

Láncos lufi nemlineáris viselkedése

TDK dolgozat

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Vincze Farkas Csongor

Baár-Madas Református Gimnázium

Konzulens: Dr. Károlyi György

Budapest, 2024. november 3.

Összefoglaló

Egy egyszerű rendszert vizsgálunk elméleti és numerikus módszerekkel. Egy héliummal töltött lufi mozgását követjük, ami egy földig érő láncot cipel. Yarov és társai [1] megmutatták, hogy homogén lánc esetén a léggömb egyensúlyi helyzetből való kitérítése után nemlineáris mozgásba kezd, amely csillapítás hatására kis idő után egy fixpontban megáll. Eredményeink azt mutatják, hogy ha a lufira egy magasságfüggő erő hat, például az eltérő magasságban eltérő sűrűségű közegben ható eltérő felhajtóerő miatt, mint egy meteorológiai léggömb esetén, akkor több fixpont is lehetséges, és a rendszer nemlinearitása miatt tranziens káosz is kialakulhat megfelelő paraméterek esetén. Vizsgálatainkat a dimenziótlanított mozgásegyenletek felírásával, numerikus integrálásával és az eredmények elemzésével végezzük.

1. Bevezetés

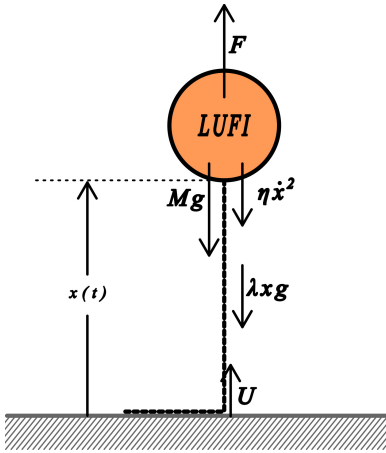
A klasszikus fizika matematikailag pontos leírása egészen Newtonig vezethető vissza. Az 1600-as évek második felében Newton kiadta a „*Principia Mathematica*” című művét, amivel megalapozta a klasszikus mechanikát, és annak matematikailag korrekt leírását. A 18. század – a tudományterületet tekintve – nagyrészt Newton elméleteinek formalizálásával, klasszikus mechanikai problémák megoldásával telt. Ilyen differenciálegyenleteken és klasszikus mechanikai problémákon dolgozott többek között Poisson vagy Laplace is. Újabb nagy változás az 19. század vége felé következett be, amikor Henri Poincaré a háromtest-problémán dolgozott. Megmutatta, hogy a háromtest problémát leíró egyenletek nem integrálhatóak. Ennek következtében Poincaré új, főleg geometriai módszereket talált ki, a dinamikai rendszerek vizsgálatára. Valójában a káoszelmélet kezdete ide vezethető vissza. Az 1900-as évek első felében Birkhoff, Kolmogorov, Arnold és Moser foglalkoztak számottevően a tudományággal. Jelentős esemény Lorenz 1963-ban végzett időjárásmodell szimulációja [2]. Lorenz eredetileg számítógéppel készített egyszerűsített időjárási szimulációkat. Amikor azonban a számítógépnek 6 helyett csak 3 tizedesjegy pontossággal adta meg a kezdeti feltételeket – Lorenz meglepetésére – a számítógép teljesen más eredményeket adott vissza. Ez világossá teszi azt is, hogy miért nehéz hosszú távon időjárást előrejelezni. Ebből a modellből származik a híres, pillangó alakra emlékeztető Lorenz-attraktor. Lorenz felfedezése alapul szolgált a modern káoszelmülethez, nagy hatással volt a természet tudományos vizsgálatának megközelítésére. Lorenz felfedezése után egyre több területen kezdték észrevenni a rendszerek nemlineáris, kaotikus viselkedését – pl.: biológia, populációs modellek, piaci viselkedések. Azóta a káosz a köztudatba is eljutott – köszönhetően például a Jurassic Park című könyvnek –, és az élet sok területén talált alkalmazásokra.

Ebben a dolgozatban egy olyan mechanikai modellt vizsgálunk, amelynek legegyszerűbb esetben csak egy triviális hosszútávú viselkedése lehetséges, azonban kis módosítással a rendszer érdekes viselkedést mutat. Az eredeti rendszer [1] egy súlyos kötelet vonzó héliumos lufi dinamikáját figyeli meg. Azt tapasztalták, hogy ebben a rendszerben csak egyfajta viselkedés lehetséges: kezdeti oszcillációk lecsengése után a rendszer az egyetlen stabil fixpontjába jut el és megáll. Megmutatjuk, hogy ha a rendszerre egy olyan erővel hatunk, ami a lufi földtől mért távolságának függvényében változik, akkor a viselkedése sokkal összetettebb és érdekesebb lesz.

2. A láncot vonzó lufi egyenletei

Először ismertetjük az eredeti cikk[1] egyes eredményeit: felvázoljuk a rendszer kvalitatív viselkedését, felírjuk a mozgásegyenleteket és bemutatjuk azok numerikus megoldását.

Az eredeti rendszer mozgása azon alapszik, hogy a héliumos lufira ható felhajtóerő jelentősen nagyobb, mint a rá ható nehézségi erő. Ebből kifolyólag a lufi a saját súlyán kívül képes még más terheket is cipelni, de csak egy korlátozott tömegig. A megfigyelt oszcilláció abból adódik, hogy ameddig a lufi sebessége pozitív, addig a kötélnek mindig egyre nagyobb részét emeli meg. Egy idő után, ahogy a megemelt kötél hossza nő, már nagyobb erő hat a rendszerre lefelé, mint fölfelé, így sebessége elkezd csökkenni, végül egy pillanat erejéig megáll. Ezután hasonló, de fordított irányú folyamat játszódik le lefelé is. A mozgás kicsit hasonlít egy rugóra akasztott test mozgásához. A rendszer energiadiSSIPÁCIÓJÁÉRT KÉT JELENSÉG FELELŐS. Az egyik a folyamatosan (kivéve 0 sebességnél) jelenlévő légellenállási erő, ami mindig a lufi sebességével ellentétes irányú. A másik a talajhoz ütköző láncdarabok mozgási energia-vesztesége az ütközés során bekövetkező sebességváltozások miatt. Ezen energiaelnyelő folyamatok miatt konvergál a rendszer a végső nyugalmi helyzetéhez.



1. ábra. Rajz az eredeti felállításról, paramétereiről és a rendszerre ható erőkről

Feltesszük, hogy a lufi csak függőleges irányban tud mozogni. A lufi saját tömegét M -el, a légellenállási együtthatót η -val, a lánc hosszmenti tömeg-

sűrűségét λ -val jelöltük. Első lépésként felírtuk a rendszerre ható erőket. A lufi súlyából származik az Mg nehézségi erő. F -el jelöltük a felhajtóerőt. Számításba vettük a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erőt, ezt $\eta\dot{x}^2$ -el jelöltük. Fontos megemlíteni, hogy a légellenállás iránya a sebesség irányától függ, mindig ellentétes vele. A lánc súlyát λxg alakban írjuk fel, ahol x a lufi távolsága a talajtól. Láthatjuk, hogy ez a felírás pont a földtől elvált láncdarab súlyát adja meg, a földön lévő résszel nem kell foglalkozzunk. Az U erő abból adódik, hogy amikor a lánc lefelé mozog, a kis láncdarabok – modellünkben – tökéletesen rugalmatlanul ütköznek a talajjal. Ez a hirtelen lendületváltozás egy erőt fejt ki a talajra, és ennek az ellenereje hat a láncre. Érdekes megfigyelni, hogy ez az erő csak a lefelé mozgásnál jelenik meg. Minden erőt felírtunk valamilyen paraméter(ek) és x deriváltjainak szorzataként, kivéve U -t. Írjuk fel tehát U -t is!

Két eset van. Első: ha $\dot{x}$ pozitív. Ekkor könnyű dolgunk van, mivel nem nyel el a talaj lendületet, így:

$$U = 0 \quad (2.1)$$

Amikor a rendszer sebessége negatív, egy kis idő alatt egy Δx hosszú láncdarab földet ér. Legyen ez a kis idő Δt . Így a sebesség és az eltelt kis idő ismeretében ki tudjuk fejezni ezt a Δx hosszát:

$$\Delta x = \dot{x}\Delta t \quad (2.2)$$

Most írjuk fel a kis láncdarab lendületét:

$$I = \Delta x \lambda \dot{x} = \lambda \dot{x}^2 \Delta t \quad (2.3)$$

Ezt a lendületet fogja a következő időpillanatban a talaj elnyelni. Az erőt felírhatjuk egy rövid időpillanat alatt bekövetkező lendületmegváltozás és a rövid időtartam hányadosaként is. Így a talajra ható erő:

$$V = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\lambda \dot{x}^2 \Delta t}{\Delta t} = \lambda \dot{x}^2 \quad (2.4)$$

ahol V a talajra ható pillanatnyi erő. Kényszerűen meg kell jelenjen egy ellenerő, ami a láncre hat V -vel megegyező nagysággal de V -vel ellentétes irányúan. Ez az ellenerő az:

$$U = -V \quad (2.5)$$

amit az ábrán is feltüntettünk. Az eredeti rendszerben összesen ennyi erő volt jelen.

Ebben a dolgozatban azt szeretnénk megvizsgálni, hogy mi történik, ha a lufira egy olyan erő hat, amelyik függ a lufi földtől mért távolságától. Egy ilyen erő modellezheti például a magasságtól függő felhajtóerő hatását egy meteorológiai léggömb esetén, vagy más méretskálán egy szabályozott ventillátor hatását. Az erőt ebben a dolgozatban a következőképpen definiáljuk:

$$B(x) = A(\sin(\omega x) + 1)x \quad (2.6)$$

Most, hogy $B(x)$ -et is meghatároztuk, felírhatjuk a mozgásegyenletet. Írjuk fel külön-külön az $\dot{x}$ pozitív (felfelé haladó lufi) és az $\dot{x}$ negatív (lefelé haladó lufi) esetekre: ha $\dot{x} > 0$:

$$\frac{F + B(x) - Mg - \lambda gx - (\eta + \lambda)\dot{x}^2}{M + \lambda x} = \ddot{x} \quad (2.7)$$

ha $\dot{x} < 0$:

$$\frac{F + B(x) - Mg - \lambda gx + \eta\dot{x}^2}{M + \lambda x} = \ddot{x} \quad (2.8)$$

ahol $M + \lambda x$ a lufi és a levegőben levő kötélszakasz együttes tömege.

A mozgásegyenleteinket dimenziótlanítottuk, hogy kevesebb paraméterrel kelljen dolgozzunk. Ezt a következő képpen végeztük. Vezessük be a következő kifejezéseket:

$$x = \tilde{x}L \quad (2.9)$$

$$t = \tilde{t}\tau \quad (2.10)$$

ahol $\tilde{x}$ és $\tilde{t}$ a dimenziótlan hely- és időváltozó, L és τ a tetszőlegesen megválasztható hossz- és időegység. Most vegyük ezen kifejezések kicsiny megváltozását Δ -val jelölve, és osszuk el őket egymással.:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta(\tilde{x}L)}{\Delta(\tilde{t}\tau)} \quad (2.11)$$

Ha ezekkel a kicsiny megváltozásokkal 0-hoz tartunk, a következő kifejezést kapjuk:

$$\dot{x} = \dot{\tilde{x}} \frac{L}{\tau} \quad (2.12)$$

Ugyanezt még egyszer elvégezve:

$$\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}} \frac{L}{\tau^2} \quad (2.13)$$

Most az x deriváltjait visszahelyettesíthetjük a mozgásegyenleteinkbe. Ha ezt meg tesszük, a következőket kapjuk. Az (2.7)-es egyenletbe behelyettesítve:

$$\frac{F + B(x) - Mg - \lambda g \tilde{x} L - (\eta + \lambda) \dot{\tilde{x}}^2 \frac{L^2}{\tau^2}}{M + \lambda L \tilde{x}} = \ddot{\tilde{x}} \frac{L}{\tau^2} \quad (2.14)$$

A (2.8)-es egyenletbe behelyettesítve:

$$\frac{F + B(x) - Mg - \lambda g \tilde{x} L + \eta \dot{\tilde{x}}^2 \frac{L^2}{\tau^2}}{M + \lambda L \tilde{x}} = \ddot{\tilde{x}} \frac{L}{\tau^2} \quad (2.15)$$

Mostantól a (2.15) egyenlettel nem foglalkozunk, mivel, ha dimenziótlanítjuk (2.14)-et, – azaz a felfelé mozgásnak megfelelő egyenletet – onnét könnyűszerrel kitalálhatjuk (2.15) – az eredetileg lefelé haladó mozgás – alakját is. Tehát rendezzük tovább (2.14)-et:

$$\frac{\frac{\tau^2}{LM} [F + B(x) - Mg - \lambda g \tilde{x} L - (\eta + \lambda) \dot{\tilde{x}}^2 \frac{L^2}{\tau^2}]}{1 + \frac{\lambda L}{M} \tilde{x}} = \ddot{\tilde{x}} \quad (2.16)$$

$B(x)$ -et is dimenziótlan alakra hozhatjuk:

$$B(x) = b \tilde{B}(\tilde{x}) \quad (2.17)$$

ahol b a magasságfüggő erő egységét határozza meg, és tetszőlegesen megválasztható. Ezt is behelyettesíthetjük (2.16)-ba. Ekképpen az egyenlet új alakja:

$$\frac{\frac{\tau^2}{LM} [F + b \tilde{B}(\tilde{x}) - Mg - g L \lambda \tilde{x} - (\eta + \lambda) \dot{\tilde{x}}^2 \frac{L^2}{\tau^2}]}{1 + \frac{L \lambda}{M} \tilde{x}} = \ddot{\tilde{x}} \quad (2.18)$$

Ezt követően bontsuk ki a számlálóban lévő zárójelet.:

$$\frac{\frac{F \tau^2}{LM} + \frac{\tau^2 b}{LM} \tilde{B}(\tilde{x}) - \frac{\tau^2 g}{L} - \frac{\tau^2 g \lambda}{M} \tilde{x} - \frac{\eta L}{M} \dot{\tilde{x}}^2 - \frac{\lambda L}{M} \dot{\tilde{x}}^2}{1 + \frac{L \lambda}{M} \tilde{x}} = \ddot{\tilde{x}} \quad (2.19)$$

Most válasszuk meg τ és L értékeit a következőknek:

$$\tau = \sqrt{\frac{LM}{b}} \quad (2.20)$$

$$L = \frac{M}{\lambda} \quad (2.21)$$

Ezeket behelyettesítve az egyenletünk a következő alakot ölti:

$$\frac{\frac{F}{b} - \frac{Mg}{b} + \tilde{B}(\tilde{x}) - \frac{Mg}{b}\tilde{x} - \frac{\eta}{\lambda}\dot{\tilde{x}}^2 - \dot{\tilde{x}}^2}{1 + \tilde{x}} = \ddot{\tilde{x}} \quad (2.22)$$

Válasszuk meg b értékét is:

$$b = Mg \quad (2.23)$$

Így az egyenletünk tovább egyszerűsödik:

$$\frac{\frac{F}{Mg} - 1 + \tilde{B}(\tilde{x}) - \tilde{x} - \frac{\eta}{\lambda}\dot{\tilde{x}}^2 - \dot{\tilde{x}}^2}{1 + \tilde{x}} = \ddot{\tilde{x}} \quad (2.24)$$

Vezessük be az:

$$f = \frac{F}{Mg} - 1 \quad (2.25)$$

és

$$p = \frac{\eta}{\lambda} \quad (2.26)$$

mennyiségeket. Ezeknek köszönhetően az egyenletünk lényegesen egyszerűbb formát vesz föl:

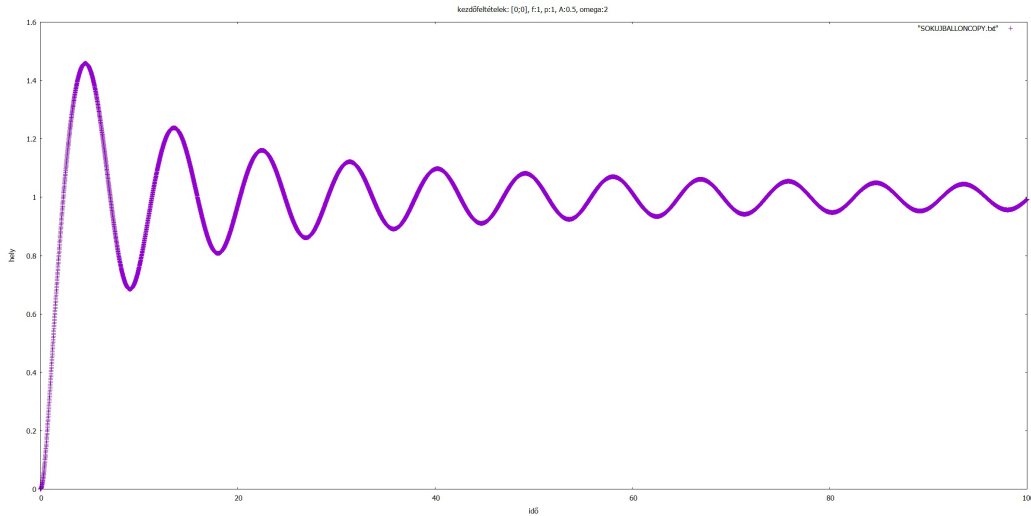
$$\frac{f + \tilde{B}(\tilde{x}) - \tilde{x} - (p+1)\dot{\tilde{x}}^2}{1 + \tilde{x}} = \ddot{\tilde{x}} \quad (2.27)$$

Ekképpen megkaptuk a felfelé való mozgás egyenletének dimenziótlanított alakját. Ahogy korábban említettük, innét már könnyű megkapni a lefelé haladó mozgás ilyen alakba írt egyenletét is. Az eredeti (2.8)-as egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{f + \tilde{B}(\tilde{x}) - \tilde{x} + p\dot{\tilde{x}}^2}{1 + \tilde{x}} = \ddot{\tilde{x}} \quad (2.28)$$

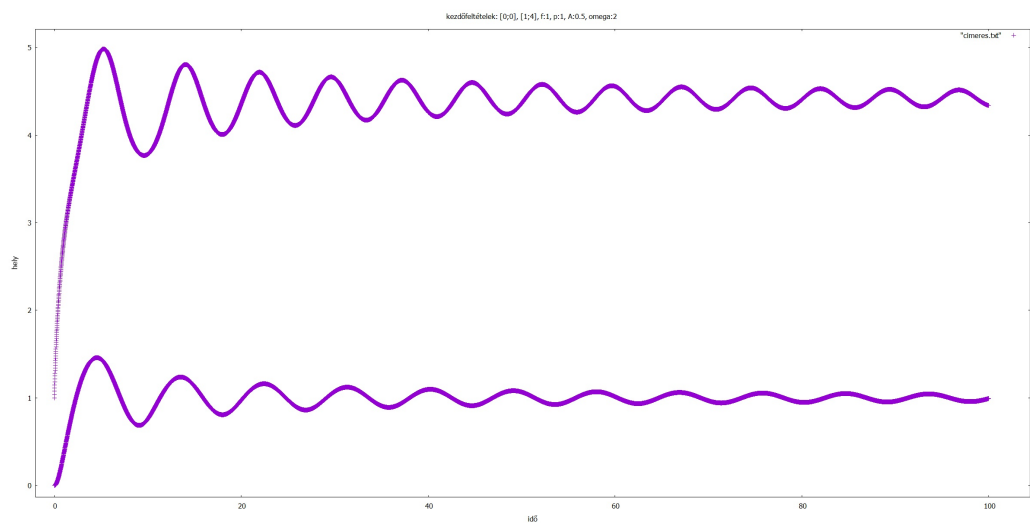
3. Numerikus megoldások

A fenti differenciálegyenletek numerikus megoldásához a negyedrendű Runge-Kutta differenciálegyenlet-megoldó módszert használtuk [3, 4], és C programozási nyelven implementáltuk. Magát a mozgásegyenletet és a Runge-Kutta megoldót két külön függvényként hoztuk létre a programban. A Runge-Kutta függvényben hívtuk meg a mozgásegyenleteket számoló részt, míg a Runge-Kutta eljárást a főprogramban elhelyezett időléptető ciklusban hívjuk kis, rögzített időlépésként: $\Delta t = 0.01$. A szimulált megoldást grafikonon ábrázoltuk, a Gnuplot nevű program segítségével. Ellenőrzésként lefuttatuk a szimulációt a $B(x)$ függvény nélkül. A 2. ábra mutatja egy kezdőfeltétel eredményét, amely jól követi az eredeti cikk [1] megfigyeléseit.



2. ábra. Az eredeti modell ($B = 0$) egy lehetséges megoldása.

Ezután megvizsgáljuk ezt a rendszert annyi különbséggel, hogy a $B(x)$ külső helyfüggő erő hat rá (2.6) szerint. Az így kapott mozgásegyenleteket az előbbivel megegyező módon numerikusan megoldottuk. Mivel a rendszerből energia disszipálódik, így arra számítottunk, hogy fixpontba – esetleg pontokba – konvergál a rendszer. Ezt a numerikus szimuláció alá is támasztotta. A szimuláció alapján azt is megfigyeltük, hogy a kezdőfeltételek függvényében többféle végkimenetel is lehetséges, két ilyen mutat a 3. ábra.



3. ábra. Két tipikus időfüggése a lufi helyzetének magasságfüggő erő esetén.

4. Fixpontszámítás

A numerikus szimulációkból látható volt, hogy a külső erő miatt a kezdőfeltételek függvényében (kezdeti sebesség, kezdeti helyzet) több végkimenetel is lehetséges, más-más helyeken állhat meg a lufi.

Megoldottuk a (2.27) és (2.28) mozgásegyenleteket egyensúlyi helyzetekre, hogy lássuk milyen fixpontok lehetségesek. Ilyenkor a sebességet és gyorsulást tartalmazó tagokat elhagytuk, mivel a rendszer csak akkor lehet nyugalomban, ha nincsen sebessége és nem is gyorsul egyik irányba se. Az így kapott algebrai egyenlet numerikus megoldására is programot írtunk, és így kiszámoltattuk azokat a magasságokat, ahol megállhat a lufi. Ha az x deriváltakat tartalmazó tagokat elhagyjuk, a következő egyenletet kapjuk mind a felfelé, mind a lefelé haladó mozgásra vonatkozó mozgásegyenletből:

$$\frac{f + \tilde{B}(\tilde{x}) - \tilde{x}}{1 + \tilde{x}} = 0 \quad (4.1)$$

Itt feltesszük, hogy:

$$\tilde{x} \neq -1 \quad (4.2)$$

Megjegyezzük, hogy a szimulációk futtatásakor is feltettük, hogy nem lesz végtelen gyorsulásunk, és a szimulációk során ilyet nem is tapasztaltunk. Az $\tilde{x} = -1$ negatív koordinátájú helyzet egyébként sem fizikai, hiszen ekkor a föld alá kerülne a lufi. Ezzel a feltételezéssel az egyenletünk tovább egyszerűsödik:

$$f + \tilde{B}(\tilde{x}) - \tilde{x} = 0 \quad (4.3)$$

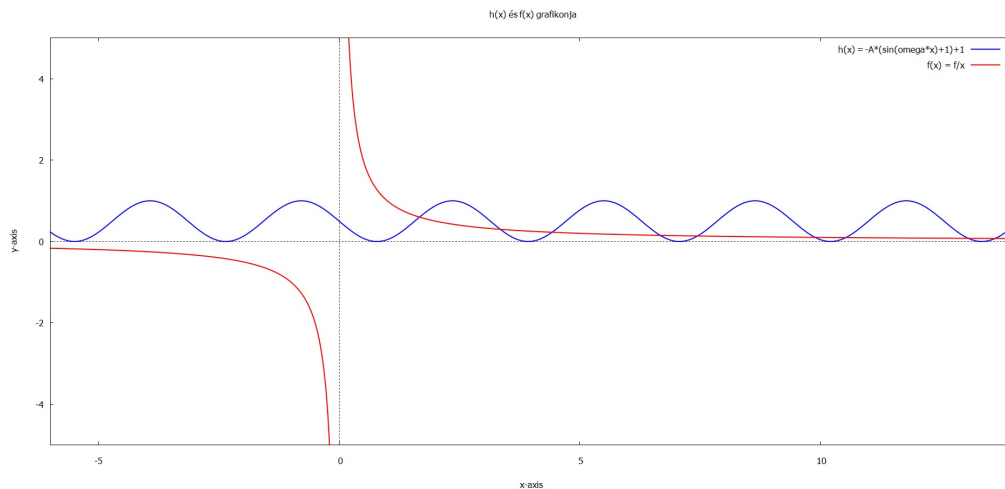
Most $\tilde{B}$ behelyettesítése után a következőképpen néz ki az egyenletünk:

$$f + \tilde{A}(\sin(\omega\tilde{x}) + 1)\tilde{x} - \tilde{x} = 0 \quad (4.4)$$

ahol $\tilde{A} = A/Mg$. Az egyenlet a következő alakra hozható:

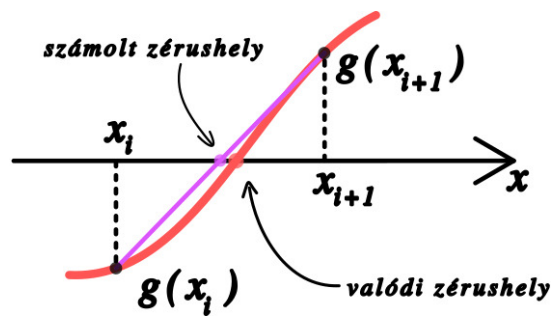
$$\frac{f}{\tilde{x}} = -\tilde{A}(\sin(\omega\tilde{x}) + 1) + 1 \quad (4.5)$$

Ennek az egyenletnek ábrázolhatjuk mindkét oldalát, és a metszéspontok x koordinátái lesznek a fixpontok helyei. Ha kirajzoljuk ezeket a függvényeket, a 4. ábrát kapjuk. Látható, hogy számos metszéspont van, ami a lufi egyensúlyi helyzetének felel meg.



4. ábra. (4.5) egyenlet mindkét oldalának függvénykénti ábrázolása

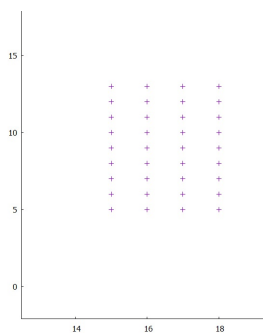
Nekünk viszont szükségünk lenne a fixpontok viszonylag pontos helyeire. Az egyensúlyi helyzetek numerikus kereséséhez érdemes visszatérni a (4.4) alakra. Így egy gyökkeresési problémát kapunk. Gyökök keresésére többféle módszer is van, mint pl.: a Newton módszer. Én viszont, mivel ezeket nem ismertem, így kitaláltam egy saját közelítő módszert, ami megfelelően működött. A módszer abból áll, hogy kis lépésekkel haladjunk végig a függvényen, és amikor két egymás melletti függvényérték szorzata negatív, akkor áthaladtunk a zérushelyen. Ilyenkor vehetjük ezen két érték átlagát, és ezzel elég jól közelíthetjük a zérushelyeket, ahogy azt az 5. ábra mutatja. Ezeket végül egymás alá rendezve kiíratam egy szövegfájlba. Ellenőrzésképpen összehasonlíthatjuk, hogy ránézésre is egyeznek a gyökök a grafikus megoldással. A fixpontok kiszámításának ezen módszerét néhol statikus módszernek fogom hívni.



5. ábra. rajz a gyökszámító módszer vizualizálásához

5. Érzékenység a kezdőfeltételekre

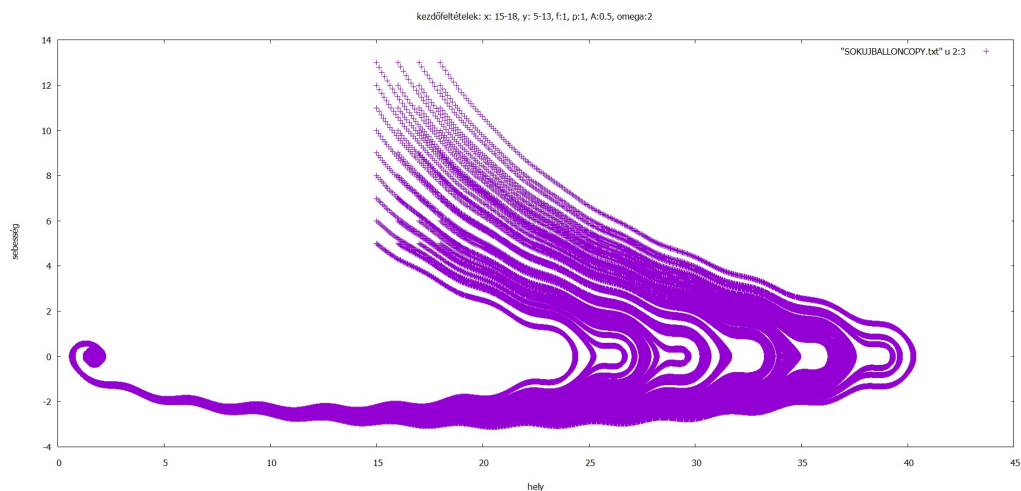
Numerikus szimuláció segítségével meg akartuk vizsgálni, hogy melyik fixpontok felé haladnak az egyes elindított kezdőfeltételek. Egy $(x, \dot{x})$ fázistérben felvett, téglalap alakú kezdőfeltétel-tartományból indultunk ki. Felvettem egy tömböt a téglalapra illesztett rácson kiválasztott kezdeti x értékeknek, és egy másikat a kezdeti $\dot{x}$ értékeknek is. Ezután egymásba ágyazott ciklusokkal végigmentem az összes kezdőfeltételpár-lehetőségen, és ezeknek a pályáit külön-külön kiszámoltam. A kapott eredményeket kiírtam egy szöveg fájlba, majd gnuplotban ábrázoltam.



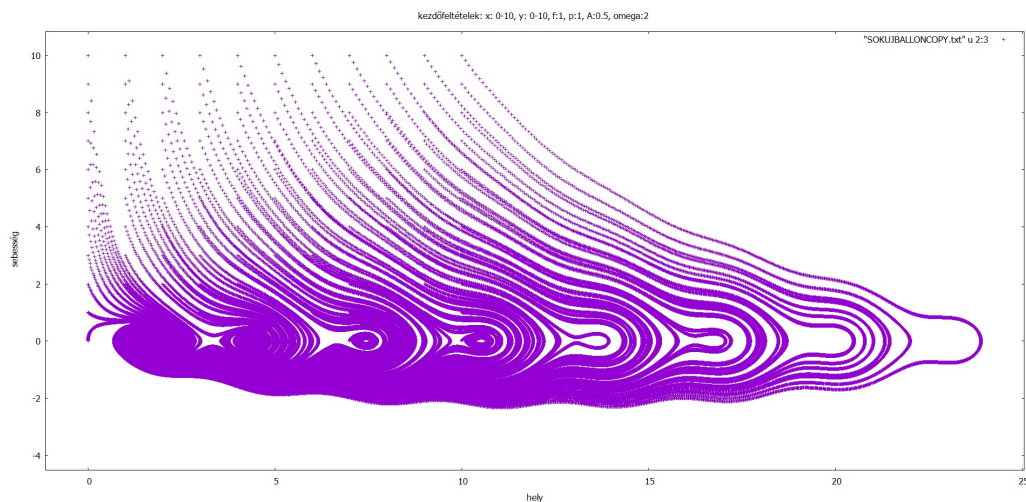
6. ábra. A kezdőfeltételek felvevési módszerével elkészíthető iterálás előtti fázistérbeli kép (sebesség-hely grafikon)

A 6. ábra szerinti kezdőfeltételek követésével a 7. ábrán látható pályákat kapjuk. Látható, hogy ezek a kezdőfeltételek mind egy fixpontba konvergálnak.

Megválaszthatunk olyan kezdőpontokat is, amelyek attraktora nem ugyanaz. Erre egy példát a 8. ábra mutat, ahol a kezdőfeltételek tartománya az x : 0–10, $\dot{x}$: 0–10 volt. Ebből a tartományból az egész koordinátájú pontokat indítottuk el.



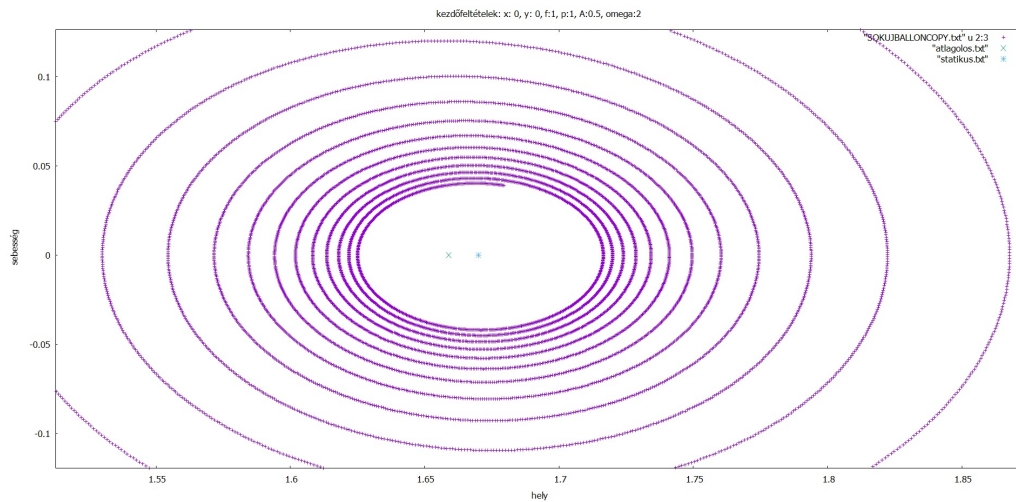
7. ábra. Az előző ábrán lévő kezdőfeltételek szimulálása fázistérben.



8. ábra. Egy 10×10 -es kezdőfeltételfelhő szimulálása

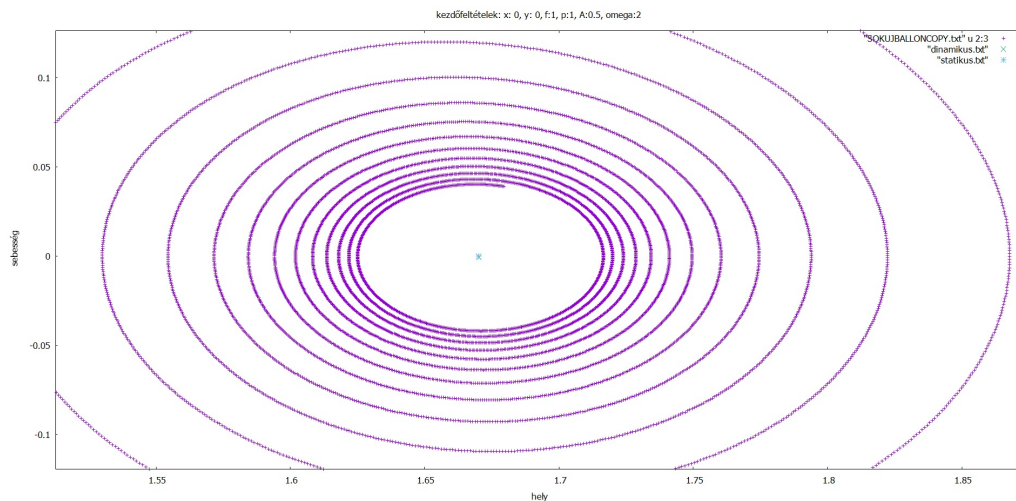
Megkerestük a fixpontok helyeit a mozgásegyenlet végigiterálásával is, sok lehetséges kezdőfeltételből indítva mozgásokat. Ezt néhol dinamikus módszernek hívom. A rendszer viszont nem konvergált elég gyorsan egyensúlyi állapotokba, így nem tudtam egyszerűen nagyon nagyra választani a szimulációban az időtartamot, és az utolsó elemet a fix pont helyének választani, ez

túl pontatlan lett volna. Ennek a problémának az orvosolására először csak simán átlagoltam az utolsó néhány (200) pontját az időben iterált pályáknak, mivel lecsengő periodikusnak látszó képet mutatott a mozgás a grafikonon és elég sok iterált pont volt egy periódus alatt. Ahogy azt a 9. ábrán láthatjuk, ez a módszer szintén nem volt elég pontos, így más eljáráshoz folyamodtam.



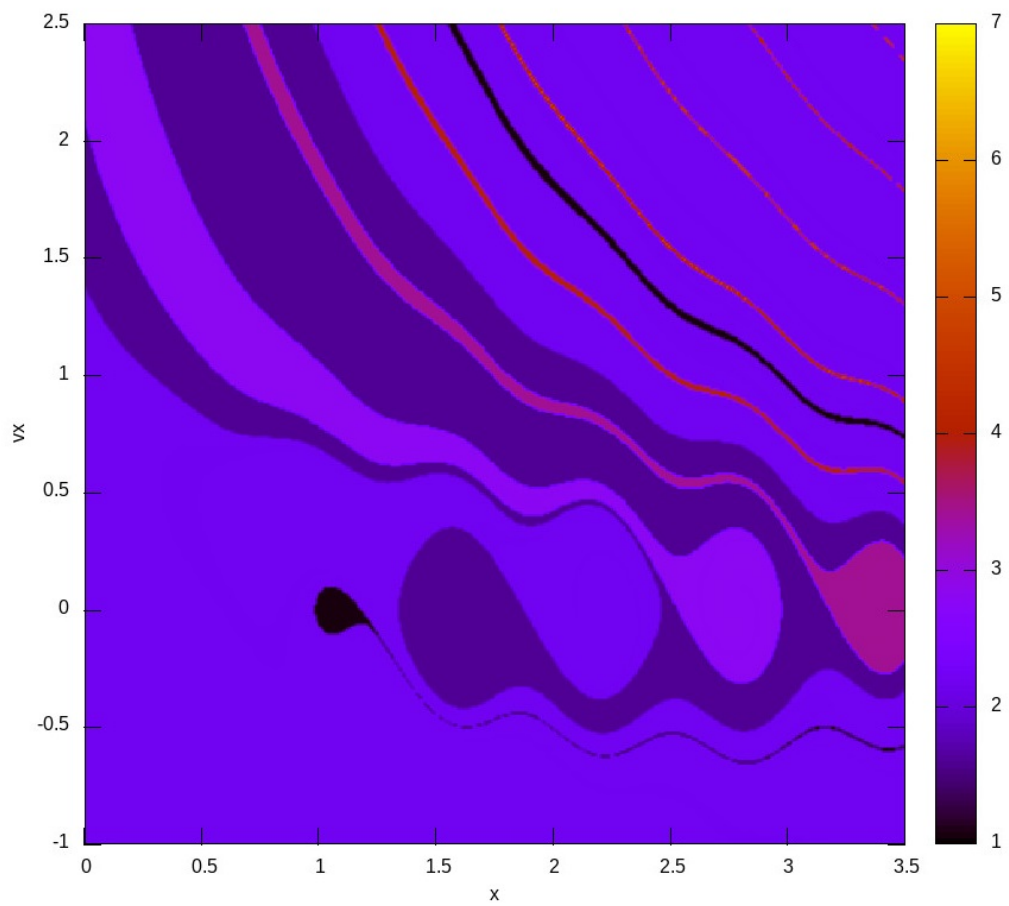
9. ábra. Az első átlagolás módszerrel számított fix pont. A zöld $\times$ alakú pont az átlagolás módszerrel számolt fixpont, a türkiz csillag alakú pont a statikus módszerrel számolt fixpont.

Megvizsgáltam, hogy a fixponthoz való közelítésnél a fázistérben milyen alakzatot vesz fel a rendszer. Ha megfigyeljük, ez az alakzat egy spirál, ami befelé gyűrűzik. Viszont az egyes gyűrűk elég közel vannak egymáshoz, így ellipszisekkel közelítettem őket. A 10. ábra mutatja, hogy az ellipszis közelítéssel kapott fixpont már közelebb van a statikus módszerrel számított fixponthoz.



10. ábra. Ellipszises módszerrel számított fixpont. A $\times$ alakú zöld pont a dinamikusan számított fix pont, a csillag alakú türkiz a statikusan számított

A kapott eredmények áttekinthetőbb ábrázolása érdekében az egyes egyensúlyi helyzetekhez színskálát rendeltünk, és minden kezdeti feltételhez tartozó fázistérbeli pontot kiszíneztünk a hozzá tartozó megállási magasságnak megfelelő színnel. Az így kapott képet a 11. ábra mutatja. Látható, hogy az egyes fixpontok vonzási tartománya összekeveredik, ami a kezdőfeltételekre való érzékenységre utal. Ez tipikus a mi rendszerünkhöz hasonló, tranziens káoszt mutató rendszerekben [6].



11. ábra. A színes kép megmutatja, hogy egyes kezdőfeltételek mellett hol áll meg a lufi. Paraméterek: $f:1$, $p:1$, $A: 0.5$ $\omega: 10$

6. Fixpontok stabilitása

A (4.4). egyenlet megoldásával kapott fixpontok közül nem mindegyiket kaptuk meg sok kezdőfeltétel vizsgálatával sem. Ennek fő oka, hogy a fixpontok nem feltétlenül stabilak (természetesen az is lehetséges, hogy egyszerűen nem indítottunk elég sűrűn kezdőfeltételeket) és az instabil fixpontokba nem fogunk eljutni a differenciálegyenletek numerikus megoldásával, hiszen csak kivételes kezdőfeltételekből lehet az ilyen helyekre eljutni és elég kicsi a valószínűsége, hogy pont egy ilyen kezdőfeltételt választunk.

Az (2.27) és (2.28) mozgásegyenleteink alakja eltér $\dot{x}$ előjelétől függően. Hasznos lenne, hogyha ezt a két egyenletet valahogy egyesítenénk. Vegyük észre, hogy az (2.27) és a (2.28) egyenletek igazából csak a bal oldal számlálójában térnek el egymástól. Figyeljük meg az (2.27) egyenletben a $-(p+1)\dot{x}^2$ kifejezést. Az (2.28) egyenletben a közös tagokon kívül egy $p\dot{x}^2$ tagot találhatunk még. Valójában $-(p+1)\dot{x}^2$ és $p\dot{x}^2$ között nincs sok különbség. Ha $\dot{x}$ -ot beszorozzuk $(-\frac{|\dot{x}|}{\dot{x}}\frac{2p+1}{2} - \frac{1}{2})$ -el, megfigyelhetjük, hogy pont jó paramétert fogunk kapni. Most ezt az új „módosítófüggényt” használva kettő helyett egy egyenlettel is le tudjuk írni a rendszer mozgását felfelé és lefelé haladás közben is:

$$\frac{f + \tilde{B}(\tilde{x}) - \tilde{x} - (\frac{|\dot{x}|}{\dot{x}}\frac{2p+1}{2} + \frac{1}{2})\dot{x}^2}{1 + \tilde{x}} = \ddot{x} \quad (6.1)$$

Érdemes megemlíteni, hogyha ezt a mozgásegyenletet valamilyen okból kifolyólag deriválnunk kellene, nehézségekbe ütköznénk az abszolút érték miatt, de szerencsére ez csak $\dot{x} = 0$ esetben okozna gondot.

A stabilitás vizsgálatához érdemes a mozgásegyenletünket elsőrendű differenciálegyenletekké alakítani. Vezessük be

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x} \quad (6.2)$$

és

$$\tilde{x}_2 = \dot{\tilde{x}} \quad (6.3)$$

új változókat. Vegyük ezeknek az új változóknak az idő szerinti deriváltjait:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_2 \quad (6.4)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{f + \tilde{B}(\tilde{x}_1) - \tilde{x}_1 - (\frac{|\tilde{x}_2|}{\tilde{x}_2}\frac{2p+1}{2} + \frac{1}{2})\tilde{x}_2^2}{1 + \tilde{x}_1} = \ddot{\tilde{x}} \quad (6.5)$$

ahol $f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ a (6.1) egyesített mozgásegyenlet bal oldala, hiszen $\dot{\tilde{x}}_2 = \ddot{\tilde{x}}$. Vezessük be az $\vec{\tilde{x}} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]$ vektort! Ekkor $\vec{\tilde{x}}$ időderiváltja minden fixpontban 0-át fog adni, mivel $\dot{\tilde{x}}_1$ a sebességnek, $\dot{\tilde{x}}_2$ pedig a gyorsulásnak feleltethető meg. Felírhatjuk az $\vec{\tilde{x}}$ idő szerinti deriváltját is:

$$\dot{\vec{\tilde{x}}} = \vec{f}(\vec{\tilde{x}}) \quad (6.6)$$

$\vec{f}$ -nak az egyik komponense az f_1 a másik az f_2 függvény ($\vec{f}$ -nak nincs köze az f paraméterhez). Jelöljük a fixpontnál felvett vektort $\vec{\tilde{x}}_0$ -val! Most vegyünk fel egy $\vec{\tilde{x}}$ pályát az $\vec{\tilde{x}}_0$ kicsi környezetében. Ekkor felírhatjuk, hogy:

$$\vec{\tilde{x}} = \vec{\tilde{x}}_0 + \delta\vec{\tilde{x}} \quad (6.7)$$

ahol $\delta\vec{\tilde{x}}$ az $\vec{\tilde{x}}$ távolsága $\vec{\tilde{x}}_0$ -tól. Mivel $\vec{\tilde{x}}_0$ egy konstans, így $\delta\vec{\tilde{x}}$ deriváltja ugyan az mint $\vec{\tilde{x}}$ -é. Ebből kifolyólag felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\dot{\delta\vec{\tilde{x}}} = \vec{f}(\vec{\tilde{x}}_0 + \delta\vec{\tilde{x}}) \quad (6.8)$$

A (6.8) egyenlet jobb oldalán álló kifejezést elsőrendben közelíthetjük. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\dot{\delta\vec{\tilde{x}}} \approx \vec{f}(\vec{\tilde{x}}_0) + A\delta\vec{\tilde{x}} \quad (6.9)$$

ahol A egy 2×2 -es Jacobi-mátrix az $\vec{\tilde{x}}_0$ fixpontnál kiértékelve. $\vec{f}(\vec{\tilde{x}}_0)$ értéke 0, mivel az $\vec{\tilde{x}}$ idő szerinti deriváltjának felel meg egy fixpontban. Így (6.9) tovább egyszerűsödik.:

$$\dot{\delta\vec{\tilde{x}}} = A\delta\vec{\tilde{x}} \quad (6.10)$$

A (6.10) egyenlet megoldását kereshetjük ilyen alakban:

$$\delta\vec{\tilde{x}} = \vec{a}e^{\gamma t} \quad (6.11)$$

Ha (6.11)-et egyszer lederiváljuk idő szerint, a következőt kapjuk:

$$\dot{\delta\vec{\tilde{x}}} = \gamma\vec{a}e^{\gamma t} \quad (6.12)$$

Láthatjuk, hogy (6.12) és (6.10) egyenletek bal oldalai megegyeznek, így adódik a következő lépés:

$$A\vec{a}e^{\gamma t} = \gamma\vec{a}e^{\gamma t} \quad (6.13)$$

Egyszerűsítve:

$$A\vec{a} = \gamma\vec{a} \quad (6.14)$$

Bal oldalra rendezve és $\vec{a}$ -val kiemelve.:

$$(A - \gamma E)\vec{a} = 0 \quad (6.15)$$

A (6.15) egyenletben az E a 2×2 -es egységmátrixot jelöli. Azt tudjuk, hogy $\vec{a}$ nem lehet nullvektor, mivel ha az lenne akkor $\delta\vec{x}$ minden t -re nullát adna, és mi most kezdetben $\delta\vec{x}$ -t egy kicsi de 0-nál nagyobb hosszúságú vektornak választjuk. Mivel $A - \gamma E$ egy mátrix, így ahhoz, hogy az egyenletünk igaz legyen, $A - \gamma E$ -nek a determinánsa nulla kell, hogy legyen, különben csak nullvektor lehet $\vec{a}$.

$$\det(A - \gamma E) = 0 \quad (6.16)$$

Ezt a mátrixunkat felírhatjuk a következő formában:

$$\begin{bmatrix} A_1 - \gamma & A_2 \\ A_3 & A_4 - \gamma \end{bmatrix}$$

Ennek a jelölésnek megfelelően a determinánsszámítást a következőképpen tehetjük meg:

$$(A_1 - \gamma)(A_4 - \gamma) - A_2A_3 = 0 \quad (6.17)$$

A zárójeleket kibontva, és kicsit rendezve a (6.17) egyenlet a következő alakra hozható:

$$\gamma^2 - (A_1 + A_4)\gamma + A_1A_4 - A_2A_3 = 0 \quad (6.18)$$

Ez egy másodfokú egyenlet γ -ra, tehát a két γ a következő alakban kapható:

$$\gamma_{1,2} = \frac{A_1 + A_4 \pm \sqrt{(A_1 + A_4)^2 - 4(A_1A_4 - A_2A_3)}}{2} \quad (6.19)$$

Ha kiszámoljuk az A mátrix értékeit, fixpontoknál a következőt kapjuk:

$$A_1 = 0 \quad (6.20)$$

$$A_2 = 1 \quad (6.21)$$

$$A_3 = \frac{\frac{d}{d\tilde{x}_1}B(\tilde{x}_1) - 1}{1 + \tilde{x}_1} - \frac{f + B(\tilde{x}_1) - \tilde{x}_1}{(1 + \tilde{x}_1)^2} \quad (6.22)$$

$$A_4 = 0 \quad (6.23)$$

Most be kell helyettesítsük az A mátrix értékeit (6.19) egyenletbe, és akkor megkapjuk γ értékeit. Vegyük észre, hogy az A mátrix egyes szép értékeinek köszönhetően a (6.19) egyenlet lényegesen leegyszerűsödik:

$$\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{A_3} \quad (6.24)$$

A (6.11) egyenlet segítségével leolvasható, hogy ha pozitív valamelyik γ valós része, akkor instabil az a megoldás, amelyik helyén kiszámítottuk γ -t. (Ha γ komplexnek adódik akkor csak imaginárius részt tartalmaz. Ezt a (6.24) egyenletből állapíthatjuk meg.) Azt tapasztaltuk, hogy a statikus módszerrel kapott megoldások közül némelyekhez egy pozitív és egy negatív γ tartozott, ezek tehát instabilak. Azon megoldások esetén azonban, amelyeket a dinamikus megoldás is megtalált, a két kapott γ valós része 0. Ez arra utal, hogy ezek a megoldások stabilak, és a sebesség négyzetével arányos csillapítás miatt a közeli pályák lassan közelednek az egyensúlyi helyzethez, ahogy azt a dinamikus szimulációkban is láttuk. Ezek mellett azt tapasztaltuk, hogy a stabil és az instabil fixpontok felváltva követik egymást, bár ezt matematikailag nem bizonyítottuk.

7. Összefoglalás, kitekintés

Ebben a cikkben egy nem lineárisan viselkedő rendszert vizsgáltunk, analitikus és numerikus módszerekkel. Először ismertettük az [1] cikkben leírt rendszert, felírtuk a mozgásegyenleteit, és ellenőrzés képpen numerikusan szimuláltuk a kiindulási állapot nyújtó cikk eredményeit. Vizsgálódásainkat ezután külső erő figyelembevételével folytattuk. Ezt a rendszert is numerikusan szimuláltuk, később pedig észrevettük, hogy ebben a rendszerben (megfelelő paraméterek mellett) több fixpont is létezik. Ezeket a pontokat kiszámoltuk a nyugalmi helyzet feltételének felírásával. Összehasonlítottuk az így kapott fixpontokat a dinamikus módszerrel kapott fixpontokkal. Ezek után egy nagy kezdőfeltétel-felhőt szimulálva színes képet generáltunk, ami megmutatta, hogy melyik kezdőfeltétel hol fog megállni kellően hosszú idő után. Végezetül megvizsgáltuk, hogy melyik fixpontok stabilak és melyikek instabilak.

A vizsgálódást nagyon sok irányba el lehet vinni a továbbiakban. Természetesen a dolgozat elején felállított modell koránt sem tökéletes, sokat lehetne rajta még finomítani, hogy valóságosabb legyen. Emellett nagyon sok különböző módon hathatunk még a lufira (pl.: nyomás- vagy hőmérséklet-változtatás), így lényegesen különböző viselkedésű rendszereket lehet felállítani és vizsgálni.

Hivatkozások

- [1] A. Yariv, J. Scheuer, B. Crosignani, P. Di Porto: The case of the oscillating party balloon: A simple toy experiment requiring a not-so-simple interpretation. *American Journal of Physics* 75 (2007) 696.
- [2] E.N. Lorenz: Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* 20 (1963) 130.
- [3] C. Runge: Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen* 46 (1895) 167.
- [4] W. Kutta: Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen. Teubner, 1901.
- [5] T. Tél, M. Gruiz: Kaotikus dinamika. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- [6] Y.-C. Lai, T. Tél: Transient Chaos – Complex Dynamics on Finite Time Scales. Springer, 2011.