

Poliéderekről, kánonban



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

ÉPÍTÉSZMÉRNÖKI KAR

MORFOLÓGIA ÉS GEOMETRIAI MODELLEZÉS TANSZÉK

Poliéderekről, kánonban

Hellenpárt Gábor

Konzulens:

Dr. Domokos Gábor

egyetemi tanár,

Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszék

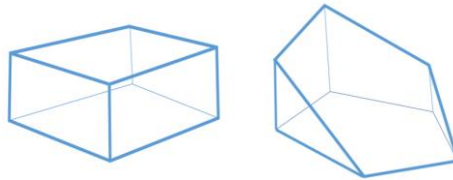
Tudományos diákköri konferencia 2024

Tartalomjegyzék

Absztrakt	3
Abstract	4
1. Bevezetés.....	5
2. A kanonikus poliéderek	8
3. A kánonról	10
4. A poliéderek egyensúlyainak vizsgálata	10
5. A kanonikus poliéderek numerikus vizsgálata	11
6. Az eredmény értékelése	12
6.Dolgozat folytatási lehetősége.....	15
8. A kanonikus poliéderek 3D-s megjelenítése.....	15
9. Összefoglalás.....	16
10. Köszönetnyilvánítás.....	16
Hivatkozások.....	16

Absztrakt

Ha egy P konvex poliédernek f lapja és v csúcsa, valamint S stabil és U instabil egyensúlyi pontja van, akkor azt mondjuk, hogy P az $(f, v)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályba és az $(S, U)^E$ elsődleges egyensúlyi osztályba tartozik. Az elsődleges kombinatorikai osztály azonban nem határozza meg a poliéder lapszerkezetét: az 1. ábrán a $(6, 8)^C$ osztály két eleme látható, melyek lapszerkezete szemmel láthatóan eltér. Azonos lapszerkezettel rendelkező konvex poliéderek halmaza alkot egy másodlagos kombinatorikai osztályt.



1. ábra: két poliéder a $(6, 8)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályból. Figyeljük meg az eltérő lapszerkezetet.

Ha $f = S$ és $v = U$, akkor azt mondjuk, hogy P egy *minimálpoliéder*. Ismert [1], hogy minden elsődleges kombinatorikai osztályban létezik homogén anyageloszlású minimálpoliéder, azonban a másodlagos kombinatorikai osztályokra vonatkozóan ez csak egy sejtés [1].

Dolgozatom célja, hogy speciális, úgynevezett kanonikus poliéderek numerikus vizsgálatán keresztül ezt a sejtést jobban megismerjem.

Poliéder középgömbjének nevezzük azt a gömböt, amelynek a poliéder minden éle érintője. Minden másodlagos osztályban létezik olyan poliéder, amelynek van középgömbje, ezeket Koebe-poliédereknek nevezzük [2]. Ha egy Koebe-poliéderre igaz, hogy (a) középgömbje egységgömb és (b) az érintési pontokba egységnyi tömeget helyezve a poliéder súlypontja megegyezik a középgömb középpontjával, akkor ezt a poliédert kanonikus poliédernek nevezzük. Ismert, hogy minden másodlagos osztályban létezik kanonikus poliéder [3].

Dolgozatomban az $f + v \leq 15$ egyenlőtlenség által jellemzett 12 darab elsődleges kombinatorikai osztályhoz tartozó 44 darab másodlagos kombinatorikai osztály kanonikus poliédereit vizsgáltam homogén anyageloszlást feltételezve, és megállapítottam, hogy ezek közül 43 minimálpoliéder, 1 pedig nem az.

Abstract

If a convex polyhedron P has f faces and v vertexes, and S stable and U unstable equilibrium points, then we say that P belongs to the primary combinatorial class $(f, v)^C$ and the primary equilibrium class $(S, U)^E$. However, the primary combinatorial class does not determine the face structure of the polyhedron: Figure 1 shows two elements of the class $(6, 8)^C$ which have visually different face structures. A set of convex polyhedra with the same face structure forms a secondary combinatorial class.

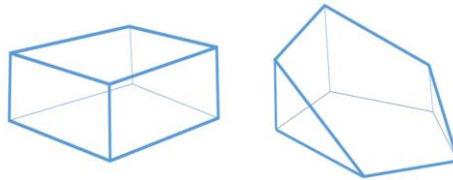


Figure 1: Two polyhedra from the primary combinatorial class $(6, 8)^C$. Observe the different face structure.

If $f = S$ and $v = U$, then we say that P is a minimal polyhedron. It is known [1] that for every primary combinatorial class there exists a minimal polyhedron with homogeneous material distribution, but for secondary combinatorial classes this is only a conjecture [1].

The aim of my thesis is to gain a better understanding of this conjecture through a numerical study of special, so-called canonical polyhedron.

The midsphere of a polyhedron is the sphere to which all the edges of the polyhedron are tangent. There are polyhedra of every secondary class that have a midsphere, these are called Koebe polyhedra [2]. If it is true for a Koebe polyhedron that (a) its midsphere is a unit sphere and (b) the centre of gravity of the polyhedron (when the tangency points carry unit mass), is the same as the centre of the midsphere, then this polyhedron is called a canonical polyhedron. It is known that a canonical polyhedron exists in every secondary class [3].

In my thesis, I investigated the canonical polyhedron of 44 secondary combinatorial classes belonging to the 12 primary combinatorial classes characterized by the inequality $f + v \leq 15$, assuming a homogeneous material distribution, and found that 43 of them are minimal polyhedron and 1 is not.

1. Bevezetés

1. Definíció:

Konvex poliédernek nevezünk egy olyan P testet, amely véges sok zárt féltér metszeteként áll elő, amennyiben P korlátos és belső ponttal rendelkezik [4].

Dolgozatomban kizárólag konvex poliéderekkel foglalkozom, ha tehát egy poliéder esetén *nincs* kikötve a konvexitás, azt külön meg fogom említeni. Konvex poliéderekkel jól közelíthető testekkel minden nap találkozunk. Példának okáért a szilikátok építőeleme a szilikát tetraéder, a kövek és sziklák egy része poliéderre emlékeztet, sok drágakő poliéderhez közeli formát mutat, a szekrények, könyvek, házak általában szintén poliéderrel közelíthető formájúak. Mivel elemi szinten életünk részét képezik a konvex poliéderek, ezért a több tudományterületen belül is fontos modellként bukkannak fel. A konvex poliéderek számos érdekes geometriai tulajdonsággal rendelkeznek, ezek közül azonban jelen dolgozatban kettőt fogunk közelebbről vizsgálni: mennyi lapja, éle és csúcsa, illetve mennyi stabil, nyereg típusú vagy instabil egyensúlyi helyzete van.

Ha egy P konvex poliédernek f lapja és v csúcsa, valamint e éle van, akkor ezen mennyiségekre teljesül [5] az Euler-tétel:

$$(1) \quad f + v = e + 2.$$

Ha egy P konvex poliédernek S stabil és U instabil, valamint H nyereg típusú egyensúlyi pontja van, akkor ezen mennyiségekre teljesül [6] a Poincaré-Hopf tétel:

$$(2) \quad S + U = H + 2.$$

A fenti egyenlőségek alapján azt mondjuk egy P konvex poliéderről, ha f lapja és v csúcsa, valamint S stabil és U instabil egyensúlyi pontja van, hogy P az $(f, v)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályba és az $(S, U)^E$ elsődleges egyensúlyi osztályba tartozik.

Ernst Steinitz bizonyította [7] azt, hogy bármely, az $(f, v)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályba tartozó konvex poliéderre teljesül az alábbi két egyenlőtlenség:

$$(3) \quad f \geq \frac{v}{2} + 2, \quad v \geq \frac{f}{2} + 2.$$

Ennek alapján megállapítható, hogy mely elsődleges kombinatorikai osztályba tartoznak poliéderek és melyekbe nem (1. ábra).

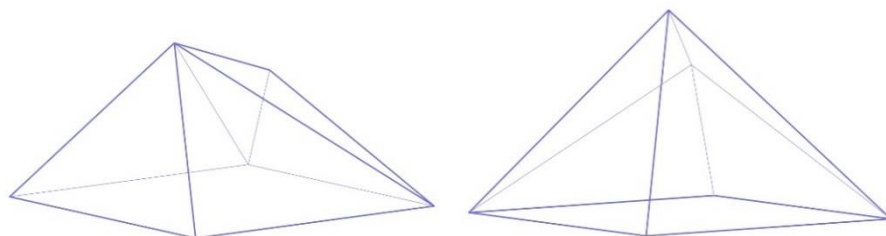
$f \backslash v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

1. ábra: $(f, v)^C$ elsődleges kombinatorikai táblázat részlete. A (3) összefüggések alapján meghatározható a táblázatban, hogy mely f és v érték esetén létezik (feketével), illetve nem létezik (fehérrel) poliéder.

Az elsődleges osztályok ismerete azonban még kevés a poliéderek teljes kombinatorikaileírásához, ugyanis azonos $(f, v)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályhoz tartozó poliéderek lapszerkezete eltérhet. A 2. ábrán a $(7,6)^C$ osztály két eleme látható, melyek lapszerkezete szemmel láthatóan eltér.

2. Definíció:

Azonos lapszerkezettel rendelkező konvex poliéderek halmaza alkot egy másodlagos kombinatorikai osztályt.



2. ábra: Két poliéder a $(7,6)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályból melyek másodlagos kombinatorikai osztálya eltér.

3. Definíció:

Ha egy konvex P poliéderre igaz, hogy $f = S$ és $v = U$, akkor azt mondjuk, hogy P egy *minimálpoliéder*.

Ismert [1], hogy minden elsődleges kombinatorikai osztályban létezik homogén anyageloszlású minimálpoliéder, azonban a másodlagos kombinatorikai osztályokra vonatkozóan ez csak egy sejtés [1].

Dolgozatomban ezen sejtést ismerem meg jobban az úgynevezett kanonikus poliéderek numerikus vizsgálatán keresztül.

2. A kanonikus poliéderek

4. Definíció:

Poliéder középgömbjének nevezzük azt a gömböt, amelynek a poliéder minden éle érintője.

5. definíció:

Egy P poliédert Koebe-poliédernek nevezzük, amennyiben létezik középgömbje.

Ismert, hogy minden másodlagos osztályban létezik Koebe-poliéder [2].

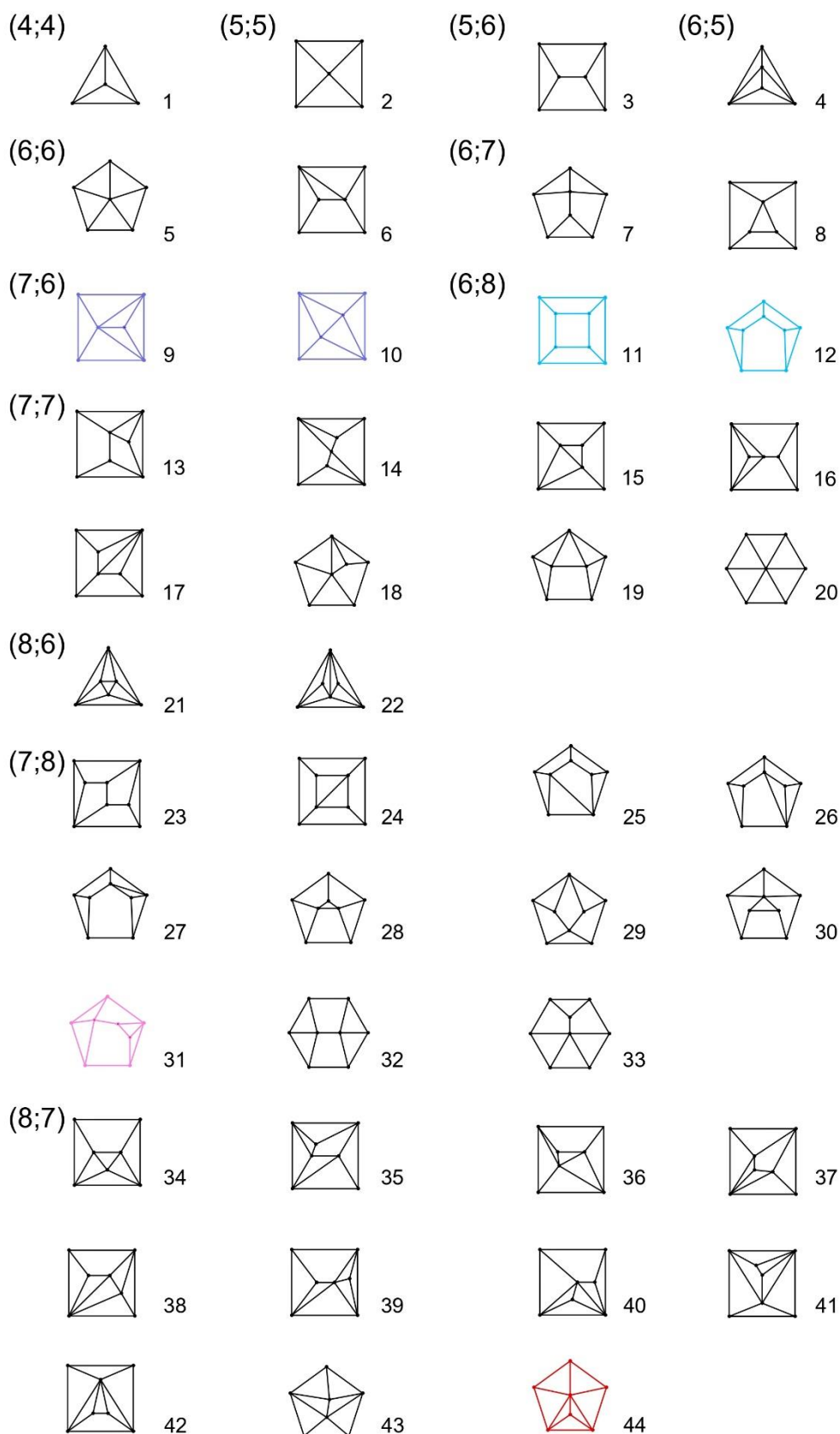
6. definíció:

Ha egy Koebe-poliéderre igaz, hogy (a) középgömbje egységgömb és (b) az érintési pontokba egységnyi tömeget helyezve a poliéder súlypontja megegyezik a középgömb középpontjával, akkor ezt a poliédert kanonikus poliédernek nevezzük.

Ismert, hogy minden másodlagos osztályban létezik kanonikus poliéder [3].

A platóni szabályos testek kanonikus poliéderek, valamint mind az öt testre igaz, hogy minimálpoliéder.

Ezen elindulva dolgozatomban az $f + v \leq 15$ egyenlőtlenség által jellemzett 12 darab elsődleges kombinatorikai osztályhoz tartozó P.J. Federico [8] által ismertetett 44 darab másodlagos kombinatorikai osztály kanonikus poliédereinek egyensúlyait vizsgáltam homogén anyageloszlást feltételezve. Vajon ezekre a nem szabályos kanonikus poliéderekre is igaz-e, hogy minimálpoliéderek vagy sem? A 3. ábrán ismertetem ezen 44 vizsgált testet, bemutatva élgráfjaikat.



3. ábra: az általam vizsgált 44 poliéder gráfja. Lilával, illetve késsel az absztrakt 1. illetve a dolgozat 2. ábrán szemléltetett poliéderek gráfja látható. A pirossal színezett gráfhoz tartozó kanonikus poliéder az egyetlen a 44 db közül, amely nem *minimálpoliéder*.

3. A kánonról

A *kánon* szó jelentése zsinórmérték, valamiben követendő, irányadó mérték, szabály. A klasszikus görög szobrászatban a tökéletesnek, eszményinek tartott emberi test arányainak viszonyát, összességét jelentette. A matematikában, azon belül a geometriában a kanonikus poliédereknél is vélhetően a „legjobbra”, a „legarányosabbra”, vagy a „legszebbre” utalhat ez a jelző. Ezek a poliéderek saját másodlagos kombinatorikus osztályuknak egyedi, megkülönböztetett képviselői.

4. A poliéderek egyensúlyainak vizsgálata

Konvex poliédereknek létezhet stabil egyensúlya a lapjain, instabil egyensúlya a csúcsain, illetve nyereg típusú egyensúlya az élein.

7. definíció:

Jelölje egy P poliédernek lapjait F_i ($i=1,2,..f$) jelölje a poliéder súlypontját S továbbá jelölje az S pont merőleges vetületét a lapok síkjaira S_i . Azt mondjuk, hogy az F_i lapon stabil egyensúlya van, ha S_i az F_i lap belső pontja.

8.) definíció:

Jelölje egy P poliéder csúcsait V_i ($i=1,2,..v$), jelölje a poliéder súlypontját S . Azt mondjuk, hogy P -nek a V_i csúcsán instabil egyensúlya van, ha az $\overline{SV_i}$ szakaszra V_i -ben állított merőleges síknak és P -nek csak egy közös pontja van (ami maga a V_i csúcs).

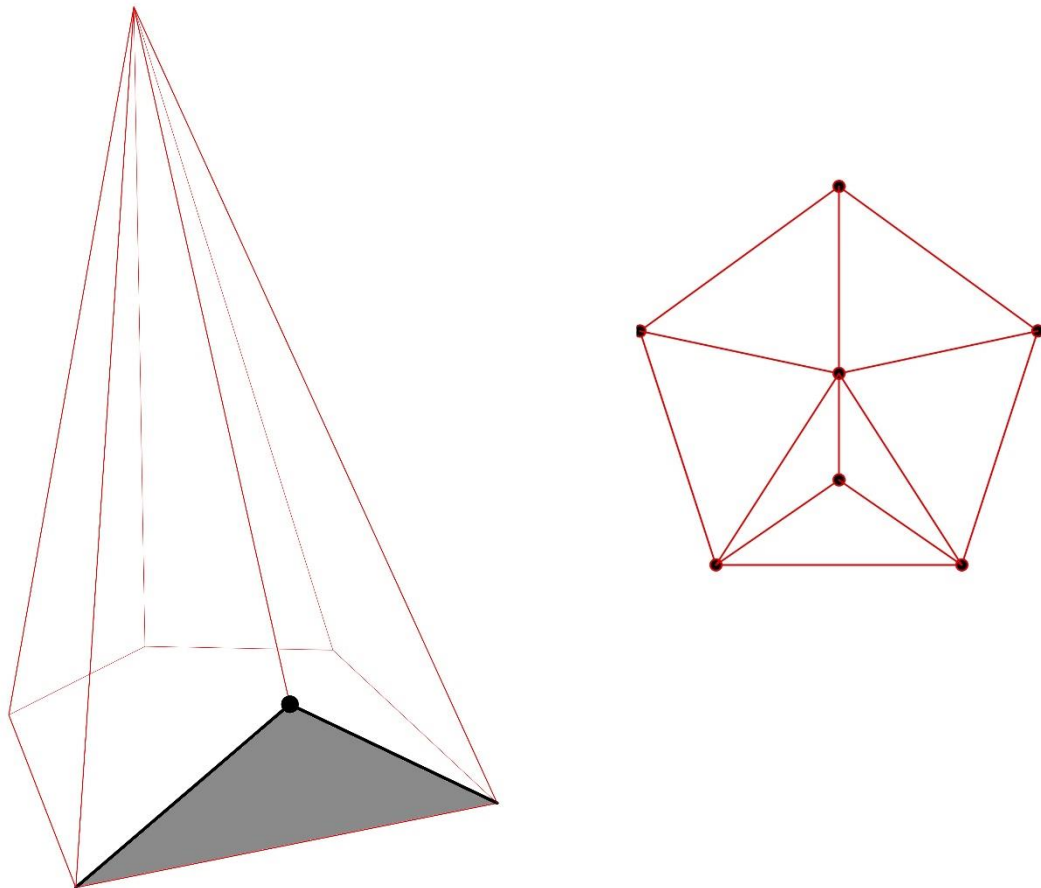
9.) definíció:

Jelölje egy P poliéder éleit E_i ($i=1,2,..e$), jelölje a poliéder súlypontját S . Azt mondjuk, hogy P -nek a E_i élén nyereg típusú egyensúlya van, ha az S súlypontjának E_i -re vetített merőleges S' vetülete az E_i él belső pontja, továbbá az $\overline{SS'}$ szakaszra az S' pontban állított merőleges sík nem metsz bele P -be.

5. A kanonikus poliéderek numerikus vizsgálata

Dolgozatomban a Wolfram Mathematica oldalán Ed Pegg Jr. által közzétett [9] közelítő módszerrel előállított kanonikus poliéderek koordinátaival számoltam.

A számításokat a Matlab program segítségével végeztem, melynek során kiderült, hogy az általam vizsgált 44 poliéder közül 43 minimálpoliéder és 1 nem az. A 4. ábrán látható poliédernek egy lapján, egy csúcán és két élén nincs egyensúlyi helyzete.

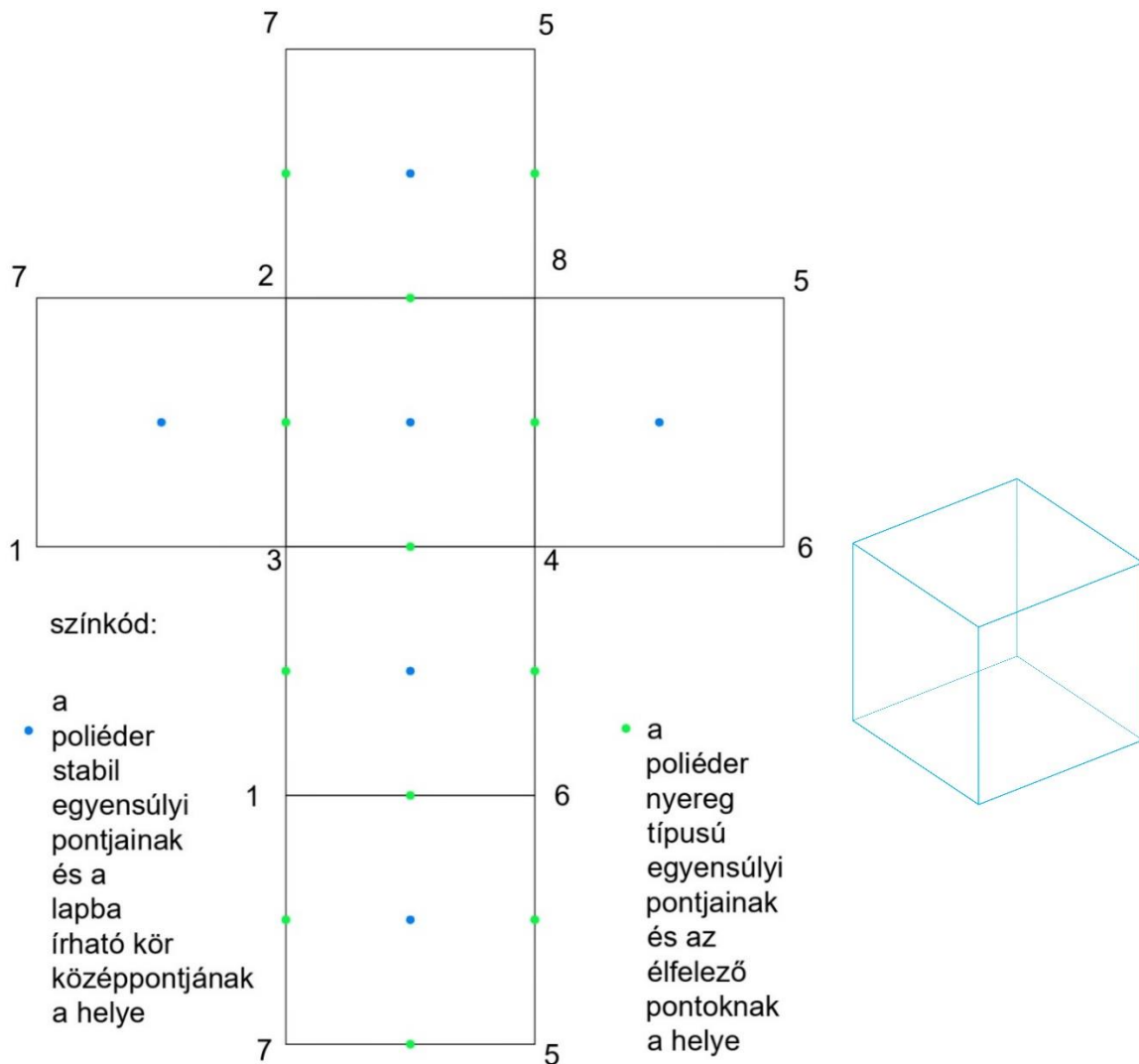


4. ábra: A 44 poliéder közül 1 nem minimálpoliéder, mely a $(8,7)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályba tartozik. A baloldali, térbeli ábrán feketével látható a lap, a két él és a csúcs melyeken nincs a poliédernek egyensúlyi pontja. A poliéder gráfját lásd: 3. ábra 44-es eleme (piros gráf).

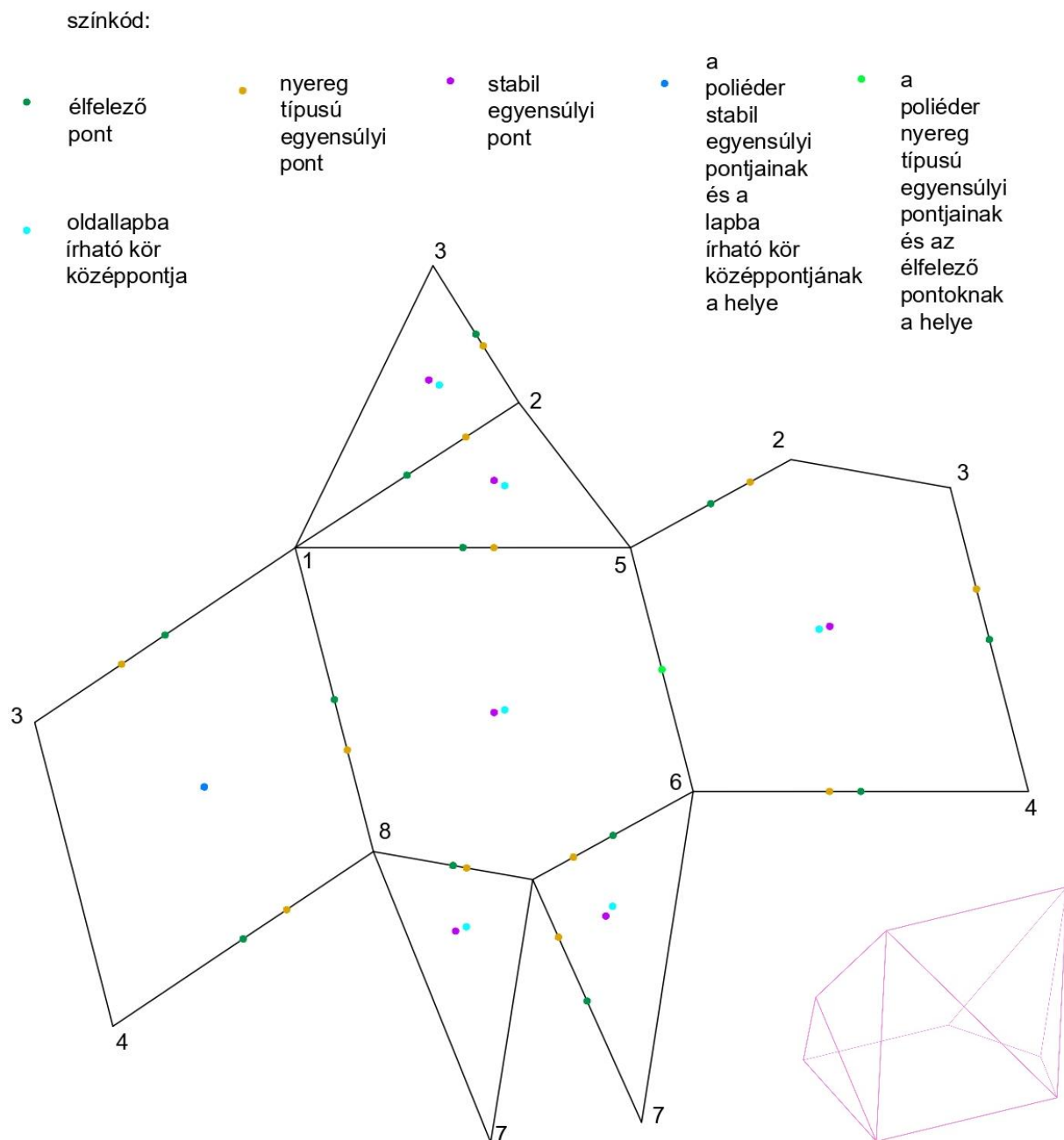
6. Az eredmény értékelése

A fent említett eredmény azt mutatja, hogy bár a viszonylag alacsony lapszámmal rendelkező kanonikus poliéderek igen nagy része minimálpoliéder, azonban az, hogy egy poliéder kanonikus még nem jelenti, hogy minimálpoliéder.

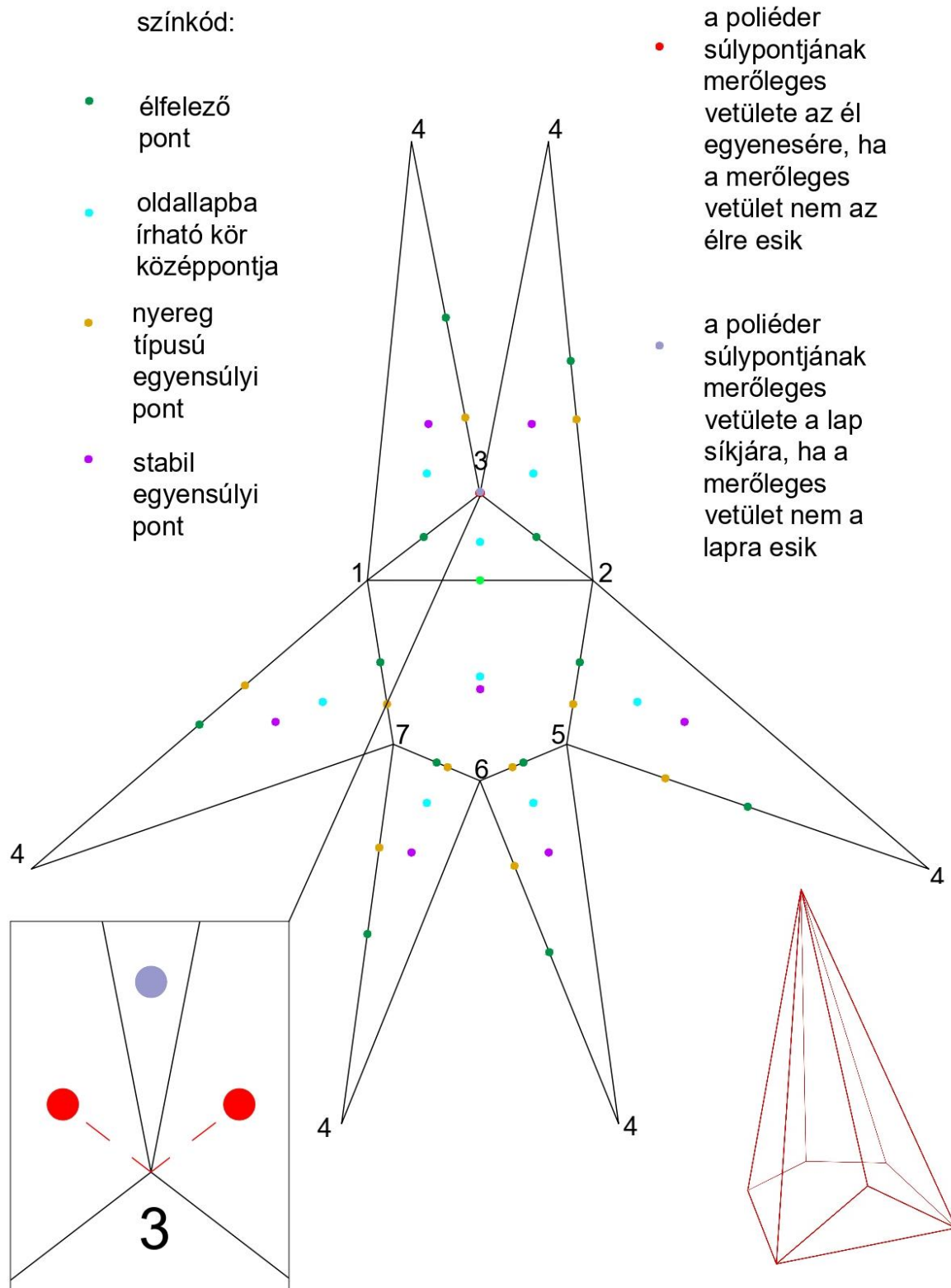
A 5-ös ábrán látható 3, általam vizsgált kanonikus poliéder testhálójá, a súlypontjának a lapokra és élekre vett merőleges vetülete, valamint a lapokba írható körök középpontjai és az élek felezőpontjai. Az ábrán jól látható, hogy az egyes kanonikus poliédereknek mekkora „egyensúlyi tartaléka” van, vagyis a súlypont mekkora mozgása esetén maradnának továbbra is minimálpoliéderek.



5/a. ábra: A kocka. Gráfját lásd:3. ábra 11. eleme. Szabályos test esetén a stabil egyensúlyi pontjai és az oldallapokba írható körök középpontjai azonosak, illetve a nyereg típusú egyensúlyi pontjai és az élek felezőpontjai azonosak.



5/b ábra: Kanonikus poliéder mely minimálpoliéder, de nem szabályos. Gráfját lásd:3. ábra 31. eleme. A stabil egyensúlyi pontjai általában nem esik egybe a lapokba írt körök középpontjával, illetve a nyereg típusú egyensúlyi pontok általában nem esnek egybe az élfelező pontokkal.



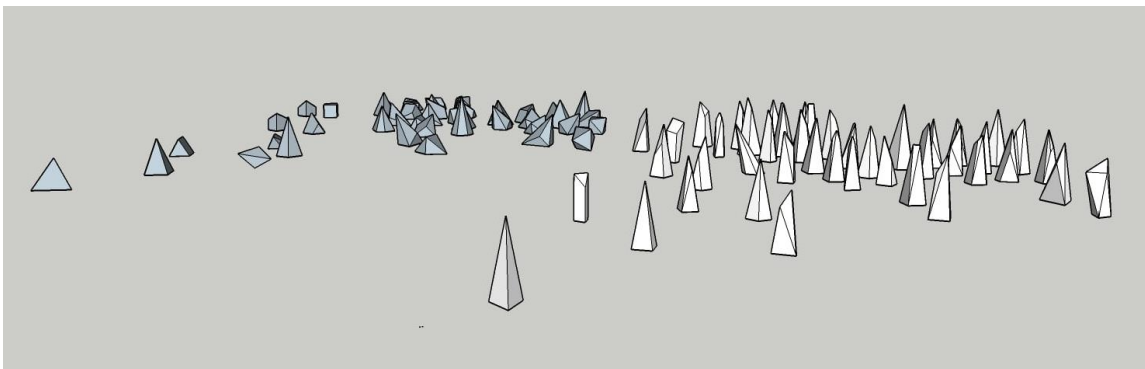
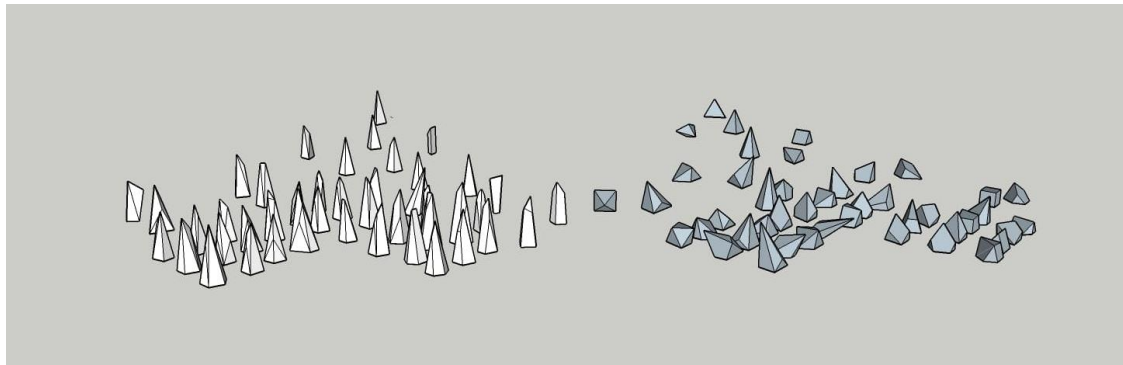
5/c ábra: Kanonikus poliéder mely nem minimálpoliéder. Gráfját lásd:3. ábra 44. eleme. Lásd még:4. ábra. A súlypont 123-as lapra vett merőleges vetülete a polygonon kívül esik, illetve a súlypont 12-es és 13-as élre vett merőleges vetülete az éleken kívül esik.

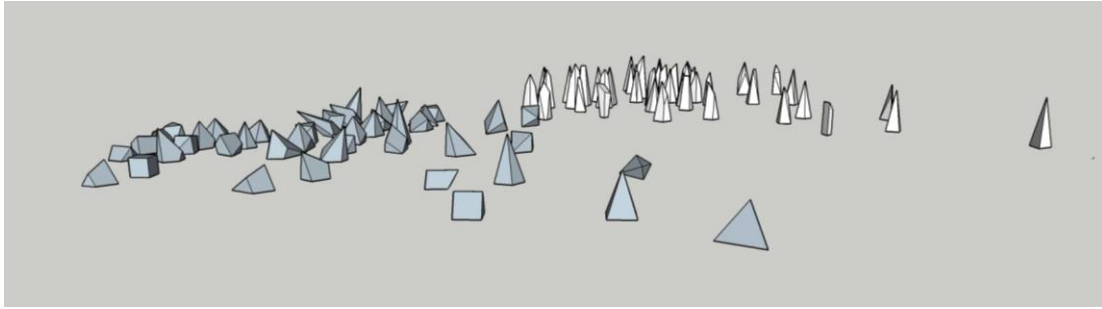
6. Dolgozat folytatási lehetősége

Dolgozatomban megmutattam, hogy azon sejtést, miszerint minden másodlagos kombinatorikai osztályhoz tartozik legalább egy minimálpoliéder a kanonikus poliéderekkel nem lehet igazolni. Azonban ismert [1], hogy amennyiben egy poliéder Koebe-poliéder és a poliéder súlypontja a középgömbjének középpontjával azonos, akkor a poliéder minimálpoliéder. Lehetne egy olyan programot írni, mely adott poliéder csúcsait mozgatja úgy, hogy azok Koebe-poliéderek maradjanak és közben a poliéder súlypontjának helyzete közelít a középgömbjének középpontjához, míg végül a két pont azonos lesz, ekkor megtaláltuk az adott másodlagos kombinatorikai osztályhoz tartozó minimálpoliédert.

8. A kanonikus poliéderek 3D-s megjelenítése

Dolgozatomban elkészítettem az általam vizsgált 44 másodlagos kombinatorikai osztályhoz tartozó poliéderek 3D modelljét Sketchup program segítségével. Mind a 44 osztályhoz készítettem 1-1 kanonikus-nem kanonikus poliéder verziót. A kettőt egymás mellé téve a 6. ábrán jól látható, hogy egy másodlagos osztályhoz tartozó poliéderek geometriája közt is látványos különbség van.





6. ábra: 44 kanonikus poliéder(kékkel) és ezekkel azonos másodlagos kombinatorikai osztályhoz tartozó másik 44 poliéder(fehérrel). Figyeljük meg a látványos geometriai különbséget.

A poliéderekről elkészítettem egy rövid videót is melyben közelebbről megfigyelhetjük őket.

<https://youtu.be/hMljstKRT-A>

1. videó: a poliéderek közelről
<https://youtu.be/eL70fLg336M>
2. videó: a kanonikus poliéderek

9. Összefoglalás

Dolgozatomban azon sejtést ismertem meg jobban, miszerint minden másodlagos kombinatorikai osztályhoz tartozik minimálpoliéder. Ehhez az $f + v \leq 15$ egyenlőtlenség által jellemzett 12 darab elsődleges kombinatorikai osztályhoz tartozó 44 darab másodlagos kombinatorikai osztály kanonikus poliédereinek egyensúlyait vizsgáltam numerikusan. Kiderült, hogy ugyan a kis lapszámmal rendelkező kanonikus poliéderek igen nagy része minimálpoliéder, azonban az, hogy egy poliéder kanonikus még nem jelenti, hogy minimálpoliéder, hiszen az általam vizsgált 44 poliéderből 43 volt minimálpoliéder és 1 nem. Megállapította a téma kutatásának további lehetőségét, valamint a poliédereket megjelenítettem 3D modellként.

10. Köszönetnyilvánítás

A dolgozat létrejöttéhez szeretném kifejezni köszönetem konzulensem Dr. Domokos Gábor professzornak.

Hivatkozások

[1] Domokos, G., Kovács, F., Lángi, Z., Regős, K. and Varga P.T. (2020), *Balancing polyhedra*, Ars Mathematica Contemporanea Vol 19 No 1, pp 95-124.

- [2] Koebe, Paul (1936), *Kontaktprobleme der Konformen Abbildung*, Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl., 88: 141–164, JFM 62.1217.04, Zbl 0017.21701
- [3] Ziegler, Günter M. (1995), *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 152, Springer-Verlag, pp. 117–118, doi:10.1007/978-1-4613-8431-1, ISBN 0-387-94365-X,
- [4] Marcel Berger: *Geometry II* (12.1.1 Def) , Springer (second ed.) 1996
- [5] Leonhard Euler. *Elementa doctrinae solidorum*. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 4:109–140, 1758.
- [6] Arnold, Vladimir I. "Ordinary differential equations, 10th printing." (1998).
- [7] Steinitz, Ernst. "Über die Eulerschen polyederrelationen." *Archiv für Mathematik und Physik* 11 (1906): 86-88.
- [8] Federico, Pasquale Joseph. "Polyhedra with 4 to 8 faces." *Geometriae Dedicata* 3.4 (1975): 469-481.
- [9] <https://demonstrations.wolfram.com/CanonicalPolyhedra/>