



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
EGYETEM

ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK



Fémhabok termikus viselkedésének vizsgálata

Szerző:

Cseh Dániel

Konzulens:

Dr. Kovács Róbert Sándor

Tudományos Diákköri Konferencia

Budapest, 2024

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Elsőként szeretném kifejezni köszönetemet konzulensemnek, Dr. Kovács Róbert Sándornak (Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék), aki megismertette velem ezt a témát, és akinek bevilágító észrevételei és tanácsai nélkül ez a munka nem valósulhatott volna meg.

A munka a 2021-2.1.2-HÖ-2021-00004 számú projekt keretén belül a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a 2021-2.1.2-HÖ pályázati program finanszírozásában valósult meg.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, motiváció	1
2. Fémhabokról általánosságban	2
2.1. Történetük	2
2.2. Alapvető tulajdonságaik	3
2.3. Előállítás	4
2.3.1. Előállítás olvadékból	4
2.3.2. Előállítás szilárd fémből	5
2.3.3. Elektrodepozíció	6
2.3.4. Párolgatótásos lerakódás	6
2.4. Alkalmazási területek	6
2.4.1. Fémhabok széles körű alkalmazásai	7
2.4.2. Fémhabok hőtani alkalmazásai	8
3. Hőtranszport habosított, porózus anyagokban	10
3.1. Fémhabok hővezetésének meghatározása kísérletekkel	11
3.2. A hővezetési tényező analitikus becslései	12
3.3. Számítógépes szimulációk használata	12
3.4. Kísérleti háttér, hőimpulzus kísérlet	13
3.5. Fourier és azon túli hővezetési modellek	14
4. Modell felállítása fémhabokban történő hőtranszport leírására	18
4.1. Elméleti alapok	18
4.2. Egyenletek felírása	20
4.3. Skálafüggetlenség	21
4.4. A numerikus megoldás előkészítése	25
4.4.1. Diszkretizálás homogén anyag esetén	25
4.4.2. Diszkretizálás üreggel rendelkező anyag esetén	25
5. A modell megoldása	27
5.1. Homogén anyag vizsgálata	27
5.2. Szimulációk előkészítése	27
5.2.1. α_1, α_2 paraméterek meghatározása	28
5.2.2. Térlépések számának meghatározása	30
5.2.3. Érzékenységvizsgálat	32
5.3. Szimulációk elvégzése és eredmények	34
5.3.1. r_λ függés	34
5.3.2. Üreg méretétől való függés	36
5.3.3. Üreg helyzetétől való függés	38

5.3.4. 3D hőmérséklet-eloszlás	39
6. Összefoglalás	42
6.1. Összefoglalás	42
6.2. Summary	42
Hivatkozások	44
Függelék	47

1. Bevezetés, motiváció

A különböző habosított, cellás, nem homogén anyagok használata egyre inkább elterjedt a mérnöki gyakorlatban. A polimerekből készült habok már széles körben elterjedtek, de a fémhabok is nagyon kedvező tulajdonságokkal rendelkeznek. Mivel sűrűségük kisebb, mint a homogén mátrixanyag sűrűsége, ezért kiválóan alkalmazhatók szerkezeti anyagként olyan területeken, ahol fontos az alacsony tömeg. Erre kiváló példa a járműipar. Hőtani alkalmazásaiként használhatók továbbá szigetelésként, mivel a bennük lévő gáz (jellemzően levegő) miatt jóval rosszabb hővezető képességgel rendelkeznek, mint a homogén anyagok. Ezen felül a nyitott cellás fémhabokon folyadékot átvezetve hőcserélőként is használhatók.

A fémhabok termikus viselkedésének megértése és modellezése kulcsfontosságú a különböző alkalmazások tervezéséhez és optimalizálásához. A homogén anyagokkal szemben a fémhabok szerkezete komplexebb, és a bennük lévő légcellák vagy más anyagok jelentősen befolyásolják a hővezetési tulajdonságokat. Míg a homogén anyagok esetében a Fourier-törvény széles körben használt a hővezetési folyamatok leírására, a fémhabok esetében ez az egyszerű modell nem elegendő. A sejtek közötti hővezetési útvonalak, a porozitás mértéke és a sejtek mérete, alakja mind-mind befolyásolják a hőátadási folyamatokat. Ezért a fémhabok vizsgálatához és modellezéséhez újabb és összetettebb matematikai modellekre van szükség.

Jelen dolgozatban szakirodalmi áttekintést végzek, amelyben bemutatom a fémhabok alapvető tulajdonságait, előállítási módjait és alkalmazási területeit. Ezután bemutatom a fémhabok termikus modellezésére szolgáló különböző modelleket. Az irodalmi áttekintés után célom, hogy egy új, térbeli egydimenziós, időfüggő, diszkrét modell segítségével vizsgáljam a fémhabok termikus viselkedését.

2. Fémhabokról általánosságban

Mindennapjaink során is sok, sejtes felépítésű, nem homogén anyaggal találkozhatunk, ha nyitott szemmel járunk. Elsőként gondoljunk a természetben fellelhető, természetesen kialakult anyagokra. Az egyik legismertebb, és legszemléletesebb példa talán a méhsejt, de hogy egy mérnöki gyakorlatban is használható példánál maradjak, gondoljunk a fára. A fa is egy sejtes szerkezetű anyag, ami többnyire hatszög alakú, egymással összekapcsolódó cellákból áll, amelyek nagyban meghatározzák a fa mechanikai tulajdonságait. Többek között lehetővé teszik, hogy a fa egyszerre legyen erős, de könnyű, amely tulajdonságok nagyban hozzájárultak ahhoz, hogy a fa napjaink egyik leggyakrabban és legelőszeretettel használtabb szerkezeti anyaga legyen [1]. A másik ilyen anyag maga a csontozatunk, de gondolhatunk például kőzetekre is, amelyeknek ugyanígy nem homogén, porózus szerkezetük van.

Talán a természetben fellelhető cellás szerkezetű anyagok kedvező tulajdonságait látván kezdhettek el kísérletezni azzal, hogy hasonló szerkezetet fémekkel is elérjenek. Ez természetesen logikus döntésnek tűnik, mivel kvázi csak a mátrixanyag erősségét és stabilitását növeljük, aminek köszönhetően ugyanazok a kedvező tulajdonságok jelennek meg, amelyek a fa vagy polimerhabok esetében. A habosításnak köszönhetően csökken a fém sűrűsége, ezzel ugyanúgy, mint a fa esetében, kiváló szerkezeti elem válik belőle, nagyobb terhelhetőséggel. Továbbá, párhuzamot vonhatunk a hőszigetelésként használt, széles körben elterjedt EPS (polisztirol hab) és a fémhabok között is. Míg az EPS kiválóan használható épületek szigetelésére, a fémhabokkal is ugyanez a helyzet. Persze, a fémhabok hővezető képessége lényegesen magasabb a nemfémes habokhoz képest, és mivel ez a különbség legalább tízszeres, ezért ezek a habok nem alkalmazhatók közvetlenül szigetelésként, bár némi tűzvédelmet nyújtanak. Például, a zárt cellás habokat tekintve, hővezető képességük 8-30-szor alacsonyabb a teljes sűrűségű anyafémhez képest, így például alkalmazhatóak egy autóban, az utastér és motortér elválasztására tűzvédelmi szempontból. A zárt cellás fémhabokhoz képest a nyitott cellás fémhabok a hőátadás fokozására használhatóak például hőcserélőkben [2].

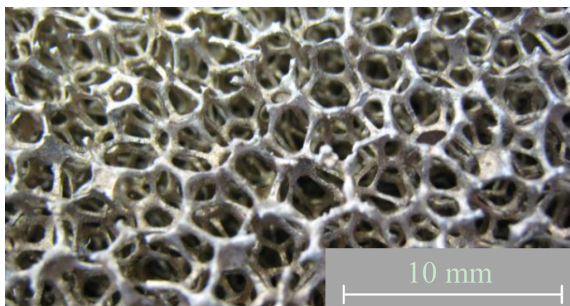
2.1. Történetük

A fémhabok fejlesztése a [2] szerint az 1960-as években kezdődött, amikor megkezdődtek az első kísérletek a fémek habosítására a repülőgép- és autóipari felhasználás érdekében. Ezen kezdeti kutatások során a cél az volt, hogy a fémek könnyítésével olyan anyagokat hozzanak létre, amelyek megtartják a fémek szerkezeti szilárdságát, de jelentősen csökkentik azok súlyát. Természetesen ennél már jóval korábban elkezdtek foglalkozni ezen szerkezetű fémek előállításával. J. Bahnart [3] cikkében összeszedte a fémhabok történetének legfontosabb mérföldköveit.

Első említésük egy 1925-ös francia szabadalomban volt M. A. Demeller által, ahol az olvadt fémhez adott inert gáz, illetve habosító anyag folyamatáról írt, hogy fémlemezeket és egyéb tárgyakat állítson elő fémhabból. A következő lépéseket az 1950-es évek elején tették az Amerikai Egyesült Államokban, ahol először TiH_2 -t vagy ZrH_2 -t, majd MnO_2 -t használtak habosító anyagként, amivel már egyenletesebb, kisebb buborékokat tudtak elérni. Aztán az 1960-as években Currie B. Berry lépett előre azzal, hogy a fémolvadékot oxigénnel vagy szén-dioxiddal sűrítette. Ezután természetesen még számos előrelépés történt. 1985-ben Japánban olyan gyártási folyamatot fejlesztettek ki, ahol kalciumot adtak az olvadt alumínium ötvözetéhez, melyet TiH_2 -vel habosítottak, majd a kapott habot hangelnyelésre és elektromágneses hullámok árnyékolására használtak. További kutatások zajlottak még többek között annak érdekében, hogy más alternatív anyagokat találjanak a habok stabilizálására a kalciumon kívül, de természetesen a mátrix- és habosító anyag anyagát illetően is folytak kutatások. 1999-ben aztán, számos könyv és cikk megjelenése, valamint számos workshop megrendezése után, elindult a *MetFoam* konferenciasorozat, amelyet először a németországi Bremenben tartottak meg, majd ezután napjainkig, minden második évben megrendeznek.

2.2. Alapvető tulajdonságaik

A fémhabok szerkezete porózus, ami azt jelenti, hogy a homogén anyagtól eltérő, valamilyen fluidum is megtalálható bennük. A fémhabok különböző ipari alkalmazásainak is ez a porózus szerkezet az alapja, mivel ez számos kedvező tulajdonságot eredményez, beleértve a jó hőszigetelést vagy energiaelnyelő képességet. A fémhaboknak alapvetően két típusa létezik: a zárt- illetve nyitott cellás habok.



(a)



(b)

2.1. ábra. Nyitott cellás (a) [4], illetve zárt cellás (b) [5] fémhabok

A zárt cellás fémhaboknál a hab sejtjei teljesen zártak, el vannak szeparálva egymástól, így fluidum nem tud átáramolni rajtuk. A nyitott cellás fémhabok ezzel szemben olyan szerkezettel rendelkeznek, amelyben a sejtek egymással összeköttetésben állnak, így a gázok és folyadékok szabadon áramolhatnak a habon keresztül. Ez a típus kiválóan alkalmas hőcserélőkben és szűrőrendszerekben való alkalmazásra, mivel a nyitott sejtszerkezet

elősegíti a hő és folyadék áramlását.

A fémhabok másik fontos tulajdonsága a cellák elhelyezkedése és kapcsolata után, a relatív sűrűségük, ami a ρ/ρ_s (ρ a hab sűrűsége és ρ_s a fal anyagának, tehát a fémnek a sűrűsége) képlettel számítható [2]. Ez a mérőszám a későbbiekben még fontos szerepet fog játszani. Ebből lehet következtetni a fémhab mechanikai tulajdonságaira is, de ami nekünk még ennél is fontosabb, a hab hővezető képessége is nagyban függ e paraméter értékétől. A fémhabok szerkezeti jellemzőihez tartozik a cellák mérete és alakja, amelyek nagyban befolyásolják az anyag mechanikai tulajdonságait és funkcionális képességeit. Továbbá, a cellák alakjának anizotrópítása jelentős, akár 30 %-os rugalmassági modulus eltéréshez is vezethet a különböző irányokban [2].

A habok hőtani tulajdonságait tekintve az olvadáspontjuk, hőtágulási együtthatójuk és fajhőjük ugyanaz, mint a mátrixanyagé [2]. A hővezetési tényezőjük természetesen eltérő, de ennek meghatározására számos megközelítés létezik. Ezeket a 3. fejezetben részletezem.

2.3. Előállítás

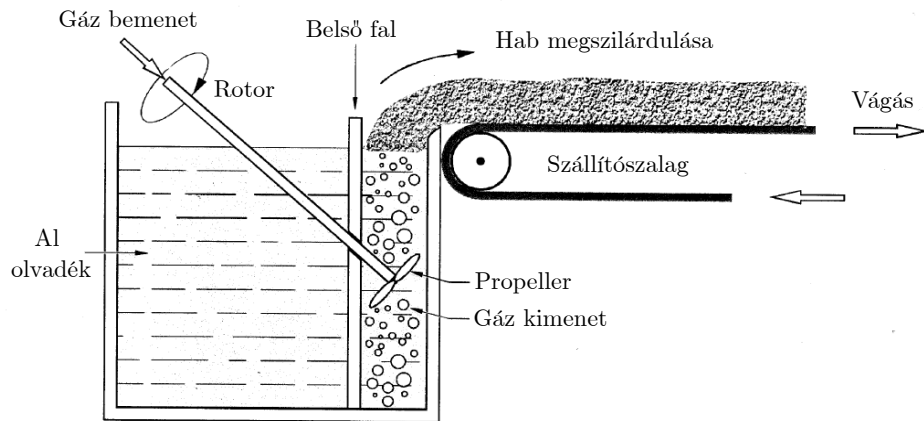
A [2] és [6] irodalmak alapján a fémhabok előállítása 4 fő kategóriába sorolható, amely a feldolgozott fém halmazállapota alapján van osztályozva.

2.3.1. Előállítás olvadékból

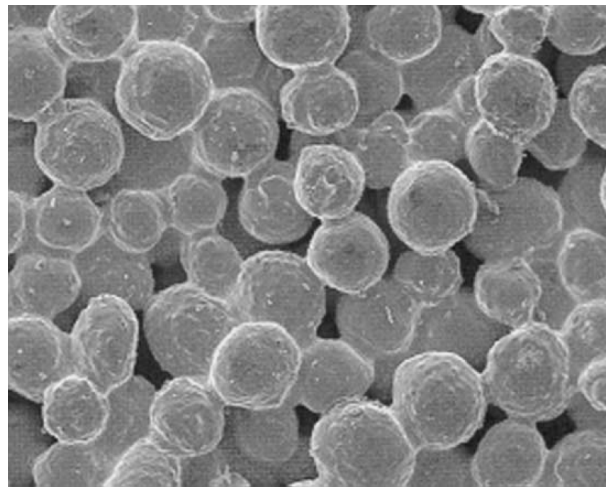
Kezdjük azokkal a módszerekkel, amikor a fémhabot olvadékból állítják elő. Az egyik módszer az, amikor az olvadt fémbe közvetlenül gázbuborékokat fecskendeznek, így módon létrehozva a buborékokat (2.2. ábra). Egy másik módszer alkalmazása során valamilyen gáz kibocsátó fúvóanyagot adnak a fémhez. Tehát, amikor a fémet újra olvadáspont fölé melegítik, a fúvóanyag eléri azt a hőfokot, amikor gázzá alakul, így kialakítva a buborékokat.

A "gasars" módszer azon alapszik, hogy egyes fémek a hidrogénnel eutektikus rendszert képeznek. A folyamat során a fémolvadékot hidrogén atmoszférában, magas nyomáson (akár 50 atm) tartják, hogy homogén gázzal telített olvadékot kapjanak. Amikor az olvadékot lehűtik, a hidrogén gáz buborékokat képez, amelyek a megszilárdulás során a fém belsejében maradnak, így porózus szerkezet jön létre. Léteznek aztán olyan módszerek is, amikor például egy polimerhab segítségével öntőformát hoznak létre, a polimert a formából kiégetik, majd helyére fémet öntenek, így legyártva a fémhabot.

Az úgynevezett "spray-formálás" során a fémet apró cseppekké porlasztják, majd ezt egy lemezre gyűjtik. Ezzel a technikával finom szemcseméretet lehet elérni, illetve le-



2.2. ábra. Fémhab előállítása, az olvadékba való gáz befecskendezéssel [6].



2.3. ábra. Színterezéssel előállított porózus bronz, körülbelül 100 μm átmérővel [6].

hetőséget kínál fém mátrix kompozitok (MMS) létrehozására, ha az olvadt fémmel együtt más fémport vagy karbidokat fecskendeznek be.

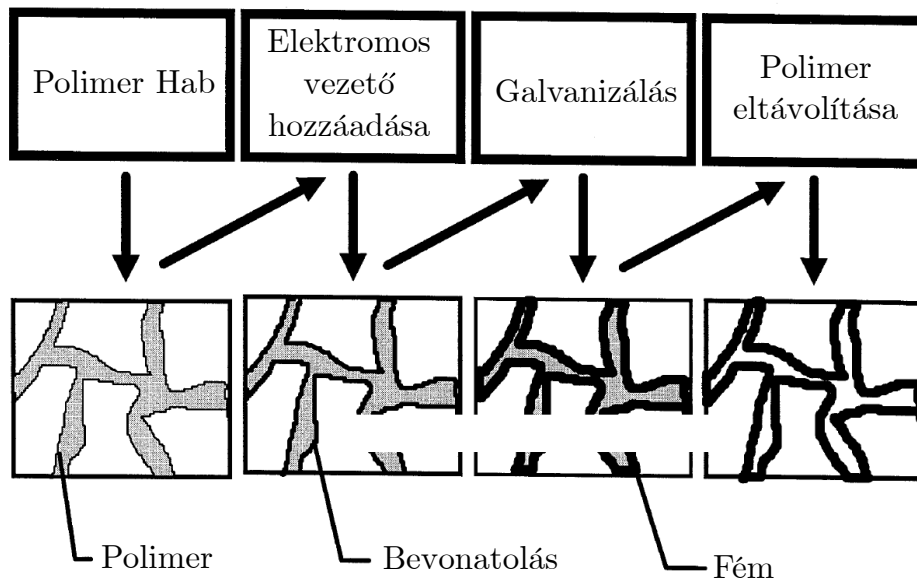
2.3.2. Előállítás szilárd fémből

A második nagy csoport az, amikor a fémhabot szilárd fémporból hozzák létre. Ennek egyik formája az, amikor a fémport vagy fémszálakat szilárd formában tömörítenek, majd színterezés alkalmazásával a szemcsék vagy szálak összeolvadnak, ezzel egy porózus szerkezetet létrehozva (2.3. ábra).

Egy másik technológiai eljárás ugyancsak a fémpor tömörítésével kezdődik oly módon, hogy gázbuborékok szoruljanak bele. Ezután a fémet melegítik, ami során a gázbuborékok kitágulnak, és így hoznak létre pórusokat a tömörített fémporban. Térkitöltő anyagok, mint például polimer granulátumok fémporba keverésével elérhető az, hogy a tömörítés után, ezeket melegítés vagy oldás segítségével eltávolítsák, így hozva létre a porózus szerkezetet.

2.3.3. Elektrodepozíció

Ezen eljárás során, egy nyitott cellás polimer habot (amelyet előtte elektromos vezetővé tettek pl. grafit alapú iszapba mártva) vonnak be fémmel úgy, hogy a fém a habon galvanizálás során lerakódik. Ezután a polimer habot hőkezeléssel távolítják el, ezzel egy nyitott cellás fémhabot kapva. A folyamat a 2.4. ábrán látható



2.4. ábra. Elektrodepozíciós módszer folyamata fémhabok gyártására [6].

2.3.4. Párologtatásos lerakódás

Hasonlóan az elektrodepozícióhoz, ezen eljáráshoz is szükség van valamilyen habosított elő-gyártmányra, például egy polimer habra. Először egy vákuumkamrában fémgőzt hoznak létre, amelyet az elő-gyártmányra kondenzálnak. Ezt követően az elő-gyártmányt termikus vagy kémiai úton eltávolítják, létrehozva a fémhabot.

2.4. Alkalmazási területek

Számos kedvező tulajdonságuk miatt a fémhabok alkalmazhatósága széles skálán mozog. Vegyük a legfontosabb tulajdonságaikat [7, 6]:

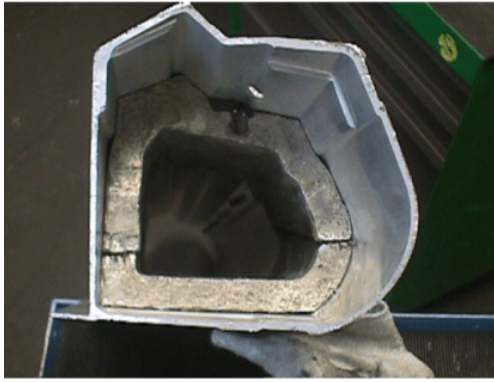
- **Kis sűrűség:** a fémhabok nagy előnye az, hogy minden olyan tulajdonsággal rendelkeznek, mint az a fém amelyből készültek, viszont tömegük sokkal kisebb a nagy porozitás miatt. Egyszóval, kombinálják a porózus anyagok könnyűségét, a fémek erősségével.
- **Csillapítás:** Cellás szerkezetük miatt sokkal nagyobb alakváltozásra képesek adott energia elnyelésekor, mint tömör megfelelőik.

- **Hőszigetelés, hővezetés:** a cellákban lévő fluidum rosszabb hővezető-képessége miatt hőszigetelésként is alkalmazhatóak, viszont nagy felület/térfogat arányuk miatt, hőcserélőként is jól funkcionálnak.
- **Hang- és rezgéscsillapítás:** mivel a fémhab panelek nagyobb természetes rezgési frekvenciával rendelkeznek, mint az azonos tömegű szilárd lemezek, alkalmazhatóak rezgéscsillapításra is [2].
- **Tűz- és korrózióállóság:** mivel a fémhabok megtartják az anyafém tulajdonságait, magas olvadásponttal, és jó korrózióállósággal rendelkeznek.
- **Elektromos vezetőképesség:** a fémhabok megtartják az anyafém elektromos vezetőképességét, így olyan helyeken is alkalmazhatóak ahol ez fontos (pl. akkumulátorok alkatrészei).

Számos kedvező tulajdonságuk ellenére a fémhabok még napjainkban sem széles körben elterjedtek, és ennek természetesen oka van. Ez az ok pedig nem más, mint magas áruk. Ez annak köszönhető, hogy előállításuk is drágább, mint a közönséges fémek gyártása. A gyártási eljárások komplexebbek, több lépésből állnak, és speciális felszerelést, valamint anyagokat igényelnek. Csak példaképpen, egy fémhabot tartalmazó alumínium szendvics-panel ára 60-120 € között mozog [7], míg egy szimpla, alumínium tábla már 30 €-tól kapható. Magas áruk miatt még csak olyan iparágakban terjedtek el, ahol hosszútávon visszahozzák az árukat, ilyen például az űr- és repülőipar, ahol hosszútávon fogyasztáscsökkenés érhető el.

2.4.1. Fémhabok széles körű alkalmazásai

A [7] cikk számos gyakorlati példával szolgál, ahol a fémhabok alkalmazása mellett döntöttek. Például, ipari gépek és robotok esetében a fémhabokkal elérhető tömegcsökkenés következtében csökken a szerkezetek tehetetlensége, ami gyorsabb és pontosabb beállást tesz lehetővé. Ahogy már említettem, a járműgyártás több szempontból is profitál a fémhabok által nyújtott lehetőségekből, nem csak alacsonyabb tömegük (ami az elektromos járművek elterjedésével egyre fontosabb), de nagy csillapítókéességük miatt is. Például egy Ford A-oszlopába fémhab betéteket alkalmazva kiderült, hogy egy mindössze 3%-os tömegnövekedéssel 30%-kal növelhető az energiaelnyelés, amelyet VEM-szimulációk és valós mérések is alátámasztanak [8]. Már sorozatgyártásban is alkalmaztak fémhabokat autóalkatrészként, például magas kategóriás luxusautóban, a Ferrari 360 és 430 modellek küszöbét töltötték meg habbal (2.5a. ábra), hogy megerősítsék a vázat, de az Audi Q7-be is készült 7g tömegű alumíniumhab alkatrész csillapítóelemként. Mozdonyok, villamosok csillapító szerkezetében is előszeretettel alkalmazzák őket, a 2.5b. ábra a budapesti Combino villamos csillapító szerkezetébe épített alumíniumhabot mutatja.



(a)



(b)

2.5. ábra. Fémhab alkalmazása Ferrari küszöbének megerősítésére (a), illetve a budapesti Combino villamos alumíniumhabból készült csillapítóeleme (b) [7].

Számos alkalmazási lehetőséget rejt a fémhabok zajszigetelő képessége is, például előadótermek és éttermek mennyezetén, mivel ezek a habok kiválóan elnyelik a hanghullámokat és önhordók. Az Alporas¹ habokat használják vonatok sínjeinél és metróalagutakban is, ahova olyan hangszigetelők kellene, amelyek tűzállóak.

2.4.2. Fémhabok hőtani alkalmazásai

A dolgozatom szempontjából talán legfontosabb alkalmazási terület az, amikor a fémhabok hőszigetelését, tűzállóságát vagy a fém jó hővezető-képességét és a hab által biztosított nagy felületének ötvözetét használják ki [7]. Ezek a tulajdonságok mind azt biztosítják, hogy a fémhabok megállják a helyüket hőálló csomagolóanyagként, lángfogóként, tűzfalként, de hőcserélőként is (2.6. ábra).

Boosma és munkatársai [9] cikkükben egy melegített alumíniumhabot vizsgáltak hőcserélőként. A habon levegőt áramoltattak, míg egy oldalát konstans hőmérsékleten tartották, és kiderült, hogy az alumíniumhab 2-3-szor nagyobb hatékonysággal adta át és vezette el a közölt hőt, mint a kereskedelmi forgalomban lévő hőcserélők, azonos szivattyúteljesítmény mellett. A hőcserélők fontos tulajdonsága tehát természetesen a hőátadási tényezőjük, illetve az, hogy milyen az áramlási ellenállásuk, mivel ez határozza meg, hogy mekkora szivattyúteljesítményre van szükség.

Jazi és munkatársai [10] magas hőmérsékletű kompakt hőcserélőt építettek, amely képes ellenállni az égési gázok által okozott hősokknak, miközben levegővel hűtötték azt. A hőcserélőben nyílt pórusú nikkelhabot használtak két különböző sűrűséggel (10 és 20 Pores/Inch vagy PPI), amelyen Inconel 625 bevonatot hoztak létre, a hőátadás serkentése érdekében. Vizsgálták a nyomásesést, amely a szivattyúteljesítmény szempontjából fon-

¹Az Alporas egy alumíniumhab, amelyet a japán Shinko Wire gyárt, és kiválóan alkalmas hangelnyelésre.



2.6. ábra. Különböző hőcserélő konstrukciók az M-pore és a Mayser GmbH jóvoltából [7].

tos, illetve természetesen a hőátadást és a magas hőmérséklettel való ellenállóképességet is. Ahogy azt várni lehetett, a 20 PPI hab ellenállása nagyobb volt az áramlással szemben, míg a hőátadása csaknem 80%-kal volt több, mint az alacsonyabb sűrűségű habé.

3. Hőtranszport habosított, porózus anyagokban

Ahogy a fémhabok fejlesztése és kutatása felgyorsult, illetve újabb és újabb alkalmazási területek jelentek meg, fontossá vált a különböző paraméterekkel való tervezhetőség fejlesztése is. Az, hogy mely paraméterekről van szó, természetesen nagyban függ az alkalmazási területtől is.

A szakirodalomban számos cikk található a habok különböző alkalmazási területeiről. Használhatóak hűtőbordaként nagy teljesítményű elektronikai eszközökhöz [11], folyadékkal töltött hőcserélőkhöz [12], de szigetelésként is [2]. Annak érdekében, hogy ez a lista bővülhessen, arra van szükség, hogy rendelkezésre álljanak megfelelő modellek, amelyek képesek leírni az anyag viselkedését és tulajdonságait.

Homogén anyagok esetén könnyebb dolgunk van, mivel léteznek jól bevált, kiforrott egyenletek (pl. Fourier-törvény), amelyek képesek leírni az anyagok termikus viselkedését. Nem ilyen egyszerű a helyzet a bonyolult szerkezetű habos anyagok esetében, mivel a belső szerkezet jelentősen befolyásolja az egyes habok termikus viselkedését. Gondoljuk csak végig, miért is van ez. Ahogy már korábban említettem, akkor beszélünk fémhabról, amikor a fém mátrixanyagban, egymástól elszeparált, vagy egymással összeköttetésben lévő, folyadékkal vagy levegővel töltött üregek helyezkednek el. Ez már alapból egy bonyolultabb hővezetési esetet eredményez, mivel nemcsak a fém hővezetési tulajdonságaival kell számolnunk, de a benne lévő gáz vagy folyadék hővezetésével is. Ezen felül nagy befolyásoló tényező a belső szerkezet, illetve a porozitás is, mivel nem mindegy, hogy melyik hővezetési tényezőt milyen súllyal vesszük figyelembe. Természetesen egy pontosabb eredményhez azonban a belső szerkezet pontos ismeretére lenne szükség, viszont ez a legtöbb esetben nem lehetséges. A hővezetésen kívül persze még gondolnunk kell a hőátadásra és a hősugárzásra is. Hőátadás léphet fel az üreg fém fala, illetve a fluidum között, illetve hősugárzás is történhet az üreg egyik faláról a másikra.

Az elmúlt évtizedekben született kutatások különböző megközelítésből vizsgálták a habokban történő hőtranszportot. Vannak egyszerűbb modellek, amelyek valamilyen effektív hővezetési tényezőt keresnek különböző paraméterek függvényében. Azonban az informatika és számítógépek nagy ütemű fejlődésének köszönhetően jelentősen megnőtt a rendelkezésünkre álló számítási teljesítmény. Emiatt természetesen a fémhabokban történő hőtranszport vizsgálatára is születtek szimulációk, amelyek kihasználják a végeselem vagy véges térfogatok módszere által nyújtott lehetőségeket.

Ahhoz, hogy a későbbiekben bemutatott egyenletek, görbék, illetve az általam használt modellt megértse az olvasó, elengedhetetlen az, hogy bemutassam a habok termikus modellezésére eddig használt modelleket, illetve mérési eredményeket. Tehát ebben a fejezetben feldolgozom a kapcsolódó szakirodalmat, és bemutatom a fellelhető, kapcsolódó

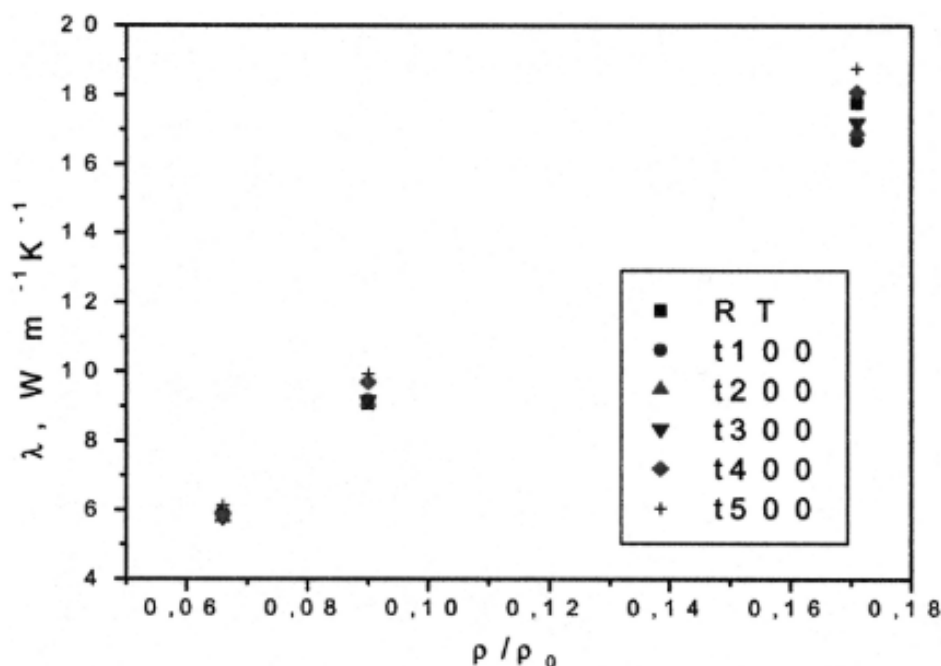
megközelítéseket.

3.1. Fémhabok hővezetésének meghatározása kísérletekkel

Babcsán és munkatársai [13] Alporas alumínium habokon végeztek méréseket, a habok hővezetési és elektromos vezetőképességét vizsgálva. Az alumíniumhab minták hővezetőképességét összehasonlító módszerrel mérték, ahol a minták hővezetését ismert referenciaanyagokhoz hasonlították. A mérésekhez három, különböző relatív sűrűséggel (ρ_{rel}) rendelkező habot használtak, ahol

$$\rho_{rel} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (3.1)$$

ahol ρ a hab, ρ_0 pedig a mátrixanyag sűrűsége. A méréseket elvégezték 100, 200, 300 és 400 °C-on, illetve egy minta esetében 300 °C-on légköri nyomáson és vákuumban is. A vákuumban és légköri nyomáson is elvégzett mérések esetében is hasonló eredményeket kaptak a hővezetési együtthatóra (6,14 W/(m K) légköri nyomáson, 6,20 W/(m K) vákuumban), így arra a következtetésre jutottak, hogy az üregekben levő hőátadás elhanyagolható, ahogy 500 °C alatt a sugárzás hatása sem jelentős. A mérési eredmények lineáris összefüggést mutattak a relatív sűrűség és a hővezető-képesség között, illetve a hőmérséklet növelésével enyhe növekedés volt megfigyelhető.



3.1. ábra. Különböző relatív sűrűségű alumíniumhabok hővezető-képessége, különböző hőmérsékleteken (°C). RT a "room-temperature", tehát a szobahőmérsékletre utal, a többi pont pedig a különböző hőmérsékleteket jelöli [13].

Solórzano és munkatársai [14] különböző porozitású alumíniumhabok hővezető-képességét mérték a TPS (Transient Plane Source) technika alkalmazásával. Ez a módszer lehetővé

teszi a hőmérséklet időbeli változásainak mérését a hab keresztmetszetének több pontján. A kapott adatokat CT-vizsgálatokkal összevetve megerősítették, hogy a habon belüli sűrűség- és pórusméret-változások befolyásolják a hővezetést. Az eredmények azt mutatják, hogy a sűrűség növekedésével a hővezető-képesség is nő, továbbá a TPS módszer alkalmas a hab belső inhomogenitásainak észlelésére.

3.2. A hővezetési tényező analitikus becslései

A szakirodalomban több cikk is megtalálható, amelyben a fémhabokban történő hővezetést analitikus módon próbálják leírni. Az alábbiakban a teljesség igénye nélkül bemutatok néhány analitikus megközelítést. Leach [15] cikkében összeszedett pár analitikus modellt, de kiemelte, hogy ezek elhanyagolják a cellákban történő hőátadást és hőszugárzást. A leg-egyszerűbb soros és párhuzamos modellek, ahol a hővezetés sorosan vagy párhuzamosan kapcsolt csatornákon keresztül történik, lineáris kapcsolatokat feltételeznek. Egyik modell sem megfelelő a fémhabok hővezetésének reális modellezésére, de a párhuzamos modell pontosabb eredményeket adott mérési adatokkal összevetve azt. Bemutatott két jóval realisztikusabb modellt is. Az egyikben a fluidummal töltött teret négyzetes cellák alkották, ezek falai pedig a mátrixanyagból voltak. Egy másik realisztikus modell, amikor az anyagban elhelyezkedő cellákat gömbként modellezte.

Boosma és munkatársai [16] egy háromdimenziós geometriájú modell alapján, egy egydimenziós analitikus modellt fejlesztettek ki, amely alkalmas folyadékkal telített fémhabok hővezetési tényezőjének meghatározására. A fémhab pórusait tetraikaidekaéder geometriájú szerkezettel modellezték, mivel a fémhab, gyártási módszerének természetéből fakadóan gyártás során ezt a geometriát veszi fel. A geometria pontos ismerete lehetővé tette azt, hogy a hab hővezetési tényezőjét pontosan meghatározzák, a fém és a fluidum térfogatarányait figyelembe véve. A modell egyezik a mérési eredményekkel, és megmutatja, hogy azon fémhabok esetében, ahol a fém hővezetési tényezője jelentősen magasabb, jobban megéri a fém hővezető-képességét növelni, ha a teljes hab hővezető-képességén szeretnénk javítani.

3.3. Számítógépes szimulációk használata

A valóságos habos anyagok szerkezete sokkal összetettebb és szabálytalanabb az idealizált, egyszerűsített modellekben alkalmazott struktúrákhoz képest, és ezek, illetve az alkalmazott tapasztalati paraméterek korlátozzák az analitikai megoldás alkalmazhatóságát a fémhabok tervezésében és használatában [17]. Az utóbbi években a numerikus vizsgálatok elterjedésével, széles körben alkalmazzák őket fémhabok hővezetésének vizsgálatára is. Legyen szó azonban véges elem, vagy véges térfogatok módszeréről, az első feladat mindig az, hogy egy olyan geometriát hozzunk létre, ami a lehető legjobban reprodukálja a valós

hab struktúráját.

Léteznek olyan tanulmányok, ahol a 3D modelleket valós habok metszeti képei alapján hozták létre, azonban, mivel ezek a modellek korlátozva vannak valós habstruktúrákra, ez a modellezési eljárás nem alkalmas változó paraméterű vizsgálatok elvégzésére. Általánosságban elmondható a tanulmányok alapján, hogy a hab effektív hővezetési tényezője erős összefüggésben áll a relatív sűrűséggel ($\bar{\rho}$) és a fal hővezetési tényezőjével (k_s), amely alapján az effektív hővezetési tényező:

$$k_{eff} = \bar{\rho} \cdot k_s. \quad (3.2)$$

Ezzel szemben, több tanulmány kiemeli azt a tényt, hogy a hővezetési tényező függ a cella méretek inhomogenitásától, de a cella formájának anizotrópiájától is [17].

Az általam vizsgált tanulmány [17] meghatároz két paramétert, D_{ch} -t ami a karakterisztikus átmérő, illetve α_{ch} -t ami a cellák alakjának bonyolultságát írja le. A D_{ch} (karakterisztikus átmérő) egy olyan paraméter, amely a zárt cellás habszivanyagokban lévő cellák méretének inhomogenitását számosítja. Nagyobb D_{ch} értékeknél a hab nagyobb mértékben tartalmaz nagyobb cellákat a teljes cellaméret eloszláshoz képest. Így nagyobb lesz a cellaméretek szórása a habon belül. A karakterisztikus alak-anizotrópia (α_{ch}) a cellák alakjának szabálytalanságát írja le. Minél alacsonyabb ez az érték, a cellák annál jobban gömbre hasonlítanak.

Az eredmények jobb szemléltetéséhez bevezettek egy $\bar{k} = \frac{k_{eff}}{k_s}$ arányszámot. Ahogy azt már más tanulmányok is alátámasztották, tisztán látszik, hogy a relatív sűrűség növelésével a hővezetési tényező növekszik, és ez a tényező az, ami legnagyobb mértékben befolyásolja a habok hővezetési tényezőjét. A tanulmány azonban rávilágított arra, hogy a karakterisztikus átmérő növelésével szinte lineárisan csökken a hővezetési tényező, a karakterisztikus anizotrópia növelésével pedig ugyancsak csökkenés látszódik benne.

3.4. Kísérleti háttér, hőimpulzus kísérlet

A hőimpulzus kísérlet egy jól bevált, és széles körben alkalmazott eljárás különböző anyagok termikus paramétereinek (hővezetési és hőfokvezetési tényező) meghatározására. A mérés során a minta felületét egy nagy intenzitású, rövid időtartamú fényimpulzus éri, és a hátsó felület hőmérséklet változását mérik. E mérési módszer használatának több előnye is van. A mérés rendkívül gyorsan elvégezhető, könnyen reprodukálható és a mérnöki gyakorlatban jól ismert eljárás. Folyamatos fejlesztés alatt áll, amely biztosítja, hogy hosszútávon használható és értelmezhető mérési adatokat kapjunk. A lézeres vagy fény hőimpulzusnak köszönhetően nincs kontakt hőellenállás a hőforrás illetve a minta között, így pontosabb eredmények kaphatóak. Ahogy már említettem, a mérés során a hátfalon

mért hőmérséklet időbeli változásából visszaszámolhatóak a kívánt hőfizikai paraméterek [18].

A modell kezdeti és peremfeltételeinek meghatározása nagyon fontos a reprodukálhatóság és a helyes kiértékelés szempontjából. A mérés elején a teljes testben egyenlő, homogén mezőket feltételezünk, a test egyik lapján pedig egy hőimpulzus peremfeltételt írunk elő (bővebben a 4.2 fejezetben). A mérés és kiértékelés lépései [19] hagyományos úton, mivel napjainkban már több algoritmus létezik, melyekkel a görbéket optimalizálni lehet:

- **Mérés előkészítése:** hőszigetelt, egyenletes bevonatú minta létrehozása,
- **Hőimpulzus:** egy vaku rövid fényimpulzust bocsát ki. A hőmérsékletet egy termoelem segítségével mérik a hátlaapon.
- **A hőfokvezetési tényező kiszámítása:**

$$\alpha = 0.138 \frac{L^2}{\pi^2 t_{1/2}}, \quad (3.3)$$

ahol α a hőfokvezetési tényező, L a minta hossza, $t_{1/2}$ pedig az az idő, amíg a minta hőmérséklete eléri a maximális hőmérséklet felét.

- **A hővezetési tényező kiszámítása:** egyszerűen számolható a hőfokvezetési tényezőből:

$$k = \alpha \rho c, \quad (3.4)$$

ahol ρ a sűrűség, c pedig a fajhő.

3.5. Fourier és azon túli hővezetési modellek

Ebben a fejezetben bemutatom, hogy mi vezetett a bonyolultabb matematikai modellek alkalmazásához a heterogén anyagok hőtani vizsgálata során, és bemutatom ezen modellek alapjait a vonatkozó [20, 21, 22, 23, 24] szakirodalmak alapján.

A legnépszerűbb, legtöbb mérnöki feladatban jól alkalmazható, legalapvetőbb hővezetési modellt Fourier-törvénynek hívják. Ez az egyenlet kifejezi a hőáram vektor ($\dot{\mathbf{q}}$, vektormennyiségek félkövérrel) és a hőmérsékleti gradiens (∇T) közötti kapcsolatot, és matematikailag a következőképpen írható:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\lambda \nabla T, \quad (3.5)$$

ahol λ az anyag hővezetési tényezője. Ez az egyenlet széles körben alkalmazott a mérnöki gyakorlatban a hővezetés modellezésére állandósult állapotban és egyszerűbb időben változó folyamatok leírására is alkalmas, mivel hatékonyan írja le, hogy hogyan áramlik

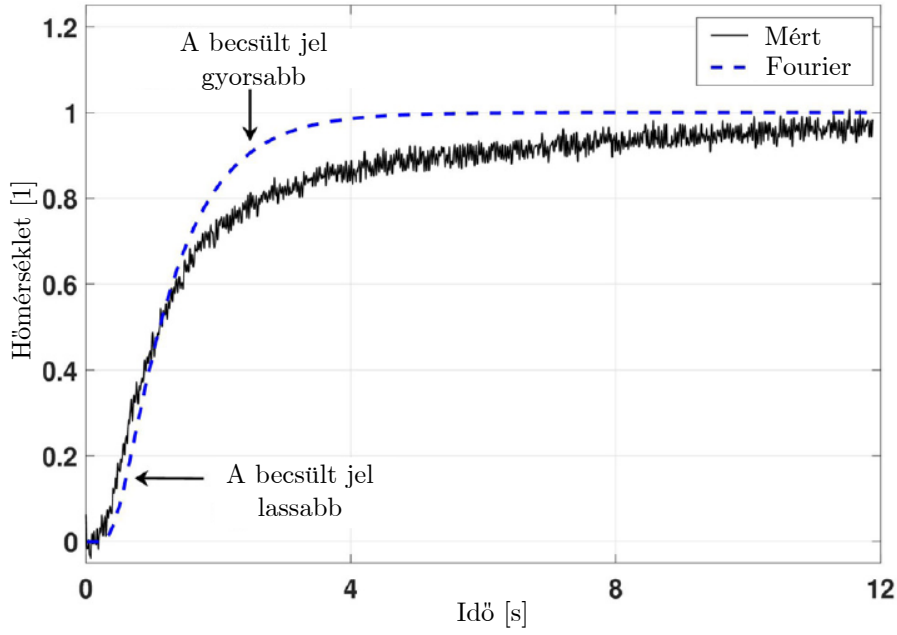
a hőenergia egy közegben. A Fourier-törvény egyszerűsége miatt a homogén anyagok hőmérséklet-eloszlásának előrejelzésére használt legalapvetőbb modell.

Bár a Fourier-törvény széles körben alkalmazható, jelentős korlátai vannak összetett vagy heterogén anyagok és időben változó körülmények esetén. Az a feltételezése, hogy a hővezetésnek egyetlen jellemző időskálája van pontatlanságokhoz vezethet olyan anyagok modellezésénél, amelyek belső struktúrája több hőátadási csatornát vagy mechanizmust foglal magában.

De mit is jelent, hogy egy vagy több időskálás a hővezetés? A hővezetésben az egyetlen időskála kifejezés arra az egyszerűsítésre utal, hogy a hőátadás folyamata egyenletesen történik az anyag egészében, és egyetlen energiatovábbítási sebességgel jellemezhető. Az olyan modellekben, mint a Fourier-törvény, a hőáram azonnal reagál a hőmérsékleti gradiensre, ami egy egyszerű, egy időskálás diffúziót feltételez. Ez a megközelítés jól működik homogén anyagok esetén, ahol csak egy domináns útvonal vagy mechanizmus van a hőátadásra. Ezzel szemben a több időskála azt jelenti, hogy a hőátadásban különböző mechanizmusok vagy csatornák vesznek részt, mindegyik saját energiatovábbítási sebességgel. Ez olyan összetett vagy heterogén anyagokban fordul elő, mint a kompozit szerkezetek vagy habok, ahol a hő több úton terjedhet, például a szilárd mátrixon és a zárványokon keresztül, vagy kombinált hővezetési és konvekciós folyamatok révén. Minden ilyen útvonal más-más időállandóval rendelkezik, ami olyan viselkedésekhez vezet, amelyeket nem lehet egyetlen időskálát feltételező modellel, például a Fourier-törvénnyel megragadni. Például, porózus szénhabok és fémmátrixos szintaktikus habok vizsgálatakor a Fourier-törvény gyakran nem képes pontosan előrejelezni a hőmérsékletválaszt időben változó körülmények között. Különös nehézséget okoz a túlzott kezdeti hőmérséklet-emelkedés és a maximális hőmérséklet lassú elérése, ami jelentős hibákhoz vezet – gyakran akár 30%-os eltéréshez a számolt adatokhoz képest [23]. Erre egy példa a 3.2. ábrán látható.

A Fourier-törvény tehát nem ideális megoldás, amikor fémhabok, szénhabok, vagy más heterogén anyagok termikus viselkedését szeretnénk leírni. Ilyen esetekben, ahol a hővezetés több különböző mechanizmus révén történik, a hőterjedés komplexitása miatt több időskálás modellek bevezetése szükséges. Ezek a modellek képesek figyelembe venni a különböző hőátadási csatornák által okozott eltérő időskálák hatását, és így pontosabban írják le az anyagok tranziensei során tapasztalt hőterjedést.

Az Maxwell–Cattaneo–Vernotte (MCV) egyenlet a Fourier-törvény egyik legkorábbi kiterjesztése, amely pontosabban képes leírni a hő terjedését olyan esetekben, amikor az nem azonnali, hanem késleltetett. Az MCV-egyenlet a Fourier-törvényt egy relaxációs taggal bővíti ki, amely figyelembe veszi a hő tehetetlenségét, és ezáltal lehetővé teszi a



3.2. ábra. A töb időskálás diffúzió megjelenése egy hőimpulzus kísérletben [22].

hőimpulzusok csillapított hullámokként való terjedését:

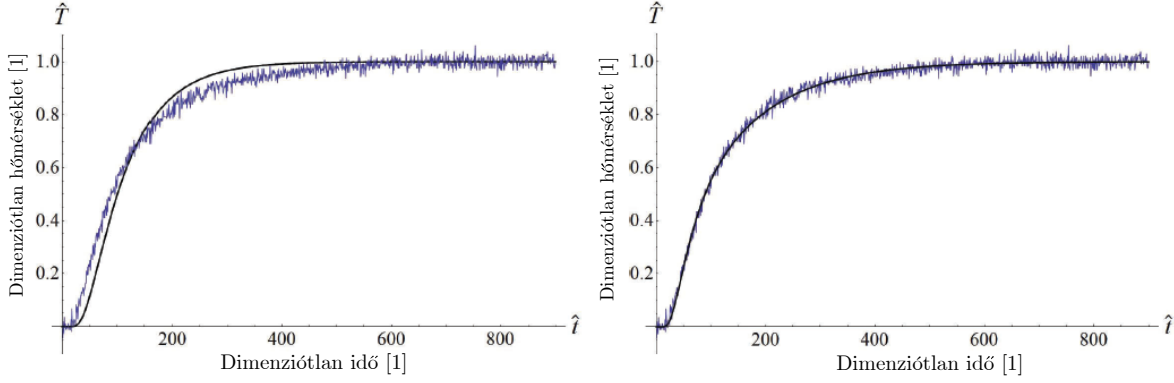
$$\tau \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + \dot{q} = -\lambda \nabla T, \quad (3.6)$$

ahol τ az anyagra jellemző relaxációs idő. A relaxációs idő kulcsfontosságú, hiszen ez a mennyiség határozza meg azt az időtartamot, ami alatt a hőáramlás alkalmazkodik a hőmérséklet változásához. Az MCV-egyenlet hasznos olyan helyzetek modellezésére, ahol a hőáramlás nem azonnal alakul ki a hőmérséklet-változás hatására, hanem egy bizonyos késleltetéssel válaszol. Azonban a makroszkopikus, szoba-hőmérsékletű rendszerekben, különösen heterogén anyagok esetén, az MCV modell korlátokba ütközhet, mivel ennek második skálája a hullámterjedés, ami nem képes megfelelően modellezni a két időskálás diffúziót. Ilyen esetekben gyakran szükséges további modellek, például a Guyer–Krumhansl-egyenlet (GK-egyenlet) alkalmazása.

A GK-egyenlet egy fejlett hővezetési modell, amely olyan esetekben hasznos, amikor a hővezetés több különböző időállandójú csatornán zajlik az anyagon belül. A GK-egyenletben megjelenik egy statikus és egy dinamikus hőfokvezetési tényező és ilyen módon képes modellezni a két időskálás diffúziót:

$$\tau \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + \dot{q} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} - l^2 \frac{\partial^2 \dot{q}}{\partial x^2} = 0, \quad (3.7)$$

ahol τ ugyancsak a relaxációs időt jelöli, de az MCV-egyenlethez képest tartalmaz egy plusz, nem-negatív anyagparamétert (l^2), amely a karakterisztikus térskála segítségével



3.3. ábra. Bal oldalon a legjobban illesztett Fourier megoldás, jobb oldalon a legjobban illesztett GK megoldás [21].

van kifejezve. A dinamikus hőfokvezetési tényező pedig e két paraméter hányadosa: l^2/τ . Ez a modell képes leírni a hőtranszportot olyan esetekben, amikor több időskálás diffúzió van jelen, tehát a hő terjedése gyorsabb, majd lassabb, mint amit a Fourier-törvény előjelez. A 3.3. ábrán látható, hogy a GK-egyenlet mennyivel pontosabban illeszkedik a mérési eredményekre, mint a legjobban illesztett Fourier-modell. Fontos megjegyezni, hogy a kontinuum alapú GK-modell mentes a kinetikus elmélet korlátaiktól, így szobahőmérsékleten is alkalmazható [23].

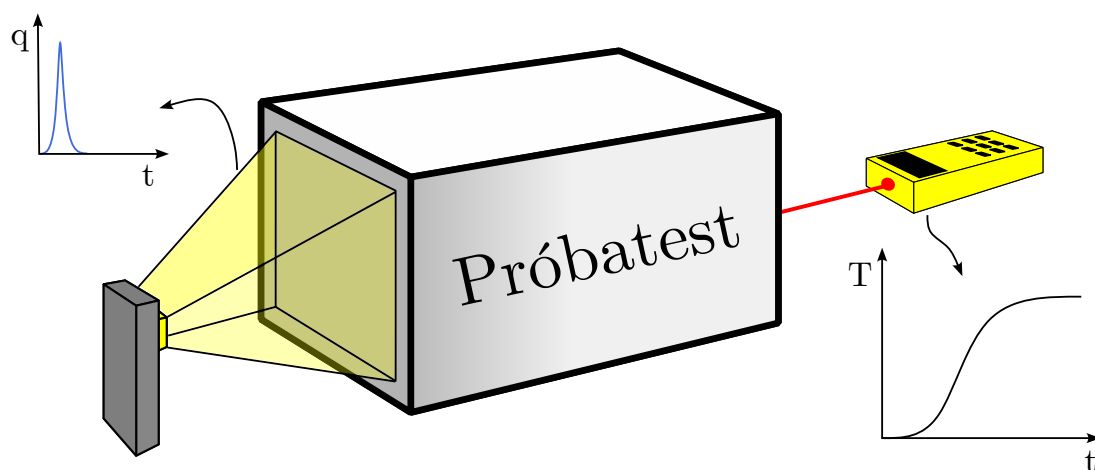
Összefoglalva, a Fourier-törvény bár hatékony és széles körben alkalmazott modell a hővezetés leírására homogén anyagokban, a heterogén szerkezetű anyagoknál és összetett, időben változó folyamatoknál gyakran nem elegendő. Az ilyen rendszerekben, ahol a hő több különböző mechanizmuson keresztül terjed, a több időskálás modellek, mint az MCV- és a GK-egyenletek, nélkülözhetetlenek a pontosabb hőtechnikai vizsgálatokhoz. Az MCV-egyenlet bevezeti a relaxációs idő fogalmát, lehetővé téve a hővezetés tehetetlenségi hatásainak figyelembevételét, míg a GK-modell ezt tovább bővíti egy térbeli taggal, amely lehetővé teszi a különböző hővezetési csatornák és komplex szerkezeti hatások modellezését.

Ebben a dolgozatban én csak a Fourier-törvényt fogom felhasználni az ismert szerkezetű fémhab modellezésére. Ez azt jelenti, hogy egy részletesebb, de még mindig effektív modellt állítok fel, ami figyelembe veszi a hab belső szerkezetét. A későbbiekben célunk az lesz, hogy a kapott szimulációs eredményeket a GK-egyenlettel illesszük. Tehát arra vagyunk kíváncsiak, hogy mi az összefüggés a GK-egyenlet paraméterei (statikus és dinamikus hőfokvezetési tényező), illetve a fémhab belső szerkezete és a mi modellünk paraméterei között.

4. Modell felállítása fémhabokban történő hőtranszport leírására

Ahogy már korábban szó volt róla, a habokban történő hőtranszportot többféleképpen próbálták már leírni. Vannak modellek, amelyek a geometria pontos beszkenelésével, a végelem vagy véges térfogatok módszerével modellezik a habokban történő hőtranszportot (kihasználva a számítógépek számítási teljesítményét). Mások, valamilyen effektív paramétert határoznak meg, amely használatával már homogén testként modellezhető az anyagban történő hőtranszport.

A dolgozat további részében, egy egyszerű modellt fogok felállítani a habokban történő hőtranszport leírására. A modell egy térdimenziós és tranziens hőtranszport leírására alkalmas. A cél az, hogy a hőimpulzus kísérletet modellezve, a bal oldali peremen egy dirac-delta függvényt közelítő gerjesztést alkalmazva, megjelenítsem a hőmérséklet időbeli változását a jobb oldali peremen, ahogy azt a 4.1. ábra mutatja. Azért ezt a modellezési eljárást választom, mivel az általam feldolgozott szakirodalomban megtalálható mérések is ezen az elven alapultak, így az általam kapott görbék összehasonlíthatóak lesznek valós mérési eredményekkel. Első körben felírom az egyenleteket a homogén esetre, majd arra az esetre is, amikor egy üreg van az anyagban.



4.1. ábra. A modell fizika megvalósítása egyszerűsítve

4.1. Elméleti alapok

Ahhoz, hogy a későbbiekben felállított modell érthető legyen, szükséges definiálni néhány alapegyenletet, illetve összefüggést. Abban az esetben, amikor egy test nem végez munkát, mi sem végzünk munkát rajta, illetve nyugalomban van, belső energiája csak hőtranszport útján változtatható meg. A testben történő hővezetés leírására elegendő felírni a belső

energia mérlegegyenletét kontinuum esetben:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} = \dot{q}_v, \quad (4.1)$$

ahol ρ a sűrűség $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$, c a fajhő $\left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right]$ és $\dot{q}_v$ a térfogati hőforrás $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$. A térfogati hőforrás származhat például besugárzásból, Joule-hőből, vagy súrlódásból is, viszont esetünkben nincs ilyen jelenség, így a belső energia mérlegegyenlete a következő alakra egyszerűsödik:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (4.2)$$

Látjuk, hogy $\dot{\mathbf{q}}$ vektormennyiség, amiből számolható a $\dot{Q}$ hőáram $[\text{W}]$, a vektormező adott felületre integrálásával, amely megadja, hogy adott irányban, adott felületen mennyi hőteljesítményt közlünk a testtel:

$$\dot{Q} = \int_A \dot{\mathbf{q}}(x, t) \cdot d\mathbf{A}, \quad \text{ahol } d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA. \quad (4.3)$$

Ezután felírható a Fourier-törvény kontinuum esetben, amely képes modellezni azt a hajtóerőt, amely a testben lévő, különböző hőmérsékletű pontok hatására jön létre. Ezzel az egyszerű egyenlettel modellezhető az anyagokban történő hővezetés két pont között, ha ismert a hőmérséklet-gradiens, illetve a transzportjellemző, amely hővezetés esetén a hővezetési tényező. Tehát a Fourier-törvény:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\lambda \nabla T. \quad (4.4)$$

A negatív előjel azt jelzi, hogy a hőáramsűrűség akkor lehet pozitív, ha a hőmérséklet-gradiens negatív, tehát a hő a nagyobb hőmérsékletű pontok felől a kisebb hőmérsékletűek felé áramlik.

Mivel az általunk felállítani kívánt modell egydimenziós, ezért a Fourier-törvény, illetve az energiamérleg is leegyszerűsödik:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} = 0, \quad (4.5)$$

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4.6)$$

ahol x a helykoordináta. Most, hogy a hővezetés hatását leíró egyenletet tisztáztuk, beszélnünk kell még a hőátadásról és hősugárzásról is. Mindkét esetben a hőmérsékletkülönbség a hajtóerő, viszont más nagyságrendben. A hőátadás útján közölt hőáramsűrűség a következőképpen írható:

$$\dot{q} = \alpha(T_2 - T_1), \quad (4.7)$$

ahol α a hőátadási tényező $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}\right]$, T_2 a fal, T_1 pedig a közeg hőmérséklete. A hőátadási tényező értékét több minden is befolyásolja. Függ a fal, illetve fluidum anyagától, de a gáz vagy folyadék áramlásának fajtájától is. Ezt ebben a fejezetben tovább nem részletezem.

Ha sugárzás útján történő hőátadásról beszélünk, a hőáramsűrűség két pont között a Stefan–Boltzmann-törvény alapján számítható ki. Ez a törvény leírja, hogy a hőenergia hogyan sugárzódik ki egy felületről tisztán termikus sugárzás formájában. A sugárzás által átadott hő mennyisége a felületek hőmérsékleteitől függ, és így a hőáramsűrűség:

$$\dot{q} = \sigma \varepsilon \varphi (T_2^4 - T_1^4), \quad (4.8)$$

ahol σ a Stefan-Boltzmann-állandó, ε az emissziós tényező, φ a térszögarány, T_1 és T_2 pedig a két pont hőmérséklete.

Abban az esetben, amikor a két pont közötti hőmérséklet-különbség viszonylag kicsi, alkalmazható a Stefan-Boltzmann-törvény linearizált alakja, mivel a $T_2 - T_1$ kis értéke miatt a negyedik hatványú tagokat közelíteni lehet:

$$\dot{q} \approx 4\sigma\varepsilon\varphi T_m^3(T_2 - T_1), \quad (4.9)$$

ahol $T_m = (T_2 + T_1)/2$ a közepes hőmérséklet.

4.2. Egyenletek felírása

Most, hogy tisztáztuk a megfelelő elméletet és alapfogalmakat, már fel tudjuk írni az egyenleteket. Ahogy azt már korábban leírtam, a homogén esetet szeretném összehasonlítani azzal az esettel, amikor az anyagban van egy cella. A hővezetés leírására két egyenletet fogok használni, az egyik a belső energia mérlegegyenlete, a másik pedig a Fourier-törvény:

- Az energiamérleg egydimenziós alakja:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} = 0. \quad (4.10)$$

- A Fourier-törvény egydimenziós alakja:

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (4.11)$$

Látható, hogy ebből a két egyenletből álló parciális differenciálegyenlet-rendszert kell megoldanom, amihez a hőimpulzus kísérlet kezdeti- és peremfeltételeinek definiálására van szükség.

- **Kezdeti feltételek:** a kezdő időpillanatban a test hőmérséklete megegyezik a környezet hőmérsékletével, ebből következően a hőáramsűrűség is 0 az egész testben.

$$T(t = 0, x) = T_0, \quad (4.12)$$

$$q(t = 0, x) = 0. \quad (4.13)$$

- **Peremfeltételek:** a dirac-delta függvényt közelítő gerjesztést írok elő a bal oldali peremen.

$$\dot{q}(t, x = 0) = \begin{cases} q_{max} \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{t}{t_p} \right) \right), & \text{ha } t < t_p, \\ 0, & \text{ha } t > t_p, \end{cases} \quad (4.14)$$

ahol q_{max} a gerjesztő jel amplitúdója.

Akkor, amikor az anyagban egy üreg helyezkedik el, az egyenletekben is más paramétereket kell alkalmazni, illetve a használt egyenletek is módosulnak. A bevezetett paraméterek, amelyek szemléltetése a 4.2. ábrán látható:

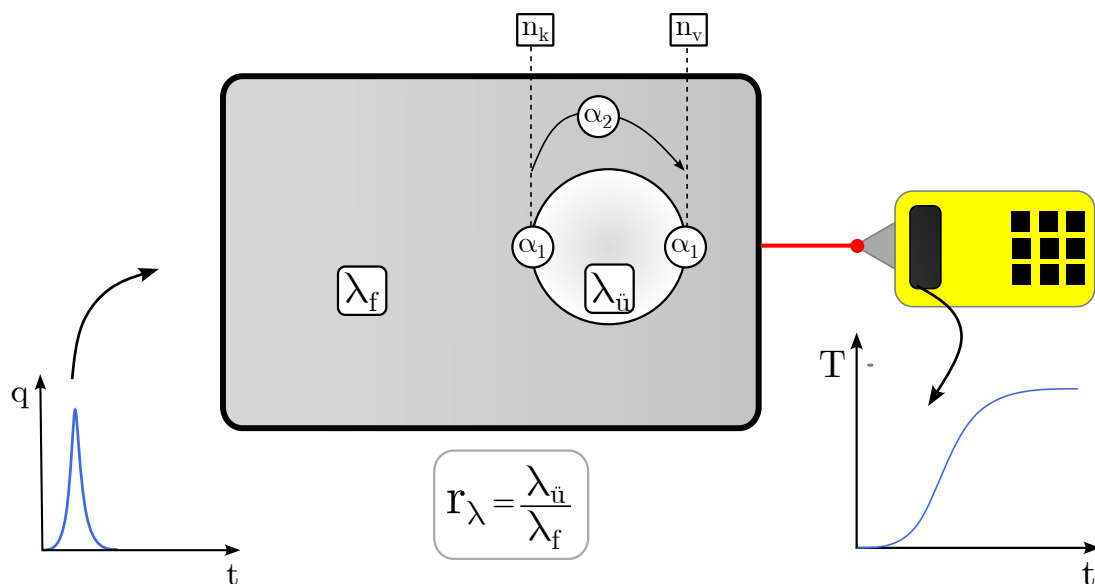
- α_1 : ez az egyenértékű hőátadási tényező egyben fogja modellezni az üreg két fala közötti hőszigetelést, illetve az üreget megkerülő, a fémbe történő hővezetést. Tehát a megkerülő hővezetés modellezéséhez nem vezetek be egy újabb skálát, ez a paraméter a sugárzás és a fémbe történő hővezetés hőellenállásainak segítségével fogja közvetlenül összekötni az üreg falait.
- α_2 : ez a hőátadási tényező fogja modellezni az üreg fala és az üregben lévő közeg közötti hőátadási együtthatót.
- r_λ : ez a dimenziótlan paraméter az üregben lévő közeg ($\lambda_{\bar{u}}$), illetve a fém hővezetési együtthatójának (λ_f) hányadosa, tehát megadja, hogy az üregben lévő anyag mennyivel vezet rosszabbul a hőt mint a fém:

$$r_\lambda = \frac{\lambda_{\bar{u}}}{\lambda_f}. \quad (4.15)$$

A módosult egyenletek tényleges alakját a diszkretizálás részben mutatom be részletesen.

4.3. Skálafüggetlenség

A fent leírt egyenletekben szerepel a sűrűség, a fajhő, a hőmérséklet, hőáramsűrűség, illetve a hely és időváltozó is, amelyek mind rendelkeznek mértékegységgel. Így ezek az egyenletek, mindig csak egyetlen problémára érvényesek, viszont a megfelelő átalakítások



4.2. ábra. A modell szemléltetése

elvégzése után, létrehozhatók skálafüggetlen, mértékegységektől mentes egyenletek. Ennek az az előnye, hogy így a konkrét problémától független, általános érvényű megoldást kapok, amely a későbbiekben könnyebben illeszthető lesz kísérleti eredményekhez. Természetesen, a dimenziótlan egyenletekből visszanyerhetők a dimenzióval rendelkező adatok is a megfelelő összefüggésekbe való helyettesítés után.

A hőtranszport egyenletek dimenziótlanítását, dimenziótlan mennyiségek bevezetésével teszem meg, amelyeket majd a (4.10)-(4.14), (4.7) egyenletekbe és peremfeltételekbe behelyettesítve, megkapom az általános esetre vonatkozó egyenleteket.

A bevezetendő dimenziótlan mennyiségek:

- Dimenziótlan idő:

$$Fo = \frac{a}{L^2}t, \quad (4.16)$$

ahol $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ a hőfokvezetési tényező és Fo a Fourier-szám.

- Dimenziótlan tér:

$$\xi = \frac{x}{L}. \quad (4.17)$$

- Dimenziótlan hőmérséklet:

$$\vartheta = \frac{T - T_0}{T_{end} - T_0}, \quad (4.18)$$

ahol, T_0 a környezeti hőmérséklet, T_{end} pedig az egyensúlyi hőmérséklet. A hátلامي hőmérséklet a következőképpen is definiálható:

$$T_{end} = T_0 + \frac{\bar{q}_0 t_p}{\rho c L}, \quad \text{ahol} \quad \bar{q}_0 = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} q_0(t) dt, \quad (4.19)$$

az időben átlagolt hőáram sűrűség.

Ezeket a dimenziótlan mennyiségeket átrendezem, majd behelyettesítem az egyenletekbe.

- A Fourier-törvény dimenziótlanítása:

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial(\vartheta(T_{end} - T_0) + T_0)}{\partial(\xi L)}. \quad (4.20)$$

A konstansok kiemelhetők a deriválás elé:

$$\underbrace{\dot{q}}_{\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]} = \underbrace{\left(\frac{-\lambda(T_{end} - T_0)}{L}\right)}_{\tilde{q} = \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}. \quad (4.21)$$

Mivel az egyensúlyi hőmérséklet nem ismert, ezért a dimenziótlan hőáram kifejezhető (4.19)-at beírva az (4.21) egyenletbe:

$$\dot{q} = - \left(\frac{a \rho c}{L} \cdot \frac{\bar{q}_0 t_p}{\rho c L} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}, \quad (4.22)$$

ami egyszerűsítés után:

$$\dot{q} = - \left(\frac{a t_p}{L^2} \cdot \bar{q}_0 \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}. \quad (4.23)$$

(5.1)-t átrendezve és behelyettesítve megkapjuk a dimenziótlan hőáramot:

$$\hat{q} = \frac{\dot{q}}{\tilde{q}} = \frac{q}{Fo_p \bar{q}_0} = - \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}, \quad (4.24)$$

ahol Fo_p a 4.14 egyenletben szereplő t_p -vel jelölt impulzusidő dimenziótlan formája.

- A hőimpulzus perem dimenziótlanítása:

$$\hat{q} Fo_p \bar{q}_0 = -q_{\max} \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{t}{t_p} \right) \right), \quad (4.25)$$

amit átrendezve adódik a dimenziótlan hőáram perem:

$$\hat{q} = \frac{q_{\max}}{Fo_p \bar{q}_0} \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{t}{t_p} \right) \right). \quad (4.26)$$

- Az energiamérleg dimenziótlanítása:

$$\rho c \cdot \frac{\partial(\vartheta(T_{\text{end}} - T_0) + T_0)}{\partial(Fo \frac{L^2}{a})} + \frac{\partial(\hat{q}\tilde{q})}{\partial(\xi L)}. \quad (4.27)$$

A konstansok kiemelhetők a deriválások elé:

$$\frac{\rho c a (T_{\text{end}} - T_0)}{L^2} \frac{\partial}{\partial Fo} + \frac{\tilde{q}}{L} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \xi} = 0, \quad (4.28)$$

ahol $\tilde{q} = \frac{\lambda(T_{\text{end}} - T_0)}{L}$, így az egyenlet az egyszerűsítés után a következő, egyszerű alakot ölti:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial Fo} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial \xi} = 0. \quad (4.29)$$

- A hőátadás perem dimenziótlanítása:

$$\hat{q}\tilde{q} = \alpha(\vartheta_2(T_{\text{end}} - T_0) + T_0 - (\vartheta_1(T_{\text{end}} - T_0) + T_0)). \quad (4.30)$$

Összevonás és kiemelés után a következő formára jutunk:

$$\hat{q}\tilde{q} = \alpha(T_{\text{end}} - T_0)(\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad (4.31)$$

melyet átalakítva:

$$\hat{q} = \frac{\overbrace{\alpha(T_{\text{end}} - T_0)}^{[\frac{W}{m^2}]}}{\underbrace{\tilde{q}}_{[\frac{W}{m^2}]}} (\vartheta_2 - \vartheta_1), \quad (4.32)$$

ahol

$$\tilde{\alpha} = \frac{T_{\text{end}} - T_0}{\tilde{q}} = \frac{(T_{\text{end}} - T_0)L}{\lambda(T_{\text{end}} - T_0)} = \frac{L}{\lambda}. \quad (4.33)$$

Tehát a (4.7) és (4.8) egyenleteket a $\hat{\alpha} = \alpha \cdot \tilde{\alpha}$ dimenziótlanítja.

A dimenziótlanítással kész vagyok, most már meg lehet oldani a differenciálegyenlet-rendszert, amivel egy általános megoldást kapok.

4.4. A numerikus megoldás előkészítése

Ahhoz, hogy a fent leírt egyenletrendszert meg tudjam oldani, fel kell állítanom egy megfelelő diszkretizálást térben és időben. Először választanom kell egy megfelelő sémát, meg kell határoznom, hogy a hőáramokat és hőmérsékleteket, mely tér- és időpontokban határozom meg.

Az egyenletek megoldásához, egy explicit eltolt mezős diszkretizációt fogok használni. Ez azt jelenti, hogy a hőáramokat minden térpontban kiszámolom, viszont a hőmérsékleteket csak két térpont között. Tehát a hőmérsékletmező egy $\Delta x/2$ távolsággal el van tolva a térpontokhoz képest, ami azt jelenti, hogy hőmérsékleteket eggyel kevesebb pontban számolom ki.

4.4.1. Diszkretizálás homogén anyag esetén

Ebben a részben felírom a Fourier-törvényt és az energiaegyenlet diszkretizált változatát. A j az időlépést, n pedig a térlépést jelöli.

- A Fourier-törvény diszkretizálása:

$$q_n^{j+1} = -\frac{\vartheta_{n+1/2}^{j+1} - \vartheta_{n-1/2}^{j+1}}{\Delta \xi}. \quad (4.34)$$

- Az energiaegyenlet diszkretizálása:

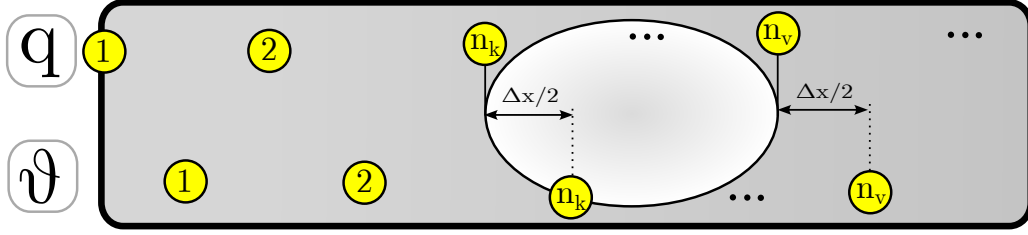
$$\vartheta_{n+1/2}^{j+1} = \vartheta_{n+1/2}^j - \frac{\Delta Fo}{\Delta \xi} (q_{n+1}^j - q_n^j). \quad (4.35)$$

4.4.2. Diszkretizálás üreggel rendelkező anyag esetén

Amikor az anyagban üreg is van, az egyenletek is megváltoznak, és az, hogy éppen milyen formájukat használjuk, attól függ, hogy melyik térpont hőáramát számoljuk. Legyen n_k az üreg kezdetén elhelyezkedő hőáram térpont, n_v pedig az üreg végén elhelyezkedő hőáram térpont. Ahogy azt a 4.2 fejezetben bemutattam, bevezetésre kerül 3 paraméter, amelyek az üregben eltérő hővezetést, a hőátadást, illetve a hősugárzást kívánják modellezni. A diszkretizálás megértéséhez segítséget jelent a 4.3. számú ábra.

A különböző tartományokban tehát, különböző formájú a két egyenlet, amelyet most részletesen bemutatok:

- amikor $n < n_k$ és $n > n_v$ az egyenletek változatlanul (4.34) és (4.35) alakúak,



4.3. ábra. Az eltolt mezős diszkretizáció szemléltetése

- amikor $n = n_k$, ebben a térpontban a hőáramot csak hőátadás és hősugárzás perem figyelembevételével számoljuk. Figyeljük meg, hogy a hőátadás hajtóereje a következő térponttól vett hőmérséklet-különbség, a hősugárzás hajtóereje pedig a cella másik falától vett hőmérséklet-különbség. Az energiamérlegben megjelenik a r_λ paraméter, mivel ez a hőmérsékletpont már az üregben helyezkedik el:

$$q_n^{j+1} = -\alpha_2 \left(\vartheta_{n_k+1/2}^{j+1} - \vartheta_{n_k-1/2}^{j+1} \right) - \alpha_1 \left(\vartheta_{n_v+1/2}^{j+1} - \vartheta_{n_k-1/2}^{j+1} \right),$$

$$\vartheta_{n+1/2}^{j+1} = \vartheta_{n+1/2}^j - r_\lambda \frac{\Delta Fo}{\Delta \xi} (q_{n+1}^j - q_n^j),$$

- amikor $n_k < n < n_v$, a hőáramot az üregben levő hővezetés figyelembevétel számoljuk:

$$q_n^{j+1} = -r_\lambda \frac{\vartheta_{n+1/2}^{j+1} - \vartheta_{n-1/2}^{j+1}}{\Delta \xi},$$

$$\vartheta_{n+1/2}^{j+1} = \vartheta_{n+1/2}^j - r_\lambda \frac{\Delta Fo}{\Delta \xi} (q_{n+1}^j - q_n^j),$$

- amikor $n = n_v$, a hőáramot a hőátadás és hősugárzás figyelembevételével számoljuk:

$$q_n^{j+1} = -\alpha_2 \left(\vartheta_{n_v+1/2}^{j+1} - \vartheta_{n_v-1/2}^{j+1} \right) - \alpha_1 \left(\vartheta_{n+1/2}^{j+1} - \vartheta_{n_k-1/2}^{j+1} \right),$$

$$\vartheta_{n+1/2}^{j+1} = \vartheta_{n+1/2}^j - \frac{\Delta Fo}{\Delta \xi} (q_{n+1}^j - q_n^j).$$

Ezzel tehát felállítottunk egy megfelelő diszkretizálást, a következő lépés a szimulációk inicializálása.

5. A modell megoldása

Az előző fejezetben meghatároztam a dimenziótlan egyenleteket, kezdeti- és peremfeltételeket, illetve választottam egy megfelelő diszkretizálást. Ebben a fejezetben bemutatom a homogén esetben kapott görbéket, ezután megvizsgálom a szimulációs paraméterek megfelelő beállítását. Ezután elvégzem a szimulációkat, ahol a következőket fogom vizsgálni:

- a modell viselkedése különböző r_λ értékekre,
- a modell viselkedése különböző méretű cellákkal,
- a modell viselkedése különböző helyzetű cellákkal.

A szimulációk elvégzése után kiértékelem a kapott eredményeket. A numerikus számítást *Python* segítségével végzem el, melynek programkódja a függelékben megtalálható.

5.1. Homogén anyag vizsgálata

Ebben az esetben csak hővezetés van az anyagon belül. Ezt az esetet csak amiatt mutatom be, hogy a későbbi eredmények összehasonlíthatóak lehessenek a homogén esettel.

A teret 200 térlépésre osztom fel, tehát:

$$N = 200,$$

így egy térlépés:

$$\Delta\xi = \frac{1}{N-1}.$$

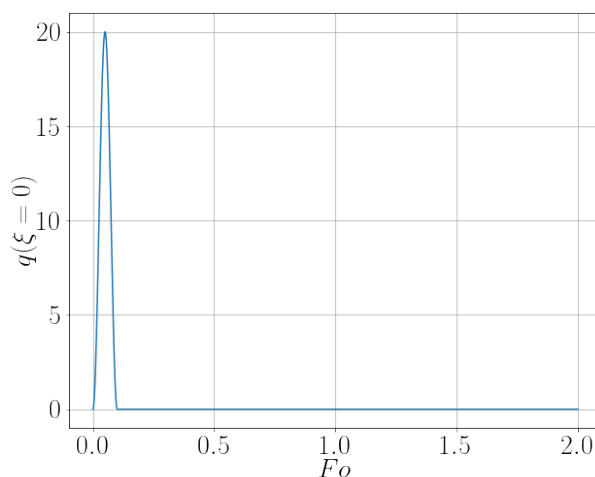
Ahhoz, hogy a megoldás során ne legyen stabilitási problémánk, az időlépés a Neumann-féle stabilitásvizsgálat alapján:

$$\Delta Fo < \frac{(\Delta\xi)^2}{2}.$$

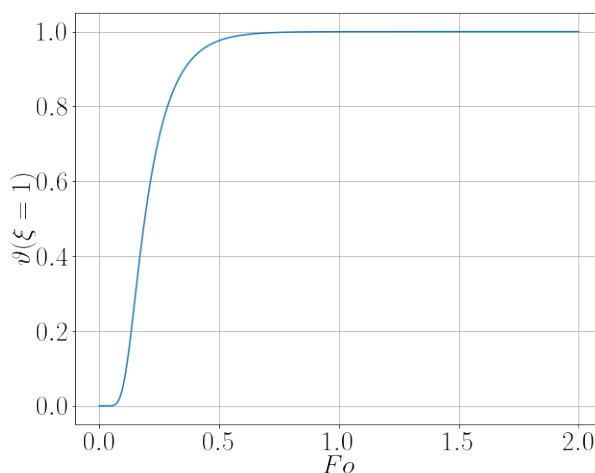
A peremfeltétel betöltése után kirajzolom a $\xi = 0$ peremen a hőáramot, az idő függvényében (5.1. ábra). Ezután megoldva a (4.34) és (4.35) egyenletekből álló rendszert, az 5.2 számú ábrán látható hőmérsékletfelfutást kapom a véglapon, az idő függvényében.

5.2. Szimulációk előkészítése

Ebben a fejezetben előkészítem a szimulációt és a modell paramétereit. Az α_1 és α_2 paraméterek értékének megválasztása fontos feladat, hiszen ezek modellezik az üreg körül történő jelenségeket. Ezután meghatározom a szükséges térlépések számát, mivel ez nagyban befolyásolja a szimulációk futtatásához szükséges időt. Végül elvégzem az érzékenységvizsgálatot a modellben szereplő paraméterekre.



5.1. ábra. A bal oldali peremen lévő gerjesztés az idő függvényében



5.2. ábra. Hőmérséklet a bal oldali véglapon az idő függvényében

5.2.1. α_1 , α_2 paraméterek meghatározása

Ahogy már korábban említettem, az α_1 és α_2 paraméterek arra szolgálnak, hogy leírják az üreget megkerülő hővezetést, illetve a cella két fala közötti hőszugárzás hatását, másrészt az üregben lévő közeg, illetve az üreg fala közötti hőátadást. Természetesen a valóságban ezek sem fix paraméterek, mivel ahány fajta anyag, illetve ahány szerkezetű és felépítésű hab, annyi különböző értékű paraméter. Ez alapján, vizsgálhatnánk ezen paraméterek változtatásának hatását is, viszont a vizsgálat ezen fázisában ez túlságosan megbonyolítaná a kiértékelést, illetve az összefüggések felismerését. Emiatt szükséges ezen két paraméter rögzítése, de a későbbiekben természetesen ezen paraméterek vizsgálata is szükséges.

Elsőként az α_1 paraméter becslését végzem el, amely a hőszugárzás és az üreget megkerülő hővezetést modellezi. A becslést úgy hajtom végre, hogy megnézem a hőszugárzás, illetve a megkerülő hővezetés hőellenállásait, kiszámolom ezek eredő ellenállását, ebből kifejezem a két hatást jellemző α_1 paramétert, majd dimenziótlanítok. A kiindulási adatok az 5.1.

Megnevezés	Jelölés	Adat
Alumínium hővezetési együtthatója	λ_{Al}	237 $\left[\frac{\text{W}}{\text{mK}}\right]$
Stefan-Boltzmann állandó	σ	$5.67040 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}\right]$
Feketeségi fok	ϵ	0.8 [1]
Térszögarány	φ	1 [1]
A test hosszúsága	L	0.01 [m]
A cella mérete	l	0.0025 [m]
Egységnyi felület	A	1 $[\text{m}^2]$
Közepes hőmérséklet (4.9 alapján)	T_m	293 [K]

5.1. táblázat. Alapadatok α_1 és α_2 kiszámítására

táblázatban láthatóak.

Elsőként kiszámolom a cellát megkerülő hővezetésből származó hőellenállást, ahol l az üreg átmérője:

$$R_{vez} = \frac{l}{\lambda_{Al} \cdot A} = 1.054852 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{K}}{\text{W}}\right]. \quad (5.1)$$

A hőszugárzásból eredő hőellenállás számolásánál, a térszögarány értékét $\varphi = 1$ -nek veszem, mivel a cella egyik fala teljes egészében a másik falra sugároz, így megengedem ezt az egyszerűsítést. A hőmérsékleti sugárzásból eredő hőellenállás linearizált alakja tehát:

$$R_{sug} = \frac{1}{\sigma \cdot A \cdot T_m^3 \cdot \epsilon} = 0.8763 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}}\right]. \quad (5.2)$$

Ezen két ellenállás párhuzamos kapcsolásban van egymással, így eredőjük:

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_{sug}} + \frac{1}{R_{vez}}} = 1.054896 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{K}}{\text{W}}\right], \quad (5.3)$$

amelyből számítható az α_1 paraméter dimenziós formája:

$$\alpha_1 = \frac{1}{R_e \cdot A} = 94801 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}\right]. \quad (5.4)$$

Az eredő ellenállás és a vezetésből adódó ellenállás értékei között csak nagyon kis eltérés tapasztalható, ami azt mutatja, hogy a sugárzás hatása ezen a hőmérsékleten szinte elhanyagolható, ahogy azt számos szakirodalom is leírja.

Az utolsó lépés a dimenziótlanítás a (4.33) egyenlet alapján:

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 \frac{L}{\lambda_{Al}} = 4 [1] \quad (5.5)$$

Az α_2 a hőátadás hatását jellemzi az üreg fala, illetve az üregben található közeg között. A szakirodalom áttekintése után, ilyen jellegű geometriára nem találtam összefüggést a *Nusselt-szám* meghatározására, így a paraméter dimenziótlan értékét egységnyiinek feltételezem. Természetesen, ez is visz egy bizonytalanságot a modellbe, ami további vizsgálatra ad okot. Tehát a két paraméter:

$$\hat{\alpha}_1 = 4 [1] \quad \hat{\alpha}_2 = 1 [1].$$

5.2.2. Térlépések számának meghatározása

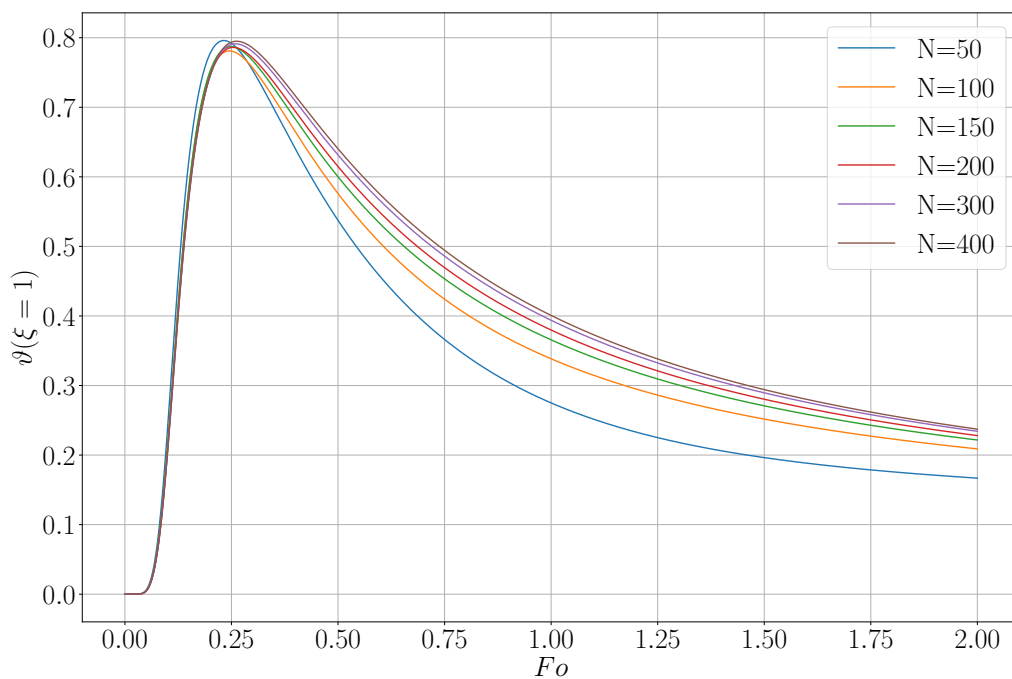
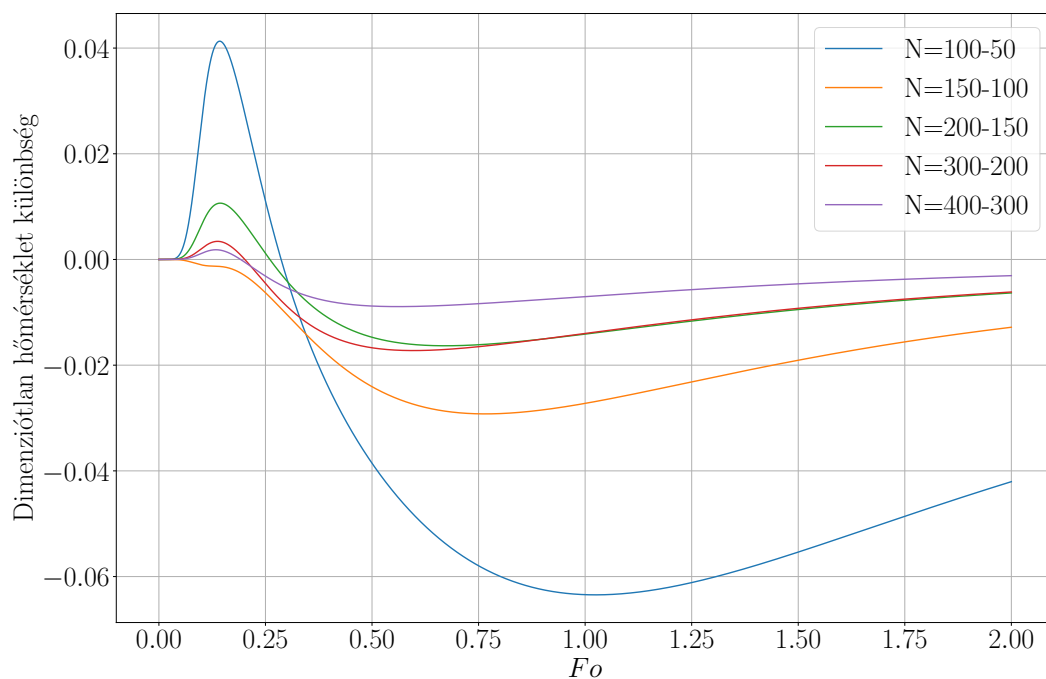
A térlépések számának meghatározása fontos feladat, mivel ez az az alap paraméter, amely meghatározza egy térlépés nagyságát a 0-tól 1-ig terjedő skálán, illetve az időlépések nagyságát is. Ahogy növeljük a térbeli lépések számát, az időbeli lépések száma exponenciálisan növekszik. Mivel az iterációk számát a térbeli és az időbeli lépések számának szorzataként kapjuk meg, jól látható, hogy mennyire fontos a térbeli lépések számának megfelelő megválasztása a számítási folyamat hatékonysága szempontjából. Ugyanis, a numerikus megoldás számításának idejét az elvégzendő iterációk száma határozza meg, így fontos, hogy a térlépések száma minimális legyen.

A minimálisan szükséges számú térlépés meghatározásához 6 db szimulációt futtattam, amelyekben csak a térlépések számában volt különbség. Ezután ábrázoltam a hátlapi hőmérsékleteket, majd különbséget képeztem a görbék között, amivel megkaptam, hogy mennyi a hiba a különböző térlépések alkalmazásával.

A szimulációkat 50, 100, 150, 200, 300 és 400 térlépéssel futtattam, ahol az üreg mindig a teljes test 50 és 75 százaléka között helyezkedett el. A további szimulációs paraméterek: $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 4.5, r_\lambda = 0.01$.

A szimulációk lefuttatása után ábrázoltam a hátlapi hőmérsékleteket, amelyek az 5.3. ábrán láthatóak. Jól látszik, hogy a térlépések növelésével a hátlapi hőmérsékletek kissé felfelé tolódnak el, viszont jó, hogy monoton módon. Az is látszik, hogy a 150 térlépés feletti görbéknél már nincs nagy eltérés. Ahhoz viszont, hogy ezt pontosan, diagramban is lássuk, ábrázoltam a szomszédos térlépésű görbék különbségét, ami a 5.4 ábrán látható.

Ez alapján elmondható, hogy 150 térlépés alkalmazása felett, a görbék közötti eltérés már $\vartheta = 0.01$ alatti, ezért a továbbiakban a szimulációkat ezzel a térlépésszámmal végzem el.

5.3. ábra. Hátlap hőmérsékletek különböző számú térlelésekkel, $\lambda = 0.01$ 

5.4. ábra. Szomszédos térleléseű görbék különbsége

5.2.3. Érzékenységvizsgálat

Az érzékenységvizsgálat egy olyan módszer a modellezésben, amely azt vizsgálja, hogy egy adott függvény vagy modell kimenete hogyan változik a bemeneti paraméterek változtatásával. Meg lehet vele állapítani, hogy a modell mely paraméterek változására módosul jobban, magyarul, mely paraméterre a legérzékenyebb. Azt is megmutatja, hogy egy időfüggő esetben, melyik paraméter melyik időtartományban a legbefolyásosabb.

A vizsgálatot a [24] cikk alapján végzem el. A vizsgálat lényege, hogy adott paraméter kis változtatásával futtatom a szimulációt, majd a két adatsor különbségét osztom az adott paraméterek különbségével. Az érzékenységi függvény tehát:

$$S_{p_i,t} = \frac{\partial y}{\partial p_i}, \quad y = y(p_i, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.6)$$

ahol $y(p_i, t)$ a függvény, amelynek érzékenységét vizsgáljuk, esetünkben a ϑ dimenziótlan hőmérséklet, p_i a változtatott paraméter, n pedig azon paraméterek száma, amelynek hatását vizsgálni szeretnénk.

Annak érdekében, hogy a kapott érzékenységi függvények egymással összehasonlíthatóak legyenek az kell, hogy a függvényértékek azonos dimenzióval rendelkezzenek, ami esetünkben a dimenziótlan hőmérséklet. Tehát szükséges előállítani az úgynevezett redukált érzékenységi függvényeket, amelyeket úgy kapok, hogy az érzékenységi függvényt beszorzom a változtatott paraméter értékével:

$$\hat{S}_{p_i,t} = p_i \frac{\partial y}{\partial p_i}, \quad y = y(p_i, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.7)$$

Mivel az érzékenységi függvény esetünkben nem egy analitikus függvény, ezért az adott paraméter szerinti deriválást a következőképpen értelmezzük:

$$\hat{S}_{p_i,t} = \frac{\partial y}{\partial p_i} \cdot p_i \approx \frac{\vartheta(p_i + \Delta p_i, t) - \vartheta(p_i, t)}{\Delta p_i} \cdot p_i, \quad \Delta p_i = 0.05 p_i. \quad (5.8)$$

Az érzékenységvizsgálatot a következő paraméterekre végzem el:

- $p_1 = \alpha_1$: a hőszigetelést és az üreg mellett történő hővezetést jellemző paraméter,
- $p_2 = \alpha_2$: a hőátadást jellemző paraméter,
- $p_3 = r_\lambda$ a hővezetést jellemző paraméter,
- $p_4 = l$ az üreg méretét jellemző paraméter,
- $p_5 = n_k$ az üreg helyzetét jellemző paraméter,

A számítás menetét egy paraméter esetén bemutatom, a többi paraméter esetén pedig csak a bemeneti adatokat, és a végeredményeket közlöm. Tehát, az érzékenységvizsgálat az α_1 paraméter esetén:

$$y = \vartheta(\alpha_1, Fo), \quad p_1 = \alpha_1 = 4, \quad \Delta p_1 = 0.05 \cdot \alpha_1. \quad (5.9)$$

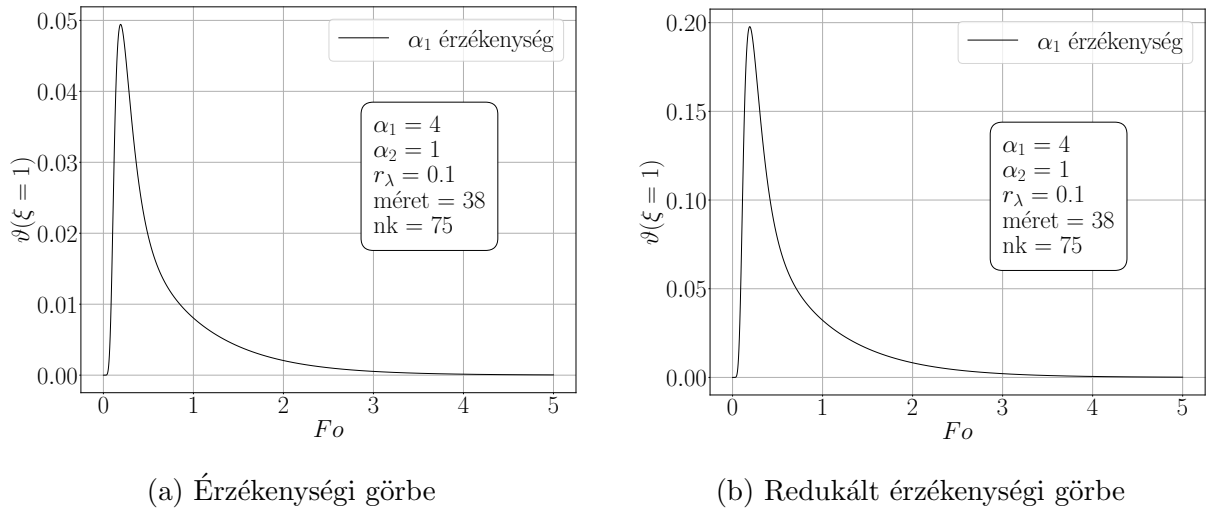
Ez alapján az érzékenységi függvény:

$$S_{\alpha_1, t} \approx \frac{\vartheta(4 + 0.05 \cdot \alpha_1, t) - \vartheta(4, t)}{0.05 \cdot 4}, \quad (5.10)$$

illetve a redukált érzékenységi függvény:

$$\hat{S}_{\alpha_1, t} \approx \frac{\vartheta(4 + 0.05 \cdot \alpha_1, t) - \vartheta(4, t)}{0.05 \cdot 4} \cdot 4. \quad (5.11)$$

A két függvény ábrázolása az 5.5. számú ábrákon látható. Mindkét görbén látszik, hogy az α_1 paraméterre a 0-1 dimenziótlan időtartományban a legérzékenyebb a modell, és az idő előrehaladtával ez a paraméter már nem befolyásolja az eredményeket, mivel 0-ba konvergál, tehát ez a paraméter nincs hatással az egyensúlyi hőmérséklet értékére.



5.5. ábra. α_1 érzékenységi görbék

Az érzékenységvizsgálatot a többi paraméterre is elvégeztem, viszont csak a redukált érzékenységi függvényeket ábrázoltam (5.6. ábra), mivel ezek összehasonlításával lehet következtetéseket levonni.

A görbék több fontos információt is szolgáltatnak számunkra. A maximális amplitúdóikat összehasonlítva megállapítható, hogy melyik paraméter a legbefolyásosabb. Látszik, hogy az üreg mérete van a legnagyobb hatással a modell kimenetére, ezen paraméter csaknem 8-szor befolyásosabb, mint az r_λ . Az α_1, α_2 és r_λ paraméterek érzékenységei azonos

nagyságrendbe esnek, viszont az üreg helyzete egy nagyságrenddel kisebb befolyással van a modell eredményére.

Az is megfigyelhető, hogy a töbi görbével ellentétben, az r_λ és a méret érzékenységi függvényei nem konvergálnak nullához, ami azt jelenti, hogy ezek a paraméterek határozzák meg az egyensúlyi hőmérséklet értékét.

A görbéket összehasonlítva azt is láthatjuk, hogy mindegyik karakterisztikája különböző, tehát egyik görbe sem konstansszoros a másiknak, tehát a paraméterek egymástól lineárisan függetlenek. Ez azért fontos, mert a későbbiekben tervben van a modell eredményeinek iteratív illesztése mérési eredményekre, amelyeket az érzékenységi függvényekből alkotott érzékenységi mátrix segítségével lehet elvégezni. Mivel a paraméterek egymástól lineárisan függetlenek, így az érzékenységi mátrix oszlopai is függetlenek lesznek egymástól, tehát a mátrix determinánsa nem lesz zérus, így invertálhatóvá téve a mátrixot.

5.3. Szimulációk elvégzése és eredmények

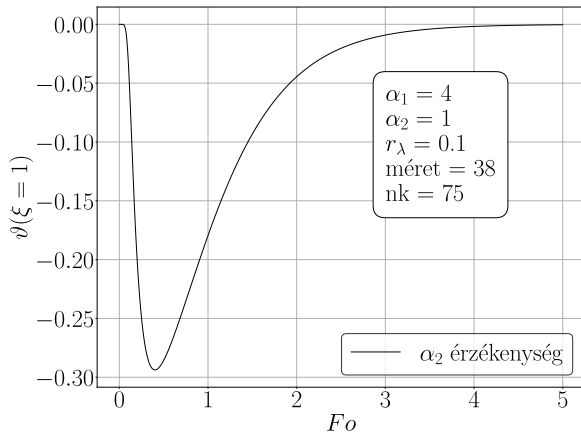
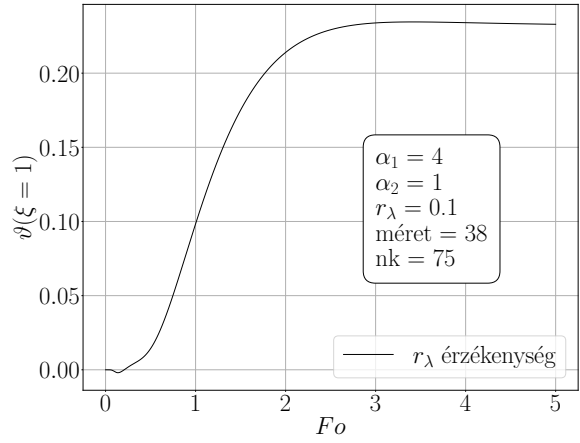
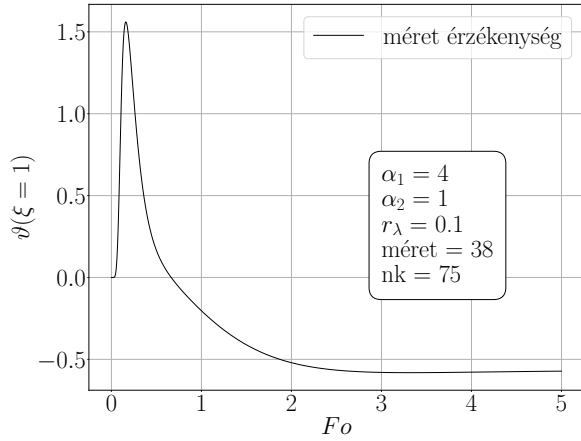
A paraméterek megfelelő beállítása után már minden feltétel adott ahhoz, hogy lefuttassam a szimulációkat. Megvizsgálom azt, hogy az r_λ mely értékeire marad stabil a modell, hogyan függ az üreg méretétől illetve helyzetétől a hátlapi hőmérséklet. Az érzékenységi függvények alapján már természetesen lehet sejtésünk arról, hogy a méret, illetve az r_λ értékei fogják megszabni azt, hogy milyen egyensúlyi hőmérsékletre áll be a modell, de ellenőrizzük le ezt a sejtést a szimulációkkal is.

5.3.1. r_λ függés

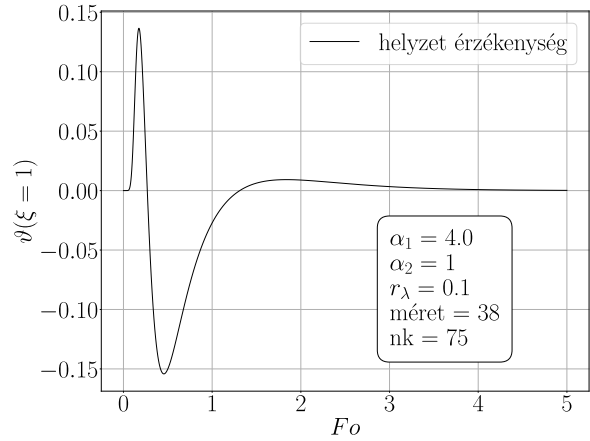
Ahogy azt már korábban leírtam (5.7 egyenlet), az r_λ paraméter az üregben lévő fluidum, illetve a fém hővezetési együtthatójának hányadosa, tehát megmutatja, hogy az üregben lévő fluidum mennyivel rosszabb hővezető mint a fém. Természetesen, minél kisebb ez az érték, az üreg két falának közvetlen összeköttetése az α_2 paraméter segítségével annál befolyásosabb.

A szimulációt 4 különböző r_λ értékkel futtattam, amelyek a következők: 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001. Mivel az alumínium hővezetési együtthatója $\lambda = 237 \text{ W/(mK)}$, a levegőé pedig $\lambda = 0.026 \text{ W/(mK)}$, ezért fontos lenne, hogy a modell adjon eredményt az $r_\lambda = 0.0001$ -es nagyságrendben is.

A szimuláció eredményei a 5.7. ábrán láthatóak. Látszik, hogy a sejtésünk beigazolódott, és az r_λ értéke jelentősen befolyásolja az egyensúlyi hőmérséklet értékét, de az is megfigyelhető, hogy ez monotonan függ a paraméter értékétől. Amikor az üregben lévő fluidum és a fém hővezetési együtthatója között csak tízszeres különbség van, akkor a közvetlen hőátadás az üreg falai között még nem gyorsítja meg annyira a hőmérséklet-növekedést

(a) Redukált érzékenység: α_2 (b) Redukált érzékenység r_λ 

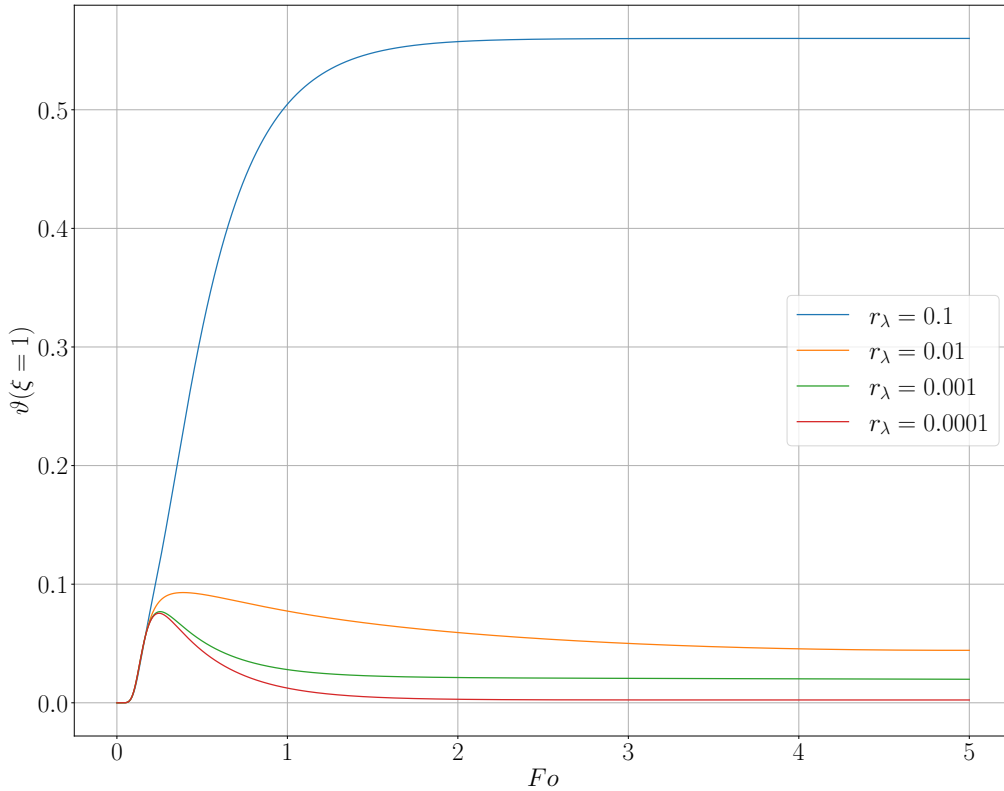
(c) Redukált érzékenység: méret



(d) Redukált érzékenység: helyzet

5.6. ábra. A redukált érzékenységi görbék

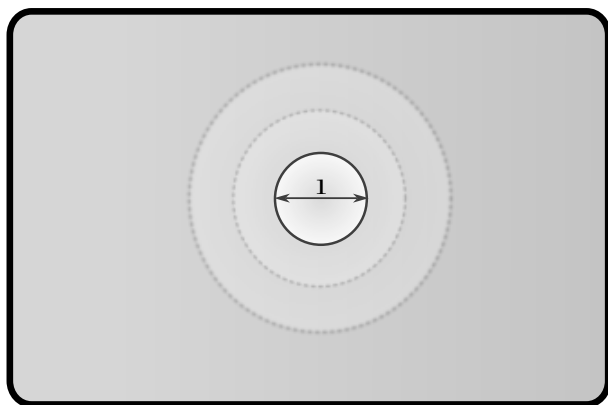
a hátlapon, viszont amikor az üreg hővezetési együtthatója már több nagyságrenddel kisebb, akkor igen. Ebben az esetben az időskála elején, még csak a jó hővezetésű fém hőkapacitása áll rendelkezésünkre, ezért a gyors hőmérséklet-növekedés, de ahogy az idő telik, ez az energia lassan melegíti az üregben lévő közeget is, ezért történik a visszahűlés a hátlapon. Ahogy azt az ábrán láthatjuk, az r_λ kis értéke esetén, úgy tűnik, mintha a hőmérséklet nullára hűlné vissza a hátlapon, holott a modellbe nincs hűlés beépítve. Ez valamilyen anomáliára enged következtetni a háttérben.



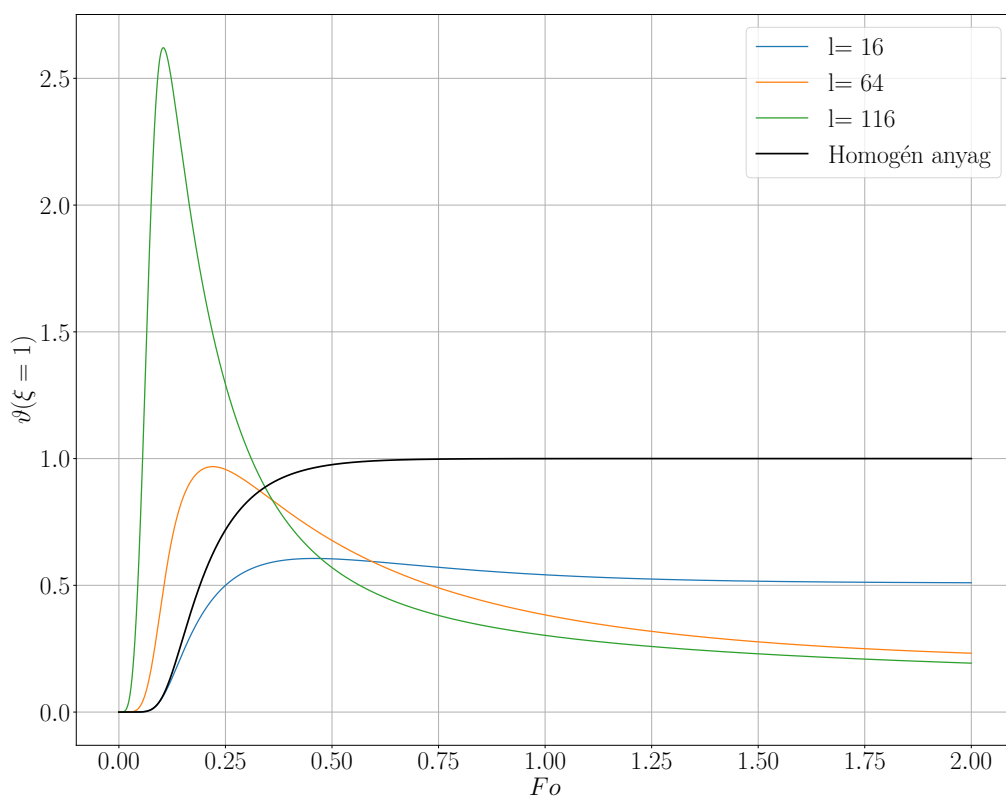
5.7. ábra. A dimenziótlan hőmérséklet az dimenziótlan idő függvényében a hátlayan, különböző r_λ értékekre.

5.3.2. Üreg méretétől való függés

Azt is fontos vizsgálni, hogy az üreg mérete hogyan befolyásolja a modell viselkedését, mivel a fémhabok esetében ez is egy széles skálán változó paraméter. Az érzékenységi függvények alapján sejthető, hogy ez a paraméter a legbefolyásosabb az összes közül, mivel a redukált érzékenységi függvény amplitúdója egy nagyságrenddel nagyobb tartományba esett, mint a többi paraméteré. Az is sejthető, hogy ez a paraméter hatással van az egyensúlyi hőmérséklet értékére is, mivel a redukált érzékenységi függvény nem nullához tart. Ennek tudatában elvégzem a szimulációt úgy, hogy az üreg középpontja minden esetben a próbatest középpontja lesz, ami a 75. térpont, és az üreg méreteit 15, 65 és 115 térpontra állítom (5.8. ábra). Ez azt jelenti, hogy az üreg a próbatest 10-43-76 %-át teszi ki. A szimulációt lefuttatva három görbét kapok (5.9. ábra). A sejtésünk, miszerint az üreg mérete befolyásolja az egyensúlyi hőmérséklet értékét, beigazolódott. Az is megfigyelhető, hogy az üreg méretének növekedésével monoton módon nő a maximális hőmérsékletek értéke, illetve csökken az egyensúlyi hőmérséklet. Ez hasonlóan az r_λ esetéhez azzal magyarázható, hogy amikor az üreg mérete nagy, akkor a próbatest



5.8. ábra. Az üreg méretének változtatásának szemléltetése. Az üreg középpontja minden esetben a 75. térpont, l pedig az üreg mérete térpontban.



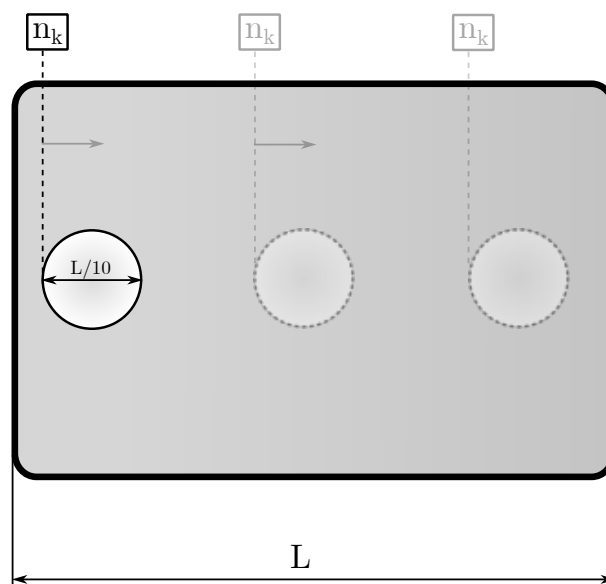
5.9. ábra. Dimenziótlán hőmérséklet a hátapon a dimenziótlán idő függvényében, ahol l az üreg méretét jelöli térlépésben.

nagy része egy rossz hővezetési tényezőjű anyaggal van kitöltve. Viszont, mivel az üreg két szélé közvetlen kapcsolatban van egy hőátadás peremen keresztül, ezért az időskála kezdetén a jó hővezetési tényezőjű anyag hőkapacitása érvényesül. Ezért történik az, hogy nagy üregméretnél, az időskála elején a maximális hőmérséklet is nagy. Viszont az

időskála későbbi részeiben az üregben történő hővezetés is elkezd érvényesülni, ami azt eredményezi, hogy egyfajta visszaáramlás történik a véglapról az üreg felé, és ez az energia emeli fel az üregben lévő fluidum hőmérsékletét.

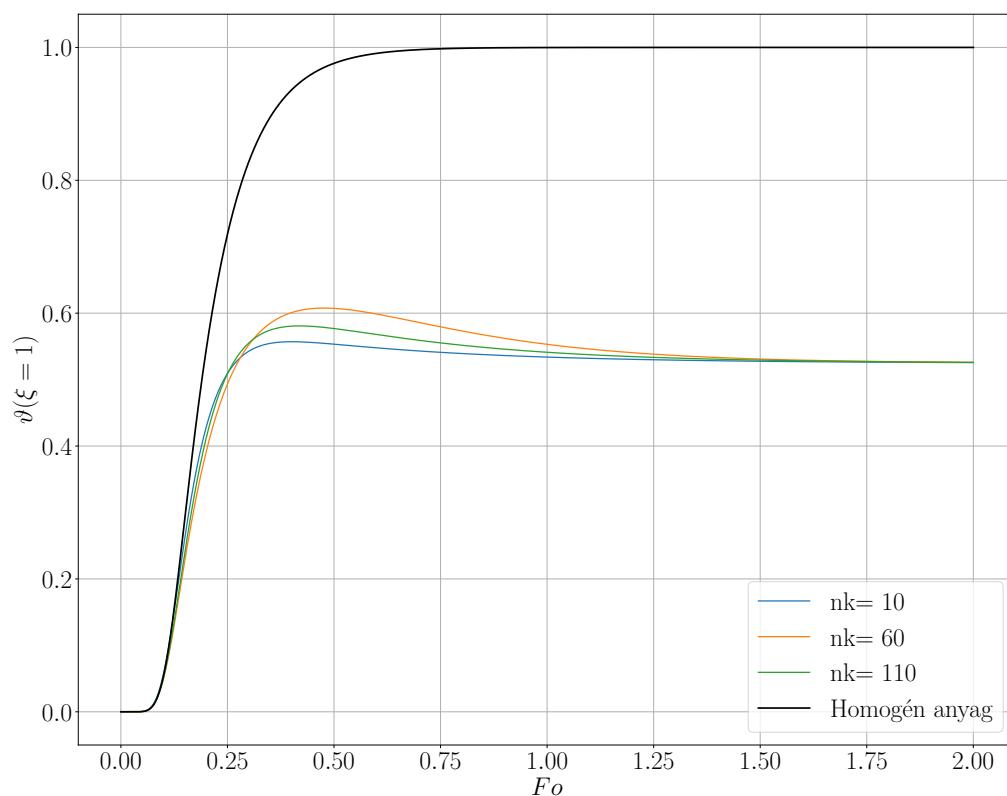
5.3.3. Üreg helyzetétől való függés

Ebben a részben megvizsgálom a modell viselkedését úgy, hogy az üreg helyzetét változtatom a testen belül, amit az 5.10. ábra szemléltet. A próbatest 150 térlépésre van felosztva, üreg méretét pedig 15 térlépésre állítom, amely a teljes próbatest tizedének felel meg. A szimulációt 3 alkalommal futtatom, egyszer úgy, hogy az üreg a próbatest első felében, egyszer a közepén, egyszer pedig a második felében helyezkedik el.



5.10. ábra. Az üreg helyzetének változtatása, ahol n_k az üreg kezdetének helye, az üreg mérete pedig a teljes próbatest tizede.

A szimulációk lefuttatása után ábrázoltam a dimenziótlan hőmérséklet időbeli megváltozását (5.11. ábra). Ahogy azt már az érzékenységvizsgálat eredményeiből sejthettük, az üreg helyzetének változása nem befolyásolja az egyensúlyi hőmérséklet értékét. Az is látszik, hogy a görbék nem monoton módon változnak az üreg helyzetének eltolásával. Amikor a cella a próbatest közepén helyezkedik el, a dimenziótlan hőmérséklet akkor nő a legmagasabbra, viszont az egyensúly abban az esetben áll be a leglassabban. Amikor az üreg a próbatest elején, viszonylag távol helyezkedik el a mérési ponthoz képest, az egyensúlyi hőmérséklet abban az esetben áll be a leghamarabb, az üregnek ekkor van a legkisebb szerepe.



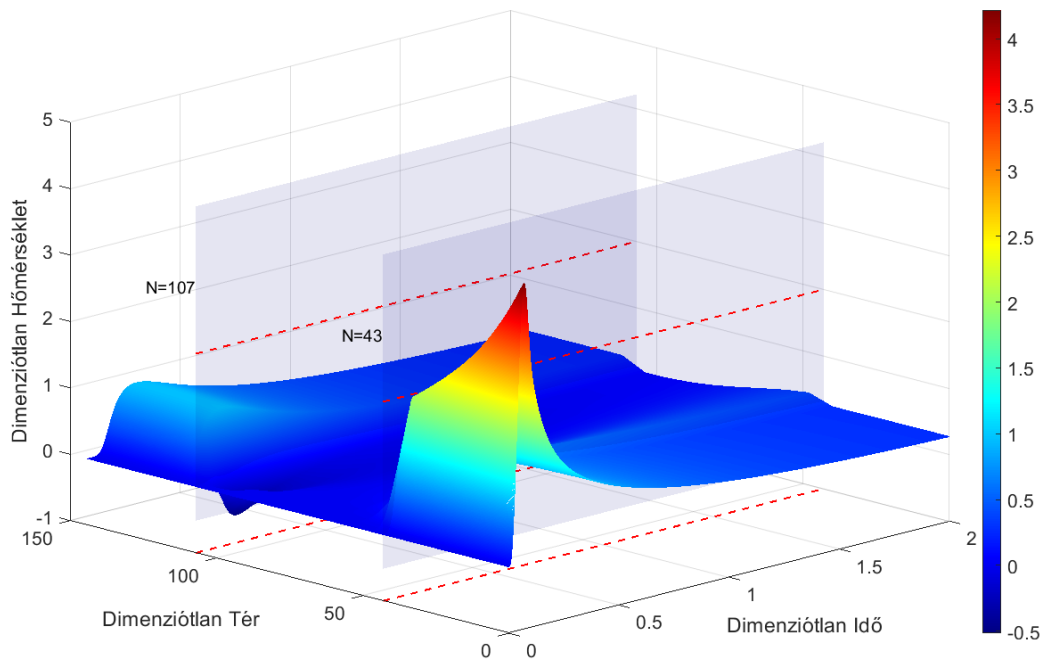
5.11. ábra. Dimenziótlan hőmérséklet a hátlayan a dimenziótlan idő függvényében, az üreg 3 különböző pozíciójában. Az üreg mérete 15 térpont, a teljes test tizede, nk az üreg kezdetének térpontja.

5.3.4. 3D hőmérséklet-eloszlás

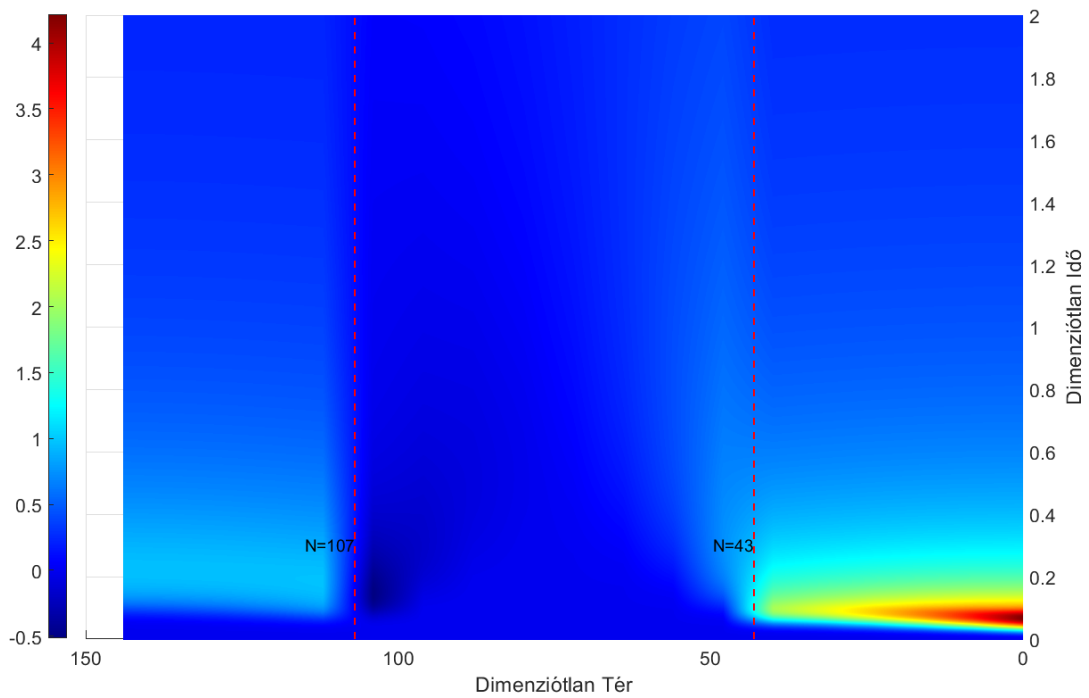
Ahhoz, hogy a testben lezajló folyamatokat tisztán megértsük és szemléltessük, a hőmérséklet-eloszlást ábrázoltam a tér és idő függvényében, azonban egy érdekes, eddig tisztázatlan jelenségre lettem figyelmes.

A 3D ábrázolás során $N=200$ térpontot alkalmaztam, az üreg pedig a 60. és 140. térpont között helyezkedik el.

Az 5.12. ábrán jól látszik a hőimpulzus a kezdeti időpillanatokban a próbatest elején, majd az is, hogy az üreg túlsó szélén, az üreget megkerülő hővezetés miatt, a hőmérséklet ott is megnő. Ahogy látszik, az idő elteltével az üreg illetve a mátrixanyag hőmérséklete kezd kiegyenlítődni, és az $Fo = 2$ időpillanatban már egészen kiegyenlített a testen belül a hőmérséklet-eloszlás, ahogy az a 5.13. ábrán is látható. Azonban fontos kiemelni, hogy



5.12. ábra. Hőmérséklet-eloszlás a hely és idő függvényében. Az üreg az $N = 43$ és $N = 107$ térpontok között helyezkedik el. Látszik, hogy a szimuláció által kiszámított hőmérséklet eddig tisztázatlan okokból a negatív tartományban van egy része.



5.13. ábra. A hőmérséklet-eloszlás felülnézetből, ahol jól látszik az üreg, illetve a hőmérséklet kiegyenlítődése.

az üregen belül az időskála kezdeti szakaszán, az üreg túlsó feléhez közelebb a hőmérséklet a negatív tartományba csökken (a kezdeti hőmérséklet alá), és innen kezd kiegyenlítődni. Ez lehetséges, hogy összefüggésben van az 5.3.1. fejezet végén leírt jelenséggel, amikor a hátlapi hőmérséklet közel a kezdeti hőmérséklethez konvergált. Ennek okára még nem sikerült rájönni, ezért ez még mindenképpen további vizsgálatra ad okot.

6. Összefoglalás

6.1. Összefoglalás

A fémhabok kiváló szerkezeti anyagok alacsony sűrűségük és kedvező mechanikai tulajdonságaik miatt, és alkalmazásuk egyre gyakoribbá válik a járműiparban és más iparágakban, ahol fontos az alacsony tömeg és a nagy hőszigetelési képesség.

A hagyományos hővezetési modellek, mint a Fourier-törvény, nem elegendőek a fémhabok komplex termikus folyamatainak leírására. Az anyagok porozitása, az üregek közötti kapcsolatok és a cellák mérete, valamint alakja mind-mind jelentős hatással van a hővezetésre. Ezért szükség van új matematikai modellek és szimulációs technikák alkalmazására.

Ebben a dolgozatban felállítottam egy térben egydimenziós modellt, amelyben figyelembe vettem az üregben lévő hőátadást és hőmérsékleti sugárzást. Ezután explicit numerikus megoldót készítettem, majd elvégeztem az érzékenységi és paramétervizsgálatokat. Kiderült, hogy a modell mely paraméterekre a legérzékenyebb és mely paraméterek befolyásolják a hátlapi hőmérséklet változását az időben. A hőmérséklet 3D ábrázolása során kiderült, hogy az üregben lévő hőmérséklet az időskála elején negatív tartományba esik, ez még további vizsgálatra ad okot.

A téma a következő pontok alapján még tovább vizsgálható:

- a modell felülvizsgálata az üregben kialakuló negatív hőmérséklet kialakulása miatt,
- összefüggés keresése az általam felállított modell paraméterei, illetve a GK-egyenlet paraméterei között.
- a modell vizsgálata több üreg alkalmazásával, a hőátadási és hősugárzási paraméterek pontosabb becslésével.

6.2. Summary

Metal foams are excellent structural materials due to their low density and favorable mechanical properties, and their application is becoming increasingly common in the automotive industry and other sectors where low weight and high thermal insulation capacity are essential.

Traditional heat conduction models, such as Fourier's law, are insufficient for describing the complex thermal processes of metal foams. The porosity of the materials, the connections between the pores, and the size and shape of the cells all have significant effects on heat conduction. Therefore, new mathematical models and simulation techniques are needed.

In this thesis, I developed a one-dimensional spatial model that takes into account heat transfer and thermal radiation within the cavity. Subsequently, I created an explicit numerical solver and conducted sensitivity and parameter analyses. It was revealed which parameters the model is most sensitive to and which parameters influence the change in the back-surface temperature over time. The 3D representation of the temperature showed that, at the beginning of the time scale, the temperature within the cavity falls into the negative range, which requires further investigation.

The topic can be further examined based on the following points:

- reviewing the model due to the occurrence of negative temperature within the cavity,
- finding the correlation between the parameters of the model I established and the parameters of the GK equation,
- investigating the model with multiple cavities, with more accurate estimation of heat transfer and thermal radiation parameters.

Hivatkozások

- [1] Lorna J. Gibson, Michael F. Ashby, and Brendan A. Harley. *Cellular materials in nature and medicine*. Cambridge University Press, 2010.
- [2] M.F. Ashby, A. Evans, N.A. Fleck, L.J. Gibson, J.W. Hutchinson, H.N.G. Wadley, and F. Delale. Metal Foams: A Design Guide. *Applied Mechanics Reviews*, 54(6):B105–B106, 11 2001.
- [3] John Banhart. Light-metal foams—history of innovation and technological challenges. *Advanced Engineering Materials*, 15, 03 2013.
- [4] Matej Vesenjak, Matej Borovinsek, Zoran Ren, Seiichi Irie, and Shigeru Itoh. Behavior of metallic foam under shock wave loading. *Metals*, 2(3):258–264, 2012.
- [5] Ltd Beihai Composite Materials Co. Closed Cell Aluminum Foam — metalfoamweb.com. <https://www.metalfoamweb.com/aluminum-foam/closed-cell-aluminum-foam/>. [Letöltés 2024.09.15].
- [6] John Banhart. Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams. *Progress in Materials Science*, 46(6):559–632, 2001.
- [7] Francisco García-Moreno. Commercial applications of metal foams: Their properties and production. *Materials*, 9(2):85, 2016.
- [8] A. G. Hanssen, K. Stöbener, G. Rausch, M. Langseth, and H. Keller. Optimisation of energy absorption of an a-pillar by metal foam insert. *International Journal of Crashworthiness*, 11(3):231–242, 2006.
- [9] K. Boomsma, D. Poulikakos, and F. Zwick. Metal foams as compact high performance heat exchangers. *Mechanics of Materials*, 35(12):1161–1176, 2003.
- [10] H. R. Salimi Jazi, J. Mostaghimi, S. Chandra, L. Pershin, and T. Coyle. Spray-formed, metal-foam heat exchangers for high temperature applications. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, 1:031008, 2009.
- [11] T.J. Lu, A.G. Evans, and J.W. Hutchinson. The effects of material properties on heat dissipation in high power electronics. *Journal of Electronic Packaging, Transactions of the ASME* 120(3): 280-289, 1998.
- [12] B.V. Antohe, J.L. Lage, D.C. Price, and R. Mi Weber. Numerical characterization of micro heat exchangers using experimentally tested porous aluminum layers. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 17(6):594–603, 1996.

-
- [13] N. Babcsán, I. Mészáros, and N. Hegman. Thermal and electrical conductivity measurements on aluminum foams. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 34(4):391–394, 2003.
- [14] E. Solórzano, J.A. Reglero, M.A. Rodríguez-Pérez, D. Lehmhus, M. Wichmann, and J.A. de Saja. An experimental study on the thermal conductivity of aluminium foams by using the transient plane source method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(25-26):6259–6267, 2008.
- [15] A. G. Leach. The thermal conductivity of foams. i. models for heat conduction. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 26(5):733–739, 1993.
- [16] K. Boomsma and D. Poulikakos. On the effective thermal conductivity of a three-dimensionally structured fluid-saturated metal foam. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(4):827–836, 2001.
- [17] Yang Hu, Qin-Zhi Fang, Huimin Yu, and Qinwei Hu. Numerical simulation on thermal properties of closed-cell metal foams with different cell size distributions and cell shapes. *Materials Today Communications*, 24:100968, Feb 2020.
- [18] Kovács Róbert. Hővezetés egyenleteinek elmélete, numerikus vizsgálata és kísérleti ellenőrzése. *Tudományos Diákköri Dolgozat*, Október 2014.
- [19] W. J. Parker, R. J. Jenkins, C. P. Butler, and G. L. Abbott. Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity. *Journal of Applied Physics*, 32(9):1679–1684, 1961.
- [20] Fehér Anna és Kovács Róbert. On the dynamic thermal conductivity and diffusivity observed in heat pulse experiments. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, aop, 2024.
- [21] Soma Both, Balázs Czél, Tamás Fülöp, Gyula Gróf, Ákos Gyenis, Róbert Kovács, Peter Ván, and József Verhás. Deviation from the Fourier law in room-temperature heat pulse experiments. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 41(1):41–48, 2016.
- [22] Anna Fehér, Norbert Lukács, László Somlai, Tamás Fodor, Mátyás Szücs, Tamás Fülöp, Peter Ván, and Róbert Kovács. Size effects and beyond-Fourier heat conduction in room-temperature experiments. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 2021.
- [23] Anna Fehér, Róbert Kovács, Ákos Sudár, and Gábor G. Barnaföldi. Challenges in the thermal modeling of highly porous carbon foams. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 2024.
-

- [24] Anna Fehér, J. E. Maróti, D. M. Takács, I. N. Orbulov, and R. Kovács. Thermal and mechanical properties of AlSi7Mg matrix syntactic foams reinforced by Al₂O₃ or SiC particles in matrix. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 226:125446, 2024.

Függelék

```
1 import sympy as sp
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 from tqdm.notebook import tqdm
6
7 plt.rcParams.update({"text.usetex": True, "font.family": "serif", \
8     "font.serif": ["Computer Modern Roman"]})
9 plt.rc('text.latex', preamble=r'\usepackage{amsmath}\
10     \usepackage{bm} \usepackage[utf8]{inputenc}')
11
12 FontSize = 28
13 plt.rc('font', size=FontSize) # alapértelmezett betűméret
14 plt.rc('axes', titlesize=FontSize) # cím betűmérete
15 plt.rc('axes', labelsiz=FontSize) # x- és y-tengelyfelirat betűmérete
16 plt.rc('xtick', labelsiz=FontSize) # x-tengely értékek betűmérete
17 plt.rc('ytick', labelsiz=FontSize) # y-tengely értékek betűmérete
18 plt.rc('legend', fontsize=FontSize) # jelmagyarázat betűmérete
19
20 ## color blind friendly colors
21 cbforange = (230/255, 159/255, 0/255)
22 cbfmagenta = (204/255, 121/255, 167/255)
23 cbfyellow = (240/255, 228/255, 66/255)
24 cbflightblue = (86/255, 180/255, 233/255)
25 cbfgreen = (0/255, 158/255, 115/255)
26 cbfblue = (0/255, 114/255, 178/255)
27
28 cbfred = (213/255, 94/255, 0/255)
29
30 rainbow = [cbfblue,cbflightblue,cbfgreen,cbfyellow,cbforange,cbfred]
31
32 FoP      = 0.1
33 Fo_0     = 0
34 Fo_end   = 2
35 N        =150
36 dxi      =1/(N-1)
37 dFo      =dxi**2/5
```

```

38 J      =int(np.round((Fo_end-Fo_0)/dFo))
39 Fo      =np.linspace(Fo_0,Fo_end,J)
40
41 q        =np.zeros([J,N])
42 theta    =np.zeros([J,N-1])
43
44 #bal oldali peremfeltétel betöltése
45 s=0
46 for j in tqdm(range (0,J)):
47     if Fo[j]<= FoP:
48         q[j,0]= (1-np.cos(2*np.pi*Fo[j]/FoP))*(1/FoP)
49         s = s + dFo*q[j,0]
50
51 for j in range (0,J-1):
52     for n in range (0,N-1):
53         theta[j+1,n] = theta[j,n] - dFo/dxi*(q[j,n+1]-q[j,n])
54     for n in range (1,N-1):
55         q[j+1,n]     = -1/dxi*(theta[j+1,n]-theta[j+1,n-1])
56
57 nk= 75
58 nv =113
59
60
61 thetau= np.zeros([J,N-1])
62 qu = np.zeros([J,N])
63 s=0
64 for j in tqdm(range (0,J)):
65     if Fo[j]<= FoP:
66         qu[j,0]= (1-np.cos(2*np.pi*Fo[j]/FoP))*(1/FoP)
67         s = s + dFo*qu[j,0]
68 print(s)
69
70 plt.figure(figsize=(25/2.54,20/2.54))
71 plt.plot(Fo,qu[:,0])
72
73 filename2 = f"gerjesztes.pdf"
74 plt.grid()
75 plt.xlabel(r'$Fo$',labelpad=0)

```

```

76 plt.ylabel(r'$q$($\xi=0$)',labelpad=0)
77 plt.savefig(filename2)
78
79 alfa = 4
80 alfa2 = 1
81 lam_values = [0.1]
82
83 data_store50={}
84
85
86
87 for lam in lam_values:
88     for j in tqdm(range (0,J-1)):
89         for n in range (0,N-1):
90             if n<nk:
91                 thetau[j+1,n] = thetau[j,n] \
92                     -dFo/dxi*(qu[j,n+1]-qu[j,n])
93             elif nk<n<nv:
94                 thetau[j+1,n] = thetau[j,n]\
95                     -lam*dFo/dxi*(qu[j,n+1]-qu[j,n])
96             elif n == nv:
97                 thetau[j+1,n] = thetau[j,n] \
98                     -dFo/dxi*(qu[j,n+1]-qu[j,n])
99             elif n==nk:
100                 thetau[j+1,n] = thetau[j,n] \
101                     -lam*dFo/dxi*(qu[j,n+1]-qu[j,n])
102             elif n>nv:
103                 thetau[j+1,n] = thetau[j,n] \
104                     -dFo/dxi*(qu[j,n+1]-qu[j,n])
105         for n in range (1,N-1):
106             if n<nk:
107                 qu[j+1,n] = -1/dxi*(thetatau[j+1,n]-thetatau[j+1,n-1])
108             elif nk<n<nv:
109                 qu[j+1,n] = -1/dxi*lam*(thetatau[j+1,n]-thetatau[j+1,n-1])
110
111             elif n == nv:
112                 qu[j+1,n] = -alfa2*(thetatau[j+1,nv]-thetatau[j+1,nv-1])-\
113                     alfa*(thetatau[j+1,n]-thetatau[j+1,nk-1])

```

```
114         elif n==nk:
115             qu[j+1,n] = -alfa2*(thetau[j+1,nk]-thetau[j+1,nk-1])-\\
116                 alfa*(thetau[j+1,nv]-thetau[j+1,nk-1])
117         elif n>nv:
118             qu[j+1,n] = -1/dxi*(thetau[j+1,n]-thetau[j+1,n-1])
119
120     # Aktuális lambdahoz tartozo adatsor eltárolása
121     data_store50[lam] = thetau[:, N-2].copy()
122
```