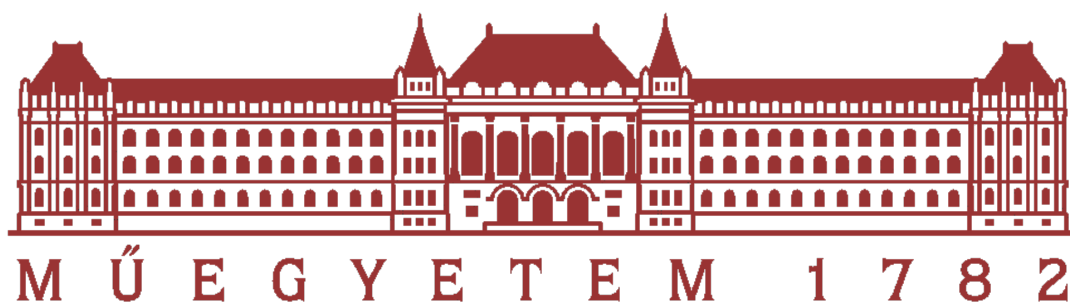




OROSZ KOLOS

Országos Tudományos Diákköri Konferencia Dolgozat

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
MECHATRONIKA, OPTIKA ÉS GÉPÉSZETI INFORMATIKA
TANSZÉK



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
MECHATRONIKA, OPTIKA ÉS GÉPÉSZETI INFORMATIKA TANSZÉK

Omnidirekcionális robotok hajtásának vizsgálata a kinematika és a hajtáslánc szemszögéből

Orosz Kolos

Országos Tudományos Diákköri Konferencia

Konzulensek:

Dr. Czmerk András

Adjunktus

BME GPK MOGI

Raj Levente

Tanársegéd

BME GPK MOGI

BUDAPEST, 2025

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Czmerk Andrásnak a BME Mechatonika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék adjunktusának az iránymutatását, támogatását munkám egésze során, és segítségét, tiszta magyarázatait mind elméleti, mind praktikai kérdésekben. Szintén szeretnék köszönetet mondani Raj Leventének a BME Mechatonika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék tanársegédének segítségéért egyes felmerülő kérdések megértésében.

Kivonat

Omnidirekcionális vagy holonomikus hajtású robotok a robotika egy olyan altípusa, amelyeket logisztikai feladatokra és több iparágban széleskörűen használnak. Ezen robotok bármely irányba képesek mozogni orientációjuk megváltoztatása nélkül. Egyszerű matematikai egyenletek segítségével az alapvető mozgások könnyedén irányíthatók, azonban ipari felhasználásra, ahol a pozíciós és orientációs követelmények szigorúan meghatározottak, egy sokkal összetettebb és pontosabb irányítás szükséges.

A hagyományos differenciális hajtással ellentétben a kerekek forgásuk során lényegesen nagyobb hatással vannak egymásra. Egyetlen kerék meghajtása a többi kerékben is szögsebességet indukál, amely szögsebesség annak motorjára is visszahat. A probléma még jelentősebbé válik, ha mindegyik kereket meghajtjuk és ezen effektusok egymással interakcióba kerülnek. A modellezés során a talaj és a robot kerekei közötti kapcsolat csúszásmentesnek feltételezhető. Ezen feltételezés mentén a meghajtó motorok és azok kerekein keresztül a talajjal való kapcsolatuk meghatározható. Tisztán látható, hogy valós környezetbeli helyzetekben a szabályozás igazán komplikálttá válik.

Kutatásomban felmérem és feldolgozom ezen a területen végzett kutatói eredményeket, a fennálló jelenségeket szimulálva. Munkám során a kinematikai egyenleteket felírva és a meghajtásból származó összefüggéseket meghatározva külön-külön vizsgálom azok teljes rendszerre gyakorolt hatásait.

Abstract

Omnidirectional or holonomic drive robots are a sub-type of robots used in the field of robotics extensively for logistics, research purposes in many industries. These robots can move in any direction without changing their orientation. Using simple mathematical equations the basic movements of these robots can be easily controlled, but for industry purposes, where position and orientation requirements are strictly determined, a more complex and precise solution is required.

Contrary to conventional differential drives, the wheels act upon each other much more considerably when turning. If one wheel is turned and others are stationary, an angular velocity will be induced in the other wheels, leading to an angular velocity working on the motors. Furthermore, in the model we assume slipless contact between the ground and the wheels. If we add all things together in the case of one rotating wheel, the rotating wheel induce some motion, rotation on the other wheels, which have effects on the rotating wheel, and they also all influence their corresponding motor. The problem becomes even more prominent, if we use all of the wheels and these effects are affecting each other. It is clear that in real world scenarios the control becomes truly complicated.

In my research I assess the work done in this field, simulating the described ramifications. My objective is to differentiate between the consequences coming from the kinematic equations and from the relations derived from the drivetrain regarding their effects on the whole system.

Tartalomjegyzék

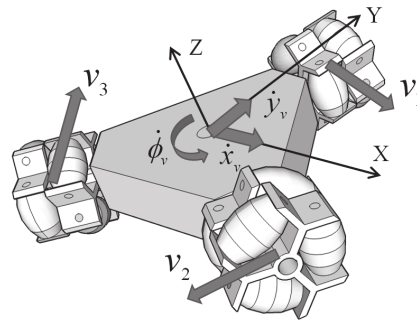
1. Bevezetés	2
1.1. Holonomikus robotok feltörekvése	2
1.2. Célkitűzések	3
2. Előzetes tudás	4
2.1. Matematikai és Fizikai alaptételek	4
2.2. Redukciós képlet	5
2.3. Dinamikus rendszerek	6
2.4. Használt szoftverek	6
2.5. Kapcsolódó irodalom	7
3. Fizikai modell	9
3.1. Mechanikai modell	10
3.1.1. Pillanati görbületi középpont	10
3.1.2. WMRs	10
3.2. Villamos modell	12
3.2.1. Szenzorok	12
3.2.2. Hajtáslánc	13
3.3. Összetett modell	17
4. Kinematikai modellek	18
4.1. Kerék	18
4.2. Test	20
5. Szimulációk és megfigyelések	25
5.1. Intuitív megközelítés	25
5.2. Szimulációs környezet	26
5.3. Szimulációk	27
5.4. Eredmények kiértékelése	33
6. Konklúzió	34
7. Jövőbeli kutatási tervek	35

1. Bevezetés

1.1. Holonomikus robotok feltörekvése

A robotika az ipari alkalmazásokban 1960-as években kezdett teret nyerni. A 70-es és 80-as években az automatizálás az autóiipari felhasználásokon túlmenően az ismétlődő feladatokban is megjelent. Ilyen területek az elektronikai termékek előaállítása, a gyógyszeripar és a nehézipari alkalmazások. A még helyváltoztatásra képtelen robotok olyan ismétlődő feladatokat végeztek, ahol elsődleges szempontként a pontosság és a gyorsaság említhetők.

A nagy cégek és velük együtt a nagy raktárházak megjelenésével, a termékek logisztikájában dolgozó robotok fejlesztése központi kérdéssé vált. A mobil robotok használata az iparban egyre szélesebb körben használatosak, fontosságukat [2] hangsúlyozza, két típusukat is megemlítve. A tárgyak mozgatásában az omnidirekcionális robotok több szempont szerint is hatékonyabbak, mint a differenciálhajtással fel-



1. ábra. Kiwi-hajtású robot omnidirekcionális kerekekkel. [1]

szerelt robotok. A holonomikus robotok bármely irányban képesek mozogni orientációjuk megváltoztatása nélkül, ezáltal könnyebben manőverezhetők. Hatékonyabban tudják pozíciójukat megváltoztatni és orientációjuk megváltoztatásához nem igényelnek komplex manővereket. Tehát az omni-kerekekkel felszerelt robotok - a négykerekű robotokon használt mecanum kerékhez hasonlóan - egy helyben tudják orientációjukat változtatni. Ezen túlmenően nem rendelkeznek kormányzási mechanizmussal, robusztusabb hajtást eredményezve. Az omnidirekcionális robotok nagyobb stabilitással is rendelkezhetnek. Hátérányuk azonban, hogy szofisztikáltabb irányítási algoritmust igényelnek. Egy irányítási algoritmus részletezése [3] publikációjában olvasható.

1.2. Célkitűzések

Az omnidirekcionális robotok kevesebb bonyolult egységet igényelnek, azonban ebből kifolyólag, a kívánt pontosság elérése érdekében, a robot mozgásainak leírásához komplikált kinematikai modellek szükségesek. Munkám során szeretném megismerni a releváns kutatásokat és elmélyülni az összetett rendszerek kinematikai modellezésében.

Kutatásom elsődleges célkitűzése, hogy egy egyszerű, empirikus, azonban realisztikus modellt készítsek. A modell szimulációs környezetbe való implementálása után, azt pontosítva tesztelés általi validálásra kerül sor. A tesztelés során gyűjtött adatokat elemezve átfogóbb következtetések levonása is lehetővé válik. Az analízist követően célom, hogy megkülönböztessem a kényszereket, amelyek a robot kerekeiből valamint a kinematikai egyenletekből eredeztethetőek. Ezek hatása kettős: az egyik magára a kerékre hat és surlódásként lép föl, míg a másik a motorokból származik, amelyek a kerekekkel való összeköttetés révén közvetett kapcsolatban állnak, a modell viselkedését szintén befolyásolják.

2. Előzetes tudás

2.1. Matematikai és Fizikai alaptételek

Alapvető összefüggések

A viselkedés megértéséhez és modellezéséhez elengedhetetlen a vektorok és mátrixok felírása. A kinematikai modell felírása a mátrix-vektor műveletek alkalmazásával kerül bemutatásra. Szükséges a vektor-mátrix szorzás, a skaláris szorzat és a vektoriális szorzat alapos megértése. Alapvető fizikai ismeretek is szükségesek, különösen a sebesség, a gyorsulás, a szögsebesség és a súrlódási erők jellemzői, melyek a következőkben kerülnek ismertetésre.

Forgatási mátrixok

A legkönnyebben egy példán keresztül érthetjük meg a forgatás mátrixok működését. Legyen $\mathbf{v}$ egy vektor egy euklideszi térben, (x, y, z) koordináta-rendszerben. Egy egyszerű példaként vegyük:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A forgatási mátrixok lehetővé teszik, hogy egy vektort elforgassunk egy tengely körül α fokkal. Ha ezt a vektort a z tengely körül akarjuk elforgatni, az alábbi transzformációs mátrixot használjuk:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ha a $\mathbf{v}$ vektort 45 fokkal szeretnénk elforgatni úgy, hogy párhuzamos legyen a yz -síkkal = $\{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$, $\alpha = 45^\circ$ -ot helyettesítünk az (1) mátrixba, és megkapjuk, hogy:

$$\mathbf{R}_{45^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ha ezt megszorozzuk a vektorral, megkapjuk annak elforgatott változatát:

$$\mathbf{v}_{45^\circ} = \mathbf{R}_{45^\circ} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Láthatjuk, hogy a vektor hossza nem változott, és a vektort a z tengely körül, pozitív irányba, az óramutató járásával ellentétesen forgattuk el. Észrevehetjük, hogy annak a tengelynek, amely körül forgatunk, 1 szerepel a mátrixban értékül, és nullák a megfelelő sorban és oszlopban. A forgás irányát megváltoztathatjuk, ha az (1) mátrixot az alábbi elrendezésre módosítjuk:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ha ismét $\alpha = 45^\circ$ -ot helyettesítünk be, és kiszámítjuk az (2) egyenletet, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\mathbf{v}_{-45^\circ} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Így most az óramutató járásával megegyező irányban forgattam el a vektort, és a vektor most az xz -síkon $= \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ található.

Ez csupán a forgatási mátrixok egy rövid bevezetése volt, számtalan példa és alkalmazása található a matematikában és a tudományban, különösen a 3D grafika területén. Mivel a kinematikai modell 5 különböző koordináta-rendszerben van ábrázolva, meg kell határozni az ezek közötti kapcsolatot. Ehhez forgatási mátrixokat fogok használni.

Használt jelölések

Az alkalmazott jelölések megfelelnek a matematikában és fizikában használt szabványos szimbólumoknak és konvencióknak. Azokhoz a fogalmakhoz, amelyek nem általánosan elterjedtek ezekben a tudományterületekben, logikus és érthető jelöléseket használok. A változók rendszerét az *A Függelékben* található nomenklatúra részletesen ismerteti.

2.2. Redukciós képlet

A sebességredukciós képlet a kinematika egyik alapvető egyenlete. Egy merev test A és B pontjai közötti sebességvektorokra a következő egyenlet érvényes:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (5)$$

ahol $\boldsymbol{\omega}$ a test szögsebesség vektora ([rad/s]), $\mathbf{r}_{AB}$ pedig az A pontból a B pontba mutató irányvektor ([m]). Az egyenlet bizonyítását nem mutatom be, azt általánosan ismertnek

tekintem.

2.3. Dinamikus rendszerek

Az időben változó viselkedés egy rendszer az idő múlásával való változását írja le. A mozgásokat időfüggő függvényekkel ábrázoljuk. A mozgások ezáltal modellezése minden adott időpillanatban determinisztikus. Az időfüggő függvényt $f(t)$ konvenció szerint jelölöm.

A rendszerek lehetnek lineárisak, ahol az időfüggő függvény más változókkal lineáris kapcsolatban van. A nemlineáris rendszerek azonban összetettebbek, és leírásukhoz nemlineáris egyenleteket szükséges. Az időfüggő függvények segítségével számíthatók az idő szerinti deriváltak. Ez azt jelenti, hogy ha $f(t)$ egy pozíciót leíró függvény, akkor az idő szerinti deriváltja a sebességfüggvényt adja meg:

$$v(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

és a második idő szerinti derivált a gyorsulás függvényt adja meg:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

2.4. Használt szoftverek

Munkám során különböző szoftvereket használtam a modellek tesztelésére, szimulálására, valamint illusztrációk készítésére a fogalmak tisztább megértése érdekében. A modell helyességének ellenőrzésére a **Wolfram Mathematica**-t alkalmaztam, mivel nagy pontosságot és széleskörű funkcionális bizonysít. A szimulációs környezet fejlesztését **MATLAB** programozási környezetben végeztem, amelyet megbízhatósága miatt széleskörben alkalmaznak különböző iparágak. A mátrixok könnyen kezelhetők különböző számításokhoz, és magas fokon optimalizált a mátrixokkal végezhető műveletekhez, ezáltal gyors futási időt eredményez a szimulációk során. A szimulált adatokat hatékonyan lehet vizualizálni és elemezni. Az illusztrációk készítéséhez **Inkscape**-et használtam, amely egy nyílt forráskódú szoftver robosztus eszközkészlettel. Lehetővé teszi összetett grafikák létrehozását magas vektorgrafikus felbontásban.

2.5. Kapcsolódó irodalom

A robotika és automatizálás területén az omnidirekcionális hajtások egyre nagyobb szerepet kapnak az iparágakban, a különböző vezérlési módszerek kifejlődésével és azok egyre magasabb pontosságával. Csak néhány példát említve: használják őket az egészségügyi iparban, a logisztikában és az ellátási lánc menedzsmentben, anyagkezelésre, AS/RS rendszerek részeként és így tovább. Ebben a fejezetrészen bemutatom az omnidirekcionális robotikával kapcsolatos kutatásokat és ismertetem azokat a munkákat, amelyeket munkám során elemeztem.

[4] Omni directional mobile robots, mechanisms and navigation approaches

Egyre több terület alkalmazza az omnidirekcionális meghajtású robotokat egyszerű felépítésük és a széles alkalmazási lehetőségeik miatt. Ez a tanulmány összegzi a különböző keréktípusokat és robot topológiákat. A munka különböző vezérlési és útvonaltervezési megközelítéseket is tartalmaz. A cikk kiváló összefoglalója a gyakori omnidirekcionális kerekeknek, kezdve az egyszerű irányítható görgős kerekektől a bonyolultabb megoldásokig.

[5] A Comparative Study of Omnidirectional and Differential Drive Systems for Mobile Manipulator Robots

A differenciál- és az omnidirekcionális hajtások közötti különbségek eltérő, különböző alkalmazásokhoz vezetnek. Ez a tanulmány ezen két hajtástípus erősségeit és gyengeségeit vizsgálja. Bemutatja a különböző típusú kerekeket és mechanizmusokat, és rövid bevezetést ad ezen platformok kinematikai modellezéséhez. Bemutatja továbbá a fő környezeteket, ahol a differenciál- és az omnidirekcionális meghajtású robotokat alkalmazzák. Kiemeli, hogy az omnidirekcionális platformok érzékenyebbek a környezeti tényezőkre, és leginkább zárt térben, sima felületeken, szűk helyeken, ahol nagy pontosság szükséges alkalmazhatóak. A differenciálhajtások felülmúlják az egyenetlen, durva felületeken való alkalmazásokban és a nehéz terhek szállításában. Összességében a tanulmány megerősítette, hogy az omnidirekcionális hajtások előnyösebbek a nagyobb pontosság és manőverezhetőség terén, a rendszer bonyolultságának árán, míg a differenciálhajtások robusztusabbak, ám alacsonyabb pontosság és manőverezhetőség jellemző rájuk.

[6] Introduction to Mobile Robot Control

Az Introduction to Mobile Robot Control című könyv az egyik legátfogóbb munka a robotvezérlés területén. Több mint 600 oldalon át részletesen mutatja be a robotplatformok típusait, a kerekeket, érzékelőket, a kinematikai-, dinamikai- és állapotter modellezési megközelítéseket, a robotok különböző alkalmazásait és még sok mást. Az omnidirekcionális robotikával kapcsolatos leírás a könyvben még ma is rendkívül releváns.

[7] Modelling and simulation of the drivetrain of an omnidirectional mobile robot

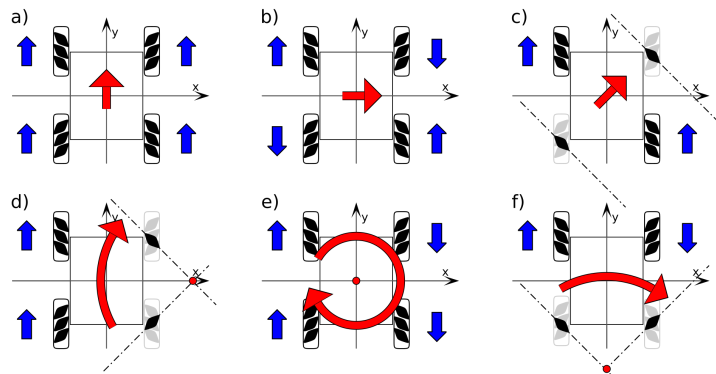
Raj Levente és Dr. Czmerk András munkája képezi kutatásom alapját. Cikkükben egy átfogó állapotter modellt mutatnak be a kiwi-hajtású robotokhoz. Leírják az omnidirekcionális hajtásrendszer kinematikai- és dinamikai modelljeit. Munkámban ihletet merítettem a cikkben bemutatott kinematikai modellből.

Kapcsolódó irodalmak, amelyek említést érdemelnek: [8] irányítási megoldásokat mutat be omnidirekcionális robotokhoz, [9] pedig az omnidirekcionális robotok kinematikai modellezésébe vezet be, továbbá [10], az OWMR-ek kinematikai modellezését részletezi.

3. Fizikai modell

A holonomikus robotok számos formában megtalálhatók az ipar különböző területein. A legfontosabb különbség a differenciálhajtású robotokhoz képest az, hogy a kerekeken nem oldalirányú erők nem ébrednek. Egy klasszikus megoldás a differenciálhajtású robotok holonomikussá tételére a kerekek olyan forgatási képessége, amely lehetővé teszi, hogy tengelyük a talajra merőleges irányban forduljon el. Ez a megoldás azonban körülményes, és csak álló helyzetben hatékony.

A nagy áttörést az 1972-ben Bengt Erland, egy svéd mérnök által kifejlesztett mecanum kerék hozta meg. A mecanum kerekek alkalmazása lehetővé tette az egyszerű átmenetet a klasszikus hajtásról a holonomikus hajtásra. Mivel a kerekek által a talajra gyakorolt erők 45 fokos szögben helyezkednek el, a kerekek megfelelő irányú forgatásával omnidirekcionális mozgás érhető el, ahogy azt a 2. ábra mutatja.



2. ábra. Holonomikus mozgás elérése mecanum kerekek használatával.

kék: Kerék forgási iránya.

piros: Jármű testének mozgási iránya. [Wikipedia]

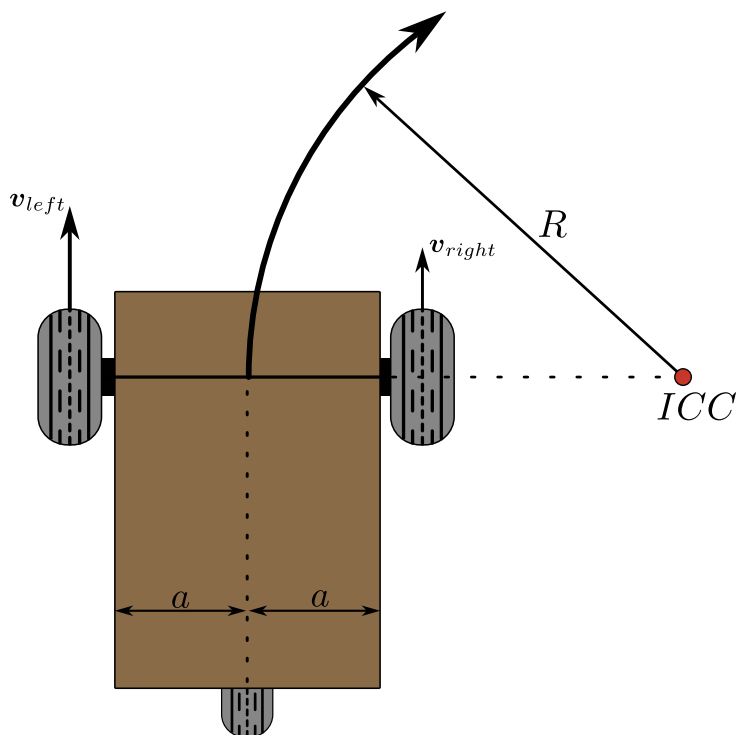
Ez az elrendezés különösen elterjedt targoncák esetében, ahol lehetővé teszi a sokkal szűkebb fordulást, hosszú tárgyak manőverezését, amelyek hagyományos targoncákkal nem lehetségesek, valamint a hatékonyságot a gyorsabb mozgással növeli, különösen szűk helyeken. A mecanum kerekek részletes kinematikai elemzését a [11] cikk tartalmazza.

A holonomikus képességek eléréséhez használt kerék másik fő típusa az omni-kerék, amely részletesen a 3.1.2 fejezetben kerül bemutatásra. A mecanum és omni-kerekek kísérleti elemzése megtalálható a [12] cikkben.

3.1. Mechanikai modell

3.1.1. Pillanatnyi görbületi középpont

Ahhoz, hogy megértsük a robotok mozgásmintázatát, és azt, hogy miért különlegesek az omnidirekcionális hajtások, be kell vezetnünk a *pillanatnyi görbületi középpont* (ICC) fogalmát. Ahogy a neve is sugallja, ez az a pont, amely körül a robot görbületi pályán mozog. A differenciálhajtású robotok ICC-je különböző keréksebességek esetén a 3 ábrán látható.



3. ábra. ICC ábrázolása differenciálhajtások esetén.

3.1.2. WMRs

Ahhoz, hogy megértsük a holonomikus robotokat, először is különbséget kell tennünk a *kerekes mobil robotok* (WMR, azaz wheeled mobile robot) között. A WMR-ek síkbeli manőverezhetőségét a szabadságfokuk (DoF) jellemzi a síkban. A nem holonomikus robotoknak kevesebb mint három szabadságfoka van a síkban. A holonomikus robotok bármilyen irányba képesek mozogni a síkban, szabadságfokuk három. Ezt a képességet hívjuk omnidirekcionális vagy holonomikus mozgásnak.

Számos WMR hajtástípus létezik, a legjelentősebbek a következők:

- Differenciálhajtás
- Omnidirekcionális hajtás
- Szinkronhajtás
- Ackermann-kormányzás

A *differenciálhajtás* két fix, meghajtott kerékből áll, amelyek a robot jobb és bal oldalán helyezkednek el, és egymástól függetlenül vezérelhetők. A stabilitást egy vagy két görgős kerék biztosítja. Ha a kerekek azonos sebességgel forognak, a robot egyenes vonalban halad; ha az egyik kerék lassabban forog, a robot egy íven halad. Ha a kerekek ellentétes irányban forognak, a platform a két hajtott kereket összekötő szakasz középpontja körül fordul el. A differenciálhajtás esetében az R sugár könnyen kiszámítható az alábbi képletből: $\frac{(v_l - v_r)}{2a} = \frac{v_r}{R - a}$. Átrendezve az egyenletet R -re kapjuk, hogy:

$$R = \frac{a \cdot (v_l + v_r)}{v_l - v_r} \quad v_l \geq v_r$$

Az ICC segítségével egyértelműen leírhatjuk a robot mozgását. Ha $v_l = v_r$, akkor $R = \infty$, ami egyenes mozgást jelent, míg ha $v_l = -v_r$, akkor $R = 0$, ami forgást jelent.

Az *omnidirekcionális hajtású* járművek legtöbb esetben három vagy négy kereket használnak, de lehetnek több omnidirekcionális keréssel felszereltek is. A robotikában az *omni-kerék* a leggyakoribb megoldás a holonomikus mozgás elérésére. Ezek a kerekek a kerék peremén 90° -ban elhelyezett kisebb görgőkkel vannak ellátva. Négykerekű omnidirekcionális járművek általában a 3. fejezetben ismertetett és a 2. ábrán bemutatott mecanum kerekeket használják, de megfelelő platform használatával omni-kerekekkel is konfigurálhatók.

A *szinkronhajtások* szintén képesek holonomikus mozgásra. Három vagy négy kerék kapcsolódik ugyanahhoz a motorhoz egy speciális szinkronizált mechanizmussal. Ez harmonikus mozgást biztosít, mivel egyszerre csak egy motor működik, így az esetleges pontatlanságok egyenletesen oszlanak el. Egy másik motor felelős a robot irányának megváltoztatásáért. Ez egyszerűbb kialakítás (a többi omnidirekcionális hajtáshoz képest) és precíz megoldás, amelyet széles körben használnak automatizált robotokban.

Az *Ackermann-kormányzás* két szomszédos kerék közötti kapcsolaton keresztül működik. Ez a geometria lehetővé teszi, hogy a kerekek ne csússzanak, miközben egy íven haladnak.

A kapcsolat mindkét kereket együtt fordítja, így az ICC olyan pontban található, ahol bármilyen kormányzóg esetén a kerekek által leírt körök egy közös pontra esnek. Az Ackermann-kormányzás alapját az adja, hogy a mozgó nyomtávrúd rövidebb, mint a tengely.

A mecanum kerekű járművek és az omni-kerekű robotok ICC-je megegyezik a robot elrendezésének tömegközéppontjával. Ez a tulajdonság biztosítja azt a képességet, hogy a robot helyben tud fordulni.

3.2. Villamos modell

Ebben a részben a robotok fő elektronikai alkotóelemeit tárgyalom. A leírt komponensek nem kizárólag az omnidirekcionális robotokra jellemzőek, csak a robotok fő építőelemeit említem, a későbbi szimulációk könnyebb érthetősége érdekében.

3.2.1. Szenzorok

Ahhoz, hogy a robotok hatékonyan manőverezzenek, pontos adatokra van szükségük környezetükről és helyzetükről. Ez számos különböző típusú szenzor segítségével érhető el, akár egyetlen roboton belül is.

A szenzorokat két fő kategóriába sorolhatjuk:

- *digitális szenzorok*,
- *analóg szenzorok*.

Az *analóg szenzorok* folyamatos kimenetet adnak, amelyeket analóg-digitális (A/D) átalakítóval kell digitalizálni. A *digitális szenzorok* ezzel szemben általában pontosabbak, mint az analóg szenzorok, és diszkrét kimenettel rendelkeznek, vagyis meghatározott frekvenciával végeznek méréseket. A megfelelő szenzor kiválasztásakor az alábbi jellemzők a legfontosabbak:

- Működési tartomány,
- Felbontás,
- Linearitás,
- Sávszélesség,
- Érzékenység,

- Pontosság,
- Precizitás.

A dinamikai tartomány az érzékelő helyes működés esetében a szélső bemeneti értékek közötti különbség, amelyet az alábbi egyenlettel számíthatunk ki:

$$\text{tartomány} = 20 \log \left[\frac{\max \text{ bemenet}}{\min \text{ bemenet}} \right] \quad [\text{dB}]$$

A felbontás a mért változó azon legkisebb különbsége, amelyet az érzékelő még felismerni képes.

A linearitás azt a tulajdonságot jelenti, hogy egy szenzor kimenete lineárisan viselkedik, tehát $f(k_1x + k_2y) = k_1f(x) + k_2f(y)$, ahol $k \in \mathbb{R}$ konstans.

A sávszélesség az a maximális olvasási gyakoriság, amelyet az érzékelő másodpercenként biztosít, *hertz*-ben mérve.

Az érzékenység azt fejezi ki, hogy a bemeneti jelek milyen mértékben változtatják meg a kimeneti jeleket.

A pontosság azt méri, hogy a mért jelek milyen mértékben egyeznek meg a bemeneti jelek valós értékével:

$$\text{pontosság} = 1 - \frac{\|\text{hiba}\|}{x},$$

ahol x a jel valós értéke.

A precizitás az alábbi módon számítható:

$$\text{precision} = \frac{\text{range}}{\sigma}$$

Az alkalmazásomhoz a kerekek forgási sebességének mérésére van szükség. Ezt megtehető például a hajtásláncban zárt hurkú motorvezérlővel vagy impulzusszélesség-modulációval. Mivel a robot helyzete a környezetében nem releváns a céljaink szempontjából, nem tárgyalom a térbeli érzékelés különböző módjait.

3.2.2. Hajtáslánc

A robot hajtáslánca úgy képzelhető el, mint egy motorblokkot, amely tartalmazza magát a motort, a kerekeket és az ezeket összekötő mechanizmust.

A kerekek típusait a *3.1.2 fejezetben* tárgyaltam.

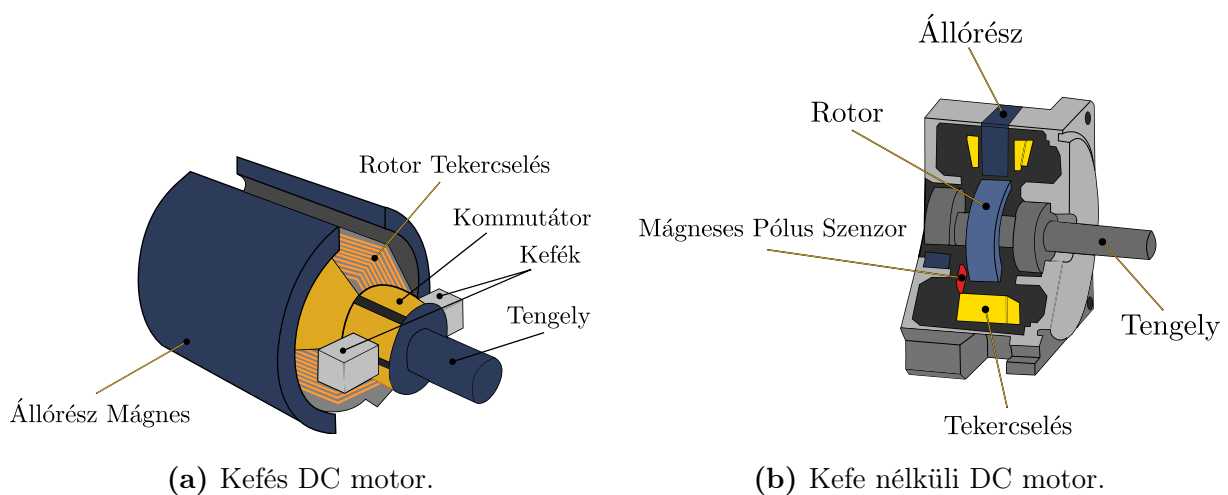
A motor és a kerék többféleképpen kerülhet összeköttetésre. A legegyszerűbb megoldás az, ha közvetlenül egy tengelyen kapcsoljuk össze őket. Ez könnyen karbantartható

megoldás, de nagyobb konstrukciókhoz vezethet, és behatárolt motorelhelyezést igényel. Kompaktabb és sokoldalúbb megoldásokhoz gyakran szíjhajtásokat alkalmaznak. Ezek több karbantartást igényelnek, de nagy rugalmasságot biztosítanak konstrukciójukban, esetükben a csatlakozó forgórészek határozzák meg a kimeneti forgási sebességet. Ha nagyobb precizításra és a kerék sebességének szabályozására van szükség, fogaskerekes hajtómű használata ajánlott.

A robotikában leggyakrabban használt motorok:

- *Kefés/Keфе nélküli DC motor*
- *Hajtóműves DC motor*
- *Szervó motor*
- *Léptető motor*

A DC motorok a robotikai közösség legelterjedtebb motorjai. Ez tartósságuknak, egyszerű használhatóságuknak és megfizethetőségüknek köszönhető. Motorvezérlők használatával könnyen irányíthatóak. A DC motoroknak két fő típusa van: kefések és kefe nélküli. Ezek működési elvükben különböznek, amit a dolgozat keretein belül nem tárgyalom. A motorok alkotóelemeit a 4. ábra mutatja be. A DC motorok modellezési és vezérlési módszereit a [13] és a [14] cikkek tárgyalják.



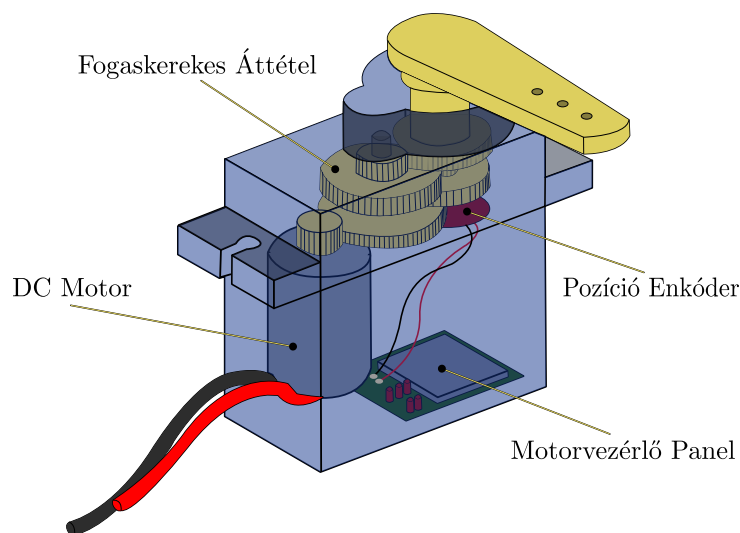
4. ábra. DC motorok fő komponensei.

A hajtóműves DC motorok hagyományos DC motorok, amelyekhez egy fogaskerekes hajtómű (gearbox) kapcsolódik. Ez csökkenti a motor sebességét, miközben növeli a nyomatékot. Ezáltal a könnyen forgatható DC motor sokkal nehezebben visszaforgathatóvá

válík. Ahogy később a szimulációk során látni fogjuk (5. fejezet), ez a tulajdonság jelentős hatással lesz a robot mozgására.

A szervómotorok hasonlóak a áttételes DC motorokhoz, de egy zárt hurkú visszacsatolást is tartalmaznak. A motor egy DC motorból, fogaskerekekből, egy enkóderből és egy vezérlőlappból áll. Az enkóder segítségével meghatározható a tengely szöghelyzete. A szervómotorok alkotóelemei a 5. ábrán láthatók.

A léptetőmotorok legnagyobb különbsége a DC motorokhoz képest az, hogy lépésekben mozognak. Amikor a motorvezérlő áramot kapcsol, a tengely egy lépésnyit fordul. A működésükből adódóan a léptetőmotorok rendkívül precízek visszacsatolás használata nélkül is. Széles körben használják őket a robotikában, különösen robotkarokban, 3D nyomtatásban és CNC gépekben.



5. ábra. Szervó motorok komponensei.

A hajtáslánc szimuláció szempontjából kulcsfontosságú tulajdonságai:

- *Ellenelektromotoros erő (CEMF)*
- *Viszkózus csillapítás*
- *Tehetlenségi nyomaték*

Az ellenelektromotoros erő (CEMF), amely jele V_E , az a feszültség, amely ellen hat az azt létrehozó feszültségnek. A DC motorok esetében ez arányos a ω szögsebességgel, és a

motorra ellenkező irányú nyomatékot gyakorol:

$$\tau_{emf} = -k_{emf}\omega \quad (6)$$

ahol k_{emf} a CEMF állandó [Nm/rad/s] dimenzióval, és az (6) egyenlet átrendezésével számítható ki.

A súrlódási ellenállás szintén ellenkező irányú nyomatékot gyakorol a motorra, amit $\tau_{friction}$ jelöl. A súrlódás a hajtáslánc egészében jelen van, különösen a csapágyaknál, a használt csatlakozásoknál és egyéb mechanikai alkatrészeknél. Az ellenkező irányú nyomatékot az alábbiak szerint számíthatjuk:

$$\tau_{friction} = -B_r\omega \quad (7)$$

ahol B_r a súrlódási együttható.

A tehetetlenségi nyomaték I leírja a merev testre ható nyomaték és az ebből eredő szögsebesség kapcsolatát. Az adott szögyszerű gyorsulás előidézéséhez szükséges nyomaték mennyisége arányos a test tehetetlenségi nyomatékával. Ezt a következőképpen határozhatjuk meg:

$$I = \frac{L}{\omega} \quad (8)$$

Kör alakú kerékre a tehetetlenségi nyomaték számítható:

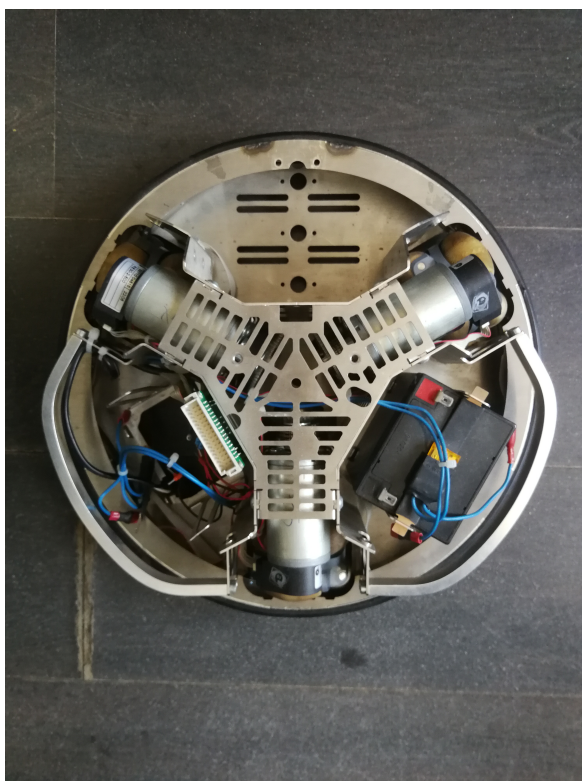
$$I = \frac{1}{2}mr^2 \quad (9)$$

ahol m a kerék tömege és r a kerék sugara.

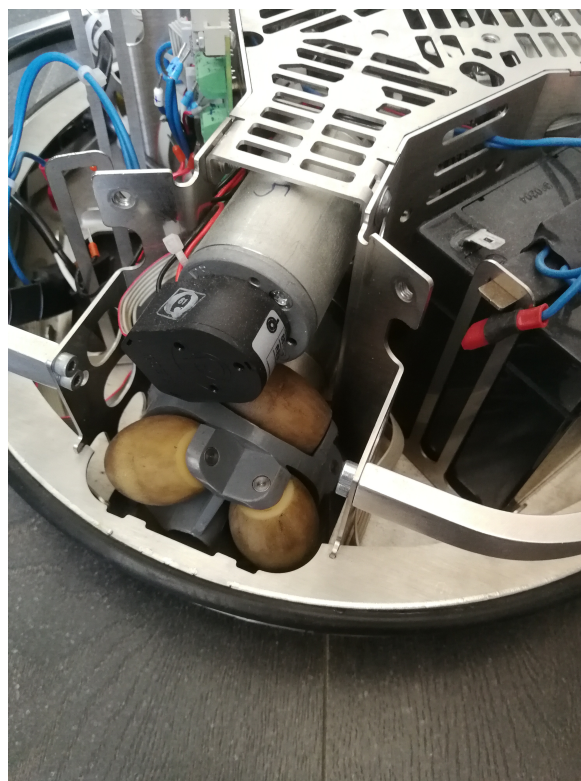
A súrlódási ellenállás és a tehetetlenségi nyomaték meghatározásának módszereiről részletes áttekintést nyújt a [15] cikk.

3.3. Összetett modell

A szimulációban használt paraméterek a *Festo Robotino* robotból származnak. Az összetett modell 3 motorblokkból áll. Mindegyik motorblokk egy DC motort és egy omni-kereket tartalmaz, a kapcsolatot köztük egy bolygóműves hajtómű biztosítja. A robot a 6. ábrán látható.



(a) Felső nézet a robotról.



(b) Közeli nézet a motorblokkról.

6. ábra. *Festo Robotino* robot

4. Kinematikai modellek

A objektum kinematikai modelljének ismerete elengedhetetlen egy hatékony kontroll algoritmus kialakításához. Ez egy széles körben kutatott terület a robotikában, különösen az omnidirekcionális robotok esetében. Ebben a részben mutatom be a kinematikai modellt, először a kerekre vonatkozóan, majd a látómezőt kibővítve az egész robotra alkalmazva. Az általam itt bemutatásra kerülő kinematikai modell egy háromkerekű kiwi-hajtású robotra érvényes.

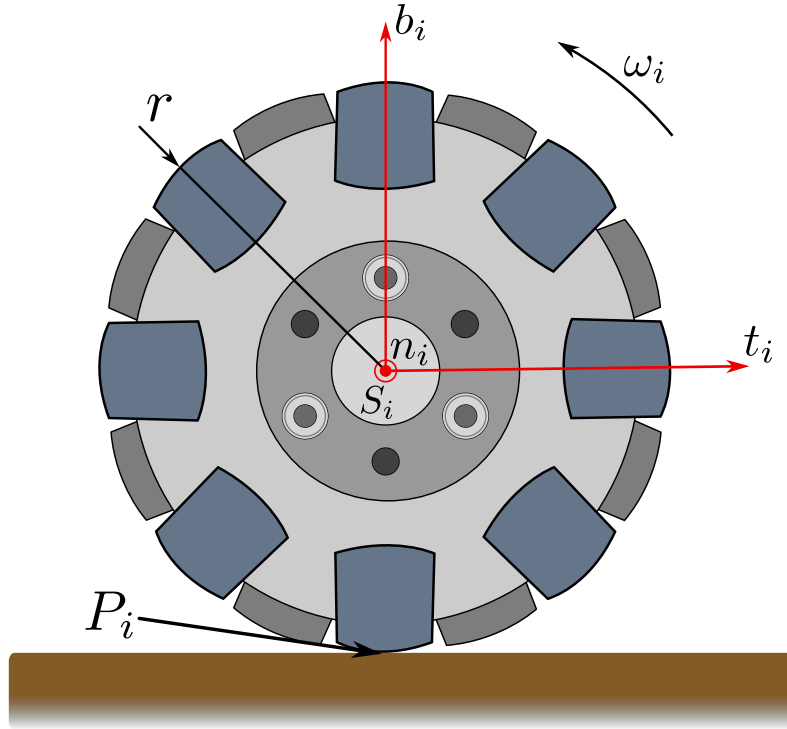
4.1. Kerék

Ahhoz, hogy meghatározhassuk a rendszer kinematikai viselkedését, bizonyos feltételezésekkel kell élnünk. Ezek a következők:

- Mindegyik kerék egy ponton kell hogy érintkezzen a talajjal egy adott időpillanatban
- A kerekcsúszásmentesen gördülnek a talajon

Ezek a feltételek elengedhetetlenek, mivel nélkülük a modell végtelenül bonyolult lenne. Ha csúszás megengedett lenne, a modell determinisztikus volta helyett sztochasztikussá válna, tehát figyelembe kéne vennünk véletlenszerű, valószínűségi jelenségeket is.

Minden keréknek van egy hozzá rögzített derékszögű koordináta-rendszere $\mathcal{F}_i$, ahol az i index az egyes kerekeket jelöli, tehát $i \in [1, 2, 3]$. A koordináta-rendszerek úgy vannak rögzítve, hogy a normális tengely n_i párhuzamos a kerek tengelyével, a binormális tengely b_i merőleges a talajra, a tangenciális tengely t_i pedig párhuzamos a talajjal. Ezek egy jobbsodrású koordináta-rendszert alkotnak. A kerek koordináta-rendszereinek konfigurációját a 7. ábra mutatja be.



7. ábra. Omni-kerék oldalnézete az $\mathcal{F}_i\{S_i; n_i, t_i, b_i\}$ hozzárendelt koordináta rendszer feltüntetésével.

A kerekek szögsebessége $\dot{\varphi}_{ni}(t)$, amelynek iránya párhuzamos a normális tengellyel, ennek megfelelően vektoriális formában:

$$\omega_i(t) = \dot{\varphi}_i(t) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{ni}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{n_i t_i b_i} \quad (10)$$

Mivel feltételezzük, hogy a kerekek nem csúsznak, az érintkezési pont sebességére a következő írható fel:

$$\mathbf{v}_{P_i}(t) = \begin{bmatrix} \dot{n}_i(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{n_i t_i b_i} \quad (11)$$

ahol $\dot{n}_i(t)$ a másik kettő kerék által produkált kényszer sebesség, az adott kerék nézetéből.

A sebességredukciós képletet alkalmazva beláthatjuk, hogy a kerék középpontjának sebessége:

$$\mathbf{v}_{S_i}(t) = \mathbf{v}_{P_i}(t) + \omega_i(t) \times \mathbf{r}_w \quad (12)$$

ahol $\mathbf{r}_w$ a kerek sugarának vektoriális alakja:

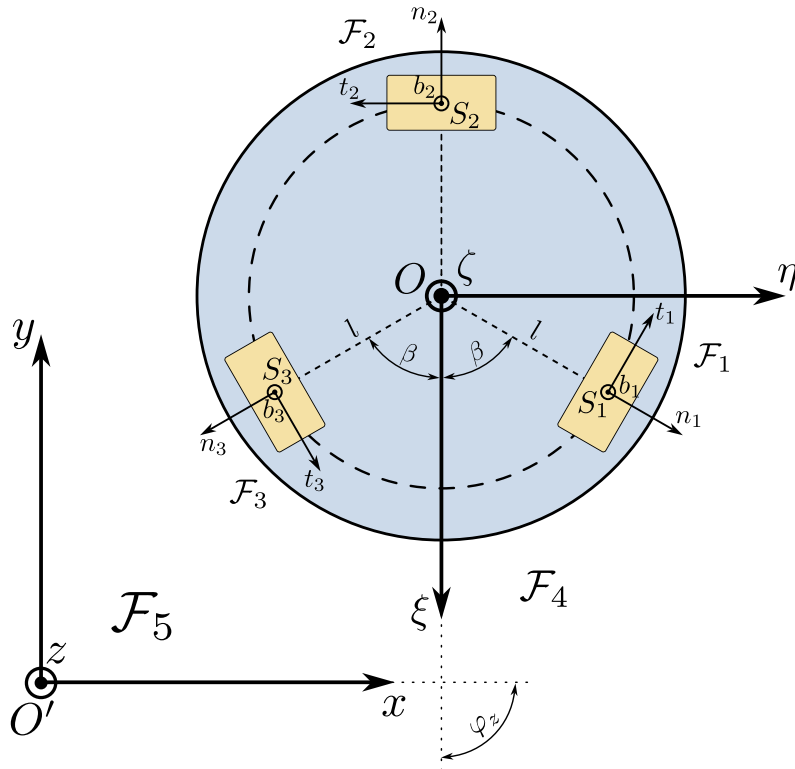
$$\mathbf{r}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}_{n_i t_i b_i} \quad (13)$$

Az (12) egyenletet mindegyik kerékre alkalmazva beláthatjuk az összes kerékre, hogy a tömegközéppontjaik az alábbi sebességállapottal rendelkeznek:

$$\mathbf{v}_{S_i}(t) = \begin{bmatrix} \dot{n}_i(t) \\ -r\dot{\varphi}_{n_i}(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{n_i t_i b_i} \quad (14)$$

4.2. Test

A kinematikai modell célja a robot test pozíciójának meghatározása. Ehhez két további derékszögű koordináta-rendszerre van szükségünk: az egyik a robot testéhez van rögzítve, a másik pedig a robot térbeli mozgását leíró globális koordináta-rendszer. A kinematikai modellben használt koordináta-rendszerek konfigurációja a 8. ábrán látható.



8. ábra. Idealizált kiwi-drive felülnézete feltüntetve a kerek koordináta rendszereit $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, a robot testének koordináta rendszerét $\mathcal{F}_4$ és a globális koordináta rendszert $\mathcal{F}_5$.

Legyen $\mathcal{F}_4\{O; \xi, \eta, \varsigma\}$ a robot testének koordináta-rendszere. Az $\mathcal{F}_4$ origója a robot tömegközéppontja O , amely megegyezik az ICC pontjával. Ez a koordináta-rendszer a robotoz van rögzítve, így ξ az n_1 és n_3 tengelyek között azonos szögtávolságot tart. Ezt a szöget jelöljük β -val, és mivel ebben az esetben háromkerekű platformról van szó, $\beta = 60^\circ$ állandó. Ebben a modellben β egy konstrukciós paraméter, amely lehetővé teszi más szimmetrikus konstrukciók kezelését is. Az $\mathcal{F}_4$ koordináta-rendszer határozza meg a robot testének orientációját, ami elengedhetetlen a mozgásának leírásához.

Legyen $\mathcal{F}_5\{O'; x, y, z\}$ a globális környezet koordináta-rendszere. Ez rögzített a térben, és a robot helyzetét az O' origóhoz viszonyítva írja le. A kinematikai modell célja, hogy kapcsolatot teremtsen a keréksebességek és a test $\mathcal{F}_5$ referencia-koordináta-rendszerbeli sebességállapota között.

Ahhoz, hogy a kerekre ható sebességeket a robot koordináta-rendszerében ábrázoljuk, forgatási mátrixokat kell alkalmaznunk. Ezek olyan transzformációs mátrixok, amelyek forgatásokat hajtanak végre, és általános magyarázatuk a *2.1. fejezetben* olvasható.

Gondos elemzés után az $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ és $\mathcal{F}_4$ közötti kapcsolatot leíró forgatási mátrixokat az alábbiak szerint írhatjuk fel:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_3^T = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}(-1, -1, 1) \quad (16)$$

Az $\mathbf{R}_1$ és $\mathbf{R}_3$ mátrixok az adott b_i tengelyek körül β szöggel forgatnak. A szimmetria miatt a transzponált kapcsolatuk könnyen felismerhető. Ebben az esetben β állandó értékű (60°), így a mátrixok numerikus értékekkel a következő formát öltik:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Miután a robot állapotát $\mathcal{F}_4$ -ben kiszámítottuk, át kell transzformálnunk a globális $\mathcal{F}_5$ koordináta-rendszerbe. Ehhez a globális koordináta rendszer x tengelye és a robot koordináta rendszerének ξ tengelye közötti szöget használjuk, amelyet $\varphi_z(t)$ -vel jelölünk. Így az $\mathcal{F}_4$ és $\mathcal{F}_5$ közötti transzformáció a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{R}_G = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z(t) & \sin \varphi_z(t) & 0 \\ -\sin \varphi_z(t) & \cos \varphi_z(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

A robot koordinátasebességei és a kerek szögsebességei közötti kívánt kapcsolat eléréséhez meg kell oldanunk a következő egyenletet $i \in \mathbb{N} \cap [1, 3]$ esetén:

$$\mathbf{v}_{S_i}(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_{OS_i} \quad (20)$$

A $\mathbf{v}_{S_i}(t)$ vektorok a kerek sebességhelyzetét írják le az $\mathcal{F}_5$ koordináta rendszerben.

$\mathbf{v}_O(t)$ a robot testének sebessége az $\mathcal{F}_5$ koordináta rendszerben leírva:

$$\mathbf{v}_O(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{xyz} \quad (21)$$

$\boldsymbol{\omega}(t)$ a robot szögsebessége az $\mathcal{F}_5$ -ben leírva:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_z(t) \end{bmatrix}_{xyz} + \mathbf{R}_G \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i \dot{\varphi}_i(t) \quad (22)$$

$\mathbf{r}_{OS_i}$ az egyes kerekhez tartozó vektorok, amelyek a robot középpontjából a kerek

tömegközéppontjába mutatnak:

$$\mathbf{r}_{OS_1} = \mathbf{R}_G \begin{bmatrix} l \cdot \cos \beta \\ l \cdot \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{r}_{OS_2} = \mathbf{R}_G \begin{bmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{r}_{OS_3} = \mathbf{R}_G \begin{bmatrix} l \cdot \cos \beta \\ -l \cdot \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

ahol l a kerek s jkainak érintőkörének sugara.

Behelyettesítve β értékét az r_{OS_1} és r_{OS_3} egyenleteibe kapjuk, hogy:

$$\mathbf{r}_{OS_1} = \mathbf{R}_G \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}l \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{r}_{OS_3} = \mathbf{R}_G \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}l \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Az egyenleteket kombinálva a (20) egyenlettől a (25) egyenletig:

$$\mathbf{R}_G \mathbf{R}_i \mathbf{v}_{S_i}(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_{OS_i} \quad (28)$$

Meg kell oldanunk ezen egyenletet az $i \in [1, 2, 3]$ esetekre, hogy megkapjuk $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{\varphi}_z(t)$, $n_1(t)$, $n_2(t)$, $n_3(t)$ értékeket. Az egyenlet nullára való átrendezése után és a sebességek kir szletez se után, a robot középpontjának sebességállapota kifejezhető a következő alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\varphi}_z(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{robot} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{n1}(t) \\ \dot{\varphi}_n(t) \\ \dot{\varphi}_{n3}(t) \end{bmatrix} \quad (29)$$

vagy másmilyen jelölésekkel:

$$\begin{bmatrix} v_{O_x}(t) \\ v_{O_y}(t) \\ \dot{\varphi}_z(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{robot} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{n1}(t) \\ \dot{\varphi}_{n2}(t) \\ \dot{\varphi}_{n3}(t) \end{bmatrix} \quad (30)$$

ahol $\mathbf{T}_{robot}$ a keresett kapcsolat a kerekek szögsebességei és a robot sebességhelyzete között a globális koordináta rendszerben.

$$\mathbf{T}_{robot} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (31)$$

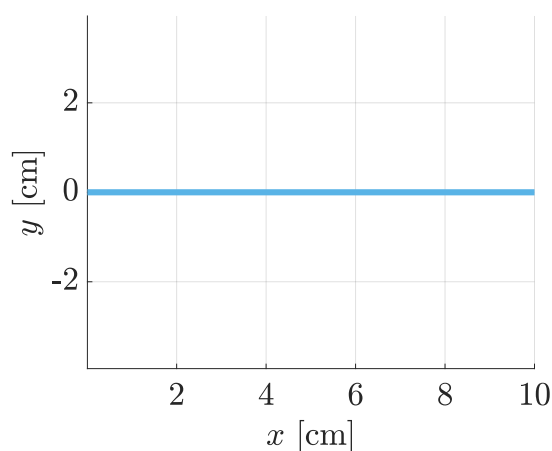
A T_{robot} mátrix elemeinek értékeinek részletezése *B Függelék*-ben található.

5. Szimulációk és megfigyelések

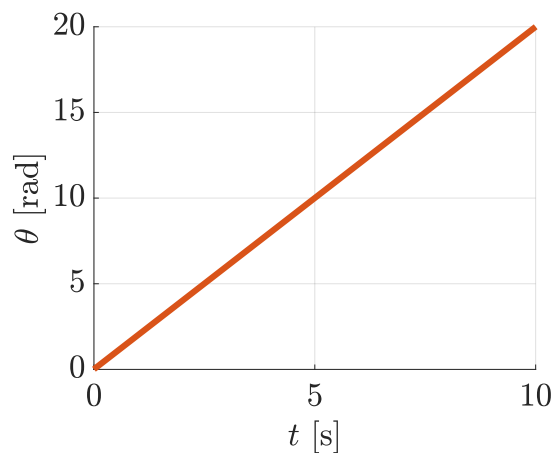
5.1. Intuitív megközelítés

Ahhoz, hogy megértsük, hogyan viselkedik a robot, érdemes kiindulni egy merev tárcsa kinematikájának általános vizsgálatából. Ez intuitív alapot ad, és megkönnyíti a későbbi szimulációk megértését.

Tegyük fel, hogy a tárcsa középpontja a $(0, 0)$ pontban helyezkedik el az (x, y) síkban. Feltételezzük, hogy a mozgás során nincs súrlódás. Szimuláljuk a tárcsa mozgását és forgását egy pozitív tangenciális irányú impulzus hatására, amely a $(0, -r)$ pontban (ahol r a tárcsa sugara) éri a tárcsát. A középpont sebessége párhuzamos lesz az x tengellyel, és a tárcsának szögsebessége ω lesz. Ezek alapján időfüggő modellt hozhatunk létre, és a tárcsa geometriájára tetszőleges értékeket megadva szimulálhatjuk a változókat. A középpont mozgását a *9a ábra* ábrázolja, míg az elfordulás szögét a *9b ábra* mutatja be.



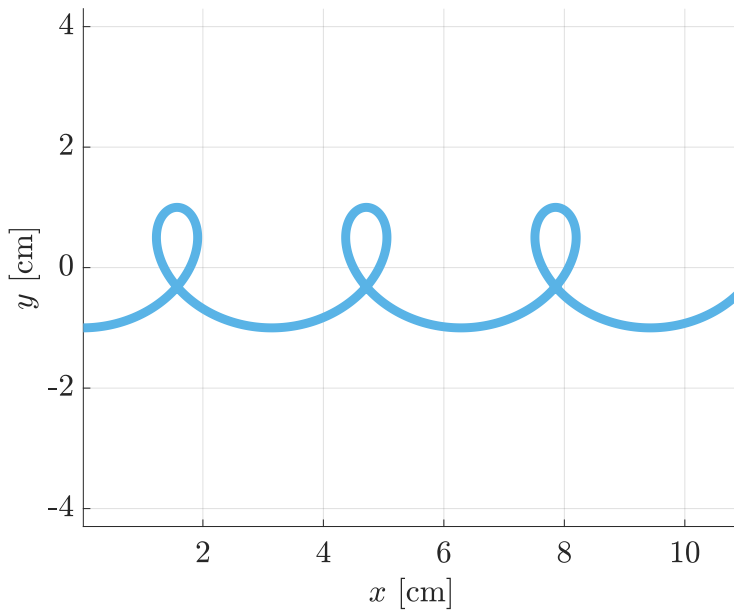
(a) A középpont által bejárt pálya az idő függvényében.



(b) Szög az idő függvényében.

9. ábra. A tárcsa pályája és a szöge az idő függvényében.

Hasznos lehet az impulzus behatási pontjának pályáját is ábrázolni. Mivel a tárcsa egyszerre forog és halad, az impulzus pontja egy hurkolt ciklois görbét követ, amely a *10. ábra* látható.



10. ábra. Az impulzus támadáspontja által bejárt pálya.

5.2. Szimulációs környezet

A kutatás fő célja annak vizsgálata, hogy a motorblokkok hogyan hatnak egymásra, és ez hogyan befolyásolja a robot mozgását. Ezeket a hatásokat a *4. fejezetben* leírt kinematikai modell segítségével vizsgálom. A robot tárcsaként modellezhető, a motorblokkok pedig egyetlen objektumként kezelhetők, amely tartalmazza a motort és a mechanikai alkatrészeket. A modell részeit a *3. fejezetben* részleteztem.

A szimulációs szoftver a kinematikai modell speciális implementációja. Ez az implementáció lehetővé teszi bizonyos értékek konstansként kezelését a mozgás során, valamint a paraméterek rugalmas megváltoztatását. A szimulációkhoz geometriai paraméterként a Festo Robotino robot méreteit használom, amelyek a *C Függelékben* találhatóak. A kereknek két oldaluk van, így az érintkezési pontok ritmikusan váltakoznak. Ez a tulajdonság eltérő értékeket eredményez az l osztókör sugarára. A szimulációhoz egyszerűsítésképp a külső és belső sugarak átlagát használom, hogy ennek a a forgás során váltakozó sugar okozta ingadozó jelenségnek a hatását a modell elimináljam.

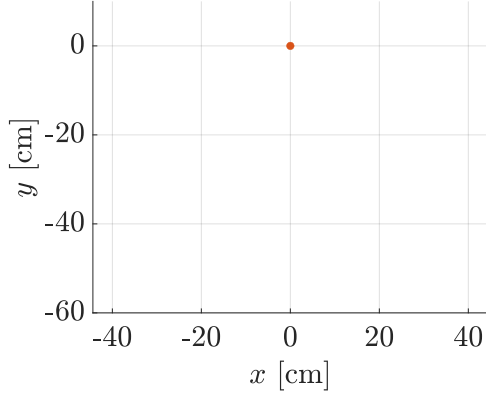
5.3. Szimulációk

A robot mozgás közbeni viselkedésének megértéséhez szimulációval vizsgáljuk, hogyan befolyásolja a mozgást, ha csak egyetlen kereket hajtunk meg. Ez mélyebb betekintést nyújt, anélkül hogy több kerék egyidejű hajtása káoszt okozna.

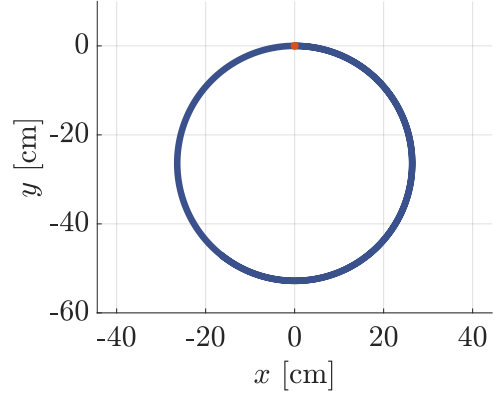
Tegyük fel, hogy a robotban csak egyfajta motorblokkot használunk, azaz azok minhárom motor esetében azonosak. Egy standard DC motor esetében például, feszültségmentes állapotban, könnyen elforgatható a tengelye. Ha azonban egy áttétellel egészítjük ki, amely több fogaskerékből áll, akkor a nagy fordulatszámú, alacsony nyomatékú motor kimenetét kisebb fordulatszámú, nagyobb nyomatékú kimenetű alakítja. Így sokkal nehezebben lesz visszaforgatható a motor tengelye.

A fent leírtakat tekinthetjük a két szélső helyzetnek. A robot esetében a meghajtott motor forgási sebességet (ω) hoz létre a robot testében. A kinematikai modell szerint, mivel feltételezzük, hogy a kerék nem csúszik, nyomatékot kelt a kerekeken (ω_i). Az egyik szélső helyzetben a nem hajtott kerekek azonos szögsebességgel forognak, ha a motorblokkoknak nincs ellenállásuk; a másik szélső helyzetben a nem meghajtott kerekeknek zérus a szögsebessége, ha végtelen a motorblokkok ellenállása.

A robot mozgását a szimulációs környezetben vizsgálhatjuk. Kezdeti helyzetben a robot középpontja O egybeesik a globális $\mathcal{F}_5$ koordináta-rendszer O' pontjával. A robot orientációja azonos a 8. ábrán bemutatottal. A (2)-es motorblokkot állandó egységnyi ($\omega_2 = 1[\text{rad/s}]$) szögsebességgel hajtjuk meg. A szimulációk 100 másodpercig tartanak. A középpontok mozgását a két szélső helyzet esetén a 11. ábra mutatja.



(a) A motorblokk ellenállása nulla.



(b) A motorblokk ellenállása végtelen.

11. ábra. A középpont által bejárt pálya a két szélső helyzetben. A narancs pont mutatja a robot középpontjának kiinduló pontját.

Az eredményekből látható, hogy amikor a motorblokk ellenállása zérus, a robot helyben forog. A 4. fejezetben leírt kinematikai modell alapján ez érthető. Ha a motorblokkok ellenállnak az őket érő kényszer nyomatékoknak, a robot egy körön mozog egy, a robot lábnyomán kívüli pont körül. Elsőre ez egyáltalán nem tűnik triviálisnak, és logikai úton más következtetésre is juthatnánk. A logikai érvelés szerint a robotnak nem szabadna mozognia. Ez a viselkedés a geometriai jellemzők segítségével is bebizonyítható.

A 12. ábra mutatja az imént leírt konfigurációt. Tudjuk, hogy $v_{S_2\eta} = \omega_2 r$ ugyanaz $\mathcal{F}_5$ -ben, mint $\mathcal{F}_4$ -ben. Az $v_{S_2\xi}$ ismeretlen. Az adott elrendezés alapján felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

$$\mathbf{v}_{S_2} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PS_2} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PS_2} \quad (32)$$

$$v_{S_2} = \frac{r_{PS_2}}{\sin \beta} = \dot{\varphi}_2 \cdot r \quad (33)$$

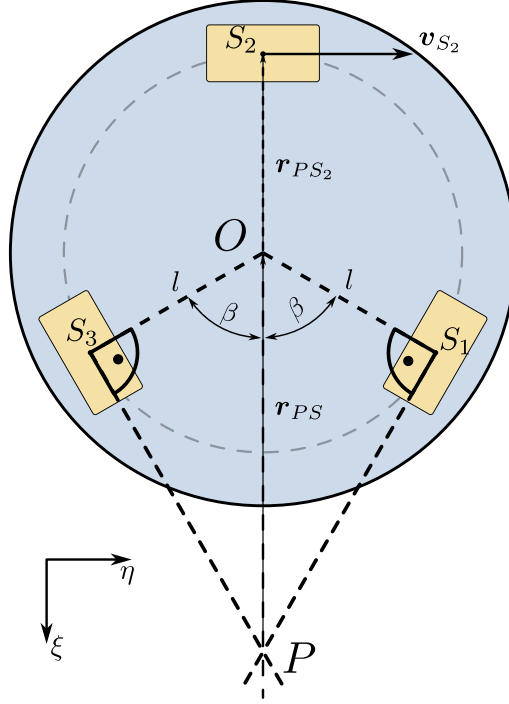
$$\omega = \frac{1}{r_{PS_2}} v_{S_2} \quad (34)$$

$$\sin \beta = \frac{l}{r_{PS}} \quad (35)$$

$$r_{PS} = \frac{l}{\sin \beta} \quad (36)$$

$$r_{PS_2} = r_{PS} + l = \frac{l \cdot (1 + \sin \beta)}{\sin \beta} \quad (37)$$

$$\omega = \frac{\sin \beta}{1 + \sin \beta} \cdot \frac{1}{l} v_{S_2} = \frac{r}{l} \cdot \frac{\sin \beta}{1 + \sin \beta} \cdot \dot{\varphi}_2 = \frac{r}{l} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \omega_2 \quad (38)$$



12. ábra. Végtelen motorblokk ellenállás esete.

Ezáltal, a geometriai és a kinematikai összefüggésekből kiszámítható a robot sebessége, szögsebessége, valamint a robot középpontjától (O) a pillanatnyi sebességpólusba (P) mutató vektor.

A szélső helyzetek vizsgálata által jobban megértettük, hogy hogyan viselkedik a robotunk. Valós helyzetben azonban előfordulhatnak olyan esetek, amikor a robot szögsebessége forgást idéz elő a kerekeken, mert a rájuk ható nyomaték olyan tartományban van, ahol sem szabadon forgás, sem teljes ellenállás nem valósul meg.

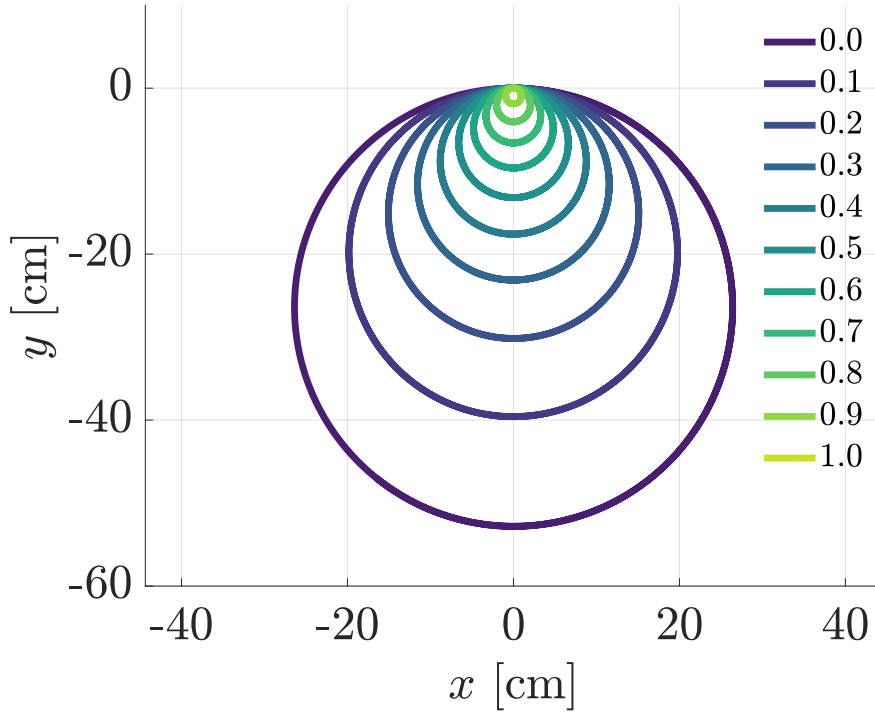
Ezen helyzetek leírása érdekében bevezetünk egy új konstanst, amelyet **szögsebességátviteli tényező**nek hívunk és jele legyen κ_ω . Ez a tényező leírja a kapcsolatot a robot két kereke között. Értelmezési tartománya $\kappa_\omega \in [0, 1]$ és a következő egyenlőség teljesül:

$$\omega_{indukalt} = \kappa_\omega \omega_{driven} \quad (39)$$

ahol $\omega_{indukalt}$ a kerék szögsebessége amelyet a másik meghajtott kerék $\omega_{meghajtott}$ indukál.

Belátható, hogy a robot különböző κ_ω értékek esetén eltérő pályákat követ. A κ_ω értékeit 0.0 és 1.0 között ábrázolva megfigyelhetjük, hogyan befolyásolja ez az együttható a pályákat. Az eltérő értékekhez tartozó pályák a 13. ábrán láthatók.

Megfigyelhető, hogy a robot mindig körpályát követ, és a pálya sugara csökken a κ_ω



13. ábra. A robot középpontja által bejárt pálya különböző κ_ω értékek esetében.

növekedésével.

Most már tudjuk, hogyan viselkedik a robot, ha egyetlen kereket folytonosan meghajtunk. Amennyiben κ_ω kisebb, mint egy, a nem meghajtott kerekek szögsebessége kisebb lesz, mint a meghajtott kereké. Látható, hogy amikor a meghajtó motorblokk leáll, a nem meghajtott kerekek lassító hatást fognak kifejteni a robot kerekeire, a robot megállásához vezetve.

A motorblokkok többféle lassító hatást gyakorolnak. Szimulációinkban csak a viszkozus csillapítás és a motorok által generált ellenelektromotoros erő (CEMF) hatásait vesszük figyelembe. A 3.2.2. fejezetben levezetett (6) és (7) egyenletek alapján a k_{emf} állandó az alábbi egyenlettel becsülhető:

$$k_{emf} = \frac{V_E}{\omega_0} \quad (40)$$

ahol V_E a generált ellenfeszültség és ω_0 az ismert szögsebesség.

B_r esetében a leglényegesebb surlódási csillapítás a kerékcsapágyakból származik. Értékét elméleti közelítéssel tudjuk megbecsülni:

$$B_r = \frac{\mu N r}{\omega_0} \quad (41)$$

ahol μ a csapágy surlódási együtthatója, N a normálerő és r a kerék sugara. A *C Függelékben* található értékeket és a megbecsült általános értékeket behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$k_{emf} = 0.05 \quad (42)$$

$$B_r = 0.008 \quad (43)$$

Ezek becsült értékek, amelyeket szimulációhoz használunk az intuitív látásmód szerzés érdekében. Valós alkalmazásokban ezek kiszámítása munkaigényesebb és összetettebb. Ennek mélyebb vizsgálata nem tartozik jelen kutatás keretei közé, így mélyebben nem vizsgáltam.

Az (6) és az (7) egyenletek segítségével kifejezhető a szögsebesség lassulása:

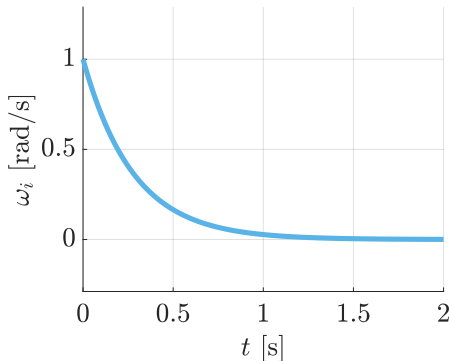
$$I \frac{d\omega}{dt} = -k_{emf} \omega \quad (44)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = -B_r \omega \quad (45)$$

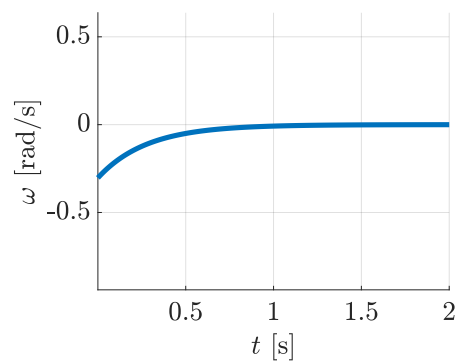
Az hatásokat összeadva a differenciál egyenlet megoldásával kapjuk, hogy a ω időfüggő függvény:

$$\omega(t) = \omega_0 \cdot \exp\left(-\frac{B_r + k_{emf}}{I} t\right) \quad (46)$$

Az (46) egyenlet alapján szimulálhatjuk, hogyan lassulnak a kerekek az idő múlásával. A szimuláció során a 2-es motorblokkot egy impulzusfüggvénnyel rövid ideig meghajtjuk, majd leállítjuk. Elsőként szimuláljuk hogyan lassulnak a robot szögsebességei, ha $\kappa_\omega = 1$. A *14a ábrán* látható, hogy a kerekek szögsebessége exponenciális jelleggel csökken. A *14b ábráról* leolvasható, hogy a robot körülbelül 2 másodperc alatt áll meg.



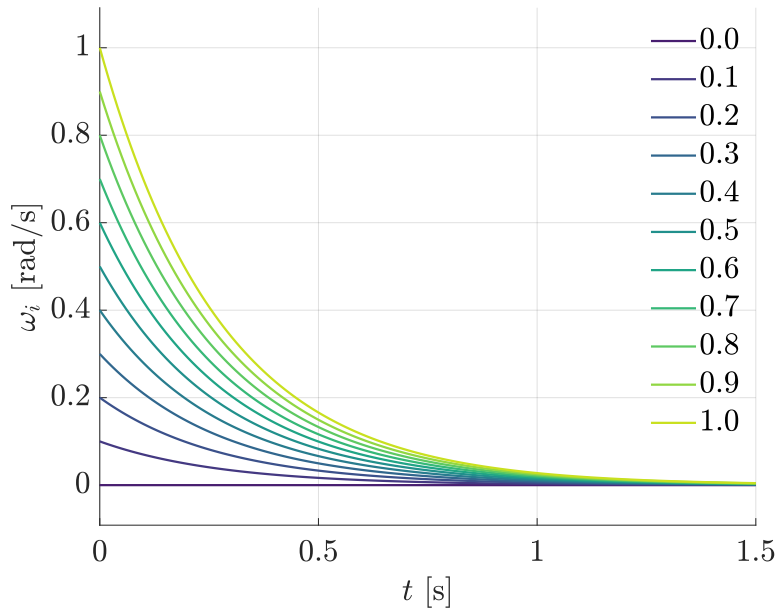
(a) A kerekek szögsebességei az idő függvényében.



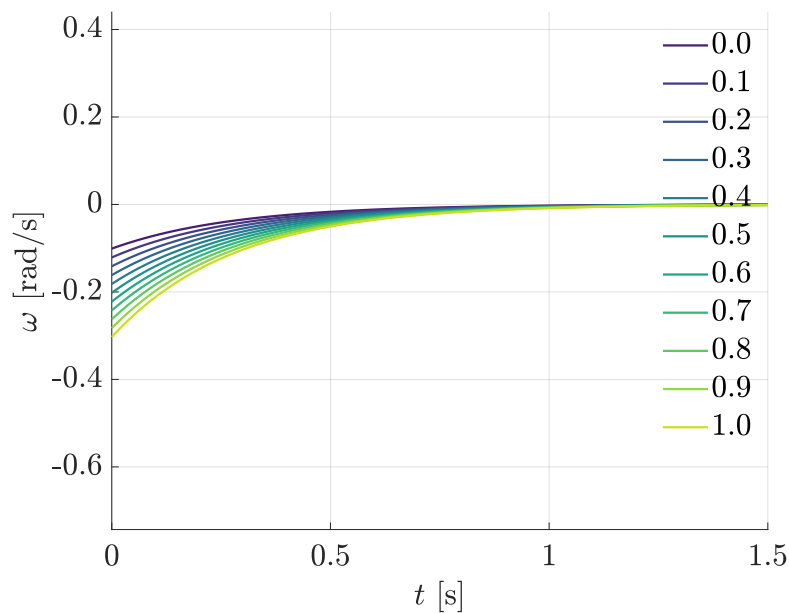
(b) A robot szögsebessége az idő függvényében.

14. ábra. A szögsebességek csökkenése amikor κ_ω egyenlő eggyel.

A κ_ω változásával elvárható, hogy a csillapító hatás eltérjen a nem meghajtott kerekek esetében. A 15. ábra azt mutatja, hogyan csillapodnak a nem meghajtott kerekek különböző κ_ω értékek esetében. A 16. ábra azt ábrázolja, hogy hogyan csökken a robot szögsebessége különböző κ_ω értékek esetén. Itt fontos megjegyezni, hogy a negatív ω a robot forgási irányát jelzi, amely ebben az esetben az óramutató járásával megegyező irány a globális koordináta-rendszerben.



15. ábra. A nem meghajtott kerekek szögsebessége az idő függvényében.

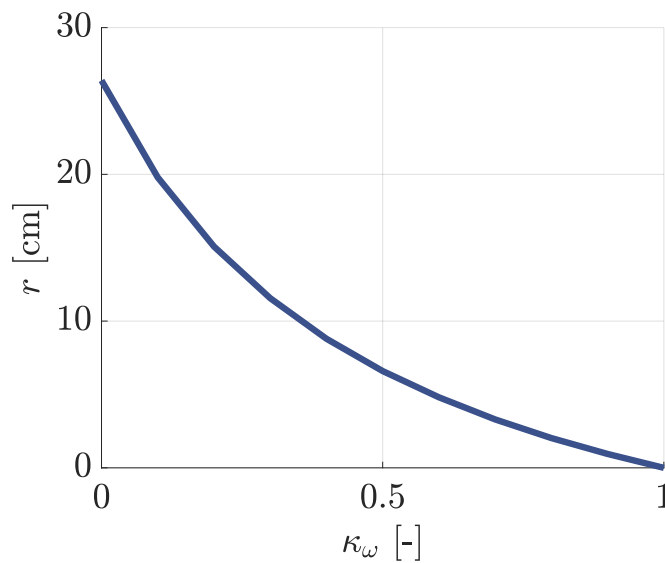


16. ábra. A robot szögsebessége az idő függvényében.

5.4. Eredmények kiértékelése

A legfontosabb szimulációk elemzéséhez a 13. ábrától kezdve a 16. ábráig terjedő eredményeket vizsgáljuk.

Először elemezzük a 13. ábrát. Ez a robot által megtett pálya és a κ_ω érték közötti kapcsolatot ábrázolja. Világosan mutatja, hogy a szögsebességátviteli tényező növekedése csökkenti a robot által bejárt körpálya átmérőjét. Kapcsolatukat a 17. ábra mutatja. Beláthatjuk, hogy a kapcsolatuk nem lineáris, hanem a kör sugara hiperbolikus jelleggel csökken a κ_ω növekedésével.



17. ábra. Kapcsolat a robot által bejárt körpálya sugara és a sebességátviteli tényező között.

A 14a ábra azt mutatja, hogy a kerekek sebessége exponenciálisan csökken az idő múlásával, és a csillapító hatások miatt nullához konvergál. A 14b ábra hasonló eredményeket mutat a robot testének szögsebességére vonatkozóan. Ezek a megfigyelések azonban nem teljesen pontosak, és egy bizonyos pont után nem tükrözik a valós helyzeteket, mivel az ábrázolt szögsebességek soha nem érik el a nullát. Tudjuk, hogy ez nem igaz. A 15. ábrán és a 16. ábrán látható, hogy nagyobb κ_ω értékek gyorsabb relatív szögsebesség csökkenéseket eredményeznek.

6. Konklúzió

A szimulációk futtatása után betekintést nyertem a robotplatform viselkedésébe. Elsőre intuitívnak tűnhet a robotot egy tárcsaként modellezni a nem meghajtott motorblokkok figyelembe vétele nélkül. Azonban megfigyeltem, hogy a tárcsa viselkedése mérhetetlenül eltér, még akkor is, ha a motorblokkok ellenállása zérus, tehát $\kappa_\omega = 1$, szóval a kerekek tengelyei szabadon, ellenállás nélkül foroghatnak.

Hasonló konklúzióra jutottam abban az esetben is, amikor a motorblokk ellenállása végtelen, tehát $\kappa_\omega = 0$. Egyáltalán nem triviális, hogy a robot ilyen esetben is mozgásra képes, és ha elmozdul akkor ez a mozgás milyen jellegű. Bebizonyítottam, hogy a robot valóban képes mozogni ezen feltétel mellett, mind szimulációs környezetben, mind numerikus elemzéssel.

A meghajtott és a nem meghajtott kerekek közötti kapcsolat leírására bevezettem a szögsebességátviteli tényezőt, amely jelölül κ_ω választottam. Ez meghatározza a viszonyt a meghajtott és a nem meghajtott kerekek szögsebességei között. Ezáltal, a tényező segítségével szimuláltam, hogyan függ a robot által bejárt pálya annak különböző értéke esetén. Az eredmények analízise rávezetett, hogy a robot minden esetben körpályán fog haladni, és a körpályának a sugara a κ_ω növekedésével hiperbolikus jelleggel csökken.

A motorblokkok a szögsebességre ható csillapítását is vizsgáltam. A motorblokkok közvetlenül a kerekre hatnak, amelyeken keresztül közvetetten a robot szögsebességét is befolyásolják. A modellezés során az ellenelektromotoros erőből (CEMF) és a viszkózus csillapításból származó nyomatékokat vettem figyelembe. Mind a kerekek, mind a robot szögsebességének csökkenését szimuláltam, exponenciális kapcsolatot fedeztem fel.

7. Jövőbeli kutatási tervek

A modellben több egyszerűsítéssel éltem, például a csillapító hatások vizsgálata során. Több változó modellbe való integrálásával a szimuláció még precízebbé és realisztikusabbá tehető. A dinamikai egyenleteket a modellbe építve, a robot egy átfogóbb leírásához lehet jutni, amely pontosabban írná le a valós folyamatokat.

Egy lényeges egyszerűsítés a modellben a kerék érintőkörök sugarainak átlagának használata. Emiatt a visszaható nyomaték a motorblokkokra egyenletes. Valós robot esetében a kerekek és a talaj érintkezési pontja váltakozik a kerekek felei között, ezáltal változtatva az érintőkör sugarának értékét. Ez a karakterisztika pulzáló hatásként fog megjelenni a visszaható nyomatékokban, amely várhatóan a robot pályájának változását és a csillapító nyomatékokot befolyásolja. Ezen hatás leírása, vizsgálata fontos megállapításokra vezethet.

A κ_ω tényező használata segített leírni a motorblokkok közötti kapcsolatot. Ez egy központi része a modellnek, mely sok paraméter eredőjeként jelenik meg. Számszerűsítése, és a kiszámításához használható összefüggés kidolgozása további kutatások tárgya.

Hivatkozások

- [1] W. Masayoshi and H. Takahiro, „Research for an omnidirectional mobile robot using acrobat, the active-caster with a dual-ball transmission,” *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, vol. 51, no. 6, pp. 400–408, 2015.
- [2] R. Goel and P. Gupta, „Robotics and industry 4.0,” *A Roadmap to Industry 4.0: Smart Production, Sharp Business and Sustainable Development*, pp. 157–169, 2020.
- [3] R. Rojas and A. G. Förster, „Holonomic control of a robot with an omnidirectional drive,” *KI-Künstliche Intelligenz*, vol. 20, no. 2, pp. 12–17, 2006.
- [4] H. Taheri and C. X. Zhao, „Omnidirectional mobile robots, mechanisms and navigation approaches,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 153, p. 103958, 2020.
- [5] R. Vestman, „A comparative study of omnidirectional and differential drive systems for mobile manipulator robots: A performance review of strengths and weaknesses,” 2023.
- [6] S. G. Tzafestas, *Introduction to mobile robot control*. Elsevier, 2013.
- [7] L. Raj and A. Czmerk, „Modelling and simulation of the drivetrain of an omnidirectional mobile robot,” *Journal for Control, Measurement, Electronics, Computing and Communications*, vol. 58, no. 2, pp. 232–243, 2017.
- [8] K. Watanabe, Y. Shiraishi, S. G. Tzafestas, J. Tang, and T. Fukuda, „Feedback control of an omnidirectional autonomous platform for mobile service robots,” *Journal of Intelligent and Robotic systems*, vol. 22, pp. 315–330, 1998.
- [9] P. F. Muir and C. P. Neuman, „Kinematic modeling for feedback control of an omnidirectional wheeled mobile robot,” *Autonomous robot vehicles*, pp. 25–31, 1990.
- [10] Y. Leow, K. Low, and W. Loh, „Kinematic modelling and analysis of mobile robots with omni-directional wheels,” in *7th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, 2002. ICARCV 2002.*, vol. 2, pp. 820–825, IEEE, 2002.
- [11] A. Gfrerrer, „Geometry and kinematics of the mecanum wheel,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 25, no. 9, pp. 784–791, 2008.

- [12] S. Soni, T. Mistry, and J. Hanath, „Experimental analysis of mecanum wheel and omni wheel,” *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*, vol. 1, no. 3, pp. 292–295, 2014.
- [13] P. Pillay and R. Krishnan, „Modeling, simulation, and analysis of permanent-magnet motor drives. ii. the brushless dc motor drive,” *IEEE transactions on Industry applications*, vol. 25, no. 2, pp. 274–279, 1989.
- [14] T. Abut, „Modeling and optimal control of a dc motor,” *Int. J. Eng. Trends Technol*, vol. 32, no. 3, pp. 146–150, 2016.
- [15] G. Á. Sziki, A. Szántó, and E. Ádámkó, „Review of methods for determining the moment of inertia and friction torque of electric motors,” *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 21, no. 4, 2024.

Függelék A: Nomenklatúra

Kifejezések

Abbreviation	Full Meaning
CEMF	Counter Electromotive Force
DoF	Degree of Freedom
EMF	Electromotive Force
ICC	Instantaneous Centre of Curvature
OWMRs	Omni-directional Wheeled Mobile Robots
WMRs	Wheeled Mobile Robots

Változók

Jelölés	Leírás	Mértékegység
ω	A robot szögsebessége	rad/s
ω_i	Az i indexű motorblokk kerekének szögsebessége	rad/s
v_{S_i}	Az i motorblokk kerekének középpontjának sebessége $\mathcal{F}_i$ -ben	m/s
v_O	A robot középpontjának sebessége	m/s
$\mathbf{r}_{OS_i}$	A robot középpontjából az i motorblokkba mutató vektor	m
i	A motorblokk indexe, $i \in [1, 3]$	-
B_r	Surlódási együttható	Nm/rad/s
k_{emf}	CEMF állandó	Nm/rad/s

Függelék B: T_{robot} mátrix elemei

$$t_{11} = \frac{r (\sin(\beta - \varphi_z(t)) + \sin(\varphi_z(t)))}{\cos(2\beta) - 1}$$

$$t_{12} = \frac{r \sin(\varphi_z(t))}{\cos(\beta) + 1}$$

$$t_{13} = \frac{r (\sin(\varphi_z(t)) - \sin(\beta + \varphi_z(t)))}{\cos(2\beta) - 1}$$

$$t_{21} = \frac{r (\cos(\beta - \varphi_z(t)) - \cos(\varphi_z(t)))}{\cos(2\beta) - 1}$$

$$t_{22} = -\frac{r \cos(\varphi_z(t))}{\cos(\beta) + 1}$$

$$t_{23} = \frac{r (\cos(\beta + \varphi_z(t)) - \cos(\varphi_z(t)))}{\cos(2\beta) - 1}$$

$$t_{31} = \frac{r}{2l(\cos(\beta) + 1)}$$

$$t_{32} = \frac{r \cos(\beta)}{l(\cos(\beta) + 1)}$$

$$t_{33} = \frac{r}{2l(\cos(\beta) + 1)}$$

Függelék C: Festo Robotino méretei

Jelölés	Magyarázat	Érték	Mértékegység
l	$l_{belső}$ és $l_{külső}$ átlaga	132	mm
$l_{belső}$	A kerék belső felének érintőkörének sugara	116	mm
$l_{külső}$	A kerék külső felének érintőkörének sugara	147	mm
m	Omni-kerék tömege	0,20	kg
I_w	Kerék tehetetlenségi nyomatéka	0,016	kg · m ²
r	Kerék sugara	4	cm
β	Félszög két szomszédos kerék tengelye között	$\pi/3$	rad