

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖR DOLGOZAT

Földtörténeti logaritmikus spirálok a BME K épület aulájában

Készítette:

Antal Virág Anna, Domokos Lenke

BME Építészmérnöki Kar

Konzulens:

Dr. Sipos András Árpád

BME Építészmérnöki Kar, Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszék

Absztrakt

A Budapesti Műszaki Egyetem főépületének aulájában a mészkő padlóburkolatban megfigyelhetők a földtörténetben élt ammoniteszek lenyomatai. Ezen kihalt tengeri élőlények héja jellemzően olyan alakban növekedett, amelynek felülnézete jól közelíthető logaritmikus spirál segítségével. A spirált létrehozó növekedési folyamat a természetben számos élőlénynél, például a kérődzők szarvánál is megfigyelhető [2]. Az élővilágon túl élettelen természeti folyamatokban, így például a ciklonok alakjában is felfedezhető a logaritmikus spirál [3].

Az ammoniteszek háza spirális szerkezetű, de felmerül a kérdés, hogy a növekedés során a héj menyire pontosan követi a logaritmikus spirált. Munkánk során a K épület aulájának padlóján fellelhető fossziliákra legjobban illeszkedő spirált kerestük, és azt vizsgáltuk, hogy az optimális spirálhoz képest milyen eltéréseket mutat az állat váza, továbbá ennek a különbségnek mi lehet az oka.

Feladatunk a burkolatban található ammoniteszek fényképezésével kezdődött, majd ezeket mérethelyesen ábrázolva meghatároztuk a középvonalukat. Ezután Matlab környezetben írtunk egy programot, amely meghatározza az adatokra legjobban illeszkedő logaritmikus spirált. Az eredmény azt mutatta, hogy jó közelítéssel valóban logaritmikus spirált rajzolnak ki ezek a metszetek, de egy, minden váznál megfigyelhető eltérés is kimutatható volt. Az első hipotézisünk az volt, hogy ez a hiba az ammoniteszházaknak a közet kialakulása során való enyhe deformálódásával (nyúlásával, összenyomódásával), vagy a metszősík helyzetével magyarázható. Ezen hatások figyelembevétele nem hozott lényegi változást, amiből arra következtettünk, elsősorban nem a deformáció és a szilárd test-szerű mozgások állnak az eltérés hátterében. A második hipotézis az állat növekedésével hozza összefüggésbe a megfigyelt eltérést. Ennek illusztrálására egy matematikai modellt írtunk le, amely az adatainkban mutatkozó eltéréshez hasonló eredményre vezet.

Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés	3
1.1.	Problémafelvetés	3
2.	Irodalmi áttekintés	4
2.1.	A logaritmikus spirálokról	4
2.2.	A logaritmikus spirál és másfajta spirálok jelenléte a természetben	6
2.3.	A logaritmikus spirálok a földtörténetben: az ammoniteszek	7
2.4.	A K épület aulájának ammoniteszei	9
3.	A kutatómunka ismertetése	10
3.1.	Dokumentálás	10
3.2.	Feldolgozás	11
3.3.	Illesztés	12
4.	Eredmények	13
4.1.	Egyszerű logaritmikus spirál illesztése.....	13
4.2.	Összetett illesztések	14
4.3.	A növekedési folyamatot leíró matematikai modell	16
5.	Összefoglalás, kitekintés és további kérdések	19
6.	Hivatkozások.....	20
6.1.	Irodalomjegyzék	20
6.2.	Mellékletek	20

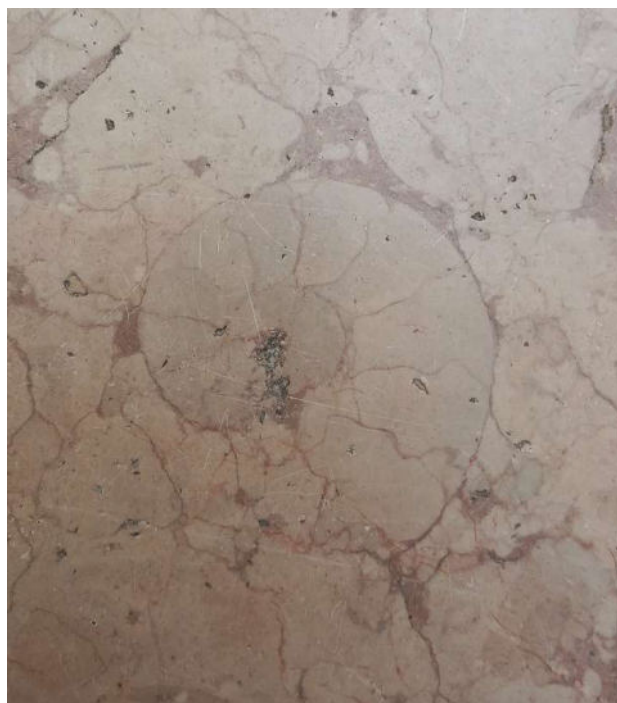
1. Bevezetés

1.1. Problémafelvetés

A földtörténetben élt, mára kihalt ammoniteszek háza egy spirális alakzat (1. (a) ábra), a mai élőlények közül leginkább a csiga házához hasonlítható. Az irodalomban jól ismert, hogy az ilyesfajta természetes spirálok felülnézetben egy logaritmikus spirált követnek, amit a héj növekedési folyamatával szoktak összefüggésbe hozni. Célunk a BME K épületének padlózatán megjelenő ammonitesz héjak (1. (b) ábra) alakjának elemzése, elsősorban a rájuk illeszthető logaritmikus spirál segítségével. Kérdésünk, hogy látható-e szisztematikus eltérés, ha igen, mi lehet ennek a magyarázata?



(a) Kövület egy ammonitesz házból [8]



(b) A BME K épület aulájának
mészkőburkolatán látható ammonitesz

1. ábra. Ammonitesz kövületek

Dolgozatunkban az irodalmi áttekintés után ismertetjük az elvégzett kutatómunkát, az eredmények bemutatása után pedig számba vesszük a további lehetséges kutatási irányokat.

2. Irodalmi áttekintés

2.1. A logaritmikus spirálokról

A logaritmikus spirál a spirális síkgörbék egy fajtája, amelyet először René Descartes írt le 1638-ban, majd Jacob Bernoulli nevezte el *Spira mirabilis*nek, azaz „csodálatos spirálnak”. Arany spirálnak is szokták nevezni, mivel kapcsolatban áll a Fibonacci-számokkal, az aranymetszéssel és az arany téglalappal is [1].

A spirál görbéjének egyenlete polár-koordinátákkal [1] felírva a következő:

$$r = a \cdot e^{b \cdot \theta}, \quad (1)$$

$$\text{vagy } \theta = \frac{1}{b} \cdot \ln \frac{r}{a}, \quad (2)$$

ahol $\theta \in (-\infty, \infty)$ a vízszintes iránnyal bezárt szög, r a (pólusnak is nevezett) origótól való távolság, az $a > 0$ és b rögzített paraméterek.

Az (x, y) koordináta párok a következőképpen fejezhetők ki [1]:

$$x = r \cdot \cos \theta = a \cdot \cos \theta \cdot e^{b \cdot \theta}, \quad (3)$$

$$y = r \cdot \sin \theta = a \cdot \sin \theta \cdot e^{b \cdot \theta}. \quad (4)$$

A dimenziótlan b paramétertől függ, hogy milyen gyorsan tágul a spirál, és hogy melyik irányba csavarodik; a hosszúság dimenziójú a paraméter a fizikai méretet határozza meg. Speciális esetben, ha $b=0$, akkor a spirál egy a sugarú körre fajul. Ha pedig b végtelenhez tart, akkor a spirál az egyeneshez közelít [1].

D'Arcy Wentworth Thompson az „On Growth and Form” című művében [2] az arkhimédészi spirállal összevetve ír szemléletesen a logaritmikus spirálról. Míg az arkhimédészi spirált egy feltekert hengerként képzelhetjük el, a logaritmikus spirál ennek megfelelően egy felcsavart kúpként értelmezhető, hiszen ebben az esetben a keresztmetszetek kifelé haladva egyre növekszenek.

Más megközelítésben pedig: „Ha miközben a sugárvektor egyenletesen forog a pólus körül, egy pont egyenletes sebességgel halad rajta, a leírt görbe az lesz, amit egyenletes spirálnak vagy arkhimédészi spirálnak nevezünk.” „Ha ahelyett, hogy egyenletes sebességgel haladnánk, pontunk a sugárvektor mentén mozog a pólustól való távolságával növekvő sebességgel, akkor a leírt pályát logaritmikus spirálnak nevezzük.” [2]

A logaritmikus spirál diszkrét közelítése úgy konstruálható egyenlő szögtávolságra lévő azonos kezdőpontú sugarakból, hogy az egyik sugár mentén egy pontból indulunk ki, és a

szomszédos sugárra merőlegeset húzunk (2. ábra). Ahogy a sugarak száma a végtelenhez tart, a szegmensek sorozata a sima logaritmikus spirálhoz közelít [1].

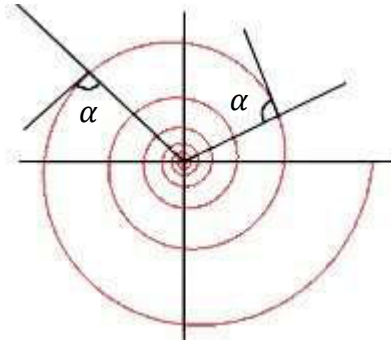


2. ábra. A logaritmikus spirál diszkrét származtatása [1]

Egyenlő szögű spirálnak is nevezik, hiszen van egy olyan nevezetes tulajdonsága, hogy a pólusából kiinduló bármely sugárral a pontbeli érintője ugyanakkora α szöget zár be (3. ábra). Ezen szög a következőképpen fejezhető ki [1, 3]:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(-\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{b} \right) = \cot^{-1}(-b), \quad (5)$$

$$\text{(a sugárváltozás sebessége (1) felhasználásával: } \frac{dr}{d\theta} = abe^{b\theta} = br \text{).} \quad (6)$$



3. ábra. Bármely ponthoz tartozó sugár és érintő által bezárt szög nagysága állandó [4]

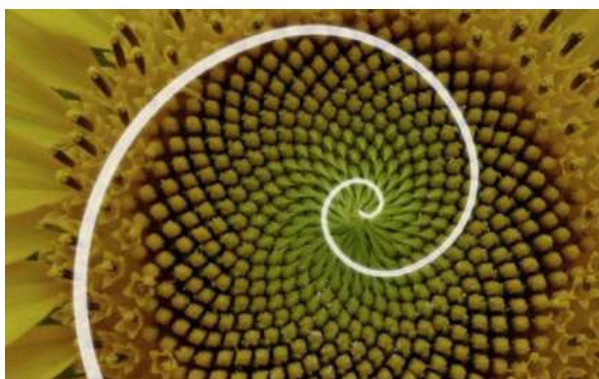
Ezzel függ össze a logaritmikus spirál azon, a (2) egyenletből következő jellemzője, hogy ha k -szorosra felnagyítjuk, és közben $-b^{-1}\ln(k)$ szöggel elforgatjuk, a spirál önmagára illeszkedik. Ez csak az egyik „reproduktív” tulajdonsága ennek a spirálnak, Jacob Bernoulli sok másikat is talált [3].

A logaritmikus spirál κ görbülete poláris paraméterezés esetén a következőképpen számítható [1]:

$$\kappa(\theta) = \frac{e^{-b\theta}}{a\sqrt{1+b^2}} \quad (7)$$

2.2. A logaritmikus spirál és másfajta spirálok jelenléte a természetben

A természetben a spirális forma a molekuláris szinttől (DNS) egészen a galaktikus szintig (spirálgalaxisok) megtalálható. A mi világunk e két szint közé ékelődve szintén számtalan spirális szerkezetet rejt. A szerves és a szervetlen természetben is előfordulnak ezek a formák. Az élővilágban jelen vannak a csigaházakban, egyes kérődzők szarvának alakjában, és a fenyőtobozok pikkelyei is spirális vonalban követik egymást. A napraforgómagok (4. (a) ábra) elrendezése pedig egy kettős spirált rajzol ki. Bizonyos növényfajok nem képesek megtartani magukat, így más növények szárára spirálisan feltekeredve próbálják túlnőni őket, a fényért való küzdelem során. Térbeli spirális szerkezetet találunk egyes légköri jelenségekben, például ciklonokban (4. (b) ábra) és tornádókban. 1905-ben W. Eckmann oceanográfus felfedezte a térbeli spirális víz alatti áramlatokat, amelyeket a Coriolis-erők és a súrlódási erők egyensúlya jellemez. Az Eckmann-áramlás gyakran megfigyelhető a hírhedt Bermuda-háromszögben [3].



(a) Napraforgómagok elrendeződése

<https://hogyankell.hallowedgaming.com/articles/aranymetszes-tervezes.html> (2024.10.16.)



(b) Ciklon felülnézetben

<https://hu.wikipedia.org/wiki/ciklon?variant=zh-tw> (2024.10.16.)

4. ábra. Logaritmikus spirálok a természetben

A logaritmikus spirál természetben való megjelenésének legszembetűnőbb példája a Nautilus háza [2], amely arányosan növekszik, anélkül, hogy a ház alapvető alakja megváltozna. Thompson szerint ez a geometriai növekedési minta biztosítja a ház szilárdságát és stabilitását, miközben lehetővé teszi a test növekedését. A Nautilus háza mind a mai napig fontos motiváció a természeti morfológia kutatásában, a közelmúltban az ún. lágy cellák egyik természeti példáját szolgáltatta a Nautilus háza [5].

A logaritmikus spirál széleskörű természeti megjelenésének alapvető oka, hogy az O középpont körüli egyszerű növekedési szabály eredményeként jön létre. Tekintsük a 2. ábrán látható konstrukciót: amennyiben a lokális sugárra merőleges mozgást valósítunk meg, akkor az eredményeként létrejövő alakzat maga a logaritmikus spirál.

2.3. A logaritmikus spirálok a földtörténetben: az ammoniteszek

Az ammoniteszek kihalt tengeri állatok, a földtörténet jura és kréta időszakában éltek. Ezek együttesen mintegy 140 millió éves időintervallumot jelentenek. A jura időszak körülbelül 201 millió évvel ezelőtt kezdődött, a kréta időszak pedig körülbelül 66 millió évvel ezelőtt ért véget. Az ammoniteszeket fosszíliaként találhatjuk meg, amelyek akkor keletkeztek, amikor az állat maradványait betemette az üledék, amely később kőzetté szilárdult [6].

Ezek az élőlények kozmopoliták voltak, tehát az egész Földön elterjedtek [7]. A tudósok több mint 10 000 fajt azonosítottak a bolygón szinte mindenhol fellelhető fosszíliákból, ahol egykor óceánok léteztek (az észak-amerikai síkságoktól a Himalája lábain át az Antarktisz gleccsereiig) [8]. Az ammoniteszeket a fejlábúak osztályába sorolják. Más fejlábúakkal – például a tintahalakkal és polipokkal – állnak rokonságban, és a mai nautilusok korai rokonai voltak.

A fosszilis feljegyzések alapján az ammoniteszek széles méret- (20 mm – 2-2,5 m) és formaválasztékban fordulnak elő. Egyes ammoniteszeknek hosszú és egyenes, míg másoknak tekervényes héja volt (5. ábra). A legtöbb fajnak azonban spirál alakú volt a külső váza [8].



5. ábra. Különböző ammonitesz házak [5]

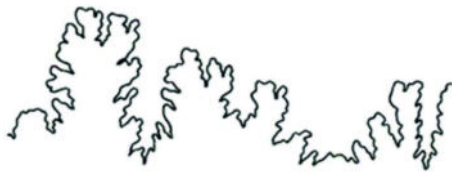
A vázuk elsőre a csigák házára hasonlít, egy lényeges különbséggel: míg a csigák háza három dimenziósan, egy vertikális tengely körül, addig az ammoniteszek háza – általában – síkban csavarodott. Ez a síkbeli spirál, amit az állat növekedése során hozott létre, egy logaritmikus spirállal írható le [9].

Minden ammonitesz vázán megfigyelhető, hogy az kamrák soraiból épül fel [9]. Ezeket szeptumnak nevezett falak választották el egymástól, amelyek a héjat erősítették, és

megakadályozták, hogy a külső víznyomás összezúzza [6]. Ezeket a falakat bonyolult, loba-vonalaknak (6. ábra) nevezett varratok kapcsolták össze a külső héjjal – ezek bonyolultsága az állat evolúciója során rendkívül változatos volt [8].



(a) [6]



(b) [6]



(c) [9]

6. ábra. Ammoniteszek loba-vonalai

Az állat mindig az utolsó, legnagyobb kamrában lakott, de a kinőtt, már lezárt kamrákkal is összeköttetésben maradt, hogy azok gáz- és folyadékösszetételét változtatni tudja. Ennek segítségével volt képes szabályozni a felhajtóerőt és a mozgását, így tudott lebegni (süllyedni és emelkedni) a vízben [9]. Az ammoniteszek puhatestűek viszont sokban különbözhetett az egyetlen mai összehasonlítási alapot nyújtó távoli rokonuktól, a nautilusoktól. A hosszabb és keskenyebb lakókamrájuk arra utal, hogy a benne élő állat hosszabb, nyúlánkabb lehetett [7].

Egyes ammonitesz kőületek vélhetően az állat táplálékát is tartalmazzák. Ezek alapján arra lehet következtetni, hogy a táplálékaik közé tartoztak foraminiferák (szilárd vázú egysejtűek), planktonikus tengeri liliomok, apró rákok, csigák, kagylók és szivacsok [7].

Az állat elpusztulása után a tenger fenekére süllyedt ammoniteszház iszapból kiálló részét a kalcium-karbonátban telítetlen víz feloldotta, így csak az egyik, a betemetődéskor lefelé néző oldala maradt meg, a másik „összenőtt” a kőzettel [10].

Az ammoniteszhéjakat ma indexfossziliaként használják, ami azt jelenti, hogy segítenek más, ugyanabban a tengeri közetrétegben található fossziliák datálásában. Ezek a fejlábúak ideális indexfossziliák, mivel sokféle tengeri üledékes kőzetben megtalálhatóak, nagy számban fordulnak elő, világszerte elterjedtek, és különböző fajaik különböző időszakokban éltek, amelyek könnyen azonosíthatók a loba-vonalak mintázata alapján [8].

2.4. A K épület aulájának ammoniteszei

A vörös mészkövet, amely ammonitesz maradványokban gazdag, hazánkban a Gerecsében, a Bakonyban és a Villányi-hegységben bányásszák. Ezeket a mészköveket több fontos középületünk padló vagy lábazat burkolataként használták. Egy korábbi TDK dolgozat alapján, a BME K épület aulájában található mészkő is ezekből a hegységekből származik: *„A kőlapok anyaga főként siklósi tömött mészkő, de a különböző felújítások során alkalmaztak vörös színű tardosi tömött mészkövet, valamint világos színű ősmaradvány dús tömött mészkövet is az erősen kopott és elhasználódott kőlapok pótlására.”* [11]

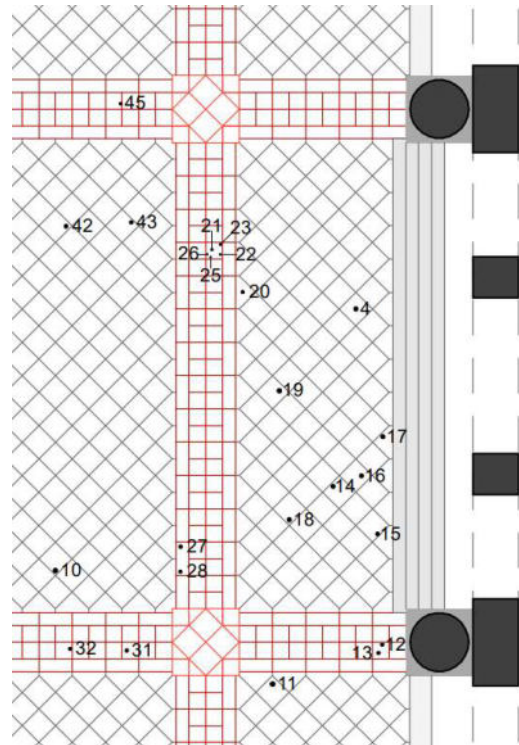
3. A kutatómunka ismertetése

3.1. Dokumentálás

Feladatunkat a BME K épület aulájában kezdtük, ahol a mészkő padlóburkolatban kerestünk jól kivehető spirált leíró ammonitesz maradványokat. Összesen 45 darabot találtunk és fényképeztünk le, majd ezeket sorszámmal láttuk el, azonban az átrajzolás folyamán 6 minta nem mutatkozott használhatónak. A dolgozatban a fényképek sorszámaival azonosítjuk a spirálokat, azaz egyes sorszámkhoz (pl.: 7) nem tartozik eredmény. A használható 39 darab spirált (7. (a) ábra) egy általunk készített alaprajzon (7. (b) ábra) jelöltük, amivel a padlóburkolat mintája alapján később is azonosíthatóak a vizsgált ammoniteszek. A teljes alaprajz és ábragyűjtemény az 1. mellékletben megtekinthető.



(a) 43. számú ammonitesz fotója

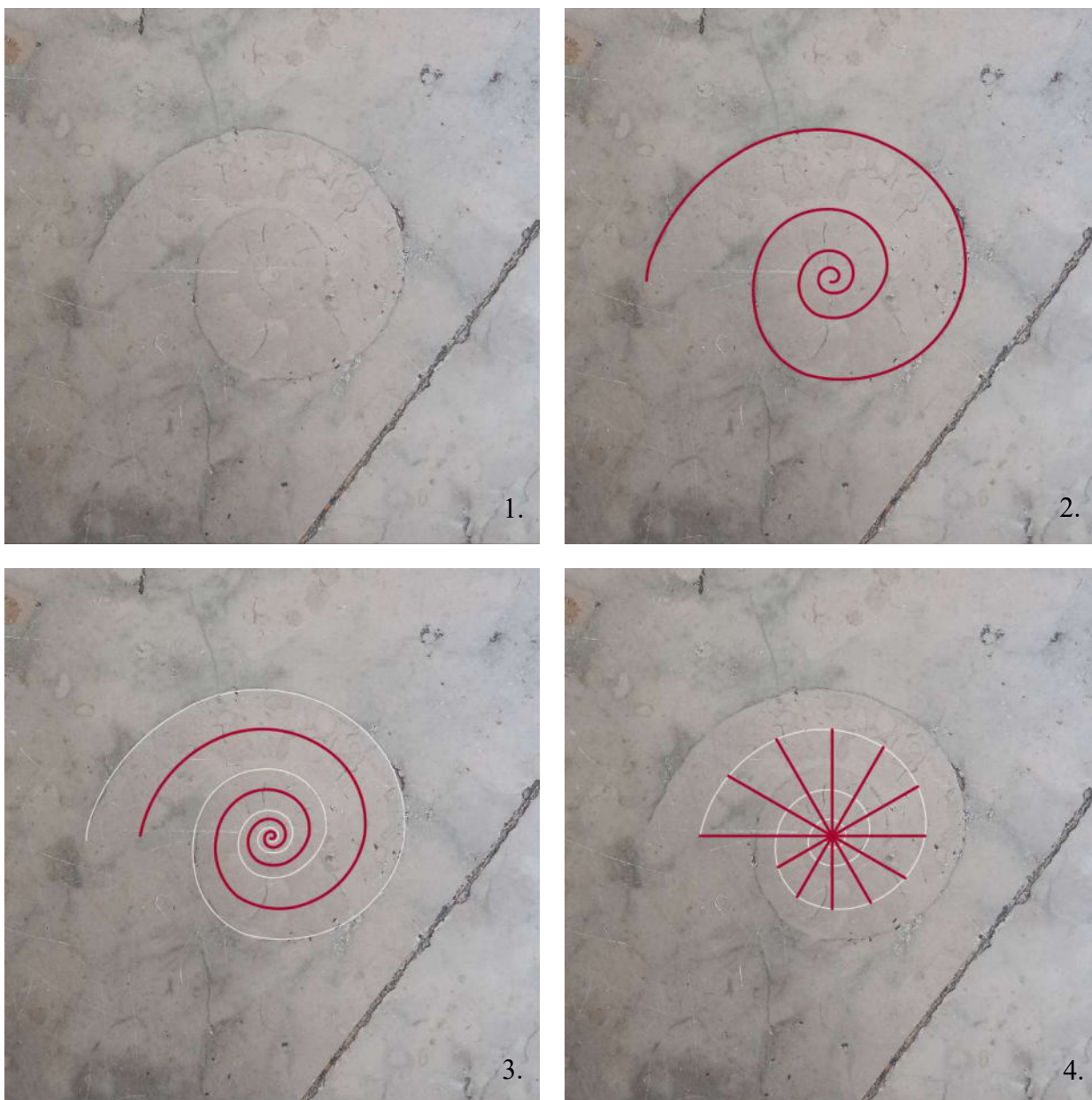


(b) Az aula alaprajzának részlete

7. ábra. A felmérés részletei

3.2. Feldolgozás

AutoCAD segítségével léptékhelyesen körberajzoltuk a fényképeken szereplő spirálokat, meghatároztuk azok középvonalait, majd 30 fokként sugarakat rajzoltunk (8. ábra). A középvonalat a sugarak végpontjai segítségével diszkretizáltuk, az így kinyerhető (x,y) adatpárok a következő munkarészhez voltak szükségesek.



8. ábra. Spirálok feldolgozásának folyamata

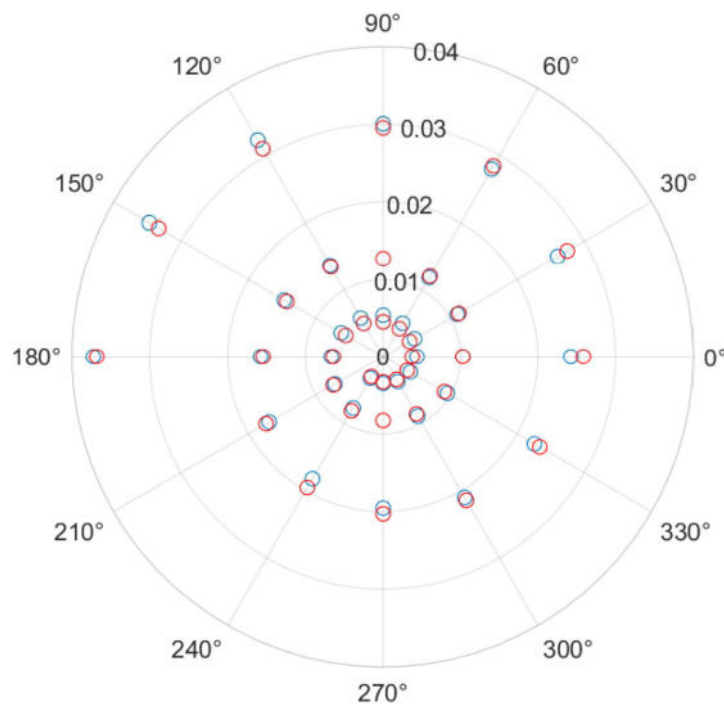
(Az ábrán a 14. számú spirál látható.)

3.3. Illesztés

Az AutoCAD-ből kimentett *.dxf formátumú fájlokat Matlab környezetben írt kóddal olvastuk be, és kirajzoltattuk vele az ammoniteszek spiráljainak 30 fokonként meghatározott pontjait. A következő lépés az volt, hogy az általunk körberajzolt spirálokhoz megtaláljuk a legjobban illeszkedő logaritmikus spirált. Ehhez a Matlabban kódot készítettünk, ami a korlátos optimalizálást megvalósító fmincon parancsra épül. A kód az (1) egyenletben szereplő, legjobb a és b paraméterértékeket adja vissza, ahol a mérésekben szereplő $(\bar{x}, \bar{y})$ koordináták és az (a, b) párral jellemezhető logaritmikus spirál (x, y) koordinátái (9. ábra) közötti négyzetes R eltérés minimális:

$$R = \sum_i (\bar{x}_i - x_i)^2 + (\bar{y}_i - y_i)^2, \quad (8)$$

ahol az összegzést a spirálhoz tartozó összes pontra számítjuk (a pontok száma spirálonként változó, jellemzően 15 és 40 közötti szám). Az illesztések az 1. mellékletben, az illesztett értékek a 2. melléklet 1. táblázatában (itt az R értékeket R_I jelöli), a Matlab kód a 3. mellékletben megtekinthetőek.



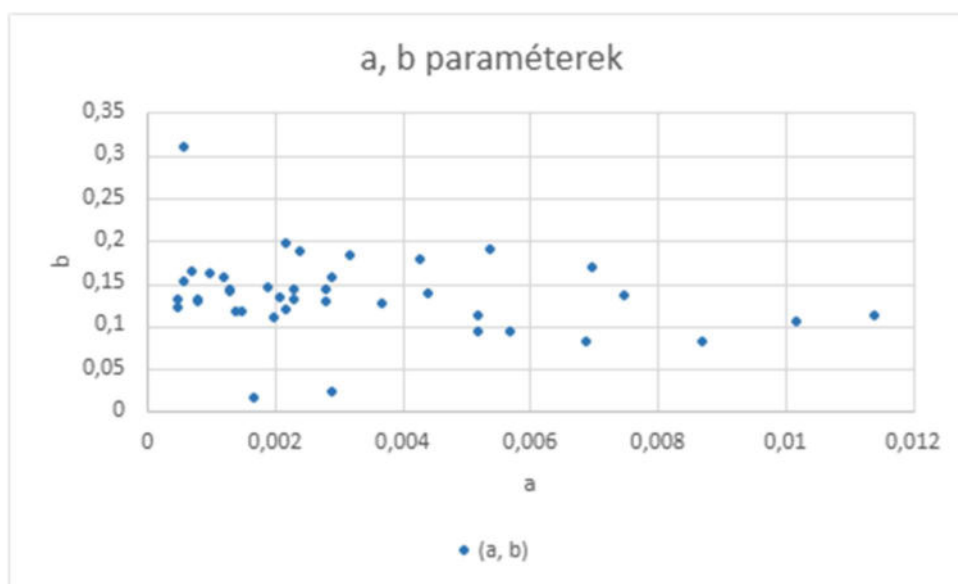
9. ábra. Illesztés

*piros: ammonitesz spiráljának pontjai
kék: illesztett logaritmikus spirál pontjai
(Az ábrán a 14. számú spirál látható.)*

4. Eredmények

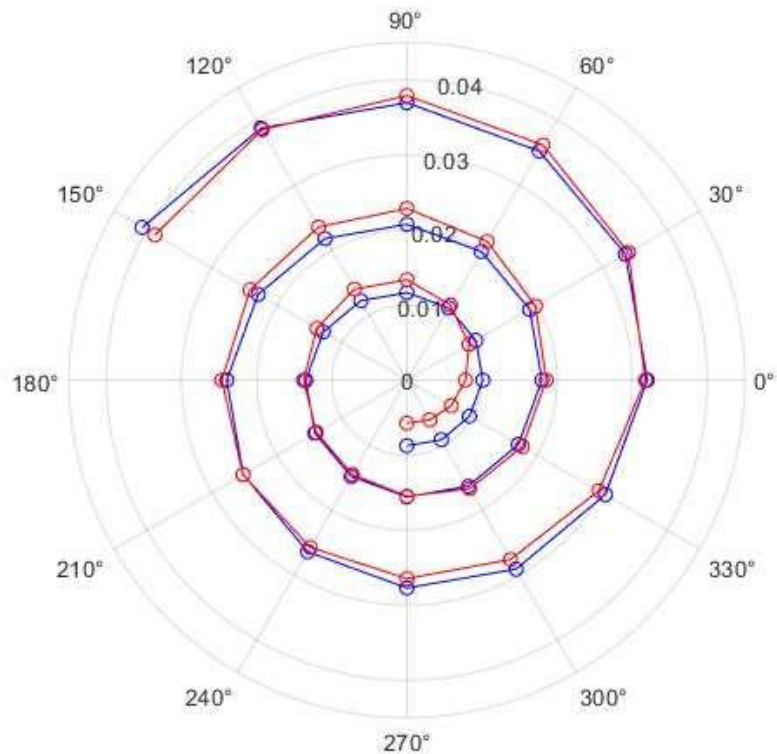
4.1. Egyszerű logaritmikus spirál illesztése

Az 3.3. alfejezetben ismertetett illesztéssel kapott (a, b) paramétereket egy diagramon ábrázoltuk (10. ábra). Ebből érdekes következtetések vonhatók le. Egyrészt, az a paraméter értékei nagy szórást mutatnak: $0,0005 < a < 0,012$. Ez a 2.1. alfejezetben írtak alapján annyit jelent, hogy a vizsgált ammoniteszek mérete változatos. Sokkal érdekesebb a spirálist jellemző b paraméter: ennek értéke egy szűk tartományon belül mozog. Átlagosan $b=0,1329$, $0,0478$ szórás mellett. Ennek magyarázata meghaladná dolgozatunk kereteit, a biológiai szakirodalomban [12] ma is nyitott kérdésekhez vezet.



10. ábra. Mode-1 illesztés a és b paraméterei

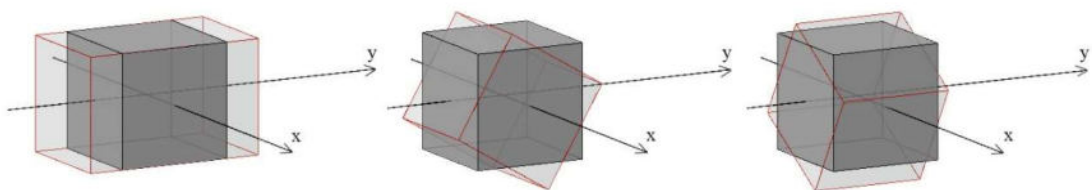
Az illesztési eredmények azt mutatják, hogy valóban kis különbség van a mért és az elméleti spirál között, azonban általánosan megfigyelhető egyfajta „hullámszerűség”: a megfigyelt ammoniteszházak középvonalai szakaszonként hol kívülről, hol belülről közelítenek a logaritmikus spirálhoz (11. ábra). A célunk mostantól ezen eltérés vizsgálata.



11. ábra. Általánosan megfigyelhető „hullámzás” a két spirál pontjai között
(Az ábrán az 1. számú spirál látható.)

4.2. Összetett illesztések

Az eltérés okára hipotéziseket állítottunk fel. Az első hipotézis szerint az eltérés oka alapvetően geometriai: a mészkőbe kövesedett házak esetleges deformálódása (összenyomódása, nyúlása) és a metszősík térbeli helyzete. Ennek megfelelően kiegészítettük a Matlab kódot. A 3.3. alfejezetben ismertetett illesztést mostantól 1. típusú (mode-1) illesztésnek nevezzük. A 2. típusú (mode-2) illesztés esetén az (a,b) paraméterpáron kívül további 4 paramétert vezetünk be: a γ szög a vízszintes x -tengelyhez képest azt az irányt adja meg, amely irányban s mértékű nyúlást alkalmazunk (itt $s=1$ felel meg az eredeti alaknak). Továbbá, az α és a β szögek a formát az x és y tengelyek körül merevtest-szerűen forgatják (12. ábra). Tehát a mode-2 illesztésnél az $(a,b,\alpha,\beta,\gamma,s)$ paraméterek terében történik az illesztés.



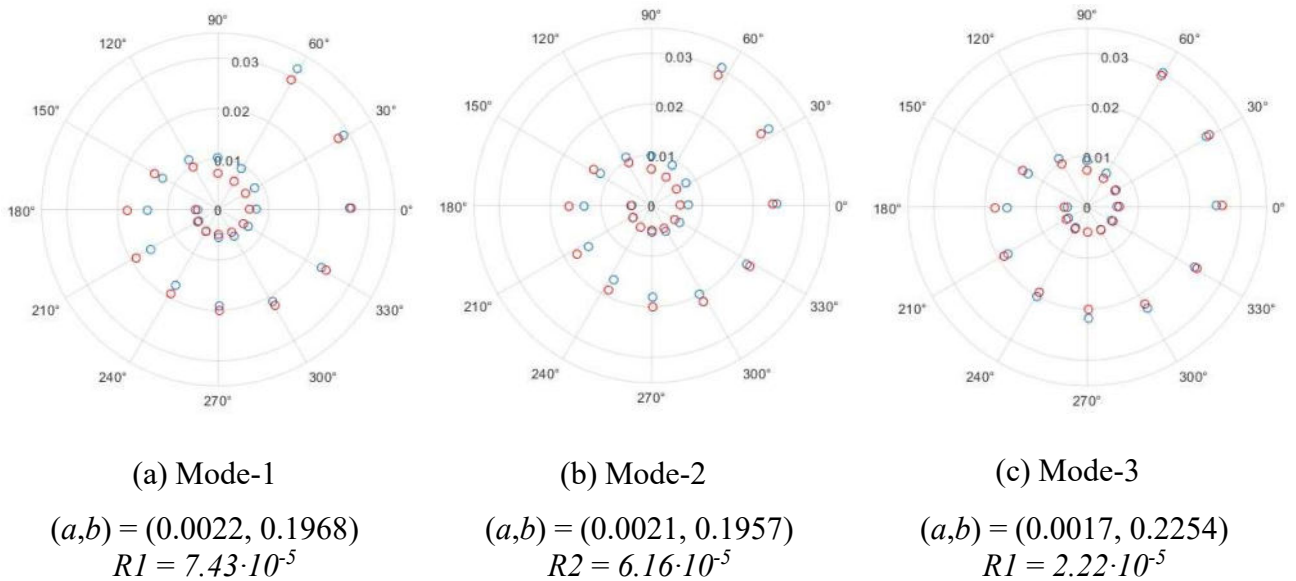
12. ábra. Nyújtás, illetve x és y tengely körüli forgatások

Az illesztést minden felmért spirálra elvégeztük, az eredmények a 2. melléklet 2. táblázatában láthatóak. Megfigyelhető, hogy a mode-1 és mode-2 illesztések (a,b) eredményei közel esnek egymáshoz, és a négyzetes hibát jellemző $R2$ érték mode-2 esetén kisebb (a nagyobb szabadságfok miatt ez egyáltalán nem meglepő). Azonban az $R2$ értékben várt javulás nem jelentős, a mért és számított értékek közötti „hullámzás” megmaradt (13. (a) és (b) ábra). Ez arra utal, hogy a mért alak nem egy véletlenszerű zajjal terhelt logaritmikus spirál alakzat. Ebből arra következtettünk, hogy elsősorban nem a deformáció és a szilárdtest-szerű mozgások állnak az eltérés hátterében.

A második hipotézis szerint a mért forma egy perturbált logaritmikus spirál, ahol az a paraméter a növekedés folyamán nem állandó. A feladat forgási jellegét kihasználva a második hipotézis megfogalmazható az (1) egyenlet módosításával, a következő módon:

$$r = (a + a_2 \cdot \cos(c_f \cdot (\theta - \theta_0))) \cdot e^{b \cdot \theta}. \quad (9)$$

Itt a_2 és θ_0 rögzített paraméterek. Ezt mode-3 típusú illesztésnek neveztük el, itt a $(a, a_2, b, c_f, \theta_0)$ paramétertér öt dimenziós. Ezen illesztést is minden megfigyelt alakra elvégeztük, az eredmények a 2. melléklet 3. táblázatában láthatóak. Megfigyelhető, hogy a mode-3 és mode-1 illesztések (a,b) eredményei közel esnek egymáshoz, és a négyzetes hibát jellemző $R3$ érték mode-3 esetén kisebb, mind a mode-1, mind a mode-2 eredményekhez képest. Azonban az $R3$ értékben várt javulás továbbra sem jelentős: a mért és számított értékek közötti „hullámzás” is megmaradt (13. (a) és (c) ábra).



13. ábra. Illesztések a három esetben
(Az ábrán a 10. számú spirál látható.)

4.3. A növekedési folyamatot leíró matematikai modell

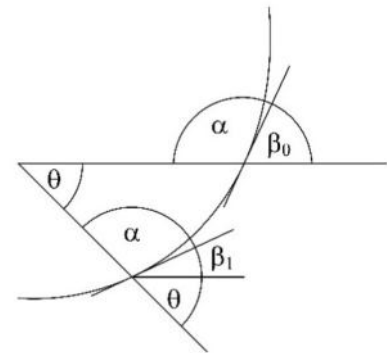
Felmerül tehát, hogy más magyarázza a szisztematikus eltérést, így a harmadik hipotézis szerint a hullámszás valamilyen módon a növekedés következménye, és a formát megadó képletek egyszerű módosításával nem állítható elő. Ennek illusztrálására egy matematikai modellt mutatunk be, amely az adatainkban mutatkozó eltéréshez hasonló eredményre vezet.

A modell felállítása a következő gondolatmenet szerint alakult. Láttuk, hogy a logaritmikus spirál görbülete és görbületének változása könnyen kifejezhető a spirál központi szögének (θ) segítségével. Definíció szerint a κ görbület az érintő irányának s ívhossz szerinti megváltozása. Tehát:

$$\kappa = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \kappa_0 \cdot \exp(-b \cdot \theta), \quad (10)$$

ahol a második egyenlőség a 2.1 fejezet szerinti, érintő és a sugár közötti állandó α szög következménye, a harmadik egyenlőség pedig a (7) egyenlettel azonos. Számítsuk ki a görbület központi szög szerinti deriváltját! Ez nem más, mint:

$$\frac{d\kappa}{d\theta} = -b \cdot \kappa_0 \cdot \exp(-b \cdot \theta) = -b \cdot \kappa. \quad (11)$$



14. ábra. β és θ ívhossz szerinti megváltozása azonos

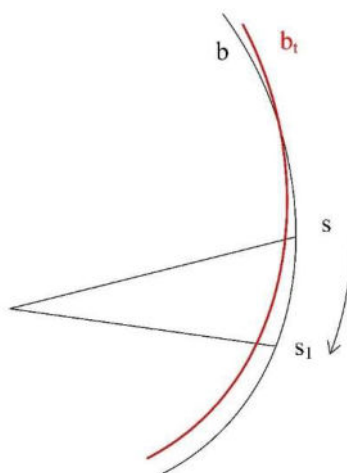
A növekedés szempontjából azonban nem a középpontból húzott r sugárnak és θ központi szögének van jelentősége, hanem a pillanatnyi helyzetben kell a helyes görbületváltozásnak megfelelően építeni a héjat. Azaz a görbület ívhossz szerinti megváltozására van szükségünk. Ez utóbbit a láncszabály szerint a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\frac{d\kappa}{ds} = \frac{d\kappa}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = -b \cdot \kappa^2, \quad (12)$$

ahol a második egyenlőség a görbület definíciójából következik. Ez egy nemlineáris közönséges differenciálegyenlet, aminek létezik zárt alakú megoldása. Feltéve, hogy $\theta=0$ helyen a görbület a (10) egyenletben szereplő κ_0 , akkor a görbület az s ívhossz függvényében:

$$\kappa = \frac{1}{b \cdot s + \frac{1}{\kappa_0}}. \quad (13)$$

Feltételezzük, hogy az ammoniteszek genetikájába kódolva van egy ideális spirál alak, tehát egy b_t paraméter, amelyet növekedése során követni próbál. (Mint láttuk, az összes mért alaknál a b paraméter értéke közel azonos, ez alátámasztja feltételezésünket.) Azt gondoljuk, hogy az ammoniteszek olyan módon növekednek, hogy mindig egy, az ív korábbi szakaszán ténylegesen megvalósult b értéket hasonlíttanak össze az elvárt b_t -vel, és ennek megfelelően korrigálnak a következő szakaszra nézve (15. ábra).

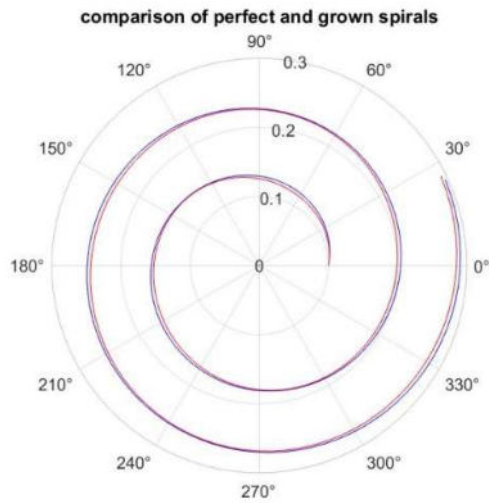


15. ábra. A növekedési modellben cél az állandó b_t paraméterérték elérése olyan módon, hogy az éppen építés alatt álló szakasz (helye: s) esetén a b értékét a korábbi s_1 pontban megvalósult b és b_t eltérése határozza meg.

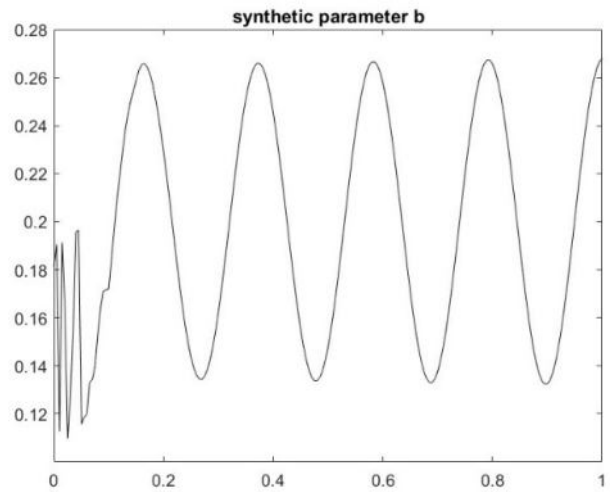
A modell tehát a b paraméterre vonatkozó késleltetett differenciálegyenletet ad meg:

$$\frac{db}{ds} = \chi \cdot (b_t - b(s - s_1)), \quad (14)$$

ahol s_1 a késleltetés mértéke, χ pedig a szabályozás erősségét jelző paraméter. A modellt szimuláló kód a 3. melléklet 5. oldalán található. A 16. ábrán látható $b_t=0.20$, $\chi = 30$ és $s_1=0.05$ paraméterekhez tartozó eredmény (a számításban a kirajzoláshoz $a=1$, a spirál teljes hossza pedig 1, azaz $s \in [0,1]$). A 16. (a) ábrán az ideális (kék görbe) és a modell szerint növekedő spirálalak (piros görbe) látható, a 16. (b) ábrán pedig a b paraméter változását követhetjük s ívhossz szerint. A modell akkor egyértelmű, ha az ív kezdeti, $s \in [0, s_1]$ hosszúságú szakaszán a b paraméter adott, ezt a kód véletlenszerűen veszi fel, $b_t/2$ várható érték mellett. A numerikus eredményben jól látható a mérésekben megfigyelhet hasonló „hullámlás”, ami a modellben a b paraméter ingadozásának következménye. Természetesen kicsiny χ esetén a modellben b az elvárt b_t értékhez konvergál, elegendően nagy χ pedig véletlenszerű ingadozásokat eredményez.



(a) Az ideális (kék) és a modellel szimulált spirálalak (piros)



(b) b változása az s ívhossz szerint

16. ábra. A (14) egyenlettel adott modell szimulációs eredményei $b_i=0.20$, $\chi = 30$ és $s_1 = 0.05$ mellett.

5. Összefoglalás, kitekintés és további kérdések

A BME K épület aulájának mészkőburkolatában fellelhető ammonitesz kővületek spirális alakját elemeztük. Összesen 39 használható alakot dolgoztunk fel digitálisan. Matlab környezetben írt kód segítségével a héjak középvonalát jellemző adatsorra legjobban illeszkedő logaritmikus spirálokat határoztunk meg.

A mért és az illesztett spirálok közötti eltérések nem tűnnek jelentősnek, azonban mindegyik mintánál észrevehető egyfajta „hullámzás”, ami arra utal, hogy az eltérés nem véletlenszerű. Ez a megfigyelés további kérdéseket vont maga után. Hipotéziseket állítottunk fel a szisztematikus eltérés magyarázatára. Sem a merevtestszerű mozgások, sem a deformálódás nem adott kielégítő magyarázatot a jelenségre, így arra jutottunk, hogy az a héj növekedési folyamatával függhet össze. Egy, a meghatározó paraméter időfejlődését késleltetett differenciálegyenlettel megadó matematikai modell az illesztéseknél tapasztaltakhoz hasonló eredményekre vezet, azaz az ideális alakhoz képest a modell szerinti alak hosszabb szakaszon kívül, illetve belül helyezkedik el. A modell geometriai szempontból a megfigyelt eltéréshez közeli eredményt ad, további vizsgálata paleontológus szakértők bevonását igényli.

A természetben megtalálható logaritmikus spirálok az említetteken kívül is számos kérdést felvetnek. Az ammoniteszek házához nagyon hasonló szárazföldi csigák háza is felülnézetben logaritmikus spirálhoz közelítenek. Növekedésük viszont nem síkban, hanem térben történik. Miért így alakult ki ez a folyamat egy másik fajnál? Van-e ennek köze ahhoz, hogy a csigák jellemzően szárazföldi életet élnek? Vajon a csigaházak felülnézetére illesztett logaritmikus spirálokkal is hasonlót tapasztalhatunk, mint az ammonitesz házak esetében?

A további spirált leíró jelenségek szabályosságának vizsgálata is érdekes feladat. A csigák léptékénél jóval nagyobb ciklonok is egy térbeli spirált rajzolnak ki, amelyeknek felülnézetére szintén logaritmikus spirált lehet illeszteni. Ezeknél az illesztéseknél is ugyanazokat az eredményeket láthatjuk? Hogy lehetséges, hogy látszólag ennyire különböző folyamatok ugyanazt a formát eredményezik?

6. Hivatkozások

6.1. Irodalomjegyzék

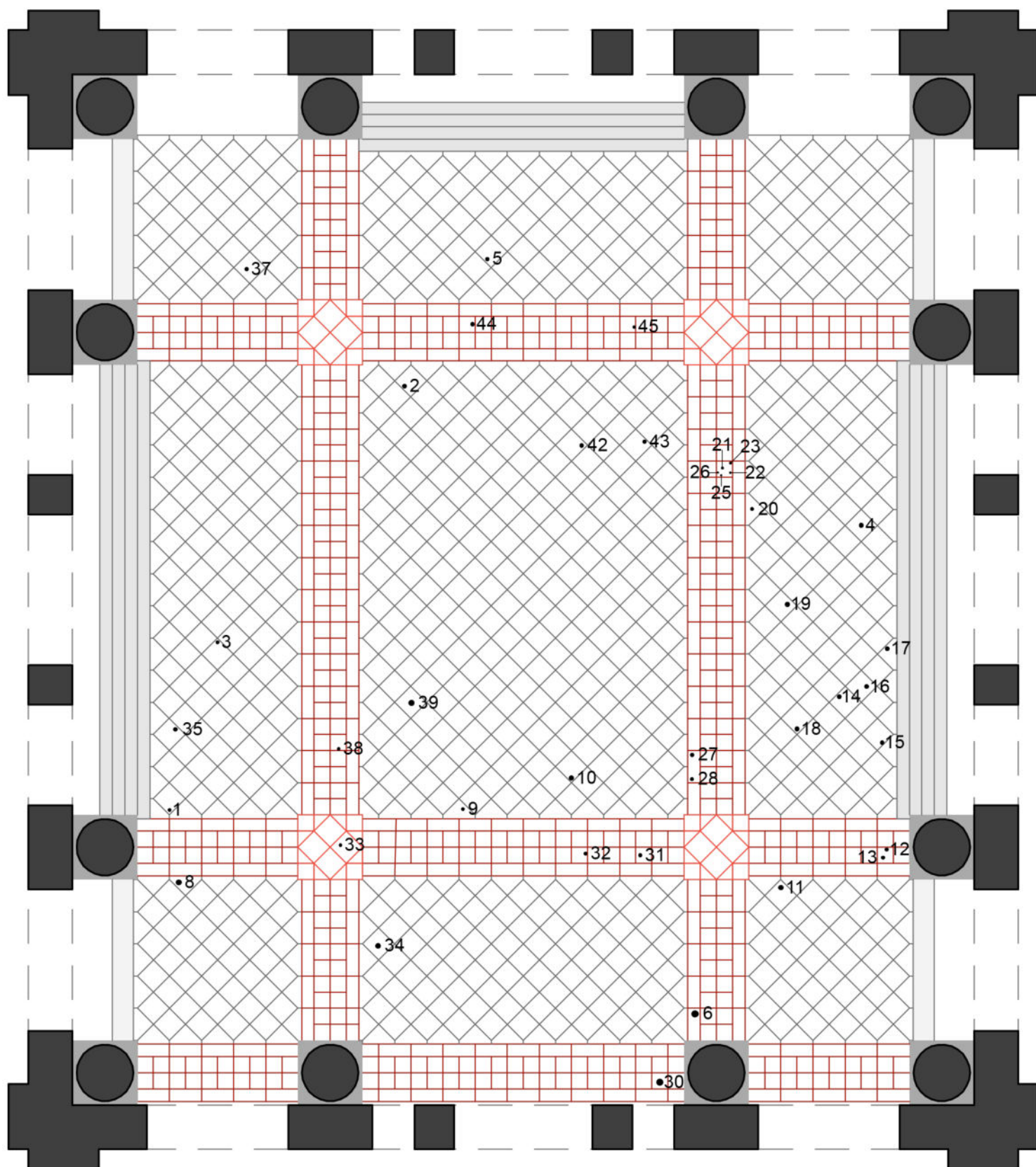
- [1] Logarithmic Spiral -- from Wolfram MathWorld) (2024.10.16)
- [2] D. W. Thompson: On Growth and Form. (Dover, 1932)
- [3] N. Bourbaki: The most mysterious shape of all. A spiral primer. Quantum/Kaleidoscope, 5(4), 1995.
- [4] <https://mathcurve.com/courbes2d.gb/logarithmic/logarithmic.shtml> (2024.10.16.)
- [5] Domokos G., A. Goriely, Horváth Á., Regős K.: Soft cells and the geometry of seashells. PNAS NEXUS 2752-6542 3 (9) Paper: page311, 10 p. 2024
- [6] <https://www.bgs.ac.uk/discovering-geology/fossils-and-geological-time/ammonites/> (2024.10.16)
- [7] https://paleotop.blog.hu/2018/03/27/az_ammonoideak_titkos_elete (2024.10.16)
- [8] <https://www.nationalgeographic.com/animals/facts/ammonites> (2024.10.16)
- [9] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Ammoniteszek> (2024.10.16)
- [10] <https://www.arcanum.com/hu/online-kiadvanyok/pannon-pannon-enciklopedia-1/magyarorszag-foldje-1D58/osmaradvanyok-2503/kozepso-es-keso-mezozoikumi-osmaradvanyok-szente-istvan-2543/jura-osmaradvanyok-a-dunantuli-kozephegységben-2546/> (2024.10.16)
- [11] Back Márta: Kőfelületek csúszásvizsgálata a BME K épület aulájának példáján bemutatva, konz.: Dr. Török Ákos, BME Építőmérnöki Kar TDK dolgozata, 2013
- [12] M. Hansell: Animal Architecture, Oxford University Press, 2005.
- [13] C. Klug, D. Korn, K. De Baets, I. Kruta, & R. H. Mapes: Ammonoid Paleobiology: From Anatomy to Ecology (Springer, 2015)

6.2. Mellékletek

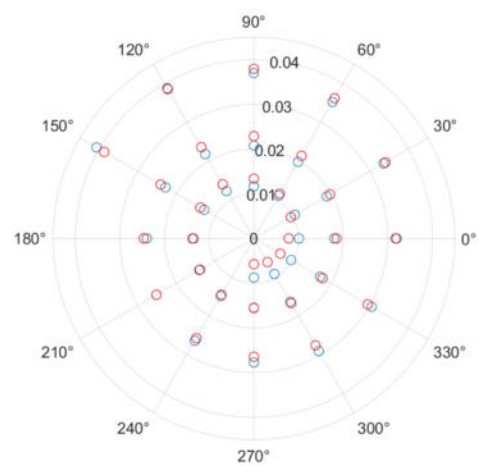
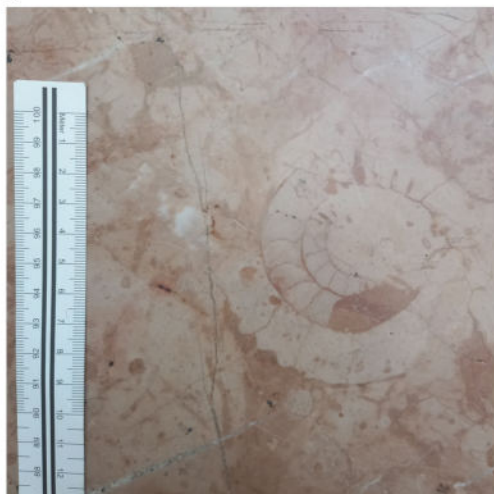
- 1. melléklet – Ábragyűjtemény az aula ammoniteszeiről
- 2. melléklet – Táblázatok az illesztési eredményekről
- 3. melléklet – A Matlab környezetben írt kódok

1. melléklet - Ábragyűjtemény az aula ammoniteszeiről

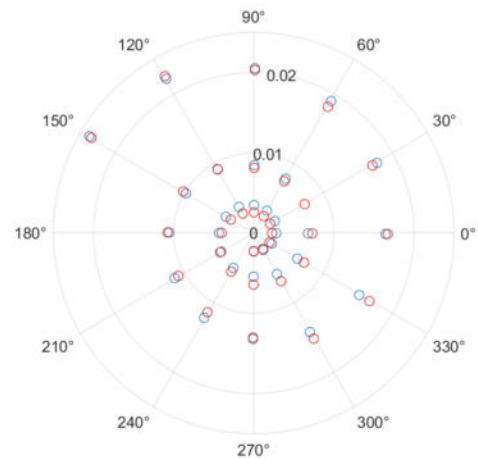
Az aula alaprajza



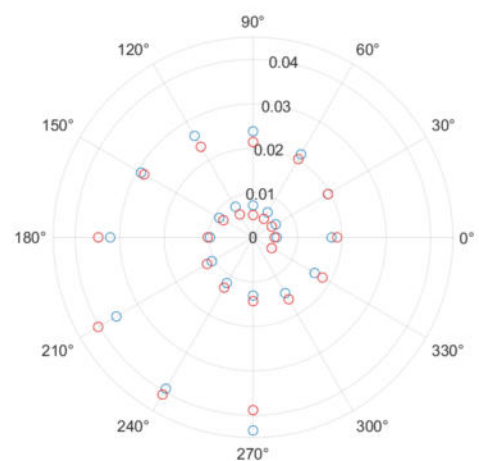
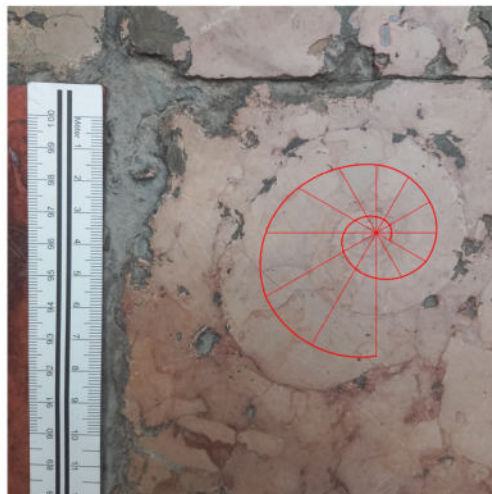
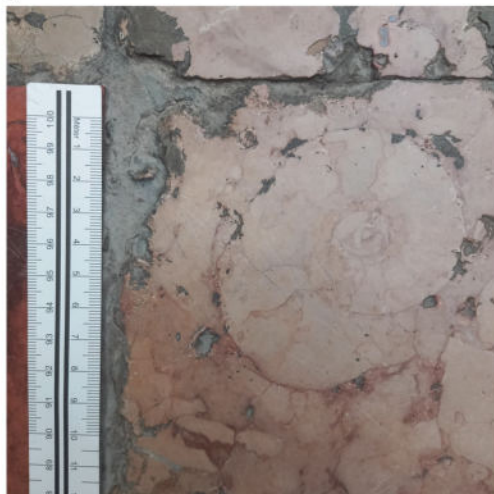
1



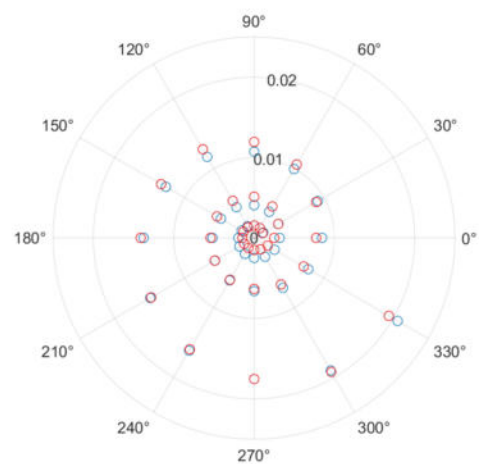
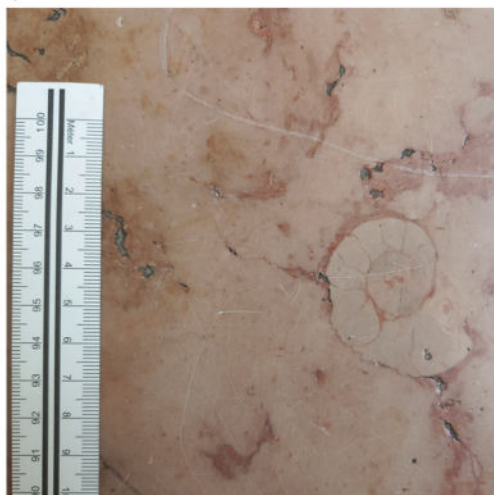
2



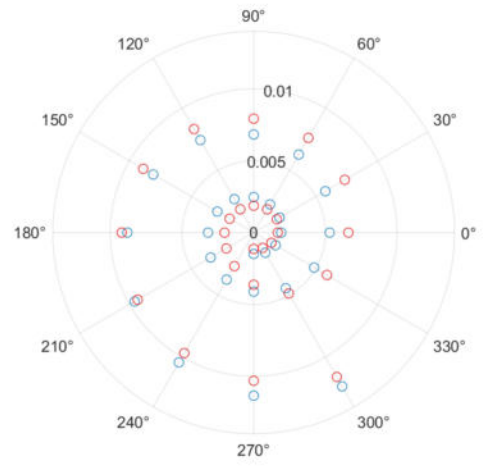
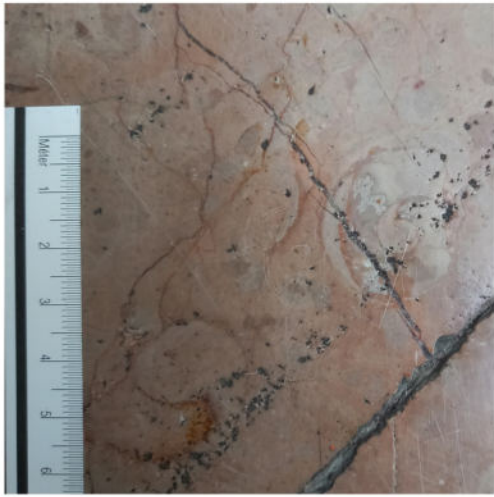
3



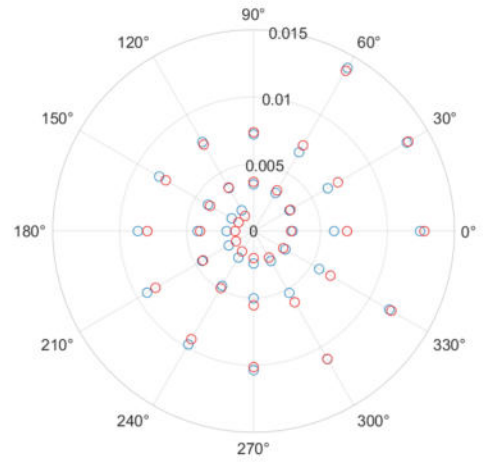
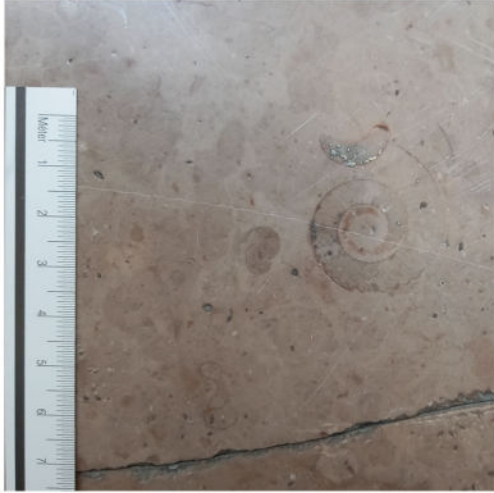
4



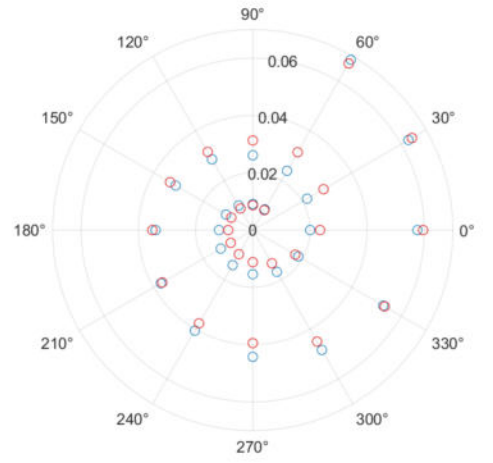
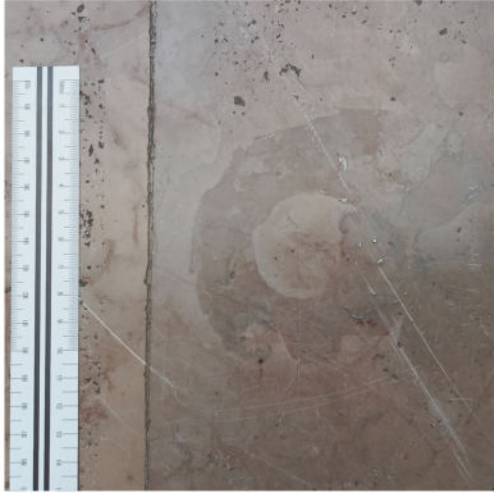
5



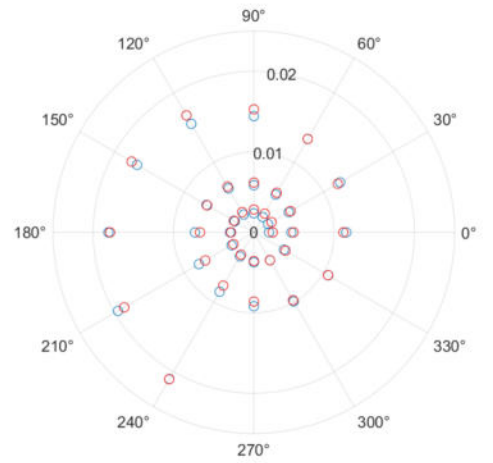
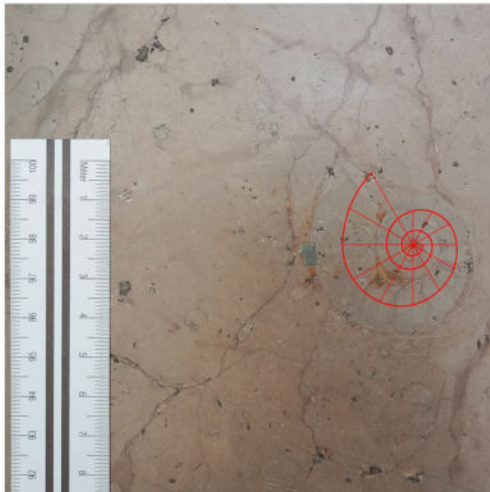
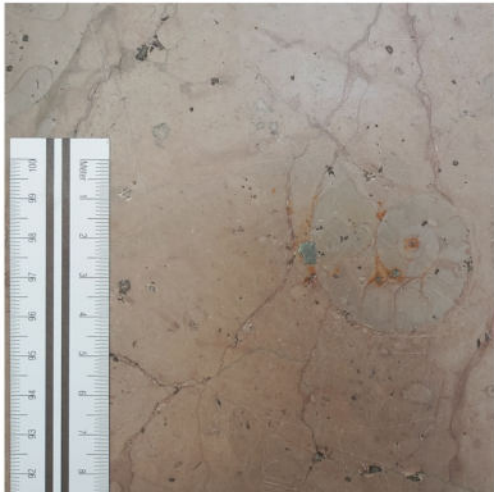
6



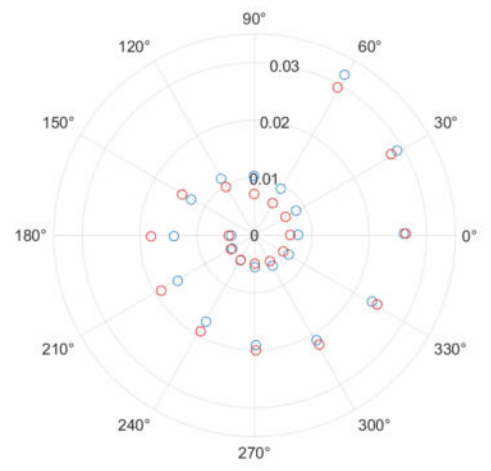
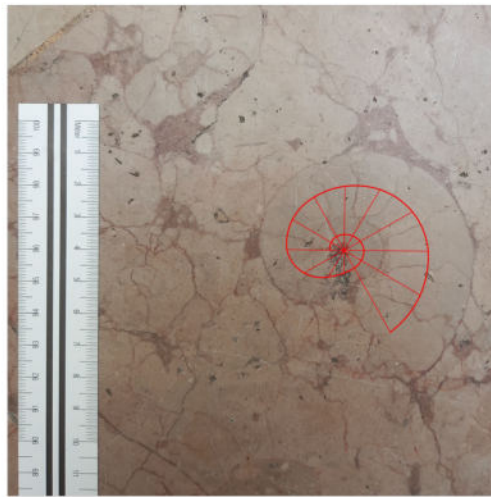
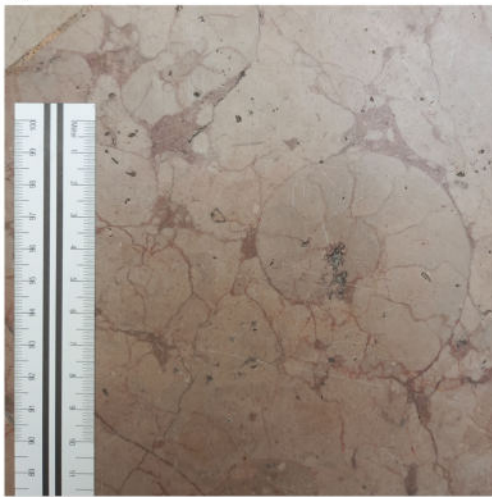
8



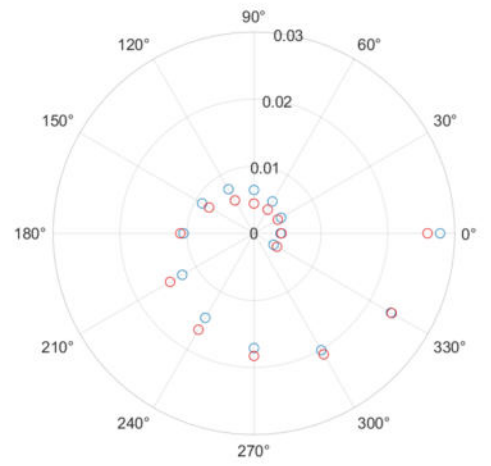
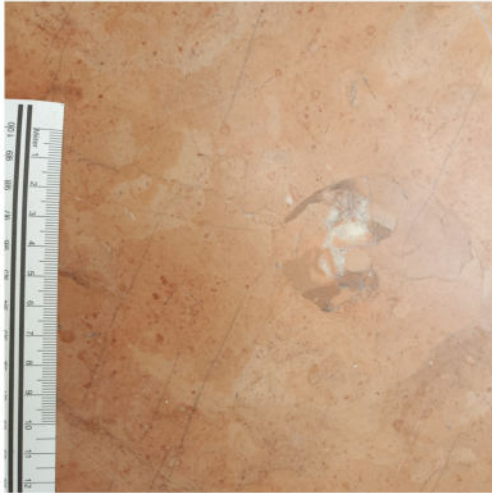
9



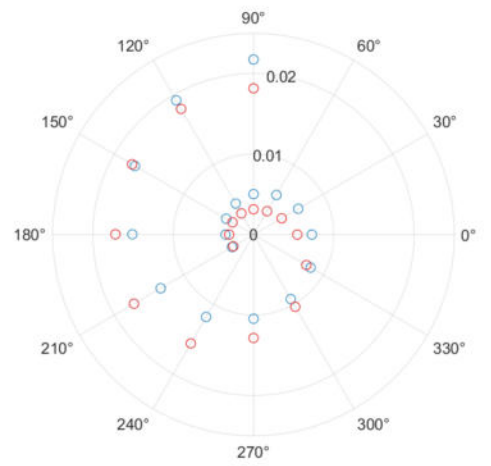
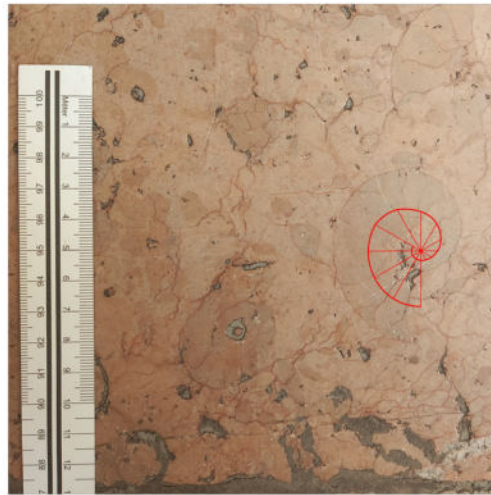
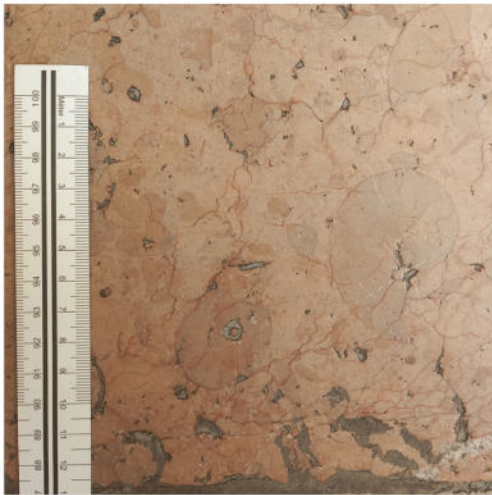
10



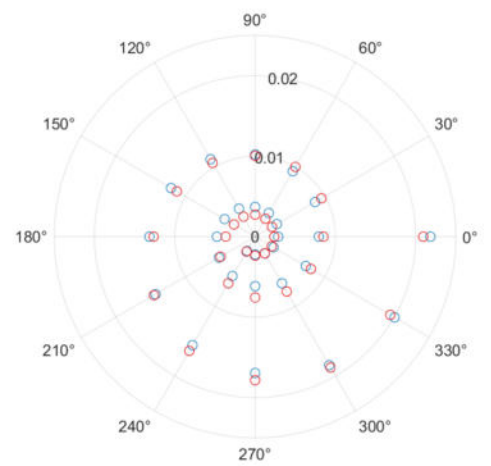
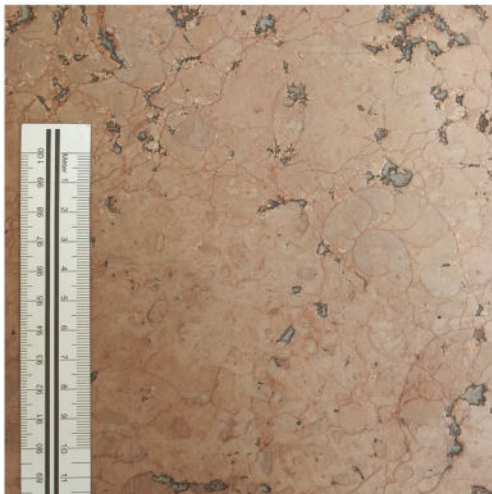
11



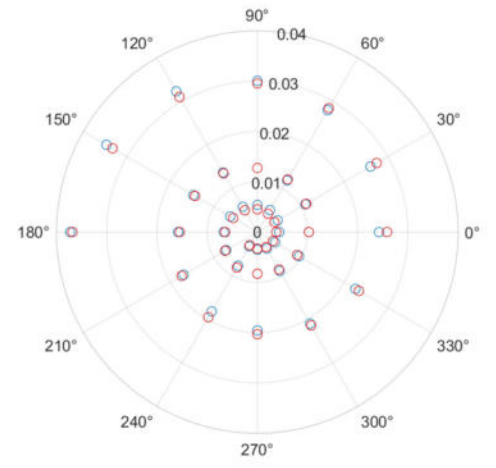
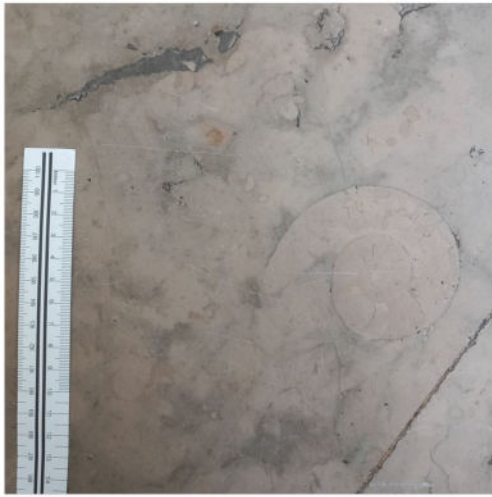
12



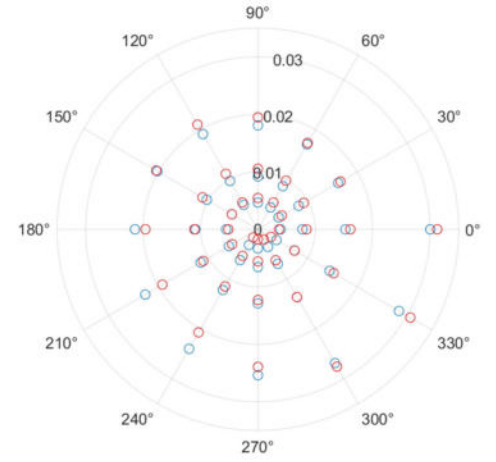
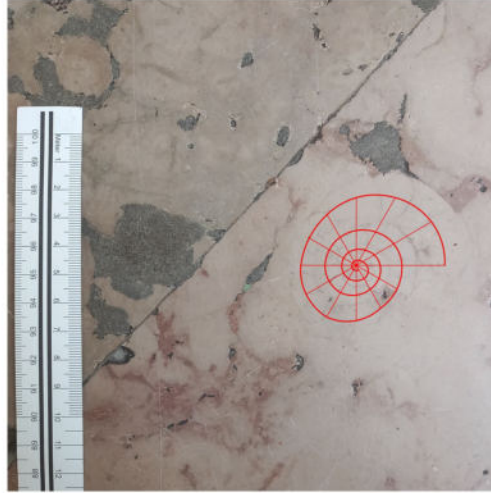
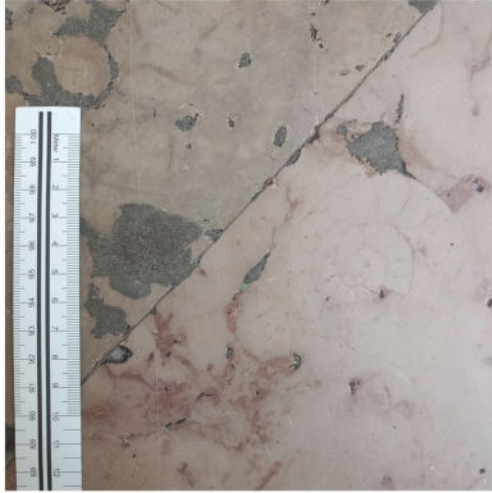
13



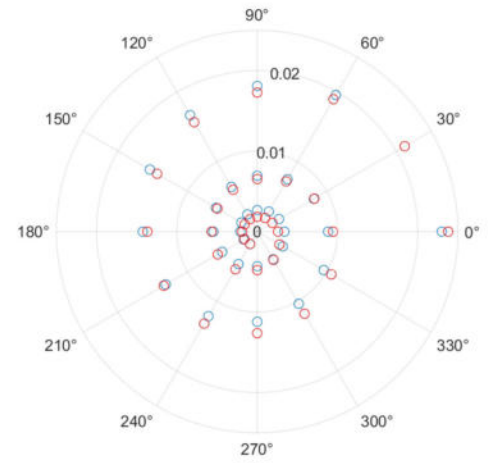
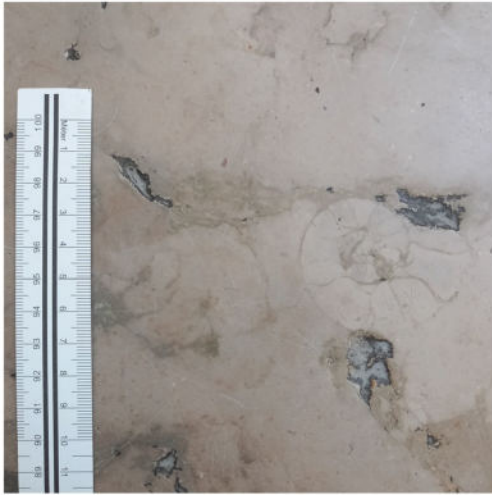
14



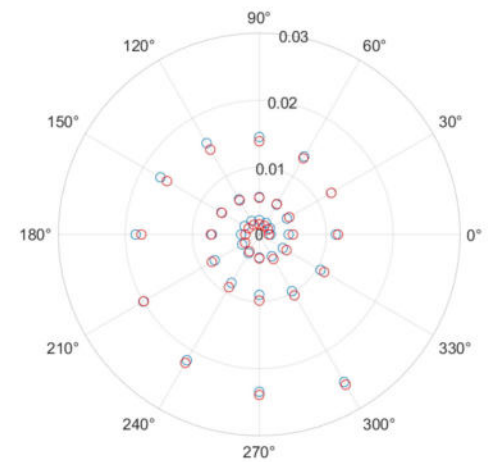
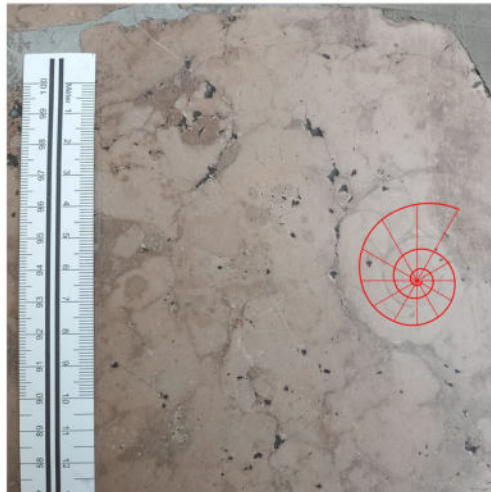
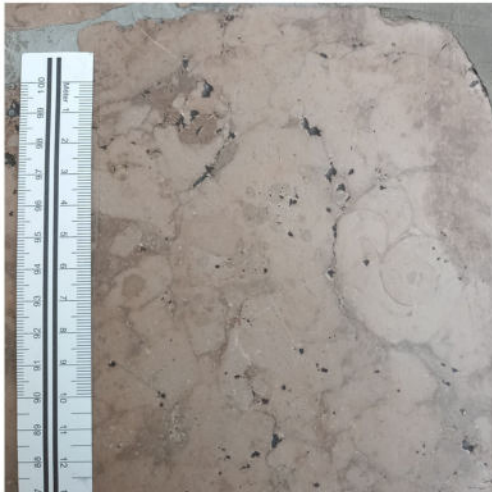
15



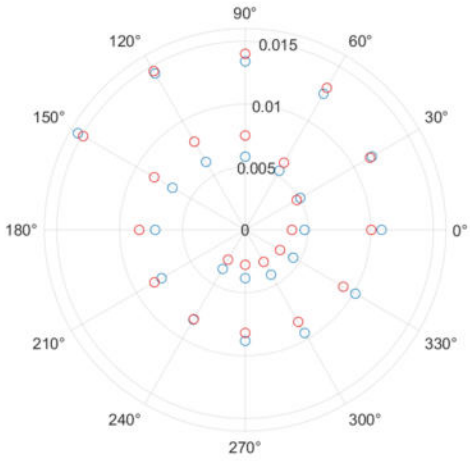
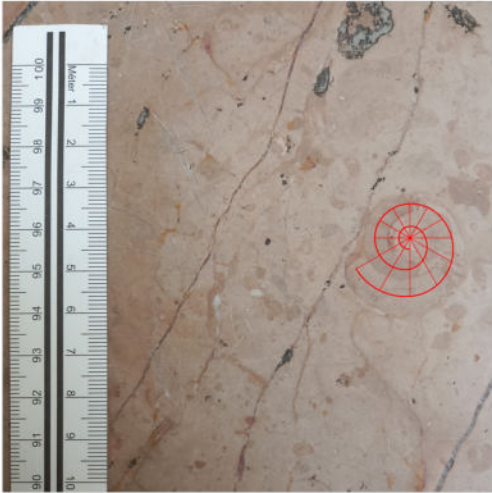
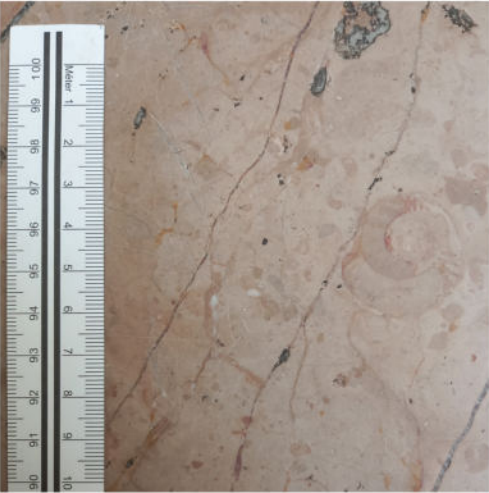
16



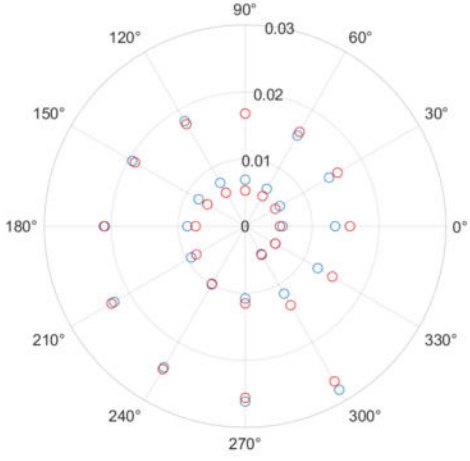
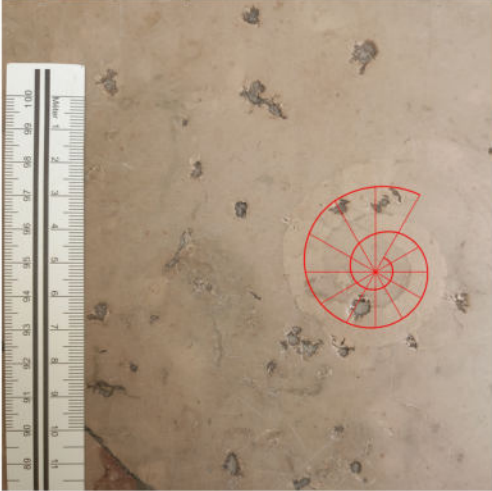
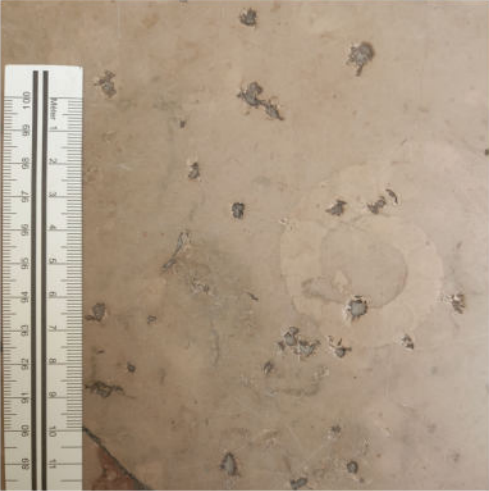
17



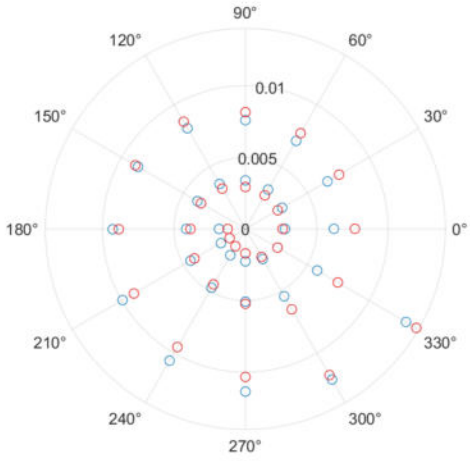
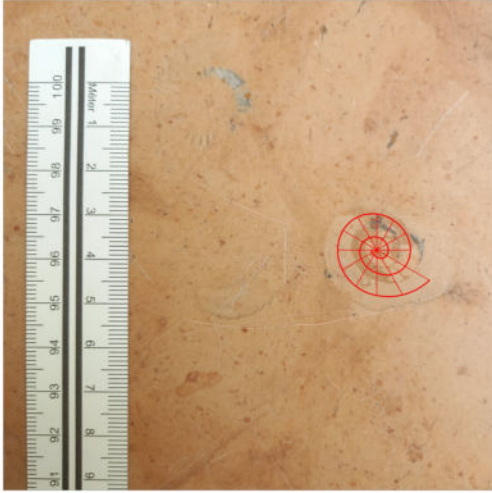
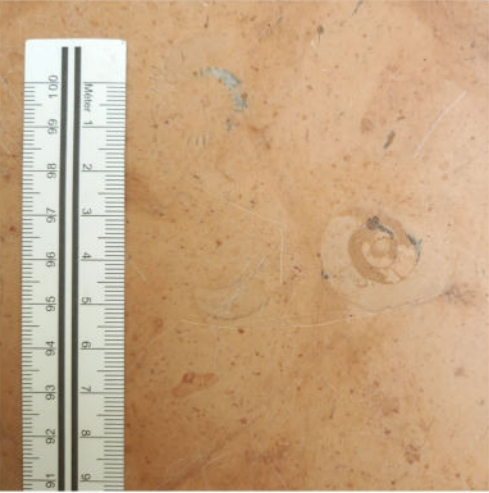
18



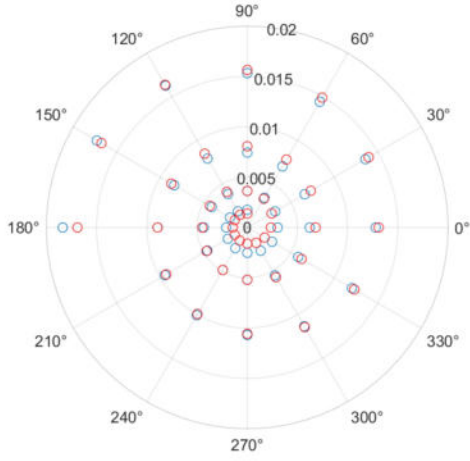
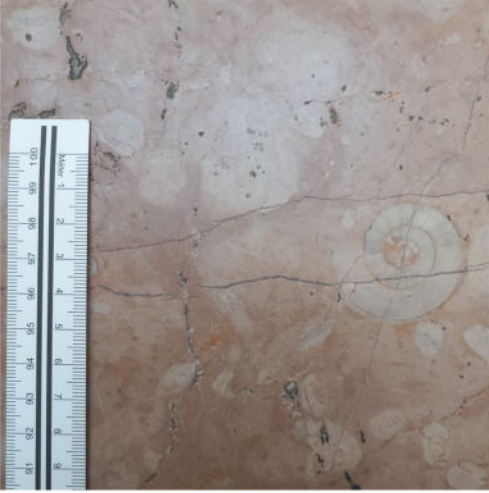
19



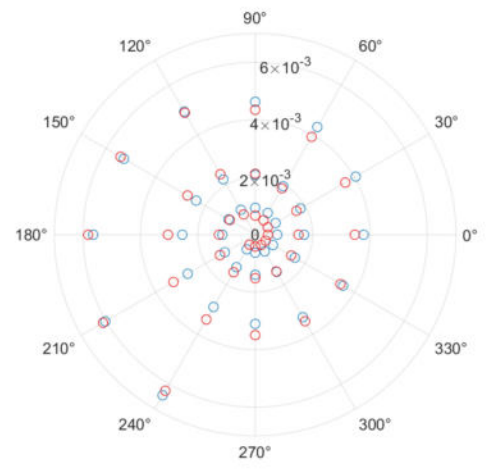
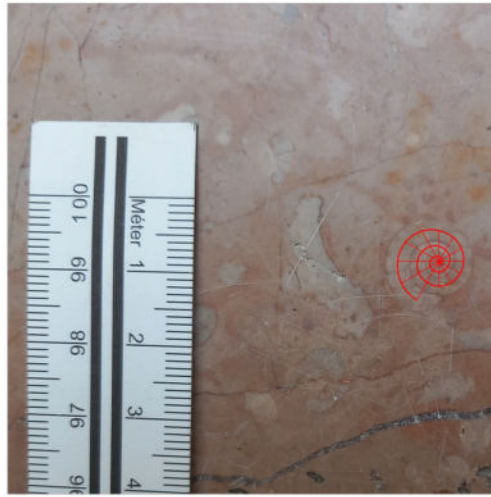
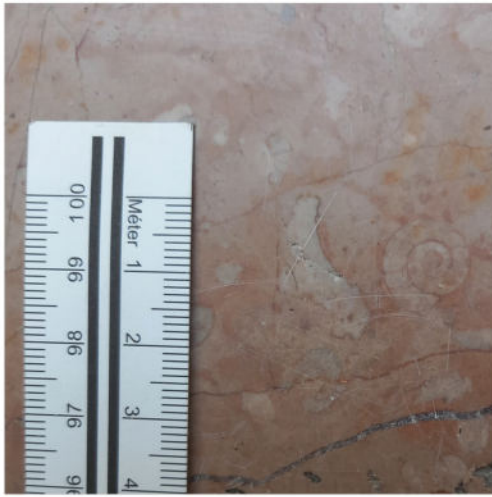
20



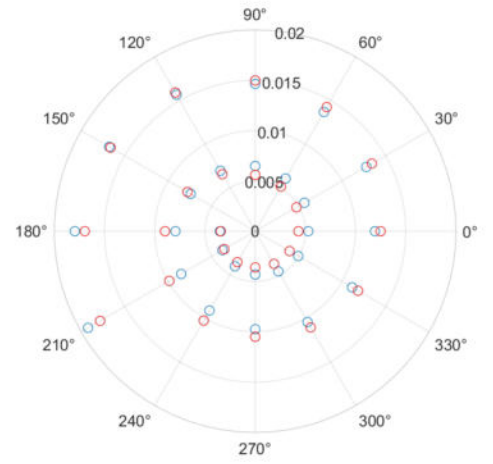
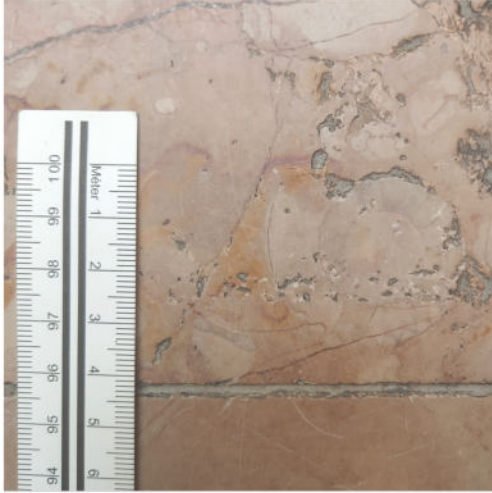
21



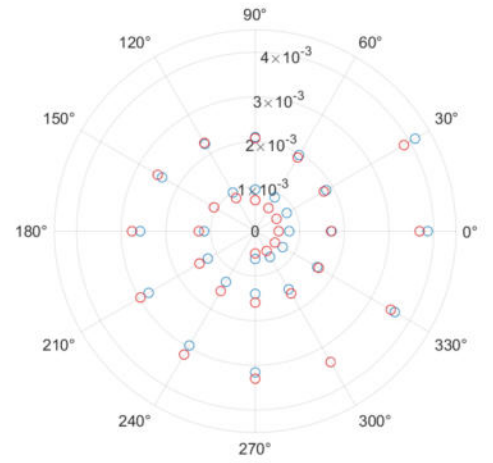
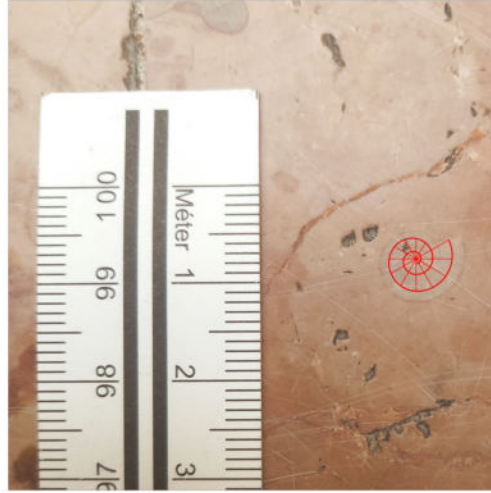
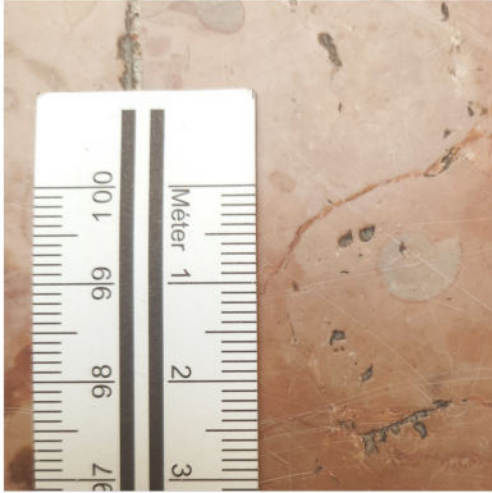
22



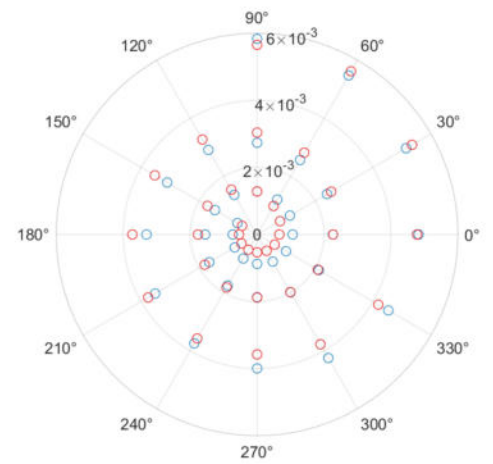
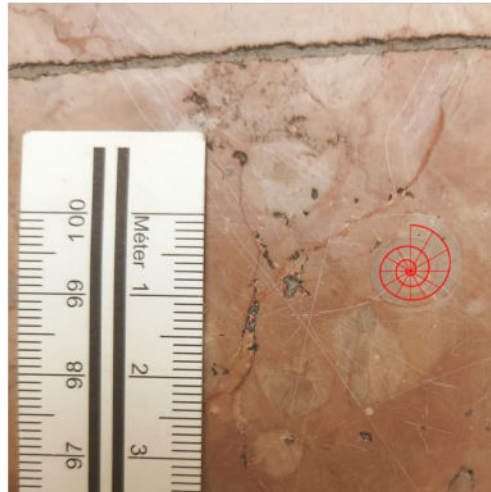
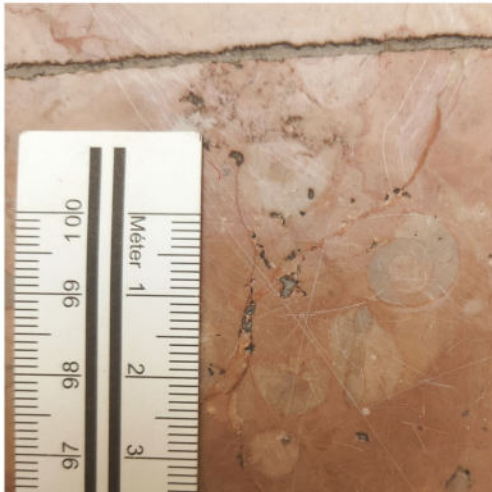
23



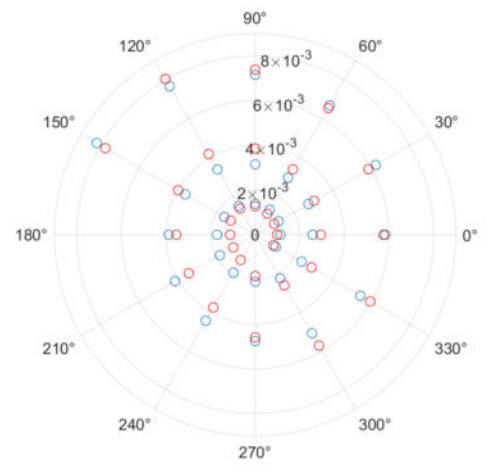
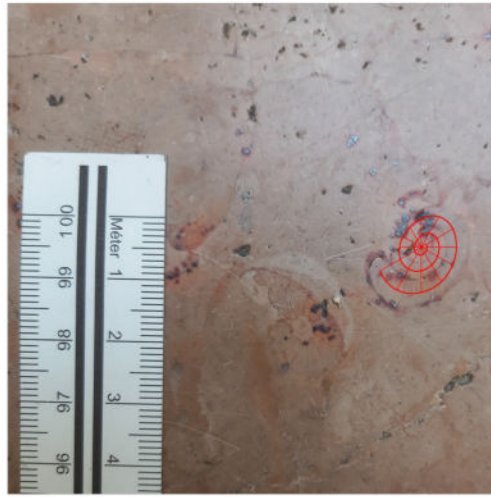
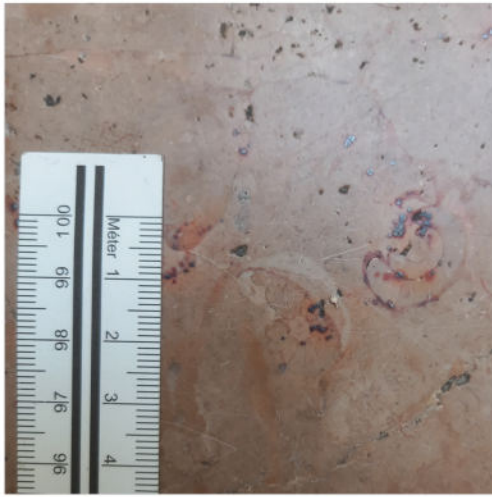
25



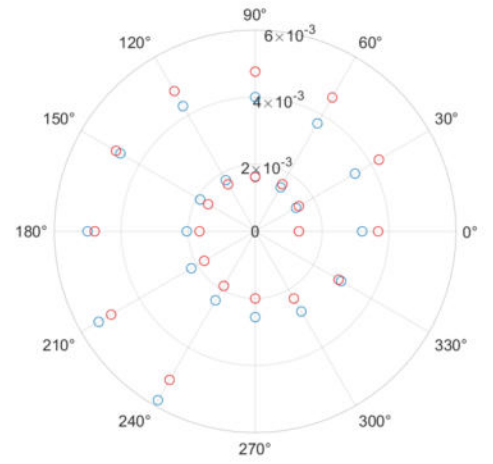
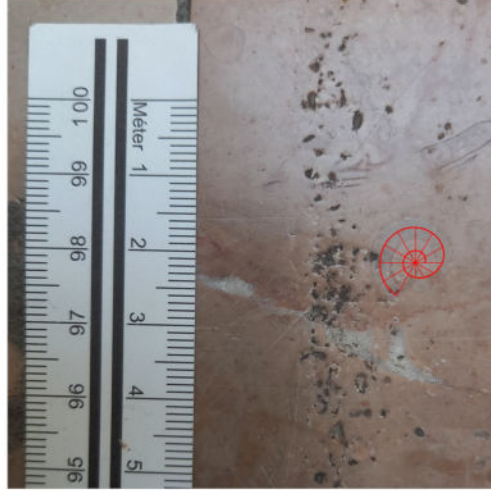
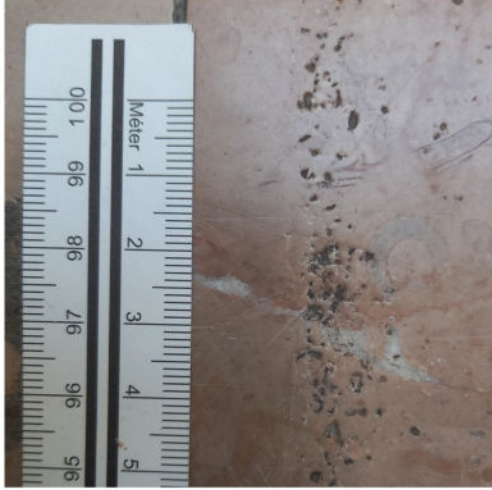
26



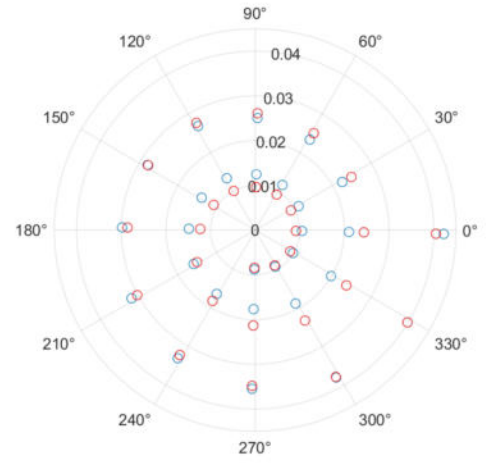
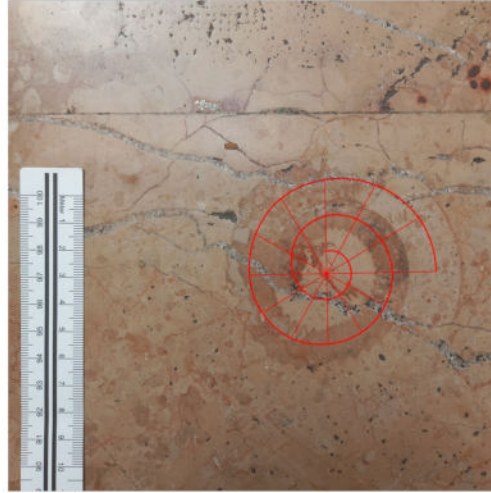
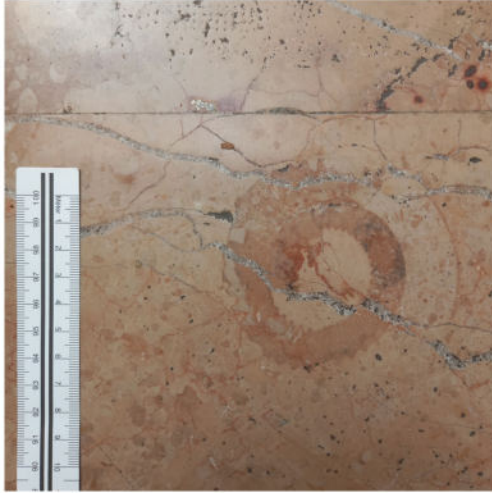
27



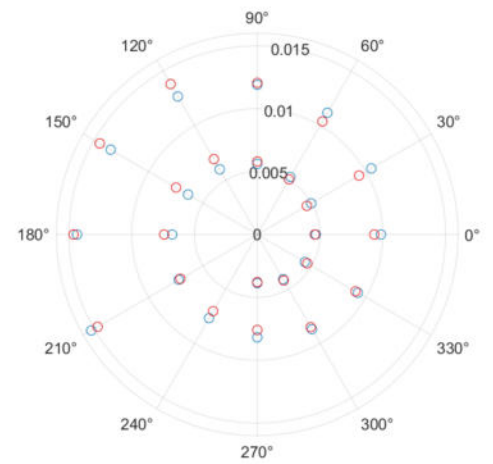
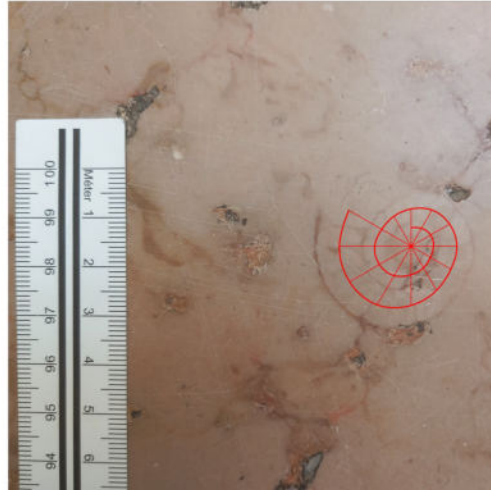
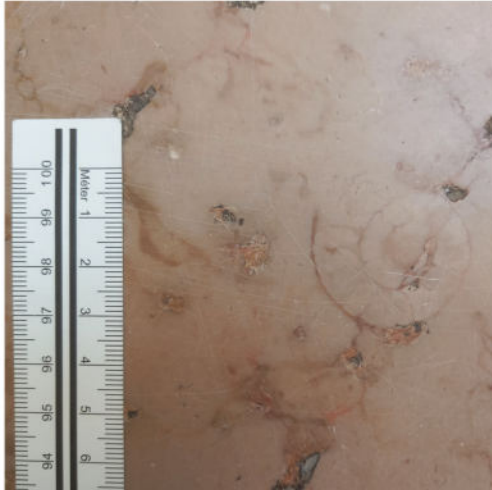
28



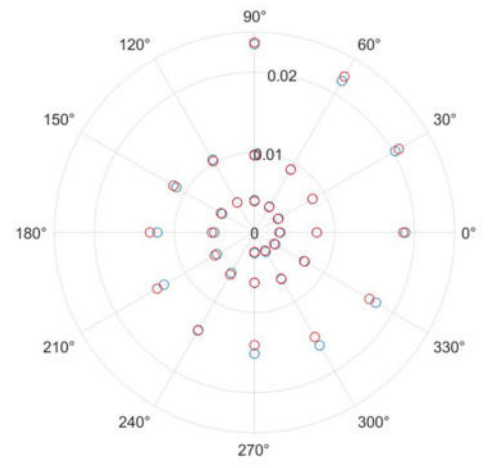
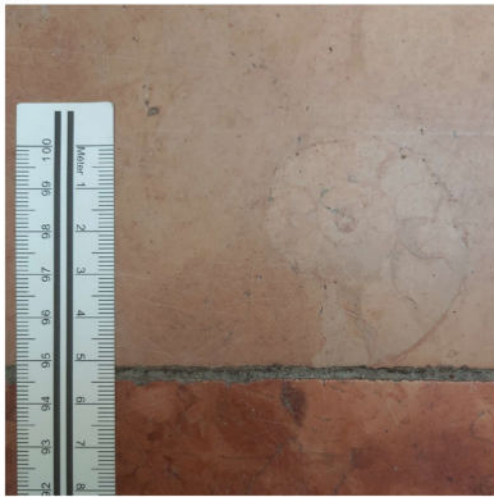
30



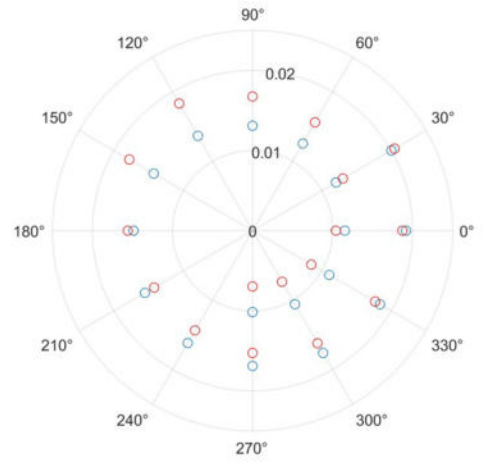
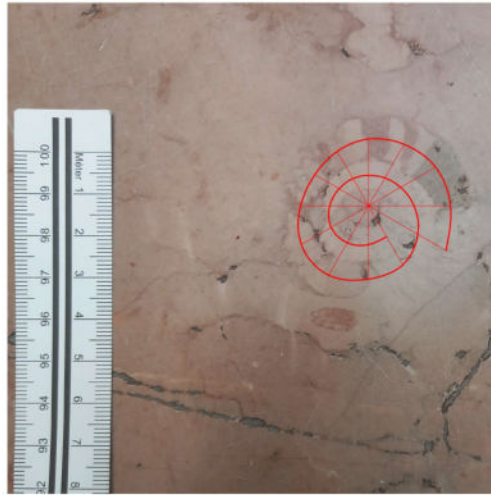
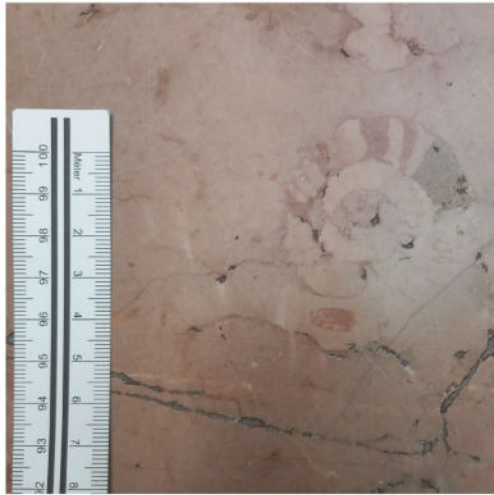
31



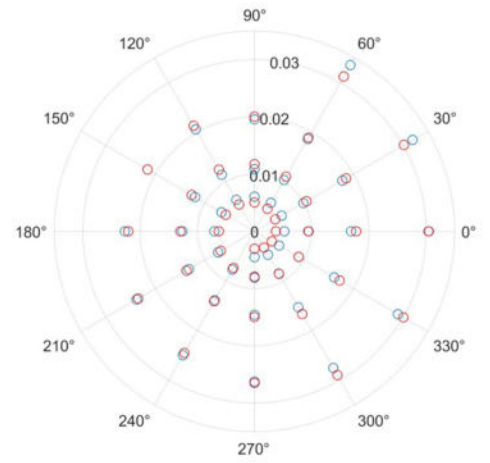
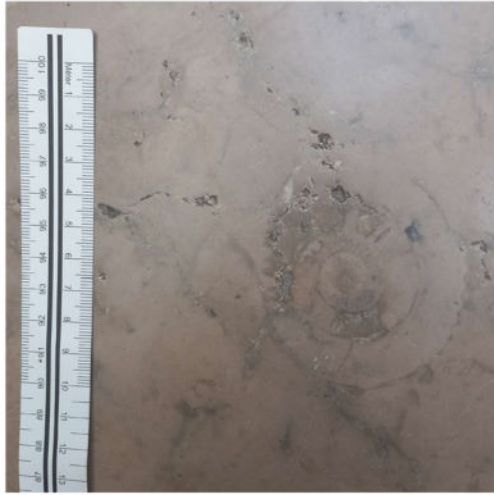
32



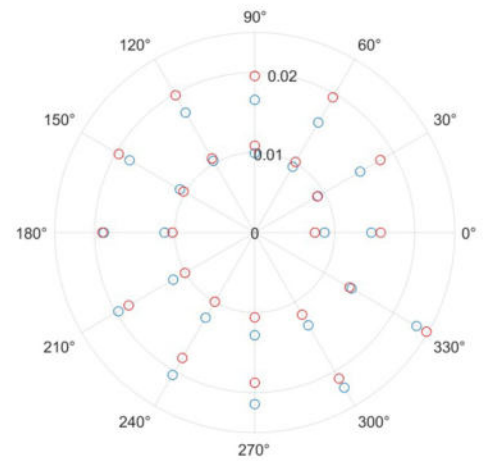
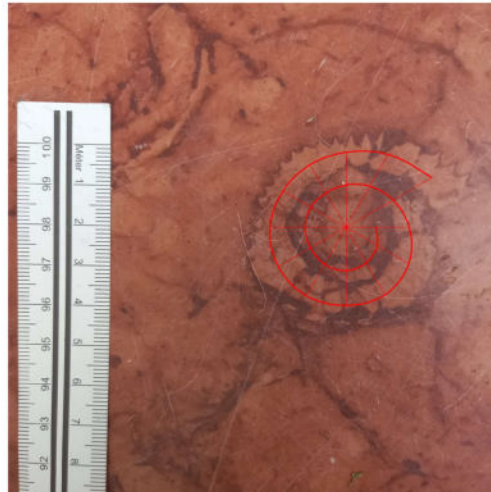
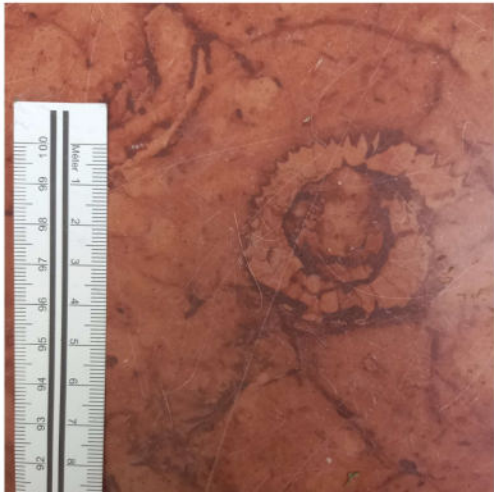
33



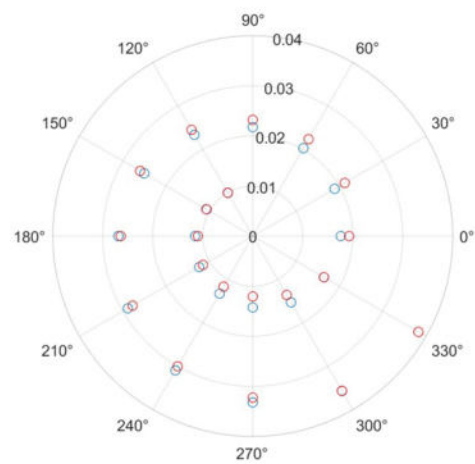
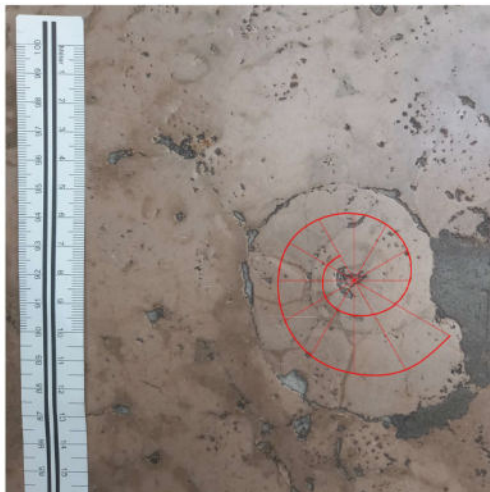
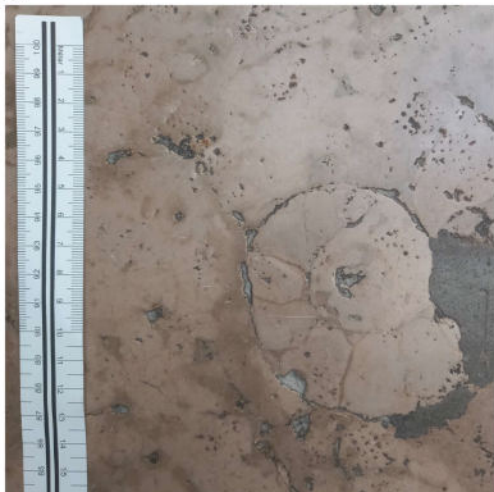
34



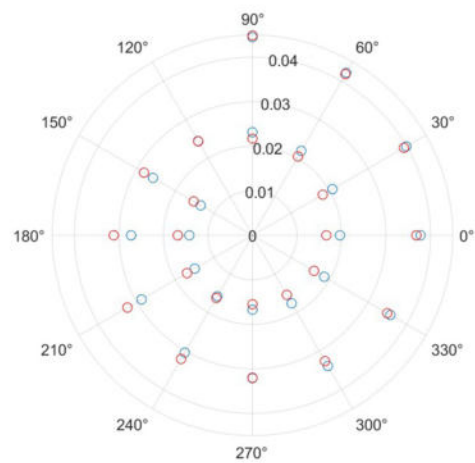
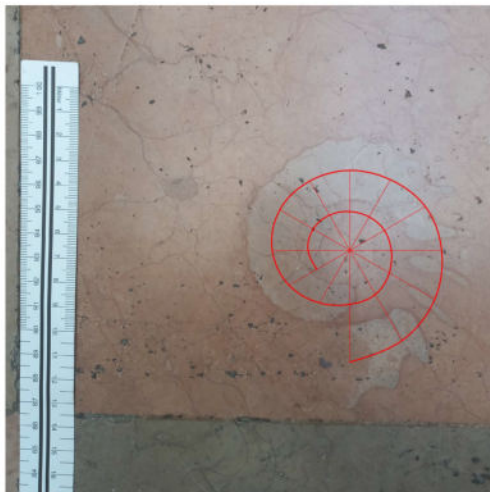
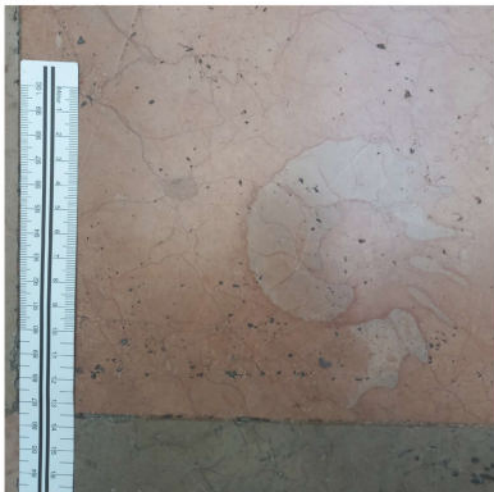
35



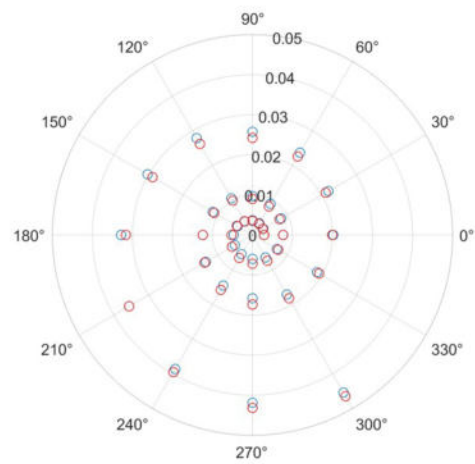
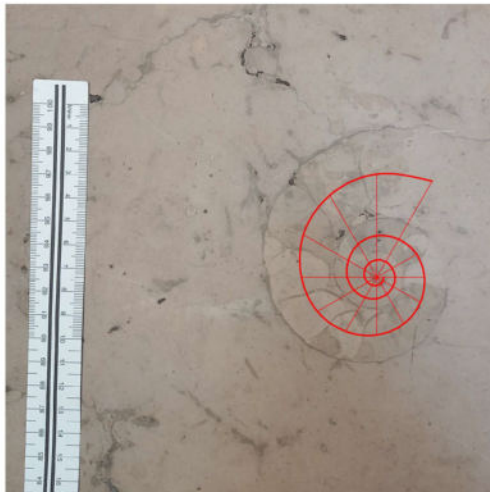
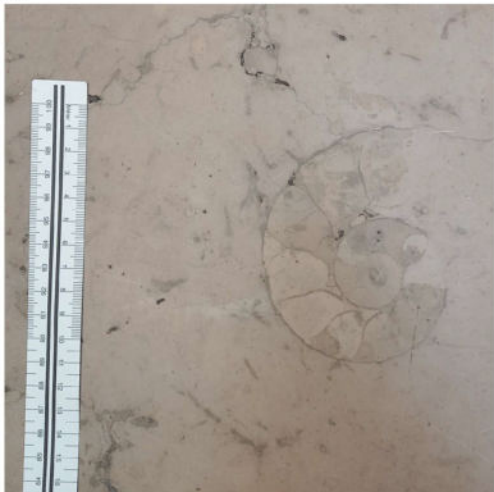
37



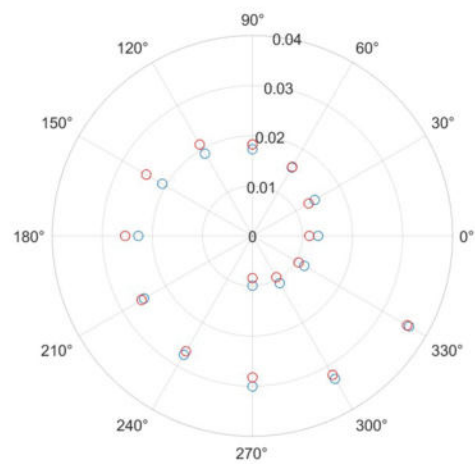
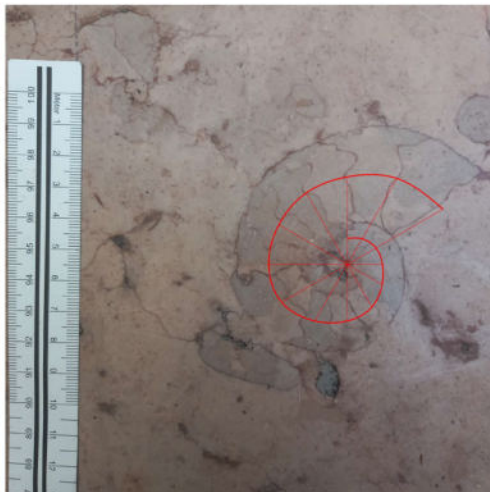
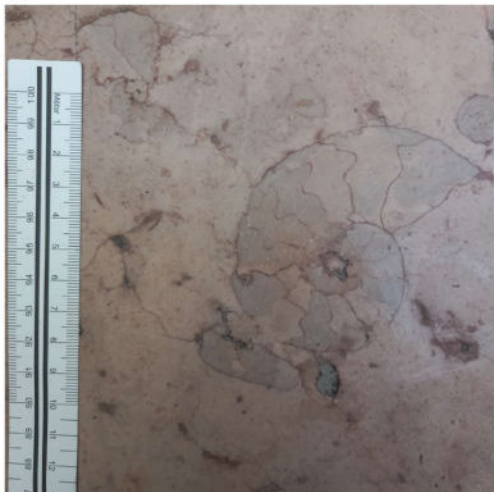
38



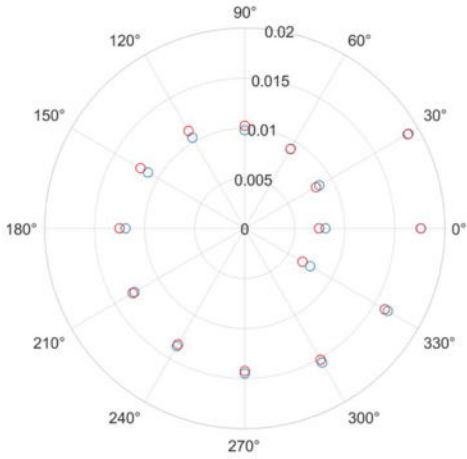
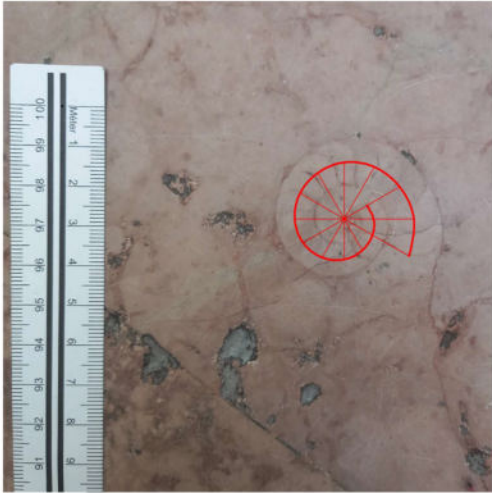
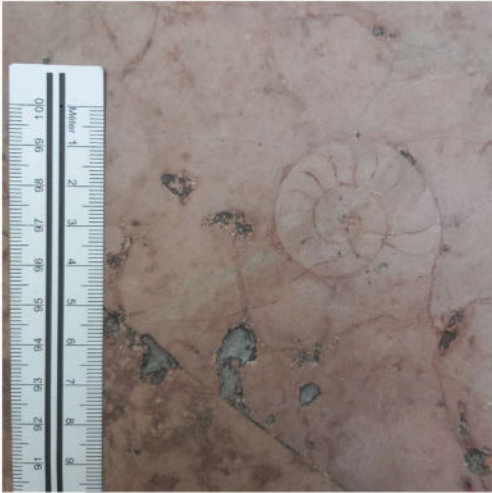
39



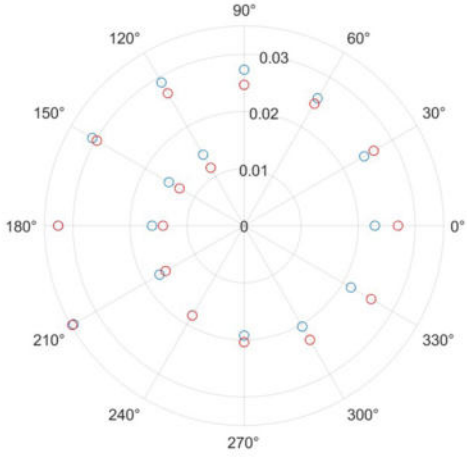
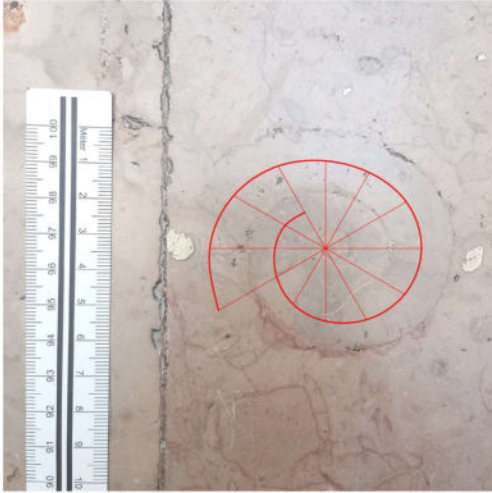
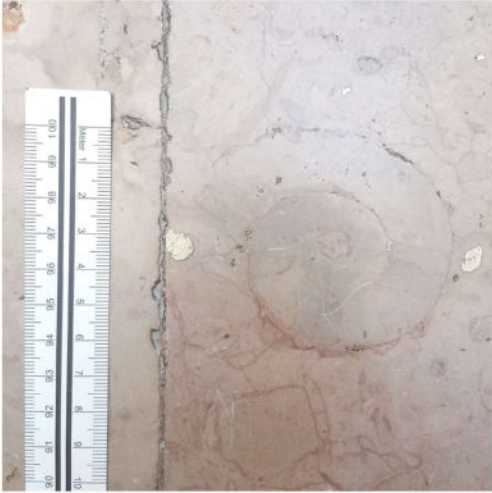
42



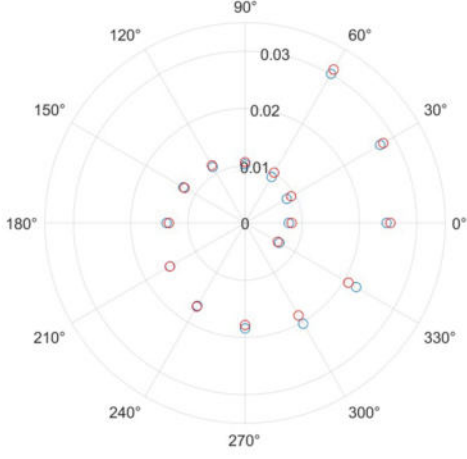
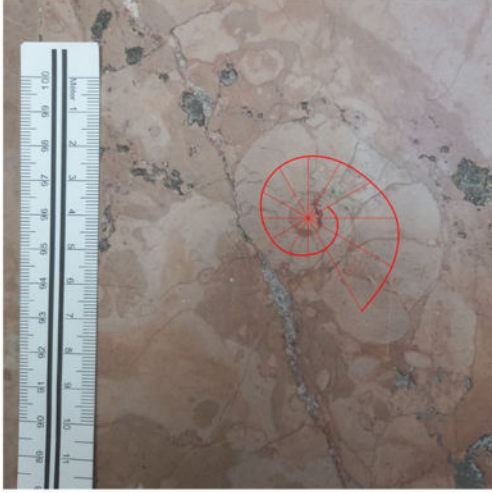
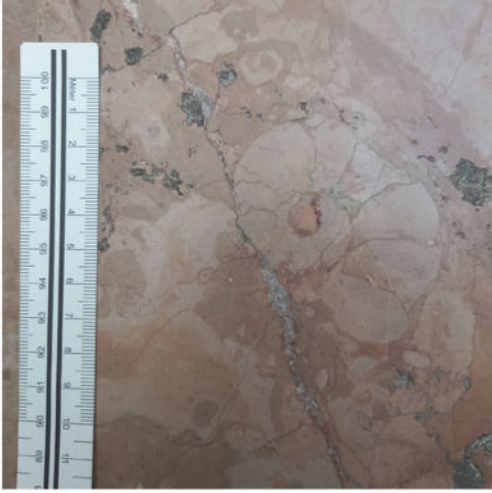
43



44



45



2. melléklet - Táblázatok az illesztési eredményekről

1. táblázat - egyszerű illesztés (mode-1)

spirál	a	b	R1	pontok száma	R1/pontok száma
1	0,0057	0,0918	6,50E-05	33	1,97E-06
2	0,0028	0,1412	1,33E-05	33	4,04E-07
3	0,0054	0,1893	9,44E-05	23	4,10E-06
4	0,0012	0,1554	1,48E-05	35	4,22E-07
5	0,0007	0,1618	1,93E-05	26	7,42E-07
6	0,0014	0,1157	8,00E-06	35	2,29E-07
8	0,007	0,1679	2,89E-04	25	1,16E-05
9	0,0019	0,1439	7,90E-06	33	2,39E-07
10	0,0022	0,1968	7,43E-05	21	3,54E-06
11	0,0006	0,3098	2,62E-05	14	1,87E-06
12	0,0029	0,0212	7,62E-05	17	4,49E-06
13	0,001	0,1614	1,75E-05	29	6,05E-07
14	0,0044	0,1367	1,68E-05	35	4,81E-07
15	0,002	0,1078	6,46E-05	41	1,58E-06
16	0,0017	0,0139	1,67E-05	33	5,05E-07
17	0,0006	0,1523	1,06E-05	35	3,04E-07
18	0,0021	0,1326	2,18E-05	22	9,91E-07
19	0,0023	0,1409	3,39E-05	25	1,36E-06
20	0,0028	0,1282	1,49E-05	30	4,96E-07
21	0,0015	0,115	1,11E-05	40	2,78E-07
22	0,0008	0,1271	2,62E-06	37	7,09E-08
23	0,0023	0,1297	1,60E-05	26	6,17E-07
25	0,0008	0,1293	8,30E-07	29	2,86E-08
26	0,0005	0,1206	2,48E-06	35	7,08E-08
27	0,0005	0,1303	5,98E-06	31	1,93E-07
28	0,0013	0,1426	4,51E-06	21	2,15E-07
30	0,0052	0,1109	1,30E-04	28	4,64E-06
31	0,0022	0,1194	8,61E-06	23	3,74E-07
32	0,0013	0,1405	6,66E-06	31	2,15E-07
33	0,0069	0,0809	9,74E-05	17	5,73E-06
34	0,0052	0,0935	3,69E-05	42	8,78E-07
35	0,0087	0,0818	7,94E-05	24	3,31E-06
37	0,0075	0,1347	3,17E-05	20	1,59E-06
38	0,0102	0,104	8,80E-05	23	3,83E-06
39	0,0029	0,1552	2,65E-05	35	7,57E-07
42	0,0043	0,176	4,24E-05	15	2,82E-06
43	0,0037	0,1244	3,61E-06	15	2,41E-07
44	0,0114	0,1117	7,63E-05	16	4,77E-06
45	0,0024	0,1872	9,63E-06	16	6,02E-07

2. táblázat - összetett illesztés az első hipotézis szerint (mode-2)

spirál	a	b	alpha	beta	gamma	s	R2	R1-R2
1	0,0057	0,0918	0	0	0,0003	1,0062	6,49E-05	8,00E-08
2	0,0028	0,1413	0	0	-0,0004	0,9836	1,32E-05	1,50E-07
3	0,0049	0,1938	0	0	0,0046	0,901	5,18E-05	4,26E-05
4	0,0012	0,1553	0	0	-0,0001	1,0371	1,42E-05	5,25E-07
5	0,0006	0,1642	0	0	0,0002	0,9153	1,67E-05	2,63E-06
6	0,0014	0,1156	0	0	0	0,9754	7,85E-06	1,51E-07
8	0,0067	0,1663	0	0	-0,0049	0,9024	2,44E-04	4,50E-05
9	0,0019	0,1444	0	0	-0,0008	1,0462	7,00E-06	8,93E-07
10	0,0021	0,1957	0	0	0,0027	0,9039	6,16E-05	1,27E-05
11	0,0006	0,3121	0	0	0,0005	1,0254	2,59E-05	2,85E-07
12	0,0016	0,2356	0	0	-0,0032	0,9048	6,67E-05	9,52E-06
13	0,0011	0,1624	0	0	0,0009	1,0535	1,62E-05	1,34E-06
14	0,0043	0,1364	0	0	0,0012	0,9781	1,62E-05	6,94E-07
15	0,002	0,1074	0	0	0,0025	0,9659	6,32E-05	1,40E-06
16	0,0013	0,152	0	0	0	0,9779	1,63E-05	3,67E-07
17	0,0017	0,1516	0	0	0	1,0189	1,05E-05	1,07E-07
18	0,0021	0,1326	0	0	0	0,9999	2,18E-05	0,00E+00
19	0,0021	0,1432	0	0	-0,0004	0,9279	2,95E-05	4,45E-06
20	0,0027	0,1288	0	0	-0,0009	0,9268	1,32E-05	1,65E-06
21	0,0015	0,1151	0	0	0,0001	1,0233	1,09E-05	2,38E-07
22	0,0008	0,1263	0	0	0	0,9909	2,59E-06	3,13E-08
23	0,0023	0,1299	0	0	0	1,0084	1,60E-05	2,70E-08
25	0,0008	0,1294	0	0	0	1,0072	8,27E-07	2,91E-09
26	0,0005	0,1222	0	0	0	0,9559	2,23E-06	2,49E-07
27	0,0005	0,1312	0	0	-0,0002	1,023	5,84E-06	1,39E-07
28	0,0013	0,1424	0	0	0	0,9877	4,50E-06	1,62E-08
30	0,0053	0,111	0	0	-0,0012	1,01	1,30E-04	2,00E-07
31	0,0022	0,1193	0	0	0,0001	0,9962	8,61E-06	4,50E-09
32	0,0013	0,1411	0	0	-0,0007	0,9608	5,70E-06	9,58E-07
33	0,0069	0,0787	0	0	0,0006	0,942	9,55E-05	1,90E-06
34	0,0052	0,0935	0	0	0	1,001	3,69E-05	1,00E-09
35	0,0084	0,0822	0	0	0,0006	0,9345	7,57E-05	3,77E-06
37	0,0076	0,1344	0	0	0	1	3,17E-05	4,00E-08
38	0,0103	0,1035	0	0	0	0,9945	8,65E-05	1,54E-06
39	0,0029	0,1554	0	0	0	1,0264	2,49E-05	1,65E-06
42	0,004	0,177	0	0	0,002	0,918	3,50E-05	7,36E-06
43	0,0037	0,1242	0	0	0	0,9943	3,60E-06	9,80E-09
44	0,0132	0,0099	0	0	-0,0006	0,9048	6,07E-05	1,56E-05
45	0,0023	0,1867	0	0	-0,0016	0,9637	8,80E-06	8,25E-07

3. táblázat - összetett illesztés a második hipotézis szerint (mode-3)

spirál	a	b	a2	theta0	cf	R3	R1-R3	R2-R3
1	0,0055	0,0944	0,0002	-3,0718	0,5379	5,72E-05	7,74E-06	7,67E-06
2	0,0027	0,1449	0,0001	-2,4634	0,5272	1,29E-05	4,91E-07	3,41E-07
3	0,0059	0,1763	0,0005	2,8581	0,998	7,12E-05	2,32E-05	-1,94E-05
4	0,0011	0,1584	0,0001	-2,174	0,4181	1,28E-05	1,95E-06	1,43E-06
5	0,0004	0,1996	0,0001	-0,0218	0,7456	1,48E-06	1,78E-05	1,52E-05
6	0,0013	0,1214	0,0001	-2,459	0,535	4,66E-06	3,34E-06	3,19E-06
8	0,0064	0,1808	0,0008	-2,2915	0,7213	1,51E-04	1,38E-04	9,30E-05
9	0,0021	0,133	0,0002	0,0162	0,4037	5,96E-06	1,94E-06	1,04E-06
10	0,0017	0,2254	0,0003	0,078	0,9181	2,22E-05	5,21E-05	3,94E-05
11	0,0016	0,2014	0,0006	-2,9098	0,7169	5,26E-06	2,09E-05	2,06E-05
12	0,0027	0,022	0,0002	-0,0049	0,2456	7,11E-05	5,14E-06	-4,38E-06
13	0,0009	0,1718	0,0001	-2,4753	0,5792	1,43E-05	3,20E-06	1,86E-06
14	0,0042	0,1395	0,0002	-2,3998	0,4245	9,11E-06	7,74E-06	7,04E-06
15	0,0018	0,1133	0,0001	-1,6919	0,4527	5,44E-05	1,02E-05	8,83E-06
16	0,0017	0,014	0,0002	0,0506	0,9949	4,90E-06	1,18E-05	1,14E-05
17	0,0002	0,2352	0,0001	1,2994	0,1849	4,98E-06	5,65E-06	5,54E-06
18	0,0011	0,1956	0,0003	2,8504	0,4267	1,45E-05	7,31E-06	7,31E-06
19	0,0019	0,1547	0,0002	-2,0254	0,6877	1,46E-05	1,93E-05	1,49E-05
20	0,0025	0,1479	0,0004	-0,0128	0,6895	3,73E-06	1,12E-05	9,50E-06
21	0,0015	0,1151	0,0001	-0,3152	0,7228	1,03E-05	8,00E-07	5,62E-07
22	0,0007	1,1381	0,0001	-1,3878	0,519	1,84E-06	7,85E-07	7,54E-07
23	0,0021	0,1388	0,0002	-1,9396	0,6348	3,88E-06	1,22E-05	1,21E-05
25	0,0004	0,2371	0,0002	0,0886	0,1817	4,58E-07	3,72E-07	3,69E-07
26	0,0004	0,134	0,0001	-1,7102	0,5304	1,62E-06	8,54E-07	6,05E-07
27	0,0005	0,1366	0	-1,9864	0,6091	5,38E-06	6,04E-07	4,65E-07
28	0,0004	0,1899	0,0005	-0,4782	0,1706	2,95E-06	1,57E-06	1,55E-06
30	0,0046	0,1229	0,0006	-2,2676	0,6373	4,21E-05	8,77E-05	8,75E-05
31	0,0024	0,1122	0,0002	2,9906	0,8384	5,41E-06	3,20E-06	3,20E-06
32	0,0013	0,1414	0,0001	2,5504	0,8732	4,90E-06	1,76E-06	7,99E-07
33	0,0042	0,1378	0,0012	2,9652	0,7644	1,83E-05	7,91E-05	7,72E-05
34	0,005	0,0979	0,0003	-3,0337	0,3948	2,65E-05	1,03E-05	1,03E-05
35	0,0048	0,1412	0,0028	-0,8906	0,1435	7,18E-05	7,62E-06	3,85E-06
37	0,0031	0,2682	0,0017	-1,4317	0,2488	2,23E-05	9,43E-06	9,39E-06
38	0,0095	0,1125	0,0009	0,4036	0,9695	2,37E-05	6,43E-05	6,28E-05
39	0,0021	0,1973	0,0007	-0,7323	0,1693	1,78E-05	8,74E-06	7,08E-06
42	0,0035	0,2017	0,0004	-2,6462	0,9915	5,56E-06	3,68E-05	2,94E-05
43	0,0018	0,2001	0,0004	1,2121	0,5159	4,71E-07	3,14E-06	3,13E-06
44	0,0097	0,1394	0,0015	3,1188	0,8848	1,39E-05	6,25E-05	4,68E-05
45	0,0022	0,1957	0,0002	0,9945	0,673	4,34E-06	5,29E-06	4,46E-06

3. melléklet - A Matlab környezetben írt kódok

A minimalizálás(n) paranccsal hívható a kód, a beolvasott spirált jellemző dxf fájlt az illesztés.m fájl fejlécében kell megadni.
A 3. kód a 4.3 fejezetben ismertetett matematikai modell.

```
function [z]=minimalizalas(mode)

%mode=1: logaritmikus spirál illesztése
%mode=2: forgatás és skálázás is szerepel az optimalizálásban
%mode=3: perturbált logaritmikus spirál

if nargin<1 mode=1; end
opts=optimset('Display', 'iter');

if mode==1
    z0=[0.01, 0.01];
    z=fmincon(@(z) illesztés(z), z0, [], [], [], [], [1e-6, 1e-6], [1e3, 1e3], [], opts)
    R=illesztés(z)
elseif mode==2
    z0=[0.007, 0.015, 1e-4, 1e-4, 1e-4, 0.99];
    z=fmincon(@(z) illesztés(z), z0, [], [], [], [], [1e-6, 1e-6, -1e-2, -1e-2, -1e-2, 0.9], [1e3, 1e3, 1e-2, 1e-2, 1e-2, 1e-2], [], opts)
    R=illesztés(z)
elseif mode==3
    z0=[0.007, 0.2, 0.0008, -0.45, 0.35];
    z=fmincon(@(z) illesztés(z), z0, [], [], [], [], [1e-6, 1e-6, 1e-6, -pi, 0.1], [1e3, 1e3, 1e-0, pi, 1], [], opts)
    R=illesztés(z)
end
```

```

function [R,A]=illesztes(z,filename)
close all;

if nargin<2
    filename='38.dxf';
end
if nargin<1 z=[0.0028, 0.1282]; end

a=z(1);
b=z(2);

if max(size(z))==5
    a2=z(3);
    theta0=z(4);
    cf=z(5);
end

% dxf beolvasása és pontjainak mátrixba rendezése
dxf = DXFtool(filename);
A=[];
for i=1:size(dxf.entities,2)
    if max(size(dxf.entities(i).line))>0
        A=[A;dxf.entities(i).line];
    end
    i;
end

% ismétlődő és [0,0] pontok eltávolítása a mátrixból
A12=A(:, [1,2]);
A34=A(:, [3,4]);
A=[A12;A34];
C=A;
for i=1:size(A)
    for j=i+1:size(A)
        if abs(C(j,1)-A(i,1))<0.000001 && abs(C(j,2)-A(i,2))<0.000001 %&& abs(i-j)>0
            C(j,:)=0,0;
        end
    end
end
V=[];
for i=1:size(C)
    if abs(C(i,1))<0.0001 && abs(C(i,2))<0.0001
        V=[V;i];
    end
end
C(V,:)=[];
pontok=size(C);

% első elem megkeresése
vmin=C(1,:);
index=1;
for i=1:size(C,1)
    vminnegyzet=vmin.^2;
    vminhossz=sqrt(vminnegyzet(1)+vminnegyzet(2));
    vektornegyzet=C(i,:).^2;
    vektorhossz=sqrt(vektornegyzet(1)+vektornegyzet(2));
    if vektorhossz<vminhossz
        vmin=C(i,:);
        index=i;
    end
end
vmin;
index;
D=[];
D(1,:)=vmin;
C(index,:)=[];

```

```

% pontok sorbarendezeése
for i=2:(size(C,1)+1)
    indexkovetkezo=i;
    vkulonbseghosszmin=1000;
    for j=1:size(C,1)
        vkulonbseg=C(j,:)-D(i-1,:);
        vkulonbsegnegyzet=vkulonbseg.^2;
        vkulonbseghossz=sqrt(vkulonbsegnegyzet(1)+vkulonbsegnegyzet(2));

        szorzas=C(j,:).*D(i-1,:);
        skalar=szorzas(1)+szorzas(2);
        v2negyzet=C(j,:).^2;
        v2hossz=sqrt(v2negyzet(1)+v2negyzet(2));
        v1negyzet=D(i-1,:).^2;
        v1hossz=sqrt(v1negyzet(1)+v1negyzet(2));
        cosinusfi=skalar/(v2hossz*v1hossz);
        if cosinusfi>0.99
            vkulonbseghossz=1000000;
        end % azonos irányba eső pontok kizárva

        if vkulonbseghossz<vkulonbseghosszmin
            vkulonbseghosszmin=vkulonbseghossz;
            vkovetkezo=C(j,:);
            indexkovetkezo=j;
        end
    end
    D(i,:)=vkovetkezo;
    C(indexkovetkezo,:)=[];
end

x = D(:,1);
y = D(:,2);

% döntés és skálázás
if max(size(z))==6
    alpha=z(3);
    beta=z(4);
    gam=z(5);
    s1=z(6);
    R1=[1 0 0; 0 cos(alpha) sin(alpha); 0 -sin(alpha) cos(alpha)];
    R2=[cos(beta) 0 sin(beta); 0 1 0; -sin(beta) 0 cos(beta)];
    R3=[cos(gam) sin(gam) 0; -sin(gam) cos(gam) 0; 0 0 1];
    S1=[s1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
    X=[x';y';zeros(1,max(size(x)))];
    X1=R2*R1*R3'*S1*R3*X;
    x=(X1(1,:))';
    y=(X1(2,:))';
end

[theta,rho] = cart2pol(x,y);

% ellentétes irányú csavarodás kezelése
if theta(2)>theta(3)
    %display('csavarodasi irany forditva');
    theta=-theta;
    theta(theta<0)=theta(theta<0)+2*pi;
end
fi=theta;
delta=0;
di(1)=0;
close all

for i=2:max(size(fi))
    if fi(i)<fi(i-1)
        delta=delta+2*pi;
    end
    di(i)=delta;
end
fi=fi+di';
close all

```

```

% szintetikus alak
if max(size(z))==5
    r=(a+a2*cos(cf*(fi-fi(1)-theta0))).*exp(b*fi);
else
    r=a.*exp(b*fi);
end

% eredeti és illesztett spirál kirajzolása
polarplot(fi,r,'o')
hold on
polarplot(fi,rho,'ro');

% a két spirál pontjai közötti hibaértékek összege
R=(r-rho).^2;
R=sum(R);

```

```

function Model

bt=0.20;                %Target b value in  $r=a*\exp(b*\phi)$ ;
ds=1/200;               %Increment in arclength
al=0:ds:1.0;            %Total discretized perimeter

M=10;                  %Number of random initial values
N=max(size(al));        %Number of points along the curve
b(1:M+1)=bt/2*rand(1,M+1)+bt/2; %Random initial values

for i=M+1:N-1
    b(i+1)=b(i)+30*(bt-b(i-M))*ds;
end

r0(1)=0.1;              %Initial radii
r1(1)=0.1;
phi0(1)=0;              %Initial directions
phi1(1)=0;
k0(1)=1/0.1/sqrt(1+bt^2); %Initial curvatures
k1(1)=1/0.1/sqrt(1+bt^2);

%Computing the logarithmic spirals in natural parametrization
for i=1:N-1
    r0(i+1)=bt/sqrt(1+bt^2)*ds+r0(i);
    r1(i+1)=b(i)/sqrt(1+b(i).^2)*ds+r1(i);
    k0(i+1)=1/(bt*al(i)+1/k0(1))*ds+k0(i);
    k1(i+1)=1/(b(i)*al(i)+1/k1(1))*ds+k1(i);
    phi0(i+1)=k0(i)*ds+phi0(i);
    phi1(i+1)=k1(i)*ds+phi1(i);
end

figure(1)
plot(al,b,'k')
title('synthetic parameter b')

figure(2)
polarplot(phi0,r0,'b')
hold on
polarplot(phi1,r1,'r')
title('comparison of perfect and grown spirals')

```