
NAGY KLAUDIA

nagy.klaudia@yahoo.de

Építész mesterképzési szak

MSc, 5. félév

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi

Egyetem

Építészmérnöki Kar

Témavezető:

Dr. Domokos Gábor

egyetemi tanár, BME ÉPK

Ideális falmozaikok

Kulcsszavak: geometria, mozaik, becslés, fal

A falazatok az egyik legrégebbi ember által épített szerkezetek közé tartoznak; ezek az elemekből összeálló tárgyak archetípusai. A falazóblokkok fugái alkotta mintázatot falmozaiknak nevezzük.

Célom a falmozaik geometriai tulajdonságaiból a fal mechanikai tulajdonságaira következtetni.

Ehhez a konvex mozaikok átlagtér-elméletét használom [1]. Az elmélet két alapvető változója a csomópontok és cellák átlagos fokszáma ($\bar{n}^*$, $\bar{v}^*$), valamint ezek hányadosa ($\rho = \frac{\bar{v}^*}{\bar{n}^*}$), amit cellasűrűségnek nevezünk.

Az átlagtér-elmélet egyik előnye, hogy a falak az ($\bar{n}^*$, $\bar{v}^*$) által kifeszített ún. szimbolikus síkon való elhelyezkedéséből új összefüggésekre deríthetünk fényt. Korábbi dolgozatomban [2] beláttam, hogy a cellasűrűség a kötés általánosításának tekinthető, mivel a stabil falak magas ($\rho \approx 2$) cellasűrűséggel bírnak; hasonlóan a természetes repedésmintázatokhoz [3].

Az elmélet másik előnye a falak geometriai evolúciójának leírásában rejlik [3], mely a falazás folyamatát modellezheti. Ha megtaláljuk az evolúciós modell matematikai leírását, az magyarázatot adhat a falak magas cellasűrűségére és a repedésmintázatokkal való kapcsolatukra is. Az evolúciós modell alkalmazása két nehézségbe ütközik: egyrészt meg kell találni a falazás folyamatát leíró differenciálegyenletet, mellyel itt nem foglalkozom. Másrészt az elmélet végtelen mozaikokra vonatkozik, míg a falmozaikok végesek.

Dolgozatom célja ezen probléma feloldása egy végtelen, ideális mozaik paramétereire adott becsléssel. Az [1]-ben ismertetett elmélet egyenleteit szimmetrikus formára hozom, ezek a síkbeli konvex mozaikok fundamentális egyenletei. Ezek lehetővé teszik a bemenő adatok bizonytalanságának kezelését, és öt becslést fogalmaznak meg az ideális mozaik paramétereire.

Bevezetem a kombinatorikus bizonytalanság fogalmát, amit az öt becslés szórása határoz meg. Ha ez a bizonytalanság kicsi, az ideális mozaik jól becsülhető és az evolúciós elmélet alkalmazható, egyébként a bemenő adatok felülvizsgálata szükséges.

[1] Domokos, G. & Lángi, Z. (2019) On Some Average Properties of Convex Mosaics, *Experimental Mathematics*

[2] Nagy Klaudia: Falak geometriája (TDK, BME ÉPK, 2020, konz: Domokos, G)

[3] Bálint, P., Domokos, G. & Regős, K. An Evolution Model for Polygonal Tessellations as Models for Crack Networks and Other Natural Patterns. *J Stat Phys* 190, 130 (2023).

Ideális falmozaikok – magyar nyelvű összefoglaló

A falak a téralkotás alapvető szerkezetei, történetük több, mint 10 000 évre tekint vissza. A falgeometria és a tartósság közötti kapcsolat a téglakötés formájában már évezredek óta ismert, amiről korai (pl. Babilonban található) téglafalak tanúskodnak. Azonban az általános, számszerűsített kapcsolat a falgeometria és a tartósság között nem ismert.

Korábbi dolgozatomban [1] e a kapcsolatot kezdtem feltárni a síkbeli **konvex mozaikok átlagtér-elméletének** eszköztárával. [2] Mozaiknak a sík hézag és átfedés mentes felosztását nevezzük konvex tartományokra; falmozaiknak az ezen feltételeknek megfelelő, a fal felületén a fugák által kirajzolódó mintázatot értjük. A mozaikok jellemző mennyiségei:

V : csomópontok száma

F : cellák száma

N^* : csúcspontok száma

$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^V n_i}{V}$: az átlagos kombinatorikai csomópont-fokszám

$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^F v_i}{F}$: az átlagos kombinatorikai cella-fokszám

$\bar{n}^* = \frac{\sum_{i=1}^V n_i^*}{V}$: az átlagos geometriai csomópont-fokszám

$\bar{v}^* = \frac{\sum_{i=1}^F v_i^*}{F}$: az átlagos geometriai cella-fokszám

A cella és csomóponti fokszám hányadosát cellasűrűségnek nevezzük:

$$\rho = \frac{\bar{v}}{\bar{n}} = \frac{\bar{v}^*}{\bar{n}^*} \quad (1)$$

A konvex síkbeli mozaikok alapegyenlete:

$$\bar{v}^* = \frac{2\bar{n}^*}{\bar{n}^* - p - 1}, \quad (2)$$

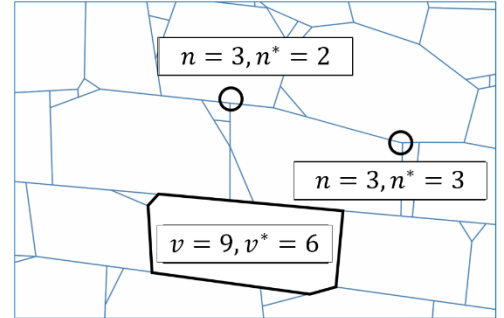
ahol a regularitás $p = \frac{V_R}{V}$, és V_R a reguláris csomópontok száma. A reguláris mozaikok a $p = 1$ görbén helyezkednek el. Az $[\bar{n}, \bar{v}]$ szimbolikus síkon a konvex mozaikok tartományát négy görbe határolja. Ezen a tartományon szeretnénk elhelyezni a falakon mért adatokat, és az adatok tartományon belüli helyzetéből következtetéseket levonni.

Az átlagtér-elmélet *végtelen* mozaikokra alkalmazható, azonban a falmozaikok végesek, és peremekkel rendelkeznek.

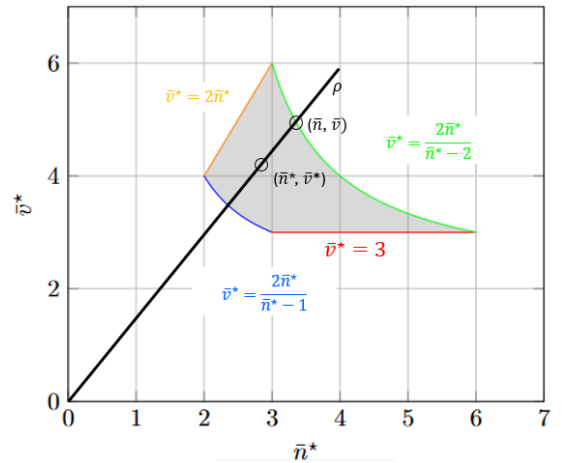
Tizenhét történeti falazat paramétereit vizsgáltam: Manuálisan, fénykép alapján vektorgrafikus program segítségével létrehoztam a falmozaikokat, melynek paramétereit automatikusan az általam írt Python szoftver számította ki. A falak fokszámai az $[\bar{n}, \bar{v}]$ szimbolikus síkon ábrázolva jelentős eltérést mutatnak, amikor peremmel, ill. perem nélkül vizsgáljuk őket: az elméleti maximumot jelentő $\rho = 2$ egyenes külső, konkáv mozaikokat tartalmazó oldalán, másik esetben, a belső, konvex mozaikokat tartalmazó tartományban találhatóak az adatok. Hogy az átlagtér-elmélet egyenleteit a későbbiekben is alkalmazni tudjuk, meg kell határoznunk mely adatokat tekinthetjük megbízhatónak. Ehhez a mozaik paramétereire becsléseket adunk meg.

Először a véges mozaikot egy, a végtelen mozaikból vett véletlen mintának tekintjük és a fokszámok bizonytalanságát (95%-os konfidenciaszinthez tartozó) konfidencia-intervallumként számítjuk:

$$(CI)_{n^*} = \left(\bar{n}^* + z \frac{S_{n^*}}{\sqrt{V}}; \bar{n}^* - z \frac{S_{n^*}}{\sqrt{V}} \right)$$



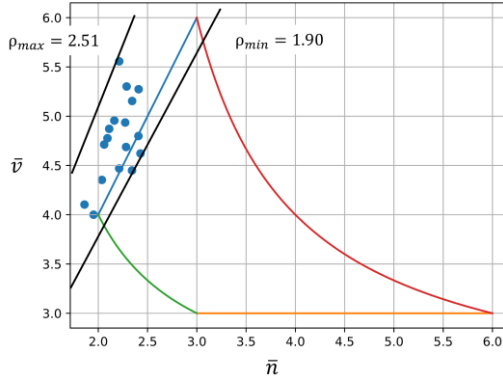
Fokszámok grafikus definíciója



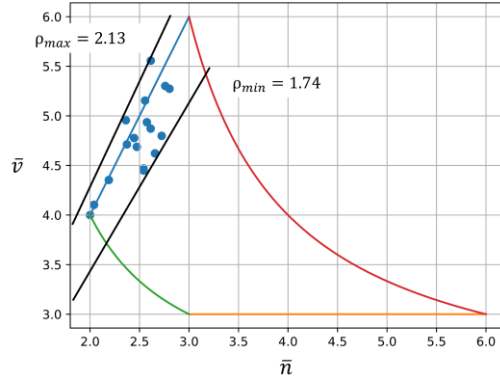
Az $[\bar{n}, \bar{v}]$ szimbolikus sík a konvex mozaikok tartományával (szürke), és az azt határoló négy görbével; egy mozaikhoz tartozó $(\bar{n}^*, \bar{v}^*)$ és $(\bar{n}, \bar{v})$ pontokkal.

$$(CI)_{v^*} = \left(\bar{v}^* + z \frac{s_{v^*}}{\sqrt{F}}; \bar{v}^* - z \frac{s_{v^*}}{\sqrt{F}} \right)$$

ahol $s_{\bar{n}^*}$ és s_{v^*} a foksámok szórása, és z az adott (esetünkben 95%-os) konfidenciaszinthez tartozó standard eloszlás megfelelő kvantilise.



Peremmel vizsgált falak geometriai fokszámai
 $\rho_{min} = 1.90, \rho_{max} = 2.51$



Perem nélkül vizsgált falak geometriai fokszámai
 $\rho_{min} = 1.74, \rho_{max} = 2.13$

Statisztikai bizonytalanságnak (A_S) a két intervallum („tengely”) által meghatározott konfidencia-ellipszis területét nevezzük: $A_S = \frac{|(CI)_{n^*}|}{2} \cdot \frac{|(CI)_{v^*}|}{2} \cdot \pi$.

A konfidencia-intervallum számítás a statisztikai analízis egy alapvető eszköze. Azonban a statisztikai bizonytalanság a peremek eltávolítása után csak kis mértékben változik, mivel a peremek elhagyása csökkenti a szórást és a minta méretét is. Ezért a statisztikai bizonytalanság a *peremekre való érzékenysége minimális*, így azok vizsgálatára nem megfelelő mérőszám.

Új, ettől független, mozaikok tulajdonságait, és a peremeket figyelembe vevő becslési módszer bevezetésére, a **kombinatorikai bizonytalanságra** van szükség. Ennek alap gondolata, hogy a négy jellemző paraméter ($\bar{n}, \bar{v}, \bar{n}^*, \bar{v}^*$) közül kettőt adottnak veszünk, és ezek alapján becsüljük a másik két paramétert. Ehhez a mozaik tulajdonságait leíró csak $\bar{n}, \bar{v}, \bar{n}^*, \bar{v}^*$ -t tartalmazó szimmetrikus alapegyenletekre van szükség, tehát át kell alakítanunk a síkbeli konvex mozaikok tartományának aszimmetrikus, p -t tartalmazó alapegyenletét. (1) és (2) egyenleteket felhasználva a következő szimmetrikus, ún. **fundamentális egyenletekre** jutunk:

$$\bar{n}^* = \frac{2\bar{v}^*}{\bar{v}-2} \quad (3) \quad \bar{v}^* = \frac{2\bar{n}^*}{\bar{n}-2} \quad (4)$$

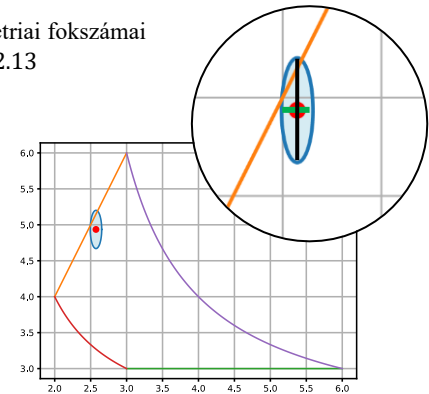
(3)-(4)-ből levezetett korolláriumok:

$$\bar{n} = 2 \frac{\bar{n}^*}{\bar{v}^*} + 2 \quad (5) \quad \bar{v} = 2 \frac{\bar{v}^*}{\bar{n}^*} + 2 \quad (6)$$

$$\bar{n} = \frac{2\bar{v}}{\bar{v}-2} \quad (7) \quad \bar{v} = \frac{2\bar{n}}{\bar{n}-2} \quad (8)$$

A becslésekhez csupán $\bar{n}, \bar{v}, \bar{n}^*, \bar{v}^*$ paramétereket és a fundamentális egyenleteket, ill. annak átíratait használjuk az 1. és 2. táblázatban látható módon. Minden egyes becslés egy geometriai szerkesztésnek feleltethető meg a szimbolikus síkon.

Definíció: Legyen M egy mozaik $\bar{n}, \bar{v}, \bar{n}^*, \bar{v}^*$ paraméterekkel, ahol a vonatkozó becslések B^*, C^*, D^*, E^*, F^* . Ekkor: $\alpha(M) = A_C(B^*, C^*, D^*, E^*, F^*)$, amit M **kombinatorikai bizonytalanságának** nevezzük.



Ciklopfal statisztikai bizonytalansága az $[\bar{n}, \bar{v}]$ szimbolikus síkon. pirossal a mozaikon mért ($\bar{n}^*, \bar{v}^*$) pont, zölddel a csomóponti foksám konfidencia-intervalluma, feketével a cellafoksámé, és a két tengely által kirajzolt A_S konfidencia ellipszis.

Változó	$\bar{n}$	$\bar{v}$	$\bar{n}^*$	$\bar{v}^*$
$\bar{n}$				
$\bar{v}$	A			
$\bar{n}^*$	B	C		
$\bar{v}^*$	D	E	F	

1. Táblázat - Becslések változói

1. Tétel: Legyen M egy mozaik $\bar{n}, \bar{v}, \bar{n}^*, \bar{v}^*$ paraméterekkel. A kombinatorikai bizonytalanság csakis ettől a négy, mozaikon mért adattól függ. A kombinatorikai bizonytalanság $\alpha(M)$ nagysága a négy mért paraméter és a fundamentális egyenletek felhasználásával egyértelműen meghatározható.

1. Lemma: Legyen M mozaik $\bar{n}, \bar{v}, \bar{n}^*, \bar{v}^*$ paraméterekkel. Ekkor $\alpha(M) = 0$ akkor és csak akkor teljesülhet, ha $\bar{n}, \bar{v}, \bar{n}^*, \bar{v}^*$ kielégítik a (végtelen mozaikokra felírt) fundamentális egyenleteket.

Definíció: Legyen M egy mozaik $\bar{n}, \bar{v}, \bar{n}^*, \bar{v}^*$ paraméterekkel. M mozaikot **ideális mozaiknak** nevezzük, ha M kombinatorikai bizonytalansága $\alpha(M) = 0$.

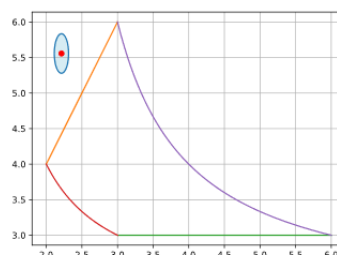
A kombinatorikai bizonytalanság a statisztikai bizonytalansággal ellentétben nagyon érzékeny a peremek jelenlétére, így jó módszernek bizonyul a falmozaikok paramétereinek becslésére.

A falak paramétereinek becsült tartománya peremekkel $\rho_{min} = 1.63$ és $\rho_{max} = 5.14$ között található, míg perem nélkül $\rho_{min} = 1.63$ és $\rho_{max} = 2.13$ között, ami egy olyan szűk tartományt jelent, ami a mért adatok tartományától $\rho_{min} = 1.74, \rho_{max} = 2.13$ is csak igen kis eltérést jelent, így a falmozaikok perem nélkül vizsgálva közel ideálisnak mondhatók, és további vizsgálatok alapját képezhetik.

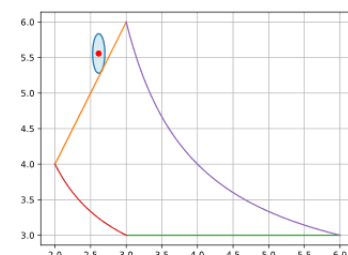


Egyenlet Becslés	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
B		1.				2.
C		2.			1.	
D	1.					2.
E	1.				2.	
F			1.	2.		

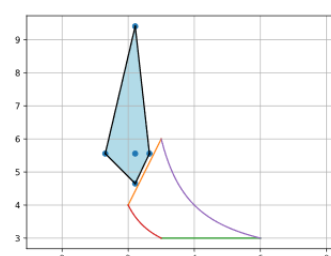
2. Táblázat- Becslések egyenletei, és az egyenletek sorrendje



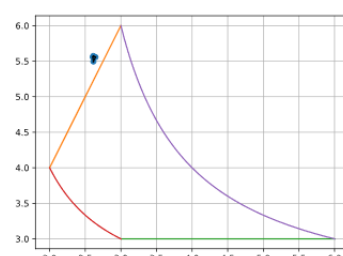
Statisztikai bizonytalanság peremekkel $A_s = 0.087$



Statisztikai bizonytalanság peremek nélkül $A_s = 0.075$

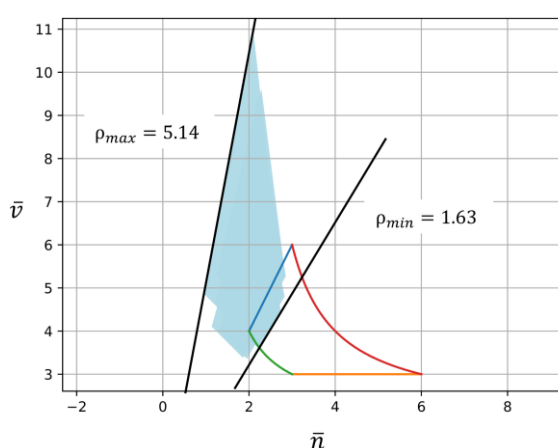


Kombinatorikai bizonytalanság peremekkel $A_c = 3.17$



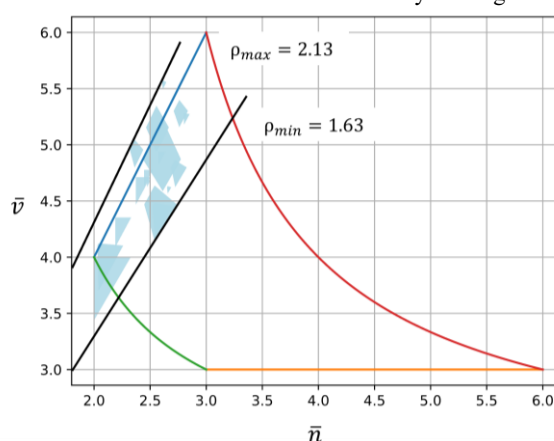
Kombinatorikai bizonytalanság peremek nélkül $A_c = 0.0014$

Delphi – Falmozaik



Peremmel vizsgált falak becsült értéktartományainak uniója
 $\rho_{min} = 1.63$ $\rho_{max} = 5.14$

Delphi – Falmozaikhoz tartozó Statisztikai és kombinatorikai bizonytalanságok



Perem nélkül vizsgált falak becsült értéktartományainak uniója
 $\rho_{min} = 1.63$ $\rho_{max} = 2.13$

[1] Nagy Klaudia: Falak geometriája (TDK, BME ÉPK, 2020, konz: Domokos, G)

[2] Domokos, G., & Lángi, Z. (2019). On Some Average Properties of Convex Mosaics. *Experimental Mathematics*, 31(3), 783–793.

Saját eredmények

Tanúsítom, hogy a 37. OTDK-ra benyújtott Ideal Wall Mosaics (Ideális falmozaikok) c. dolgozatom készítésekor a következőkben vettem részt:

Megoldott tudományos (rész)kérdés:

- (a végtelen mozaikokra alkalmazható) síkbeli konvex mozaikok átlagtér-elméletének bővítése becslési módszerekkel, melyek meghatározzák a véges, peremekkel rendelkező mozaikokon mért paraméterek bizonytalanságát
- valós falakból nyert véges mozaikok paramétereinek bizonytalanságának meghatározása

Módszerek, eszköztár, mérések:

- a síkbeli konvex mozaikok átlagtér-elméletének összefoglalása, ezen elmélet alapegyenleteinek szimmetrikus formára rendezése (fundamentális egyenletek)
- fundamentális egyenletek és azok korroláriumai segítségével kombinatorikai bizonytalanság bevezetése, és alkalmazása valós véges (fal)mozaikokon
- statisztikai bizonytalanság mérése valós véges (fal)mozaikokon (konfidencia intervallumok számítása)
- 17, térben és időben is széles spektrumon található falazat mozaikká alakítása fénykép alapján (manuálisan, vektorgrafikus szoftver alkalmazásával)
- a létrehozott falmozaikok paramétereinek, és a paraméterekre adott becslések automatikus számítása saját Python-ban írt kóddal
- a falazatok mért és becsült adathalmazainak összehasonlítása peremekkel és a peremek nélkül vizsgált esetekben

Saját eredmények:

- becslési módszer véges mozaikok paramétereinek bizonytalanságának meghatározására (kombinatorikai bizonytalanság), mely figyelembe veszi a mozaikok tulajdonságait és érzékeny a peremek jelenlétére
- a 17 falminta esetében egyesével: manuálisan létrehozott falmozaik, falmozaik a geometriai és kombinatorikai foksámok szerint színezve, az ehhez tartozó, illetve ebből számítható numerikus adatok (foksámok, cellasűrűség, statisztikai és kombinatorikai bizonytalanság)
- a peremekkel vizsgált falak kombinatorikai bizonytalansága nagyságrendekkel nagyobb, mint a peremek nélkül vizsgált esetben
- a vizsgált falmozaikok mért paramétereinek közül azoknak kicsi a kombinatorikai bizonytalansága, melyeket a peremek elhagyásával vizsgálunk, ezek képezhetik tárgyát későbbi vizsgálatoknak a becslések elvégzése nélkül is

Mesterséges intelligencia használata:

- nyelvhelyesség javítása az angol nyelvű törzsszövegben (ChatGPT 4.0)

Budapest, 2025. 01. 07.

Nagy Klára

Szakdolgozat eltérés

Az Ideal Wall Mosaics (Ideális falmozaikok) című TDK dolgozatom a Geometry of Masonry Walls (Falazatok geometriája) című diplomamunkám a következőkben különbözik:

Diplomamunka központi témája a falazatok geometriája (falkötés) és a falazatok tartóssága, stabilitása közötti általános kapcsolat feltárása, míg a TDK dolgozat ennek csupán egy szeletét (véges falmozaikok paramétereinek becslése) dolgozza fel. A TDK dolgozatban *nem* szereplő részeket pirossal írva jelenítem meg.

Diplomamunka részei, összefoglalása, alkalmazott módszerek:

- **Motiváció, falazatok történeti és kategorikus áttekintése, bemutatása, a téglakötés univerzális, számszerűsíthető definíciójának szükségességének felvetése**
- A síkbeli konvex mozaikok átlagtér-elméletének részletes bemutatása, különös tekintettel az elmélet (aszimmetrikus) alapegyenletére és a foksámok, ill. cellasűrűség definíciójára
- A végtelen mozaikokra alkalmazható átlagtér-elmélet kiegészítése két becslési módszerrel (statisztikai és kombinatorikai bizonytalanság), melyek segítségével a véges mozaikokon mért paraméterek bizonytalansága megállapítható
- 17 valós falból falmozaik generálása manuálisan, vektorgrafikus szoftver segítségével, majd a falmozaikok paraméterei és az erre adott becslések automatikus számítása saját Python szoftver segítségével.
- Ideális mozaikok definiálása: mozaik, melyen mért paraméterek bizonytalansága zérus. A perem nélkül mért falmozaikok paramétereinek (foksámainak) kicsi a bizonytalansága, közel ideálisak, ezek használhatók további vizsgálatokhoz.
- **Téglakötés általános, számszerűsített definíciójának feltételezése a perem nélkül mért falmozaikok paraméterei alapján: mindegyik vizsgált fal magas cellasűrűséggel rendelkezik, közel az elméleti maximumhoz.**
- **Ezen sejtés verifikálása kontakt dinamika szimulációkkal:**
 - Kontakt dinamika alapjainak ismertetése
 - Szimulációkhoz szükséges korrekciók bemutatása
 - Alternatív definíció a téglakötés általánosítására: falban ébredő (kontakt)erőrendszer szórásnégyzete
 - Az alternatív definíció verifikálása különböző eltolású téglafalak példáján keresztül: féltégla eltolásnál a legkisebb a variancia, ami összhangban van az empirikus építési hagyományokkal
 - Variancia mérése egyéb történeti, és periodikus falak esetén
 - Magas cellasűrűség esetén a variancia kicsi, ami verifikálja az eredeti definíciót, miszerint a cellasűrűség a tartós falak közös tulajdonsága lehet
- **Választott konfidenciaszinthez (kombinatorikus bizonytalansághoz) tartozó, nem zérus kombinatorikai bizonytalansággal rendelkező, kontextusában „ideális” falmozaik méretének meghatározása**
 - téglafalak esetében
 - méhsejtfalak (általánosított ciklopfalak) esetében.

- Adott szélességű és magasságú téglaméhsejtfal kombinatorikai bizonytalanságának meghatározása csupán a méretek felhasználásával
- Falkötés univerzális, számszerűsíthető definíciójának meghatározása, lehetséges magyarázatainak feltárása.

A TDK dolgozat eredményein *túl* a diplomamunka eredményei:

- Cellasűrűség, mint a falazatok geometriája (kötés) és a tartósság közötti kapcsolat
- Falkötés univerzális, számszerűsíthető definíciója
- Tetszőleges téglafal, ill. méhsejtfal kombinatorikai bizonytalanságának meghatározása csupán a fal befoglaló méreteinek (elemek száma egy sorban, sorok száma) segítségével
- Tetszőleges kombinatorikai bizonytalanság eléréséhez szükséges téglaméhsejtfal méreteinek (elemek száma egy sorban, sorok száma) meghatározása

Budapest, 2025. 01. 07.

Nagy Klára