm/rad/s     |

## Függelék B: $T_{robot}$ mátrix elemei

$$t_{11} = \frac{r (\sin(\beta - \varphi_z(t)) + \sin(\varphi_z(t)))}{\cos(2\beta) - 1}$$

$$t_{12} = \frac{r \sin(\varphi_z(t))}{\cos(\beta) + 1}$$

$$t_{13} = \frac{r (\sin(\varphi_z(t)) - \sin(\beta + \varphi_z(t)))}{\cos(2\beta) - 1}$$

$$t_{21} = \frac{r (\cos(\beta - \varphi_z(t)) - \cos(\varphi_z(t)))}{\cos(2\beta) - 1}$$

$$t_{22} = -\frac{r \cos(\varphi_z(t))}{\cos(\beta) + 1}$$

$$t_{23} = \frac{r (\cos(\beta + \varphi_z(t)) - \cos(\varphi_z(t)))}{\cos(2\beta) - 1}$$

$$t_{31} = \frac{r}{2l(\cos(\beta) + 1)}$$

$$t_{32} = \frac{r \cos(\beta)}{l(\cos(\beta) + 1)}$$

$$t_{33} = \frac{r}{2l(\cos(\beta) + 1)}$$

## Függelék C: Festo Robotino méretei

| Jelölés     | Magyarázat                                   | Érték   | Mértékegység        |
|-------------|----------------------------------------------|---------|---------------------|
| $l$         | $l_{belső}$ és $l_{külső}$ átlaga            | 132     | mm                  |
| $l_{belső}$ | A kerék belső felének érintőkörének sugara   | 116     | mm                  |
| $l_{külső}$ | A kerék külső felének érintőkörének sugara   | 147     | mm                  |
| $m$         | Omni-kerék tömege                            | 0,20    | kg                  |
| $I_w$       | Kerék tehetetlenségi nyomatéka               | 0,016   | kg · m <sup>2</sup> |
| $r$         | Kerék sugara                                 | 4       | cm                  |
| $\beta$     | Félszög két szomszédos kerék tengelye között | $\pi/3$ | rad                 |