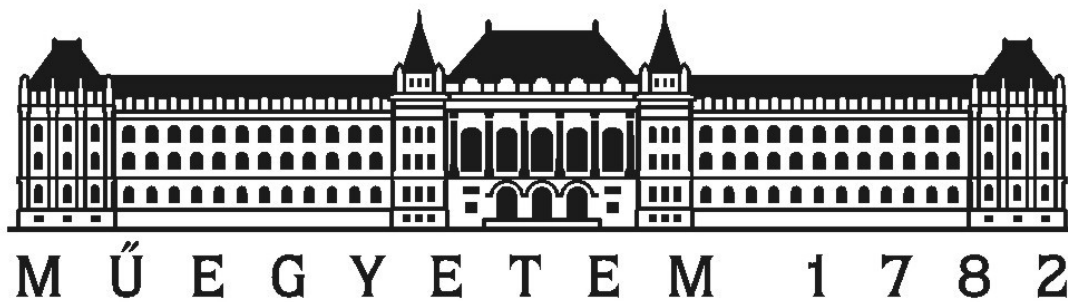




Budapesti műszaki és gazdaságtudományi egyetem

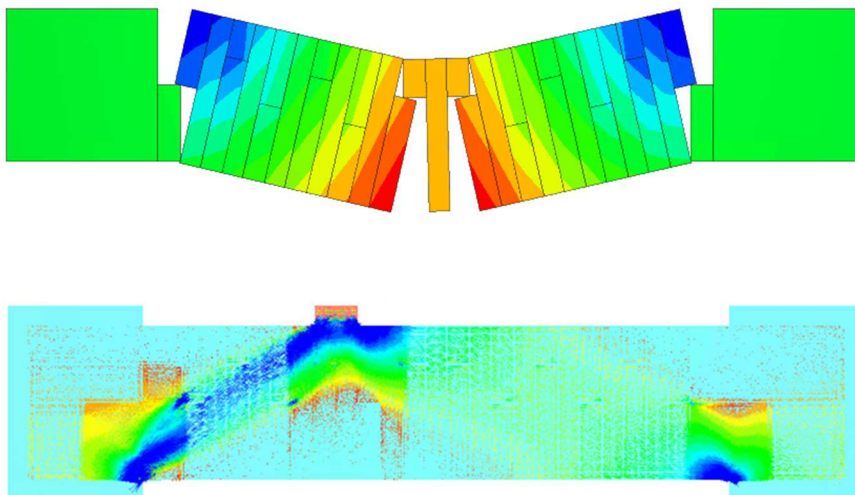
Építőmérnöki kar

Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Leonardo da Vinci lapos íveinek diszkrétélemes vizsgálata

TDK dolgozat

Herczeg Mátyás



Konzulens: Dr. Bagi Katalin

Budapest, 2024

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm konzulensemnek, Dr. Bagi Katalinnak, hogy a kutatás alatt segítette a munkámat, hasznos szakmai tanácsokkal látott el, illetve, hogy bármikor fordulhattam hozzá amikor kérdésem volt. Ugyancsak köszönet illeti dr. Orosz Ákost is, hogy videóival és személyes hozzájárulásával segített a vizsgálataim során használt program elsajátításában, alapelveinek megértésében. A kutatás az NKFI OTKA K-138642 projekt támogatásával készült.

Tartalom

Köszönetnyilvánítás	2
Absztrakt	5
Abstract in English	6
1. Bevezetés.....	7
1.1 Gerendák és ívek összehasonlítása	7
1.2. Falazott ívek bemutatása	7
1.2.1. Falazott ívek típusai	8
1.2.1.1. Valódi ívek tönkremenetele	10
1.2.1.2. Lapos ívek bemutatása	10
1.3 Leonardo da Vinci, Codex Atlanticus	14
1.4 A saját vizsgálatok célja.....	15
1.4.1 A saját vizsgálatok során használt jelölések.....	16
1.5. A vizsgálatok átfogó menete.....	17
2. A vizsgálatok eszközei	18
2.1 A diszkrét elemek módszeréről általánosságban	18
2.2. A 3DEC 7.0.....	19
2.2.1. A program általános bemutatása	19
2.2.2. A blokkok anyagi viselkedésének reprezentációja.....	20
2.2.2.1. Tökéletesen merev blokkok	20
2.2.2.2. Deformálható blokkok.....	20
2.2.2.3. Blokkok közötti kapcsolatok reprezentációja	21
2.2.3. A megoldási algoritmus.....	22
3. A lépcsős ívvel kapcsolatos futtatások	23
3.1. Geometriai kialakítás	23
3.2. Anyagjellemzők	23

3.2.1. A zónák anyagmodellje	23
3.2.2. Zónák anyagjellemzői	25
3.2.2.1 Zónák élhosszúságával kapcsolatos futtatások	26
3.2.3. Kapcsolati anyagjellemzők	27
3.2.3.1. A kapcsolati merevségekkel kapcsolatos futtatások.....	28
3.3. Peremfeltételek	29
3.4. A terhelésről.....	29
3.4.1. A terhelés módja.....	29
3.4.1.1 Erő-jellegű terhelés	29
3.4.1.2 Elmozdulás-jellegű terhelés	30
3.4.2. A terhelőblokk elhelyezése	32
3.4.2.1. A terhelőblokk elhelyezésével kapcsolatos futtatások	32
3.4.3. A teherbírás értelmezése.....	33
3.4.4. A teherlépcsők nagyságával kapcsolatos futtatások.....	34
3.5. Végleges futtatások.....	35
3.5.1. Optimális geometriai arányok meghatározása	35
3.5.2. Az ív viselkedése nagyobb támaszközök esetében	38
3.5.3. Elmozdulás jellegű terhelés	40
4. A háromszög ívvel kapcsolatos futtatások	41
5. Eredmények összefoglalása.....	42
Irodalomjegyzék.....	44
Ábrajegyzék	45

Absztrakt

A falazott ívek és boltozatok történelme igen régre nyúlik vissza, egészen a prehistorikus időszakig. Szerepük az építőmérnöki gyakorlatban a különböző méretű nyílások, árkok, falakkal közrezárt területek, folyók áthidalása oly módon, hogy az önsúlyból, használatból és egyéb környezeti hatásokból származó terheket a szerkezet főként nyomóerők révén vegye fel és továbbítsa az alatta lévő teherhordó szerkezetekre. Az ívek használata lehetővé teszi az alacsony húzószilárdsággal (azonban nagy nyomószilárdsággal) rendelkező, rendkívül időtálló anyagok (elsősorban faragott kövek és különböző anyagú téglák) széles körű használatát, ezzel nagy lehetőséget adva pozitív tulajdonságaik kihasználására.

Napjainkra ezek az építési módszerek igencsak háttérbe szorultak. Ennek elsődleges okai egyrészt az elemek időigényes megmunkálásában, másrészt a hatékony, a nem-kontinuumszerű viselkedést figyelembe vevő mechanikai számítási módszerek elterjedésének hiányában keresendők. Az előállítás időigényességének problémájára azonban ma már megoldást nyújthat a blokkok betonból vagy más hasonló önthető anyagból (akár öntőformával, akár 3D nyomtatással) történő kialakítása, valamint modern kőfaragóeszközök használata. A számítási eszközök között pedig ma már elérhető a korszerű diszkrét elemes modellek (DEM) alkalmazása.

A nyílások áthidalása szempontjából kiemelt jelentősége van az ún. lapos íveknek. A falazott ívek és boltozatok klasszikus szerkezetanalitikai módszerei (Heyman tételei; egyensúlyi erőrendszer szerkesztéses keresése stb.) azonban a tönkremenetel jellege miatt nem alkalmazhatóak lapos ívek esetében.

Leonardo da Vinci kézírásos jegyzeteiben két formabontó javaslat is található lapos ívek kialakítására. Dolgozatom célja e két javaslat mechanikai vizsgálata volt. A modellkísérleteket a 3DEC diszkrét elemes programmal végeztem el, amely képes a különálló szilárd testekből épült szerkezetek nem-kontinuumszerű viselkedésének követésére, ezzel jó eszközt biztosítva a falazott ívek viselkedésének elemzésére.

Futtatásaim során azonban kiderült, hogy az egyik ív igencsak kedvezőtlenül viselkedik erő-jellegű terhelésre, emiatt alkalmazása nem javasolható. Dolgozatom döntő része így csak a másik javaslatra koncentrál. Az említett ív optimális geometriai kialakítását egy adott támaszközre állapítottam meg két különböző anyag paramétereivel. Az így kapott kialakítást további két támaszköz esetében is teszteltem mind erő-, mind elmozdulás-jellegű teherre.

Abstract in English

The history of masonry arches and vaults dates back to ancient times, as far back as the Mesopotamian period. Their role in engineering practice involves bridging various-sized openings, trenches, areas enclosed by walls, rivers etc. in such a way that the loads from self-weight, usage, and other environmental effects are mainly carried and transmitted to the supporting structures below through compressive forces. The use of arches allows for the extensive utilization of materials with low tensile strength (but high compressive strength), such as carved stones and bricks of various materials, thereby providing significant opportunities to exploit their positive properties.

Today, these construction methods have been largely overshadowed, primarily due to the time-consuming processing of elements and the lack of widespread calculation methods to consider their discontinuous nature. However, the issue of time consumption could be addressed by forming blocks from concrete-like materials (using either casting molds or 3D printing), as well as by employing modern stone-cutting tools, while contemporary discrete element models (DEM) could serve as calculation instruments.

Flat arches are of particular importance in bridging openings, but since their failure modes fundamentally differ from those of classical arches, the usual theories like Heyman's theorems or graphostatical techniques are not appropriate for flat arches.

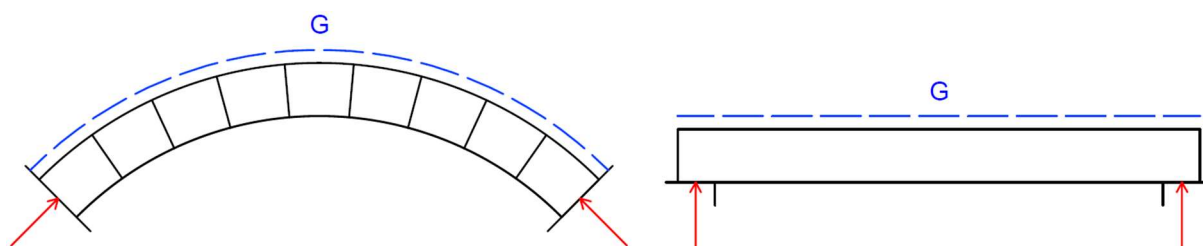
The primary goal of my research was to examine those two flat arches mentioned in Leonardo da Vinci's handwritten notes and to determine their optimal geometric parameters. I conducted my computer-simulated experiments using 3DEC (a widely spread discrete element software), which can track the non-continuous behaviour of systems of separate solid bodies.

However, during my simulations, it became evident that one of the two arches behaved quite unfavorably under force-type loading, leading the majority of my research to focus on the other arch. I determined the optimal geometric design of the mentioned arch for a specific span using the parameters of two different materials. I also tested the resulting design under force and displacement-type loads for two additional spans.

1. Bevezetés

1.1 Gerendák és ívek összehasonlítása

A gerendák és ívek egyaránt nyílások áthidalására szolgálnak, azonban mechanikai viselkedésük, az építésükhöz (jellemzően) felhasznált anyagok, valamint geometriai kialakításuk gyakran jelentősen eltér egymástól. A gerendák geometriai középvonala többségében egyenes (habár léteznek íves gerendák is), a rájuk merőlegesen elhelyezett terheket nyírási, valamint hajlítási ellenállásuknak köszönhetően viselik el. A két végén alulról megtámasztott gerendák esetében (középvonalukra merőleges terhelésnél) a támaszoknál nem ébrednek számottevő vízszintes erők, ellentétben az ívekkel, ahol a támaszoknak fontos feladata a vízszintes erőkomponensek felvétele is (erre az 1.1.1-es ábra mutat példát). Az ívek felépítése abban különbözik a gerendáktól, hogy több egymásra támaszkodó elemből állnak, amelyek közt elsősorban nyomóerők ébrednek, nyírási ellenállásukat az elemek közötti súrlódás biztosítja (emiat fontos, hogy anyaguk nagy nyomószilárdsággal, felületük pedig magas súrlódási együtthatóval bírjon).



1.1.1. ábra. Egy ív (bal) és egy gerenda (jobb) támaszreakciói önsúly esetén.

1.2. Falazott ívek bemutatása

A falazott ívek és boltozatok történelme igen régre visszanyúlik. Elsődleges céljuk a különböző méretű nyílások, árkok, falakkal közrezárt területek, valamint folyók áthidalása oly módon, hogy az önsúlyból, használatból és egyéb környezeti hatásokból származó terheket a szerkezet főként nyomóerők révén továbbítsa az alatta lévő teherhordó szerkezetekre. Az ívek használata lehetővé tette az alacsony húzószilárdsággal (azonban nagy nyomószilárdsággal) rendelkező, rendkívül időtálló anyagok (elsősorban faragott kövek és különböző anyagú téglák) széles körű használatát, ezzel nagy fejlődést elindítva az építészetben. A legrégebbi, még ma is álló ív Mezopotámiában található (ezt az 1.2.1-es ábra mutatja), amely megközelítőleg 4100 éve épült, nagyrészt napon szárított sártéglából.



1.2.1. ábra. Edubalmah Templom 2100 BC,

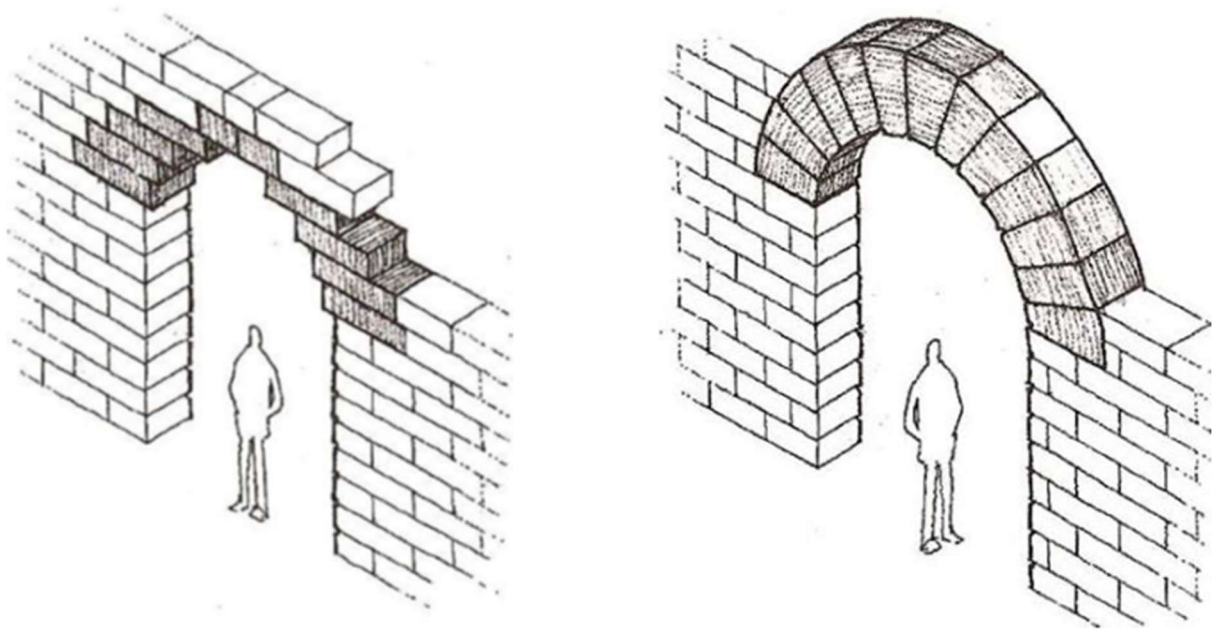
<https://traveltoeat.com/the-arch-in-architectureand-history>

A boltíves építési technika elterjedése elsősorban a rómaiaknak köszönhető, akik birodalmukon belül számtalan épületnél alkalmazták hidak, fürdők, vízvezetékrendszerek, valamint egyéb középületek építésénél. A Római Birodalom bukása után az ívek használata sok más építési technikával együtt egy időre feledésbe merült (a 6.-7. századra az európai világból eltűnt a vízkerék, a korrekt épületkitűzés, az alapozás igényes megoldása, valamint a Karoling korszakban még a mészégetés és oltás is), majd csak a 10.-12. században került újra elő. Európában a boltozatok és ívek nem csupán technikai funkcióval bírtak, hanem üzenetet is hordoztak (szakrális jelentőségük volt, jelképezték az építető igényességét, társadalmi és anyagi helyzetét, valamint a műszaki színvonalat és stabilitást is).

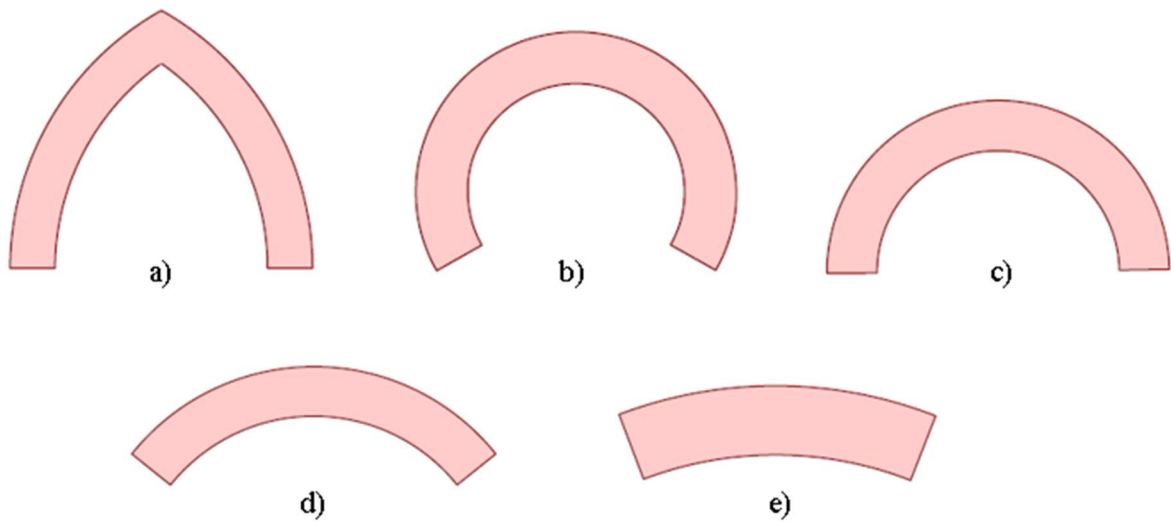
1.2.1. Falazott ívek típusai

A falazott ívet mechanikai viselkedésük alapján két fő osztályba lehet sorolni: (1) hamis ívek (ahol az ívet felépítő elemek viselkedése inkább konzolosnak mondható); (2) igazi ívek (ahol az ívet felépítő elemek elsősorban nyomásra vannak igénybevéve). A kettő közötti különbséget az 1.2.1.1-es ábra mutatja. Az igazi íveknek középvonaluk geometriája szerint jellemzően öt fő típusa van: a félkör, szegmens, csúcsos, lapos és patkó ív, ezeknek leegyszerűsített vázlata az

1.2.1.2-es ábrán látható (ez a csoportosítás elsősorban a szerkezeti viselkedést veszi figyelembe, egy-egy építészeti stíluson belül többféle kialakítás is megjelenhet, akár egy épületen belül is).



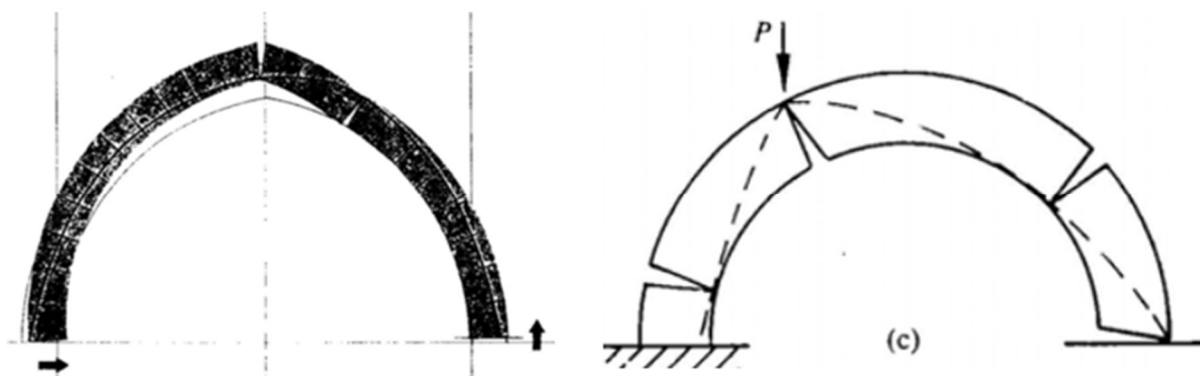
1.2.1.1. ábra. A bal oldal a „hamis”, a jobb oldal az „igaz” ívre mutat egy-egy példát. (Bagi, 2018)



1.2.1.2. ábra. Öt különböző ívtípus a középvonal geometriája szerint: (a)csúcsos, (b)patkó, (c)félkör, (d)szegmens, és (e)lapos/egyenes ív. (Bagi, 2018)

1.2.1.1. Valódi ívek tönkremenetele

A valódi ívek tönkremenetele leggyakrabban csukló kialakulásával megy végbe (a jelenség nem jár anyagi tönkremenetellel). Ez akkor fordul elő, amikor az ívben kialakuló támaszvonal valahol az ív geometriai körvonalába metsz (ekkor a metszéspontban csukló alakul ki, az ív metszésponttal szembe lévő oldala megnyílik). Az efféle tönkremenetel kialakulhat mind erő-, mind elmozdulás jellegű teherre is, ezekre példákat az 1.2.1.1.1-es ábra mutat.

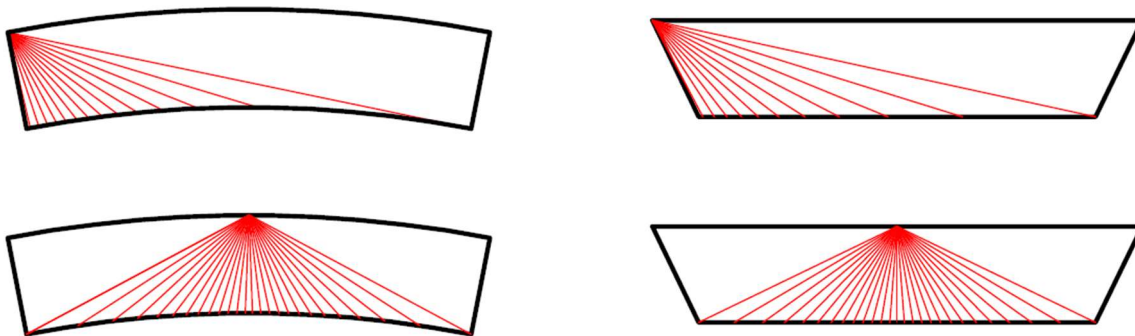


1.2.1.1.1. ábra. Két félkör ív csuklósodással történő tönkremenetele (bal) támaszmozgásra, valamint (jobb) erőteherre (Huerta, 2001).

Ezzel szemben az egyenes ívek esetében (ha a támaszok megfelelő módon és merevséggel vannak kialakítva, valamint, ha a teher felülről merőlegesen hat az ív hossz tengelyére) a tönkremenetel csakis az anyag törésével és/vagy a blokkok megcsúszásával következhet be. A lapos ívek bővebb ismertetését a következő (1.2.1.2.-es) fejezet tartalmazza.

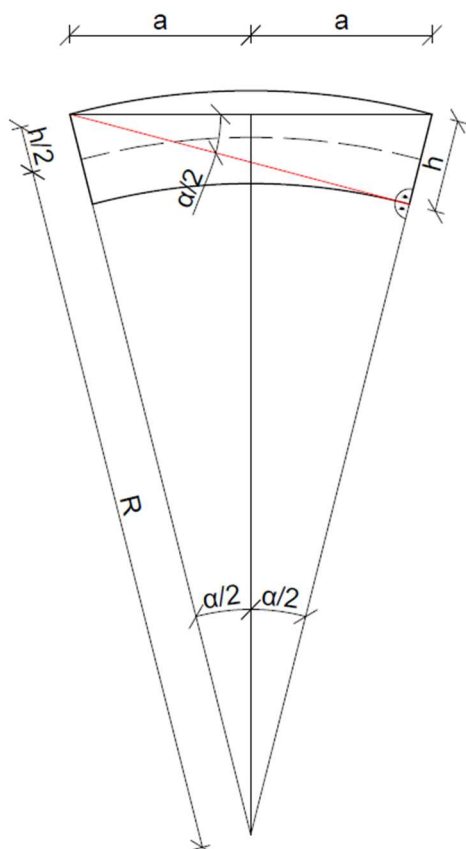
1.2.1.2. Lapos ívek bemutatása

Általánosságban azokat az íveket nevezzük laposnak, amelyeknek geometriai középvonala teljesen vagy szinte teljesen egyenes. Ez a megfogalmazás azonban igencsak hiányos, segítségével a szegmens és lapos ívek között nem állapítható meg egyértelmű határ. Ennél pontosabb definíciót Jacques Heyman fogalmazott meg 1966-os „The Stone Skeleton” című cikkében (Heyman, 1966), miszerint egy ív akkor tekinthető laposnak, ha a felső peremének bármely pontjából látható az alsó peremének összes pontja (anélkül, hogy a nézetvonalak valahol az íven kívülre esnének). Ennek a leírásnak a szemléltetését az 1.2.1.2.1-es ábra tartalmazza.



1.2.1.2.1. ábra. Heyman lapos ívekre vonatkozó definíciójának szemléltetése két különböző geometriai kialakítás esetében (pirossal jelölve a nézetvonalakat).

Ezen definícióból kiindulva a szegmens és lapos ívek közötti határt sikerült egyértelműen meghatároznom. Ahhoz, hogy egy ívet már laposnak hívhassunk, az alábbi egyenlőtlenségnek kell teljesülnie: $h \geq 2R \cdot \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, ahol az egyes paraméterek jelentését, valamint a képlet levezetését az 1.2.1.2.2-es ábra mutatja.



Kiindulás: lapos az ív ha a felső perem bármely pontjából rá lehet látni az alsó perem összes pontjára.

Felső sarokból a szemközti alsó sarokba húzott nézetvonal lesz a meghatározó, kritikus pontot érintőegyenessel kapunk.

$$a = (R+h/2) \cdot \sin(\alpha/2)$$

$$h \geq 2a \cdot \sin(\alpha/2)$$



$$h \geq 2(R+h/2) \cdot \sin^2(\alpha/2)$$

$$h \geq 2R \cdot \sin^2(\alpha/2) + h \cdot \sin^2(\alpha/2)$$

$$h \cdot (1 - \sin^2(\alpha/2)) \geq 2R \cdot \sin^2(\alpha/2)$$

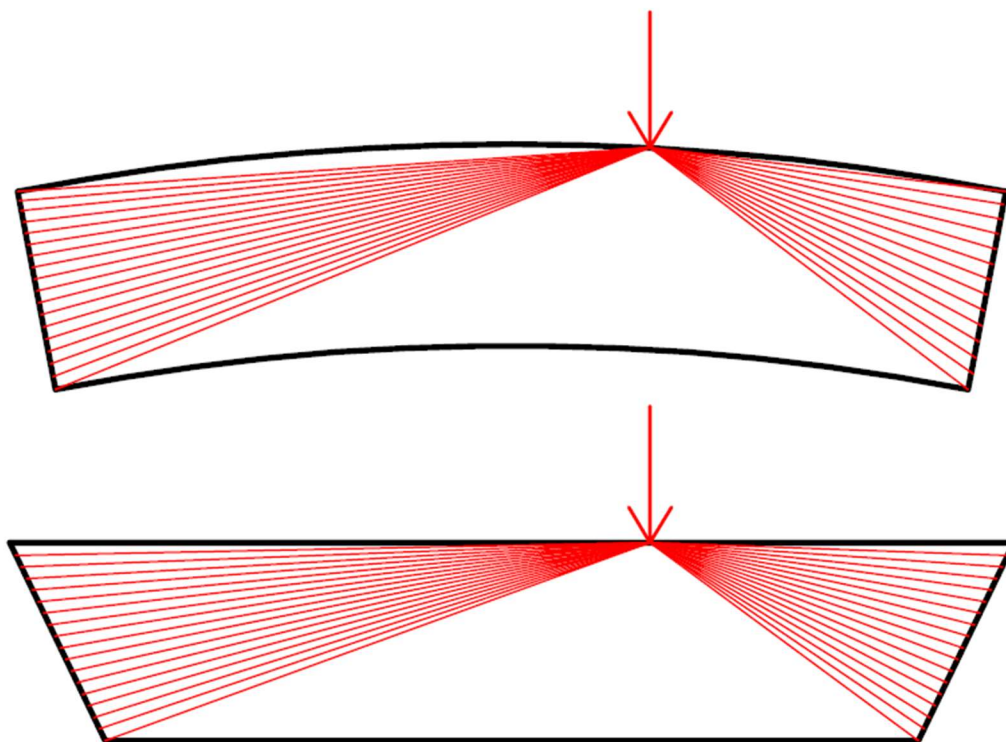
$$h \cdot (\cos^2(\alpha/2)) \geq 2R \cdot \sin^2(\alpha/2)$$

$$h \geq 2R \cdot \tan^2(\alpha/2)$$

Tehát egy szegmens ív már lapos ívnek tekintendő ha az alábbi egyenlőtlenség teljesül rá: $h \geq 2R \cdot \tan^2(\alpha/2)$

1.2.1.2.2. ábra. A szegmens és lapos íveket elválasztó kritikus magasságra vonatkozó képlet paraméterei és levezetése.

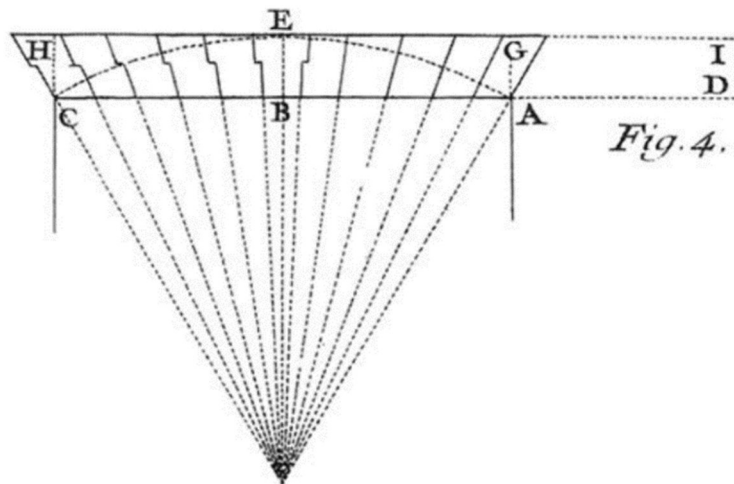
Az előzőekben ismertetett meghatározás mechanikai jelentése az, hogy az egyenes ívekben bármely, a felső peremen lefele ható koncentrált erő hatására ki tud alakulni egyensúlyi erőrendszer (erre az 1.2.1.2.3-as ábra mutat példát), azaz az ív mindig egyensúlyban van, amennyiben Heyman kiindulási feltételeivel élünk (az ívet felépítő anyag végtelen nyomószilárdsággal rendelkezik, húzószilárdsága zérus, valamint a blokkok nem csúszhatnak meg egymáson). Ezen tulajdonságuk miatt a lapos ívek nem alkalmazhatóak a falazott ívek vizsgálatára széles körben elterjedt heymani képlékeny határállapot-vizsgálati elméletek.



1.2.1.2.3. ábra. A lehetségesen kialakuló támaszvonalak intervalluma két különböző kialakítás esetében (koncentrált erőteherre).

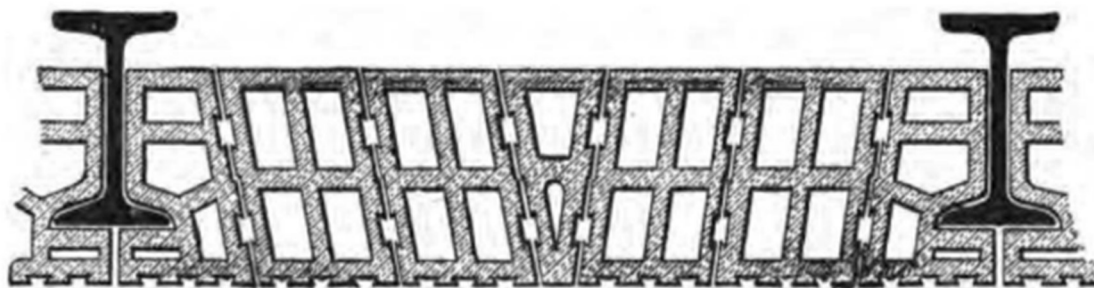
A lapos ívek leggyakrabban használt típusa az úgynevezett „áthidaló ívek”, amelyek általában ablakok, ajtók és kapuk fölött kerültek beépítésre, tipikusan 1-2 méteres támaszközzel (azonban ez ritka esetekben akár az 5-7 métert is elérheti). Az áthidaló ívek vastagsága és a támaszköz hosszának tipikus aránya $1/4$ - $1/3$ között van (bár ennél karcsúbb példák is léteznek). Az elsődleges probléma az ilyen ívekkel az, hogy a támaszoknál igen nagy vízszintes erők ébrednek, ami miatt csak vastag falak között, vagy masszív támpillérekkel együtt alkalmazhatóak (egy másik megoldást erre a gondra a szerkezetben elrejtett vonóvasak használata jelentett).

Jellemző probléma lehet még az elemek megcsúszása (főleg vastagabb íveknél), erre az elemek szélének lépcsős kialakítása bizonyult jó megoldásnak (habár ez faragott kövek esetében jelentősen növeli a megmunkálási időt). Az áthidalóívek tipikus kialakítását az 1.2.1.2.4-es ábra mutatja.



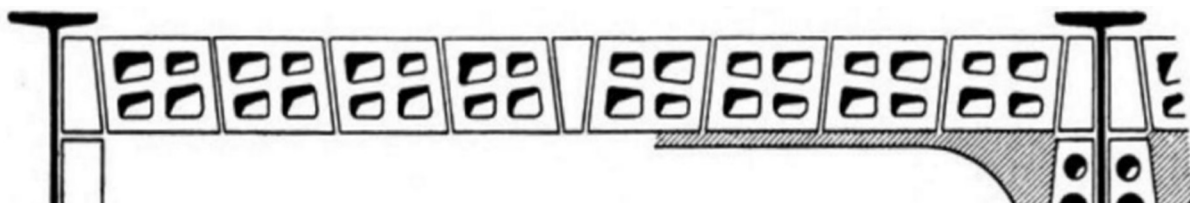
1.2.1.2.4. ábra. Egy áthidaló ív tipikus kialakítása, jobb oldalt lépcsőztetés nélküli, bal oldalt lépcsőztetett elemekkel. (H. Gautier, Dissertation sur l'épaisseur des culees des Pans, sur 10 Largeur des piles, sur 10 Portee des voussoirs, sur l'Erfort Et 10 Pesanteur des Arches adifferens surbaissemens, Paris, 1717, fig . 4 in pI. 11)

Habár az egymásra támaszkodó elemekből álló lapos ívek leggyakrabban áthidaló szerepet töltenek be, a 19. század végén, valamint a 20. század elején több földműszerkezet is készült hasonló technikával, ahol az egymásba kapcsolódó modulok béltestestek funkcióját töltik be. Ezekre az 1.2.1.5.5-ös, 1.2.1.2.6-os és 1.2.1.2.7-es ábra mutat példát.



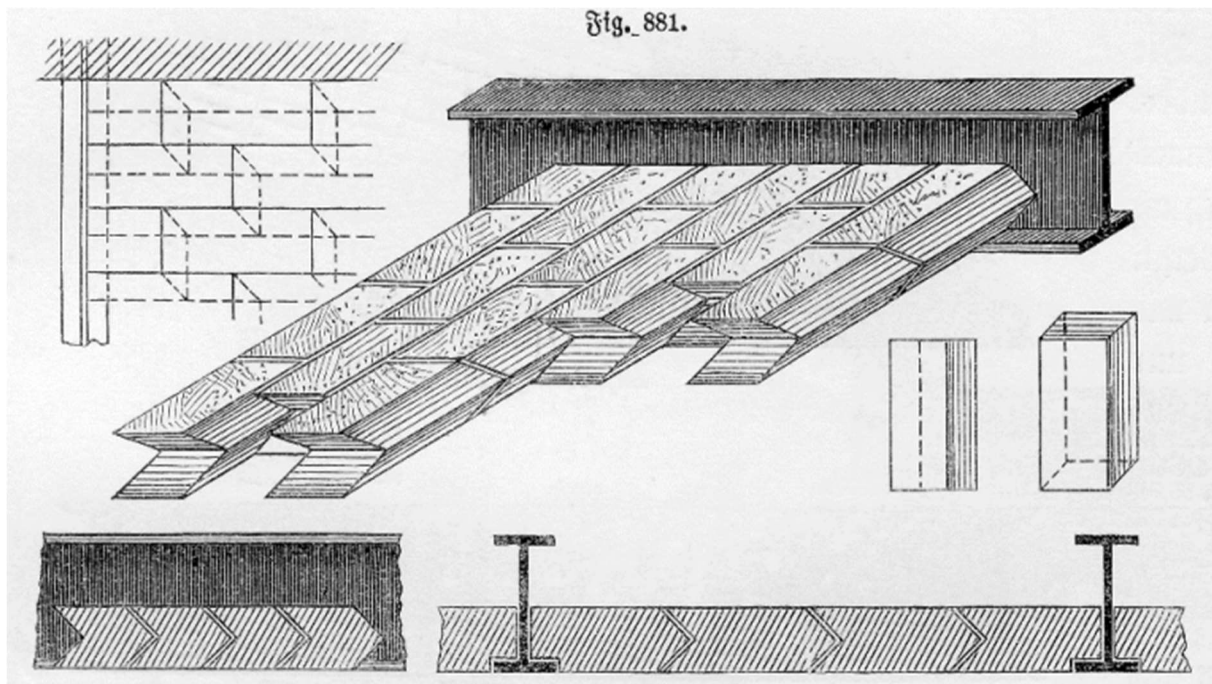
1.2.1.2.5. ábra. A Dulton-Peto földmetszete (1885).

https://attiladery.hu/download/08_tortszerk_vb1.pdf



1.2.1.2.6. ábra. A Sekura földmetszete (1900 körül épült).

https://attiladery.hu/download/08_tortszerk_vb1.pdf



1.2.1.2.7. ábra. A Triumph födém szerkezet (1890-es évek).

https://attiladery.hu/download/08_tortszerk_vb1.pdf

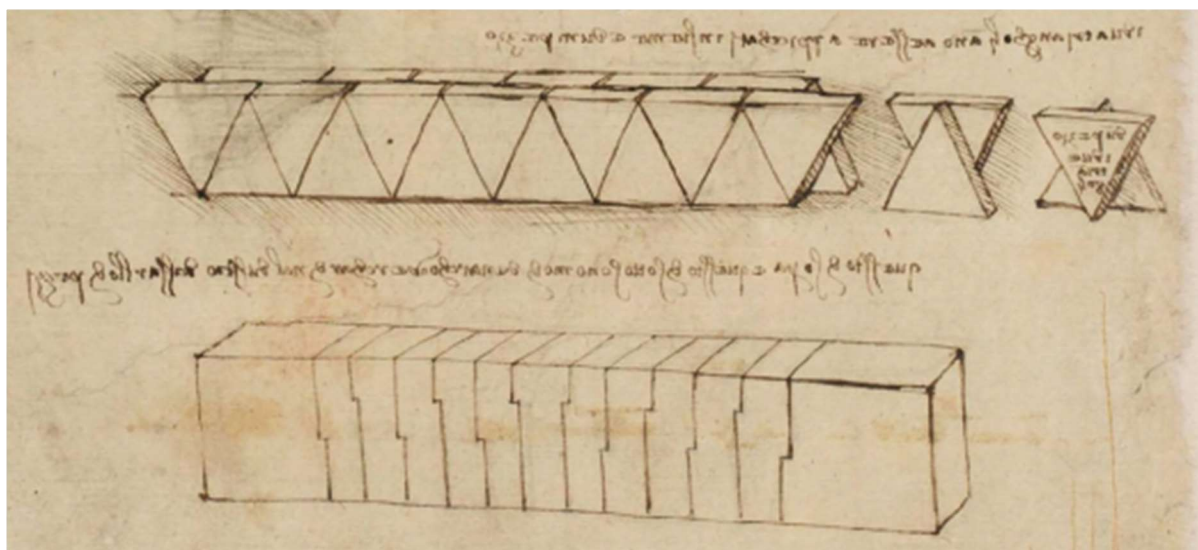
1.3 Leonardo da Vinci, Codex Atlanticus

Leonardo da Vinci (1452-1519) kétségkívül korának legkiemelkedőbb polihisztorja volt, aki művészeti alkotásain túl igazi mestere volt a mérnöki és természettudományoknak is. Kutatásaival és kísérleteivel jelentősen hozzájárult a hidrodinamikai, geometriai, szerkezettani, valamint gépészeti szakágak fejlődéséhez, ötleteinek tanulmányozásával a mai napig sok kutató foglalkozik (Boni, Royer, 2023; Marchetti, Costa, 2020; Bucolo et al., 2020; Ranjbaran et al. 2021; Palermo, Pagliara 2020).

A Codex Atlanticus Leonardo da Vinci kéziratos jegyzeteit és vázlatait tartalmazza (1478-tól 1519-ig), amelyeket Pompeo Leoni olasz szobrász gyűjtött össze a 16. század végén. A kódex 2238 oldalt tartalmaz, neve pedig da Vinci naplójának atlasz méretű lapjaira utal. Az eredeti kötet jelenleg a milánói Ambrosiana könyvtárban található, azonban digitalizált változata ingyenesen elérhető az interneten (<https://codex-atlanticus.ambrosiana.it/#/Overview>).

Dolgozatomban azzal a két javaslattal foglalkoztam, amelyeket Leonardo a kódexben vázolt lapos ívek kialakítására. Ezeknek eredeti rajzát az 1.3.1-es ábra mutatja. A képen szereplő szövegek közül az első sor („I dua triangholi anno a essere appicchati insieme e d’un pezzo”) a felső ívre vonatkozik, jelentése: "a két háromszöget össze kell ragasztani, hogy egy darabból álljon", míg a középső sor az ívek használatára tesz javaslatot („Questo di sopra e questo di

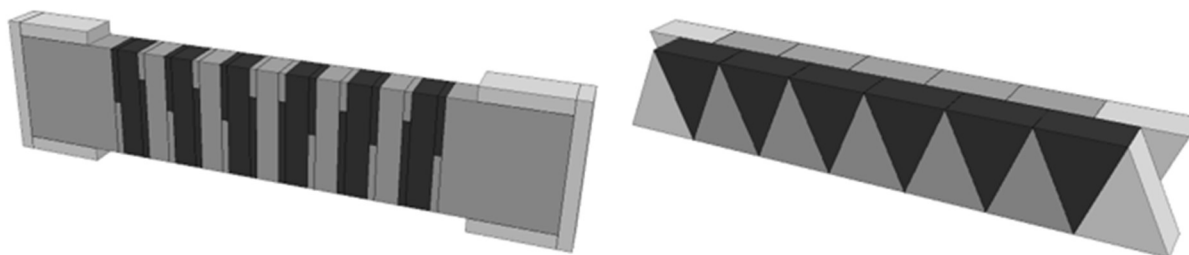
sotto sono modi d'un archo, over chardinal d'usscio, da ffarllo di pezzi”), jelentése: „ez a felső és ez az alsó egy ív, amely ajtók fölé, darabokból készítenő”.



1.3.1. ábra. Leonardo da Vinci eredeti rajzai a vizsgált ívekről. A dolgozat során a felsőre „háromszögekből álló” az alsóra „lépcsős” ívként hivatkoztam. <https://codex-atlanticus.ambrosiana.it/#/Overview>

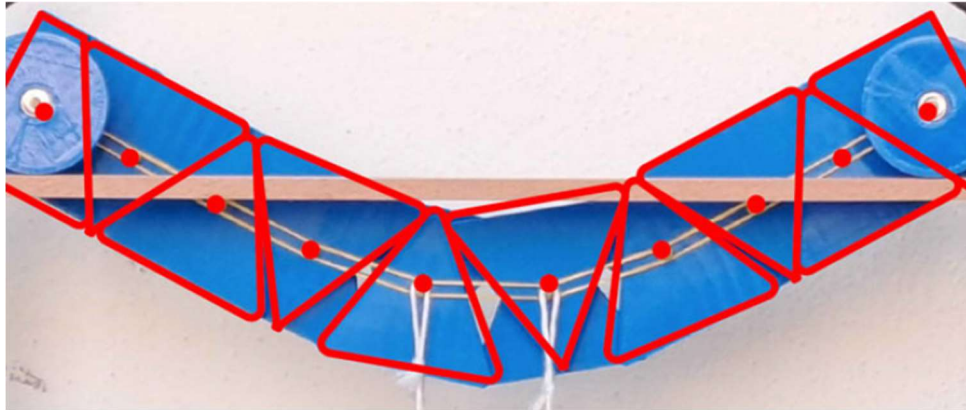
1.4 A saját vizsgálatok célja

Saját futtatásaim elsődleges célja a Leonardo da Vinci rajzaiban szereplő lapos ívek (amelyek számítógéppel megtervezett 3D-s változatát az 1.4.1-es ábra mutatja) mechanikai viselkedésének megértése, optimális geometriai arányainak megtalálása, valamint tesztelése különböző fesztávok, sarokméretek és terhelési típusok esetén. A futtatások során a háromszög alapú hasábokból álló ív igencsak kedvezőtlennek bizonyult (ezt bővebben a 4. fejezet mutatja be), mert az egymáshoz illesztett háromszögek könnyen leszakadtak, elváltak egymástól, így dolgozatom döntő része a lépcsős elemekből álló ív vizsgálatára vonatkozik.



1.4.1. ábra. Leonardo da Vinci rajzai alapján általam elkészített lapos ívek 3D-s modellje.

A háromszög alapú hasábokból álló ívvel két olasz kutató (Boni, Royer, 2023) részletesen foglalkozott, habár az ő modelljük az eredeti rajzoktól több szempontból is eltért: az elemek geometriai középpontjukon rudakkal vannak átütve, az egymás mellett lévő rudak pedig gumiszalagokkal vannak összekapcsolva. Boni és Royer ívét az 1.4.2-es ábra mutatja.

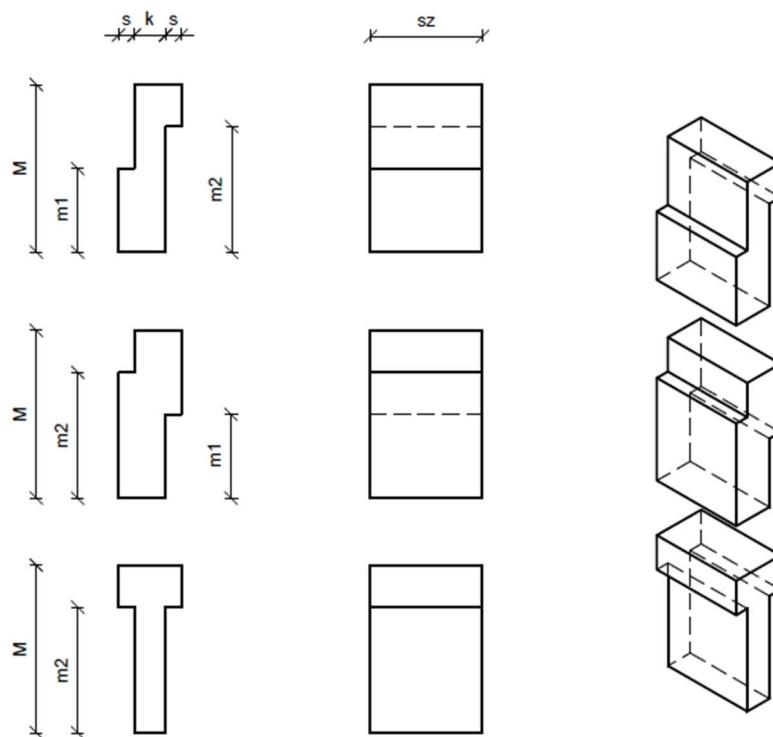


1.4.2. ábra. Boni és Royer által tesztelt ív 3D nyomtatott modellje.

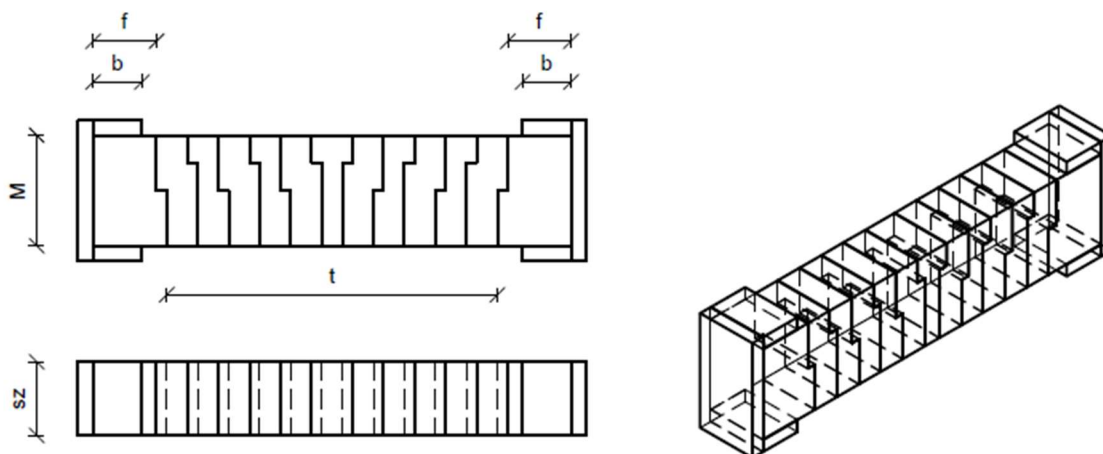
<https://doi.org/10.1098/rspa.2023.0453>

1.4.1 A saját vizsgálatok során használt jelölések

Az egyértelműség érdekében az ívek egyes méreteire a dolgozatomban az ebben a fejezetben feltüntetett jelölések szerint hivatkoztam. Ezeket a jelöléseket a 1.4.1.1-es és a 1.4.1.2-es ábra mutatja.



1.4.1.1. ábra. A vizsgált ívek közbenső elemeinek paraméteres méretei.

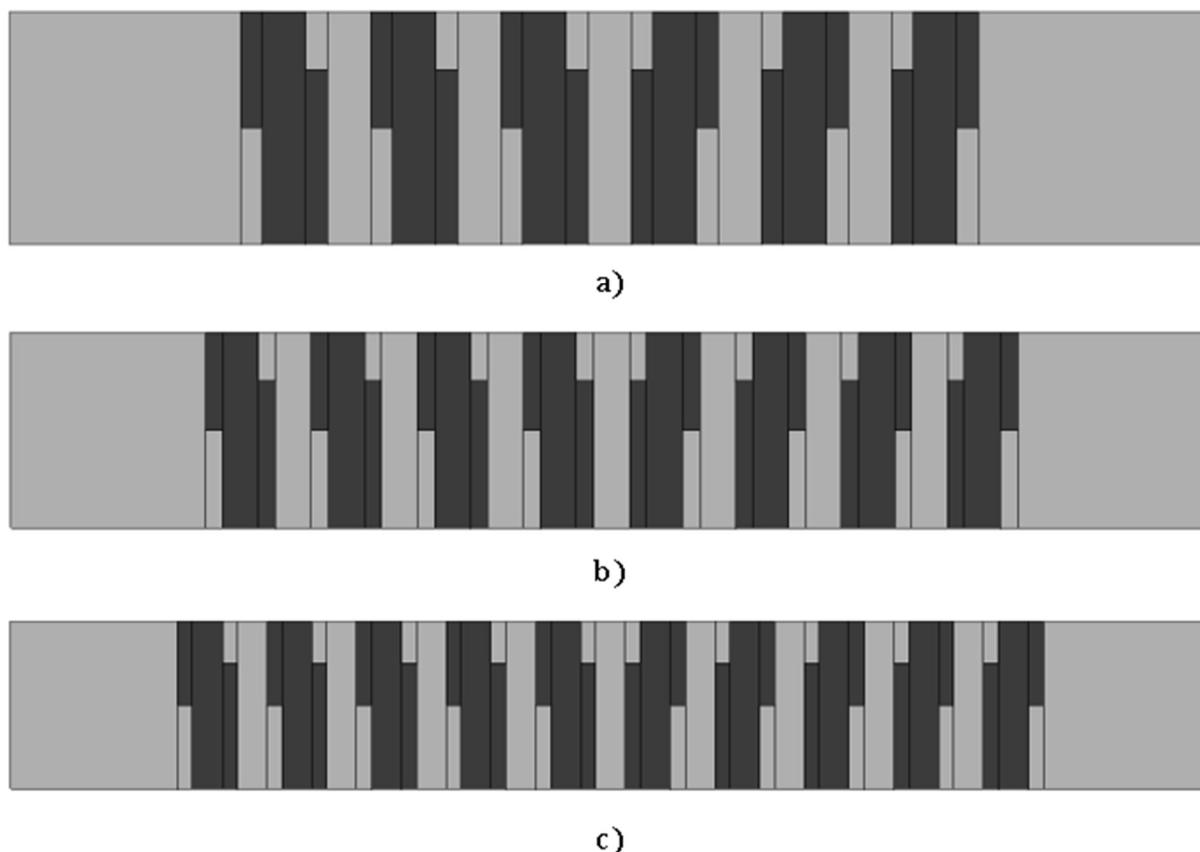


1.4.1.2. ábra. A vizsgált ívek támaszközének, valamint a megfogási méreteinek paraméterezése.

1.5. A vizsgálatok átfogó menete

A lépcsős ív vizsgálatával kapcsolatban elkészített futtatásaimat két csoportba osztottam. Az elsőre a dolgozatom során „tesztekként” vagy „próbafteratásokként”, a másodikra pedig „végleges” vagy „optimális geometriai méretekre vonatkozó” futtatásokként hivatkoztam. A próbafteratások elsődleges célja a végleges modellekben szereplő paraméterek és módszerek tesztelése, validációja volt. Ezeket részletesen a 3. fejezet mutatja be.

A végleges futtatásokban alapvetően három, méreteiben jelentősen eltérő ív szerepel (ezeket az 1.5.1-es ábra mutatja), amelyeknél a támaszköz (t) az ív magasságának (M) háromszorosa (a), négyszerese (b), valamint ötszöröse (c) volt. A kilógó sarkok (m_1 , m_2) magassága (az eredeti rajz alapján) a futtatások összessége alatt az ív magasságának felével, valamint háromnegyedével voltak egyenlők. Ezen futtatások célja az erőtehernek legmegfelelőbb kialakítások meghatározása volt az a)-val jelölt ív esetében (két különböző anyag anyagjellemzőivel). A legkedvezőbben viselkedő kialakítást további két támaszköz esetében is megvizsgáltam (b,c), mind erő, mind pedig elmozdulás-jellegű teherre. A végleges futtatásokat bővebben a 3.5.-ös fejezet mutatja be.



1.5.1. ábra. A végleges futtatásokban szereplő ívek t/M arányai.

2. A vizsgálatok eszközei

Ezt a fejezetet a 3DEC honlapján található leírás (Itasca, 2024), valamint a „Discrete Computational Mechanics of Masonry Structures” (Bagi, Angelillo, 2023) könyv alapján írtam, tartalma elsősorban a dolgozatom keretében elvégzett futtatások programozási hátterének ismertetésére szolgál (a különböző részokról további információk az Itasca (www.itascacg.com) honlapján érhetőek el ingyenesen).

2.1 A diszkrét elemek módszeréről általánosságban

A diszkrét elemek módszere (DEM) kifejezés általánosságban azokat a numerikus modelleket jelöli, amelyek képesek az egymástól elkülönülő testekből álló rendszerek modellezésére, amelyekben az elemek képesek a szomszédjaiktól való részleges vagy teljes elválásra, egymástól független véges elmozdulásokra és elfordulásokra, valamint új kapcsolatok kialakítására. A modellekben szereplő blokkok lehetnek tökéletesen merevek, valamint deformálhatóak (néhány modellben törhetőek), az egymással érintkező blokkok közötti kapcsolatok a testekkel egyenlő mértékben fontosak. Az első DEM modell az 1960-as évek végén született meg (Cundall, 1971) kőhalmazok vizsgálatára. A végeselemes (FEM)

módszerekkel ellentétben (ahol a diszkretizáció csupán numerikus szempontokból szükséges) a DEM modellek képesek a falazott szerkezetek különálló elemekből való felépítésének teljes vizsgálatára. Általánosságban egy numerikus program akkor mondható diszkrét elemesnek, ha az alábbi három alapvető kritérium teljesül rá:

-A modell véges kiterjedésű és számú, egymástól elkülönülő elemekből áll, amelyek mind saját alakkal, méretekkel és pozícióval rendelkeznek.

-Az elemek képesek egymástól független véges (azaz nagy) elmozdulások végzésére.

-A blokkok érintkezését a kód automatikusan felismeri és megfelelő módon kezeli, a blokkok egymástól részlegesen vagy teljesen elválhatnak, valamint új kapcsolatokat létesíthetnek.

A jelenleg létező DEM programok mindegyike „lépésről lépésre”, azaz elmozdulásnövekmények sorozataként (eltérő programok gyakran különböző matematikai eszközöket használva) modellezik a vizsgált szerkezetek mechanikai viselkedését. Az 1990-es évek végétől kezdve (amikor a számítógépes fejlődés elérte azt a pontot, hogy a valós, összetettebb problémák elemzése realisztikus időkeretek között megvalósulhasson) a különböző DEM kódok széles körben elterjedtek a blokkokból összeálló falazott (masonry) szerkezetek vizsgálatára (Lemos, 2007; Tóth et al, 2009; Rizzi et al, 2014; McInerney & DeJong, 2015; Forgács et al, 2017 etc.).

2.2. A 3DEC 7.0

2.2.1. A program általános bemutatása

A 3DEC egy háromdimenziós diszkrét elemes numerikus program, amely a nem folytonos (discontinuum) rendszerek modellezésére fejlesztettek ki. A program öse a múlt században széles körben tesztelt, szintén az Itasca által létrehozott UDEC (Cundall, 1971), amely lényegében azonos elveken alapult, viszont a modellezés csak két dimenzióban valósult meg. A modellek véges számú és kiterjedésű konvex poliéder blokkokból állnak (a konkáv elemeket több blokk összeillesztésével („join”-olásával) lehet létrehozni), amelyek lehetnek deformálhatók, vagy tökéletesen merevek (ezekről bővebben a 2.2.2.-es fejezet szolgáltat információkat). Ezek egymástól függetlenül elmozdulhatnak, elfordulhatnak és új kapcsolatokat teremthetnek, ezeket a kapcsolatokat a program automatikusan felismeri és kezeli. A program által nyújtott analízis nagy elmozdulásokra is érvényes, ezzel nagyon jó eszközt adva a közhalmazok és falazott szerkezetek mechanikai viselkedésének elemzésére.

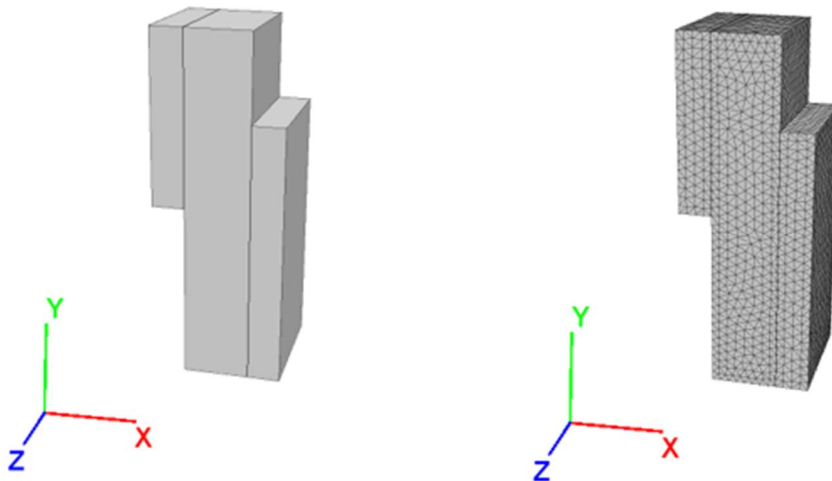
2.2.2. A blokkok anyagi viselkedésének reprezentációja

2.2.2.1. Tökéletesen merev blokkok

A legkorábbi UDEC még merev elemeket alkalmazott (Cundall, 1971). A merev testekből álló modellek jó közelítést adnak arra az esetre, ha a vizsgált szerkezet nagy szilárdságú és nagy merevségű testekből áll. Ez esetben a deformációkat a modell a blokkok egymásba nyomódásával, azaz átfedések létrejöttével reprezentálja. Ha az alakváltozások nagysága nem elhanyagolható, akkor fontos a modellben szereplő kapcsolati merevségeket pontosan meghatározni (oly módon, hogy a valós deformációkból származó elmozdulásokat jól tükrözze a modell). A merev testes modellek képezik a legegyszerűbb DEM modelleket az anyagi jellemzők terén, habár ennek előnyei elsősorban a dinamikus problémák elemzésénél jelennek meg.

2.2.2.2. Deformálható blokkok

A merev elemekből álló modellek alternatívájaként a UDEC fejlettebb verziói a 70-es évek második felétől már deformálható blokkokkal is tudtak dolgozni (Cundall, 1978). Ezt egy belső végeselemes felosztással érték el (a dolgozat későbbi részeiben ezekre a szimplex alakú végeselemekre „Zónák” -ként hivatkoztam). A 3DEC-ben ez a diszkretizáció konstans alakváltozású tetraédereken alapszik (erre a felosztásra példát a 2.2.2.2.1-es ábra mutat). Feltételezzük, hogy egy tetraéderen belül az alakváltozástenzor konstans, vagyis a tetraéder minden pontjában azonos. A tetraéderes felosztás előnye, hogy bármely tetszőleges poliéderes blokk geometriára alkalmazható, valamint a felosztás elvégzésére számos jól tesztelt algoritmus létezik. A már alakváltozni képes blokkok lehetővé teszik a feszültségek számítását, emellett jobb közelítést szolgáltatnak a heterogén, valamint puhább anyagok modellezésére. A felosztás sűrűsége jelentősen befolyásolhatja a vizsgálatok eredményeit, ez például hajlított elemeknél jelentős. A valós szerkezeti viselkedés modellezése általánosságban annál pontosabb, minél finomabb a felosztás, ennek hátránya viszont a futási idő exponenciális növekedése. A zónák anyagmodellje a gyakorlatban a legtöbb vizsgálat során lineárisan rugalmas, azonban a 3DEC számos beépített anyagmodellel rendelkezik, valamint felhasználók által létrehozott modelleket is elfogad.

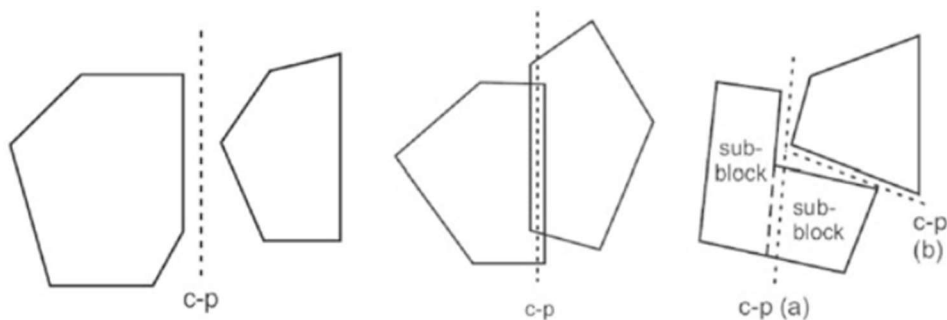


2.2.2.2.1. ábra. Téglatest alakú blokkokból összeállított konkáv elem a tetraéder alapú felosztás előtt (balra), valamint után (jobbra).

2.2.2.3. Blokkok közötti kapcsolatok reprezentációja

A blokkok közötti erők átadásáért minden esetben a kapcsolatok a felelősek. A 3DEC-ben ez az úgy nevezett „smooth contact” módszerrel van megoldva, ami azt jelenti, hogy erők átadásához a blokkoknak valamilyen véges mértékben egymásba kell nyomódniuk. A kapcsolati nyomóerőket a program ezután az egymásba nyomódás mélységéből számolja, ezek egyenesen arányosak a kapcsolati merevségekkel. Ez az egymásbanyomódás a geometria szempontjából jellemzően elhanyagolhatóan kicsiny a deformálható blokkos modellek esetében (itt általában az egymásbanyomódás a tökéletlen felületek deformációját, vagy a blokkok közötti habarcsréteg összenyomódását jelképezi), viszont, ha a modell tökéletesen merev testekből áll, akkor a valós deformációk egészét ezek az egymásbanyomódások reprezentálják.

A blokkok között topológiai szempontból hatféle típusú kapcsolat jöhet létre, amelyek az élek, csúcsok és felületek érintkezéseinek variációjaként állnak elő. Az összes lehetőség ellenőrzésének elkerülése érdekében a 3DEC-ben az úgynevezett „common-plane” módszert alkalmazzák, amely igen hatékony megoldásnak bizonyult arra, hogy a program eldöntse, van-e kapcsolat két blokk között. (A „common-plane” azt a síkot jelenti, amelyre minimális lesz az egymással érintkező blokkok maximális átfedése, egymásbanyomódása, erre a 2.2.2.3.1-es ábra mutat példát.) Hátránya viszont, hogy csakis konvex geometriával rendelkező blokkok esetén alkalmazható, így a konkáv elemek létrehozása csak több blokk összeillesztésével lehetséges.



2.2.2.3.1. ábra. A „common-plane” elhelyezkedése síkban.

(Bagi,Angelillo, CISM)

2.2.3. A megoldási algoritmus

A 3DEC (mint sok más DEM program) explicit időlépéses algoritmust használ a folyamatok modellezésére, ami jól alkalmazhatónak bizonyult a lineáristól eltérő, gyorsan változó rendszerek vizsgálatára, valamint különböző csillapítások alkalmazásával statikus problémák megoldására is alkalmas (ilyen esetekben a rezgések csillapítása elősegíti a rendszer egyensúlyhoz való konvergálását). Az explicit időlépéses algoritmusok általános számítási ciklusa két részből áll, ezeket a program minden időlépésben elvégzi. Ezek közül az első a mozgástörvények alkalmazása, amely új sebességeket és elmozdulásokat eredményez, a második a blokkokat alkotó anyagra (deformálható esetben) és kapcsolatokra vonatkozó egyenletek alkalmazása, amiből az új feszültségek és erők adódnak (ezt a folyamatot a 2.2.3.1-es ábra mutatja be).



2.2.3.1. ábra. Az explicit időlépéses algoritmusok általános folyamatábrája.

Az időlépések hossza a numerikus stabilitás elérése érdekében nem haladhat meg egy kritikus határértéket, amely elsősorban a vizsgált szerkezet merevségétől, valamint legkisebb elemeinek méreteitől függ (emiat merevebb és vagy kisebb elemeket tartalmazó szerkezetek modellezése

sokkal időigényesebb lehet). Habár a szükséges időlépések hosszát a program automatikusan számolja, a 3DEC felhasználók által előre megszabott időlépés-hosszakat is elfogad (erre különleges esetekben lehet csak szükség). Ezek miatt a különböző merevségi paramétereket érdemes realisztikus, és a program által is jól kezelhető értékeknek megválasztani.

3. A lépcsős ívvel kapcsolatos futtatások

3.1. Geometriai kialakítás

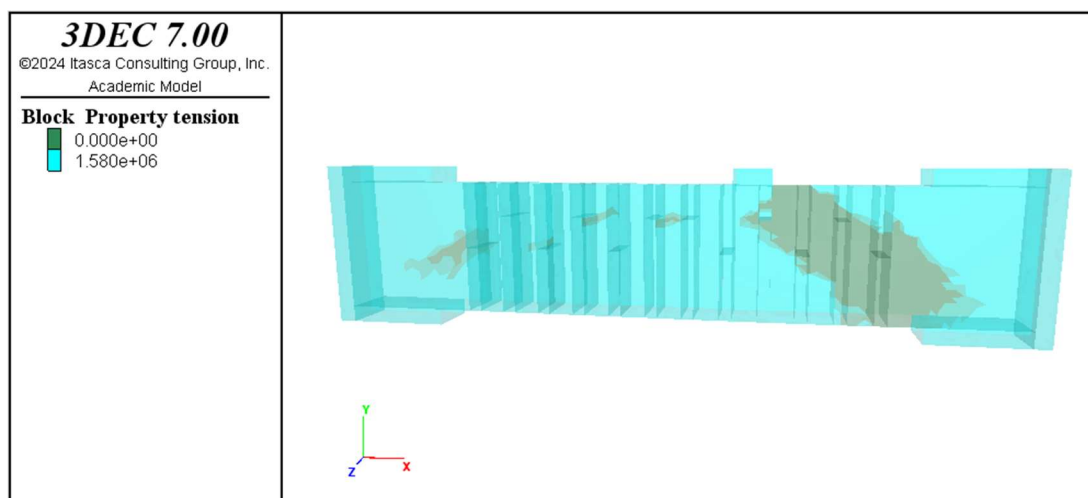
A 3DEC-en belül a geometriát különböző parancsokkal lehet létrehozni. A lépcsős ív kialakítását egymáshoz illesztett téglatestekkel oldottam meg, a „brick” parancssal (ennek lényege az, hogy a téglatesteknek meg kell adni a terjedelmét mindhárom tengely irányában egy kezdő és egy befejező x,y és z koordinátával). A futtatások során a koordinátarendszer két vízszintes nullpontja az ív geometriai szimmetriatengelyeivel esett egybe (ez a numerikus hibák miatt volt fontos, így csökkentve az ezekből kialakulható aszimmetrikus deformációkat, habár ez elsősorban nagyobb és összetettebb rendszerek vizsgálatánál lehet számottevő). A geometriai kódok paraméteres kialakítását az Excel-lel (<https://www.microsoft.com/hu-hu/microsoft-365/excel>) oldottam meg, ezzel jelentősen megkönnyítve az ezzel járó folyamatos manuális munkát (esetemben a geometriai kódok kialakításonként nagyjából 70-200 sor terjedelműek voltak).

3.2. Anyagjellemzők

3.2.1. A zónák anyagmodellje

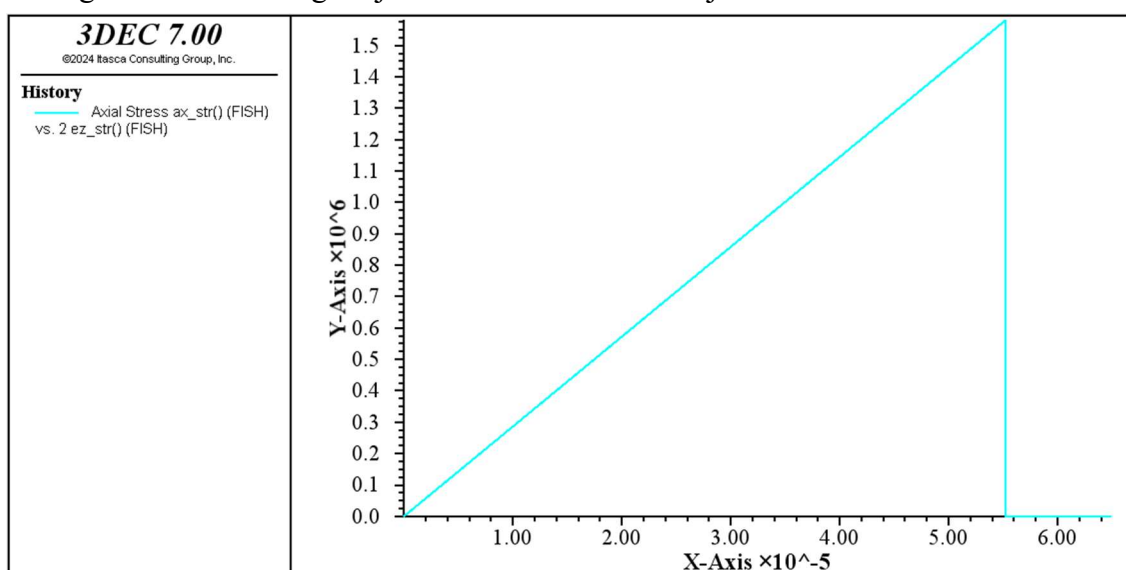
Az összes futtatás esetében „Strain-softening” anyagmodellt használtam, ami a Mohr-Coulomb tönkremeneteli modellen alapszik, azzal az eltéréssel, hogy a blokkokat felépítő tetraédereknek véges nyírási és húzási ellenállásuk is van, ami a folyási határ elérése után előre megszabott mértékkel csökkenni kezd. Ezt felhasználva a blokkok törhetőségét úgy oldottam meg, hogy a folyási határ elérése után a tetraédereket képező anyag nyírási és húzási ellenállása egyből nullára csökken (erre példát a 3.2.1.1-es ábra mutat). Fontos kiemelni, hogy a repedések nem folytonossági hiányként jelennek meg az ábrázolásban, vizuális megjelenítés szempontjából továbbra is folytonosnak fog látszódni a valójában már eltört elem. A repedések azonosításához a szerkezet modelljét anyagjellemzők, ezen belül „cohesion” (kohézió) és „tension”

(húzószilárdság) szerint kellett megjelenítenem, ennek segítségével tisztán láthatóvá vált, hogy mely részekben merült ki az anyag teherbírása, hol alakultak ki a repedések.



3.2.1.1. ábra. Egy tesztelt ív „húzási” repedései.

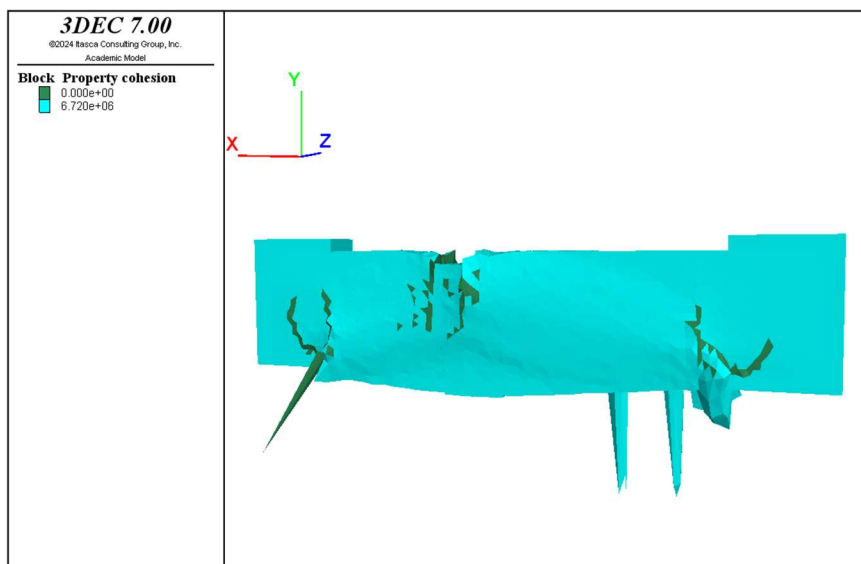
Az anyagi viselkedés megértésére és szemléltetésére egy egyszerű modellkísérletet végeztem, ami egy 1 méter élhosszúságú kockából áll, amely tiszta húzásra van igénybevéve (két szemközti oldala folyamatos előírt sebességgel távolodik egymástól). A kocka anyagának feszültség-alakváltozás diagramját a 3.2.1.2-es ábra mutatja.



3.2.1.2. ábra. Az anyagmodell teszteléséből kapott $\sigma(\epsilon)$ függvény.

Az elsődleges problémát az anyagi viselkedésben a korlátozatlan képlékeny alakváltozások létrejötte jelentette, mivel miután egy tetraéder teherbírása kimerült, valószínűleg nagy deformációk jöhetnek létre (példa a 3.2.1.3-as ábrán). Azonban ez a teherbírást nem befolyásolta, a jelenség jellemzően csak a maximális teherszint elérése után jelent meg. A probléma a futási idővel volt, mivel a húzási ellenállásukat elvesztett részek könnyen

„szabadesésbe” kezdtek, ami miatt az egyensúly megkeresése lehetetlen feladattá vált, ezzel megnehezítve a futtatások tömegesítését. A probléma kiküszöbölésére végül a tehernövekmények nagyságának csökkentése vált be, ezt bővebben a 3.3.4.-es fejezet mutatja be.



3.2.1.3. ábra. A fejezetben tárgyalt folyási probléma.

3.2.2. Zónák anyagjellemzői

Futtatásaim során mészkövek, valamint egy 3D nyomtatott beton anyagjellemzőt használtam fel. A mészkő anyagi paramétereinek már 3DEC-ben tesztelt értékeit az Itasca hivatalos honlapjáról kerestem ki ([Zone Properties — 3DEC 7.0 documentation](#)), míg az említett betonét egy a 3D nyomtatott betonokról szóló szakcikkből (Juhang et al., 2022). A modell végeselemes felosztásának sűrűségét saját próbafuttatásaim alapján választottam meg, ezeket bővebben a 3.2.2.1.-es fejezet mutatja be. A futtatások összességében az íveket felépítő elemek húzásra, valamint nyírásra voltak törhetőek (az előző fejezetben bemutatottak szerint). A felhasznált anyagok anyagjellemzőit a 3.2.2.1-es és a 3.2.2.2-es táblázat foglalja össze.

Mészkő		
Rugalmassági modulus	[GPa]	28,5
Poisson tényező	[-]	0,29
Húzószilárdság	[MPa]	1,58
Nyírószilárdság	[MPa]	6,72
Nyomószilárdság	[MPa]	200
Súrlódási együttható	[°]	42
Sűrűség	[kg/m ³]	2300

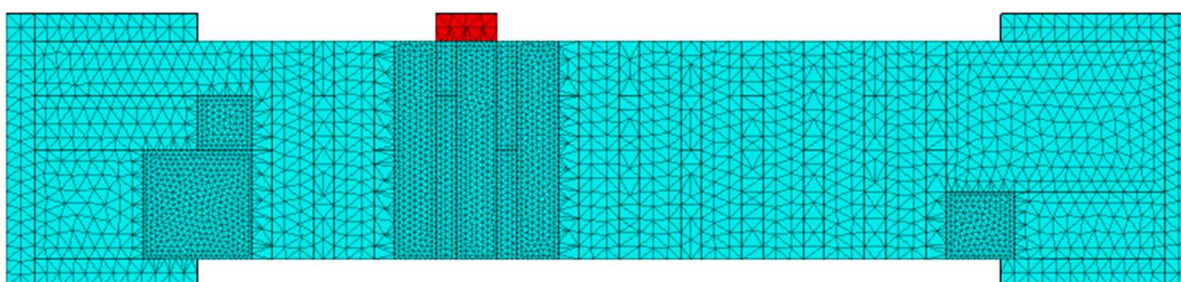
3.2.2.1. táblázat. A futtatásaim során felhasznált mészkő anyagjellemzői.

Beton		
Rugalmassági modulus	[GPa]	35,5
Poisson tényező	[-]	0,2
Húzószilárdság	[MPa]	1,5
Nyírószilárdság	[MPa]	1,2
Nyomószilárdság	[MPa]	50
Súrlódási együttható	[°]	40
Sűrűség	[kg/m ³]	2500

3.2.2.2. táblázat. A futtatásaim során felhasznált beton anyagjellemzői.

3.2.2.1 Zónák élhosszúságával kapcsolatos futtatások

A blokkok zónákra (azaz tetraéder alakú végelemekre) osztásával kapcsolatban 5+1 futtatást végeztem el, amelyeknek célja annak a vizsgálata volt, hogy a zónák élhosszúsága milyen mértékben befolyásolja az ívek teherbírását, valamint a tönkremenetel módját. Az első öt futtatásban a zónák élhosszúsága 0,03-0,11 között mozgott, a felosztás az ív minden blokkjában azonos volt. Ezzel szemben az utolsó futtatás során (a 3.2.2.1.3-as ábrán 0,02-vel jelölt esetben) csak azokban a blokkokban volt 0,02-es felosztás, ahol jellemzően létrejöttek a repedések, a többi elemben 0,05 volt az értéke (ezt a felosztást a 3.2.2.1.1-es ábra mutatja).

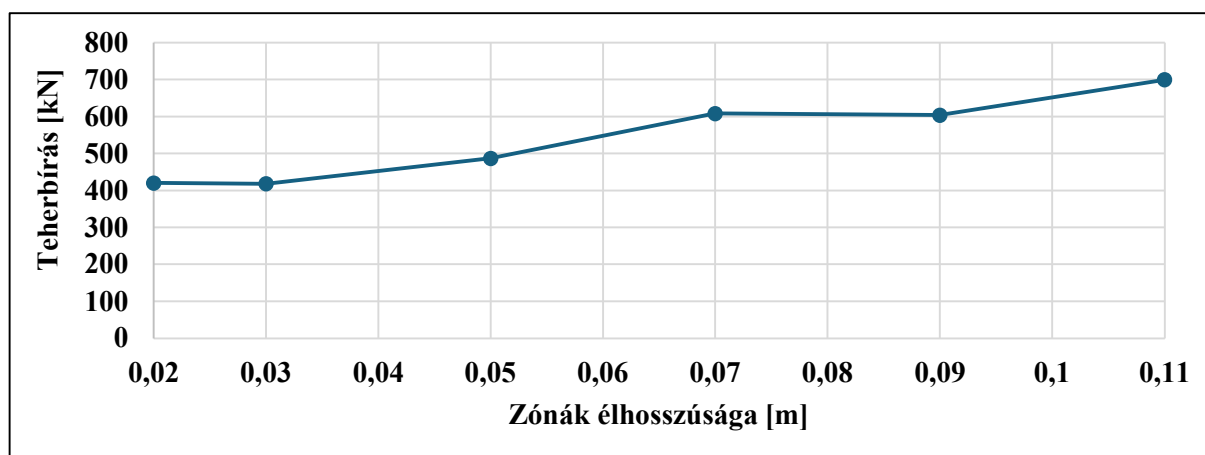


3.2.2.1.1. ábra. A többletől felosztás jellegében eltérő 0,02-es felosztású ív.

A teszt során a 3.2.2.1-es táblázatban szereplő anyagjellemzőket használtam, a kapcsolatokat anyagjellemzőit, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paramétereit a 3.2.2.1.2-es táblázat tartalmazza. A terhelőblokkot a 3.4.2.-es fejezetben kijelölt pozícióban helyeztem el, a terhelés intenzitása $675 \frac{N}{\text{Teher épcső}}$ volt. A vizsgálat eredményeit a 3.2.2.1.3-es diagram foglalja össze.

Jellemző geometriai méretek		
sz	[m]	0,3
M	[m]	0,8
s	[m]	0,075
k	[m]	0,15
m1	[m]	0,4
m2	[m]	0,6
b	[m]	0,6
f	[m]	0,8
t	[m]	2,4
Közbenső elemek száma	[db]	11
Kapcsolatok anyagjellemzői		
Kapcsolatok normálmerevsége	[Pa/m]	1,00E+10
Kapcsolatok nyírási merevsége	[Pa/m]	1,00E+10
Súrlódási együttható	[°]	42

3.2.2.1.2. táblázat. A vizsgálat során használt kapcsolatok anyagjellemzői, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paramétereit.



3.2.2.1.3. ábra. A vizsgált ív teherbírási a felosztás sűrűségének függvényében.

Ahogy azt a 3.2.2.1.3-as ábra mutatja, a teherbírási a tetraéderes felosztás élhosszúságával együtt fokozatosan csökkent, azonban a tönkremenetel módja minden esetben jó egyezést mutatott. A teherbírási csökkenését elsősorban az okozta, hogy a sűrűbb felosztások esetében a repedések, habár kisebbként, de alacsonyabb teherszinten ki tudtak alakulni, ezzel csökkentve a „dolgozó” keresztmetszetet, ami újabb repedések kialakulásához vezetett. Mivel a teherbírási csökkenésének tendenciája jelentősen alábbhagyott a kisebb élhosszúságok esetében, valamint mivel a tönkremenetel módja nem függött erősen a zónák élhosszúságától, a végleges futtatásokhoz a (3.2.2.1.1-es ábra által bemutatott) 0,02 méteres élhosszúságú felosztást választottam.

3.2.3. Kapcsolati anyagjellemzők

Mivel a köbök a valóságban nem képesek egymásba nyomódásra, a kapcsolati merevségeknek végtelen nagyok kellene lenniük, ez azonban végtelen nagy futási időkhöz is vezetne. Emiatt a kapcsolati merevségek végleges értékét 8 futtatás alapján választottam meg, amelyek annak vizsgálatára vonatkoztak, hogy a teherbírást és a tönkremenetel módját mennyiben befolyásolják ezek a jellemzők (mik azok a legnagyobb merevségi értékek, amelyekkel még racionális idő alatt elkészíthetők a szükséges vizsgálatok). A végleges futtatásokhoz felhasznált kapcsolati anyagjellemzőket a 3.2.3.1-es táblázat mutatja (a táblázatban nem szereplő értékek, mint például: dilatáció, húzószilárdság, stb. zérus értékkel bírnak).

Kapcsolati anyagjellemzők	
Kapcsolatok normálmerevsége [Pa/m]	1,00E+13
Kapcsolatok nyírási merevsége [Pa/m]	1,00E+13
Súrlódási együttható [°]	42

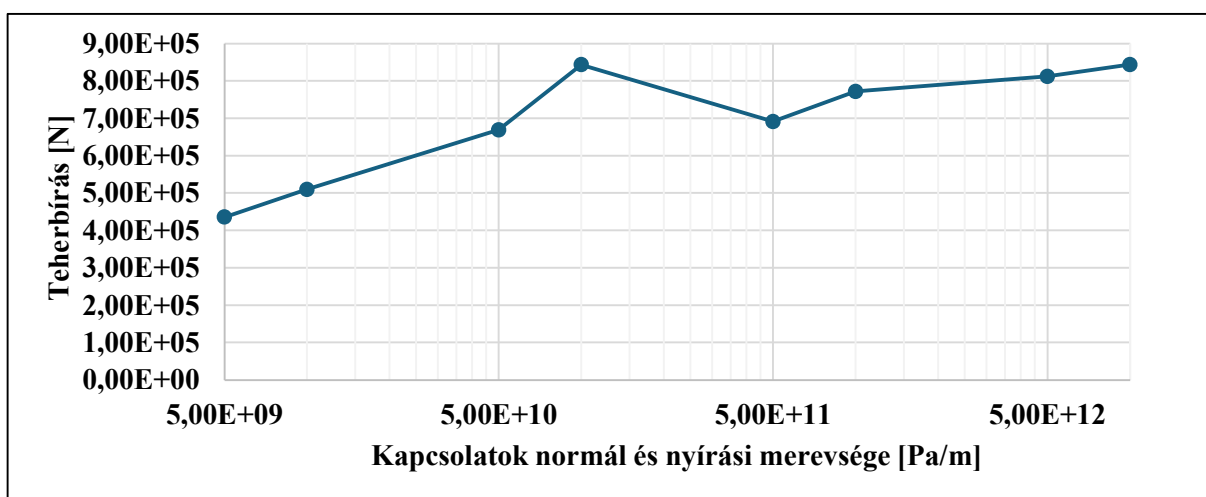
3.2.3.1. táblázat. A végleges futtatások során felhasznált kapcsolati anyagjellemzők.

3.2.3.1. A kapcsolati merevségekkel kapcsolatos futtatások

A kapcsolati merevségek teherbírásra, valamint a tönkremeneteli módra gyakorolt hatását 8 darab futtatással vizsgáltam. A teszt során a 3.2.2.1-es táblázatban szereplő anyagjellemzőket használtam, a kapcsolatok anyagjellemzőit, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paramétereit a 3.2.3.1.1-es táblázat tartalmazza. A terhelőblokkot a 3.4.2.-es fejezetben kijelölt pozícióban helyeztem el, a terhelés intenzitása $675 \frac{N}{Tehe \text{ épcső}}$ volt. A vizsgálat eredményeit a 3.2.3.1.3-es diagram foglalja össze.

Jellemző geometriai méretek		
sz	[m]	0,3
M	[m]	0,8
s	[m]	0,075
k	[m]	0,15
m1	[m]	0,4
m2	[m]	0,6
b	[m]	0,6
f	[m]	0,8
t	[m]	2,4
Közbenső elemek száma	[db]	11
Kapcsolatok anyagjellemzői		
Kapcsolatok normálmerevsége	[Pa/m]	Változó
Kapcsolatok nyírási merevsége	[Pa/m]	Változó
Súrlódási együttható	[°]	42

3.2.3.1.1. táblázat. A vizsgálat során használt kapcsolatok anyagjellemzői, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paramétereit.

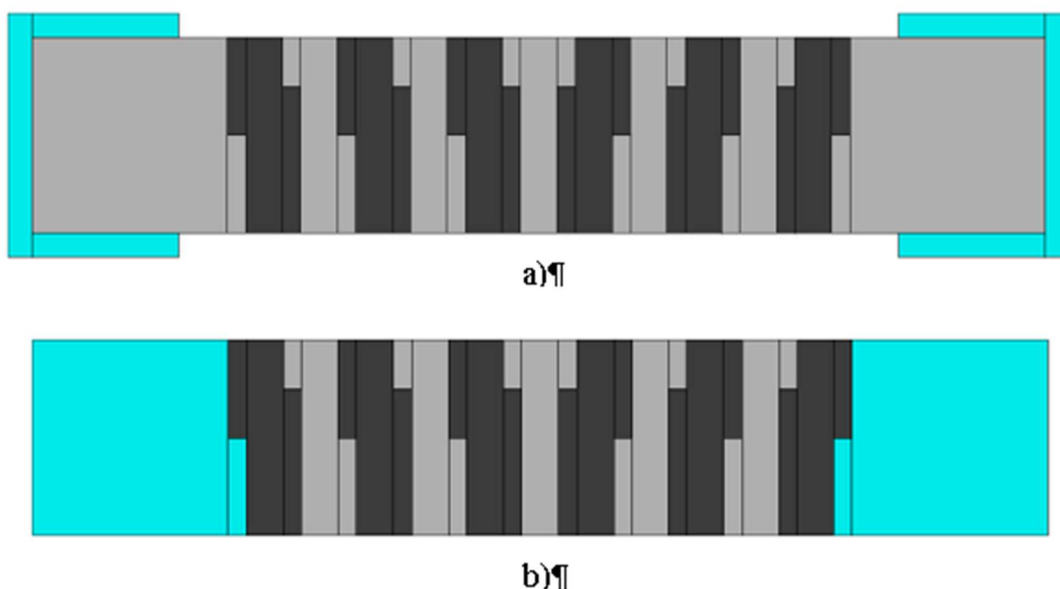


3.2.3.1.1. ábra. A vizsgált ív teherbírása a felhasznált kapcsolati merevségek függvényében.

Ahogy a 3.2.3.1.1-es ábra mutatja, a vizsgált ív teherbírása eleinte jelentősen nőtt a kapcsolati merevségekkel együtt, azonban ez a tendencia a nagyobb merevségi értékeknél egyre jobban csökkent (a tönkremenetel módja pedig jó egyezést mutatott minden esetben). A bemutatott eredmények alapján a végleges futtatásokhoz az $1,00E+13$ -as merevségi értékeket választottam ki.

3.3. Peremfeltételek

A futtatások során kétféle megtámasztási módot használtam, ezeket a 3.3.1-es előlnézeti ábra mutatja. A 3.3.1-es ábra által bemutatott a) opciót erő jellegű terhelés esetén alkalmaztam, itt a szélső elemek szabadon deformálódhatnak és törhetnek, a fix elemek az ábrán késsel jelölt befogások. A b) változatot a támaszmozgásokra vonatkozó vizsgálatoknál alkalmaztam, itt a késsel jelölt szélső elemek a 3.4.1.2.-es fejezetben bemutatott mozgást követik, a támaszok nem szenvedhetnek el deformációkat.



3.3.1. ábra. A futtatásaim során alkalmazott peremfeltételek (a késsel jelölt támaszok nem szenvedhetnek el deformációkat).

3.4. A terhelésről

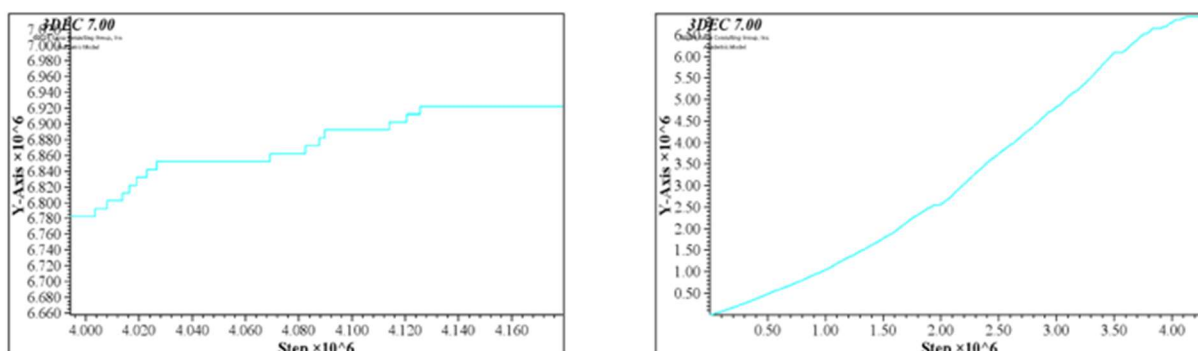
3.4.1. A terhelés módja

3.4.1.1 Erő-jellegű terhelés

Első lépésben az ívet mindig önsúlyra egyensúlyoztam ki egy terhelőblokk segítségével, aminek sűrűsége megegyezik az ívet felépítő blokkokéval. Ezek után a terhelési folyamat az

alábbi módon történik: a terhelőblokk sűrűségét adott mértékkel emelve a program megvárja, hogy ismét beálljon az egyensúly, majd ezt egy újabb sűrűségnövelés követi.

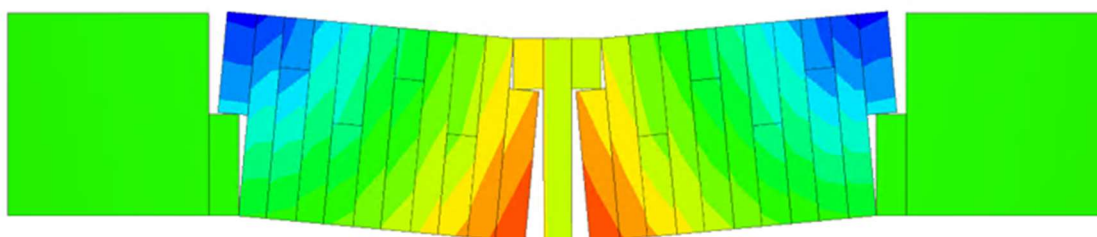
Ez a folyamat egészen addig folytatódik, amíg az ív egy újabb növekményre nem képes már a rátett terhet elviselni, azaz nincsen lehetőség az egyensúly kialakulására. A kód futása végül a terhelőblokkra megszabott elmozdulási kritériumra áll le, ami a futtatások alatt az ív magasságának az egytizede volt (ekkorra a tapasztalatok alapján az ív teherbírása már kimerült, a teher eléri a kritérium által megfogalmazott elmozdulást). A terhelési folyamatot a 3.4.1.1.1-es ábra mutatja.



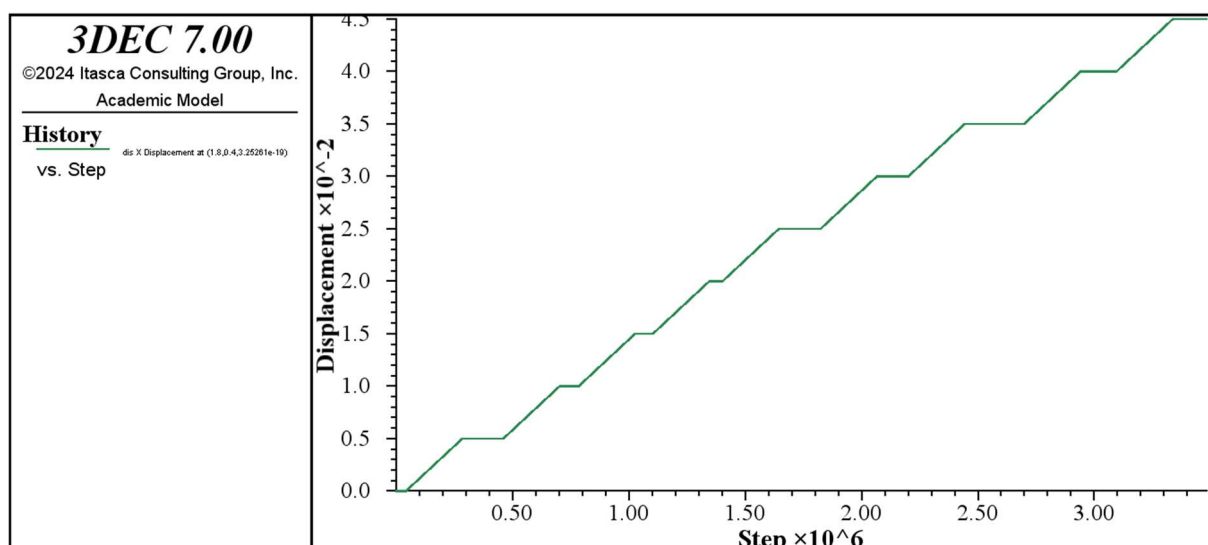
3.4.1.1.1. ábra. A terhelőblokk sűrűsége (függőleges tengely) az időlépések (vízszintes tengely) függvényében.

3.4.1.2 Elmozdulás-jellegű terhelés

A támaszmozgásra vonatkozó vizsgálatok során a terhelési folyamatot a falak nyírási ellenállásáról szóló (Szakály, Hortobágyi, Bagi, 2016) cikkben bemutatott és tesztelt minta alapján valósítottam meg, néhány kisebb eltéréssel. A terhelési folyamat a következő lépésekből állt: először az ívet önsúlyra egyensúlyoztam ki, ezután a két szélső elem folyamatos 0,005 m/s-os sebességgel kifelé kezd mozogni, egészen addig, amíg elmozdulásuk el nem éri az 5 mm-t, ekkor a mozgás megáll, a program megvárja az egyensúly beálltát. A következő lépésben a mozgás ismét elindul, majd 5 mm elmozdulás után újra megáll, ez egészen addig ismétlődik amíg az ív tönkre nem megy, ekkor a blokkok zuhanni kezdenek, egészen addig, amíg a középső elem el nem éri az előre megadott elmozdulás kritériumot (ez jellemzően az ív magasságának a fele volt). A terhelési folyamatra, a 3.4.1.2.1-es és a 3.4.1.2.2-es ábra mutat példát.

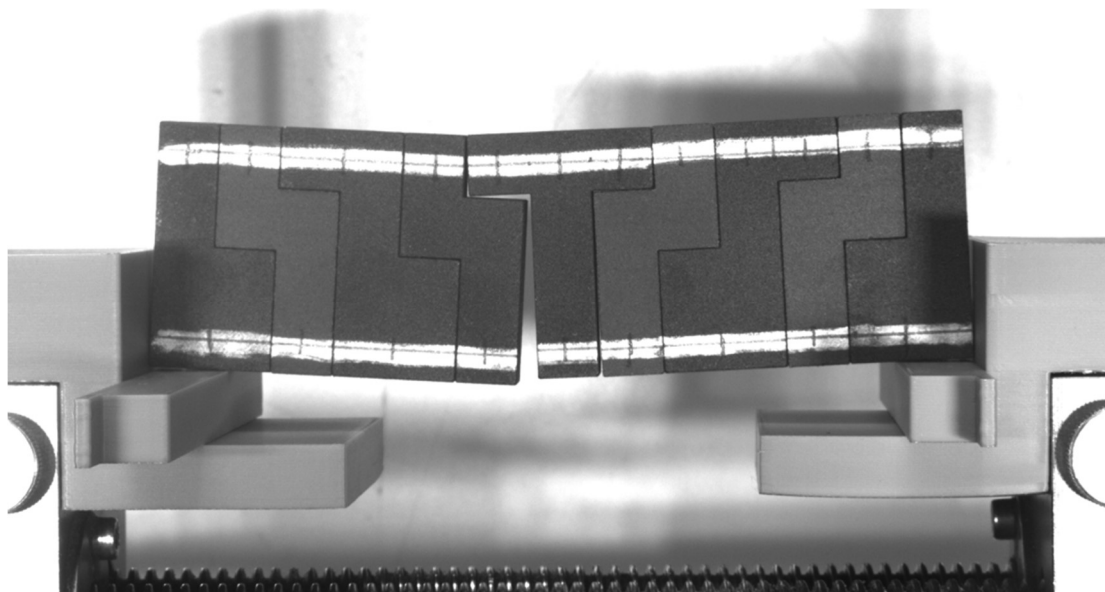


3.4.1.2.1. ábra. Előírt támaszmozgással ellátott ív jellemző elmozdulásai.



3.4.1.2.2. ábra. A támaszok vízszintes elmozdulása (függőleges tengely) az időlépések (vízszintes tengely) függvényében.

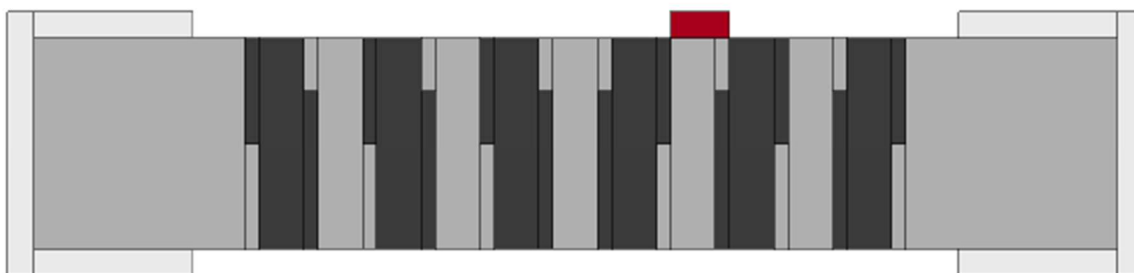
Mivel az (Iannuzzo et al., 2024) cikk keretein belül elkészített laborkísérleteink (ahol a tesztelt ív geometriai kialakítása igencsak hasonló volt az általam vizsgáltakéhoz, azonban a peremfeltételek különböztek) jó egyezést mutattak a dolgozatban szereplő modellekkel (a laborkísérletekben szereplő ív támaszmozgásra való elmozdulásait a 3.4.1.2.3-as ábra mutatja), illetve mivel a használt módszer már tesztelt volt, a támaszmozgással kapcsolatban csak két próbafuttatást végeztem a végleges futtatások előkészítésére. Az említett próbafuttatások annak vizsgálatára vonatkoztak, hogy az előírt támaszmozgások sebessége mennyiben befolyásolja a tönkremenetel kimenetelét. A mozgások sebességét felére csökkentve igencsak kicsiny változást tapasztaltam, a maximális megnyílás mértéke kevesebb mint 1%-kal nőtt.



3.4.1.2.3. ábra. Az (Iannuzzo et al., 2024) cikk keretein belül elvégzett laborkísérleteink egyik eredménye.

3.4.2. A terhelőblokk elhelyezése

A végleges futtatásokhoz (valamint a legtöbb teszt futtatás esetében) a terhelőblokkot a 3.4.2.1-es ábrának megfelelő pozícióban helyeztem el (a középsőtől számított második elem tetején). Fontos kiemelni, hogy ez nem feltétlenül a legkedvezőtlenebb hely a teher elhelyezésére (különböző geometriai arányok mellett a legkedvezőtlenebb teherpozíció folyamatosan változhat). Mivel ennek tesztelése minden geometriai kialakításra rendkívül időigényes lett volna (jellemzően ívenként 5-7 nap), és mivel a dolgozat témájának elsődleges célja az optimális sarokméretek meghatározása, a teherpozíciót a következők alapján választottam: (1) egy általam készített 6 darabos futtatássorozat (amelyet bővebben a 3.4.2.1-es fejezet mutat be), valamint (2) egy, a ferde falazott ívekről szóló cikk (Forgács et al, 2018) amelyben az elvégzett kísérletek alapján a legelőnytelenebb teherpozíció a fesztáv fele és harmada között található (az általam végzett, valamint a cikkben szereplő futtatások igen jó egyezést mutattak).



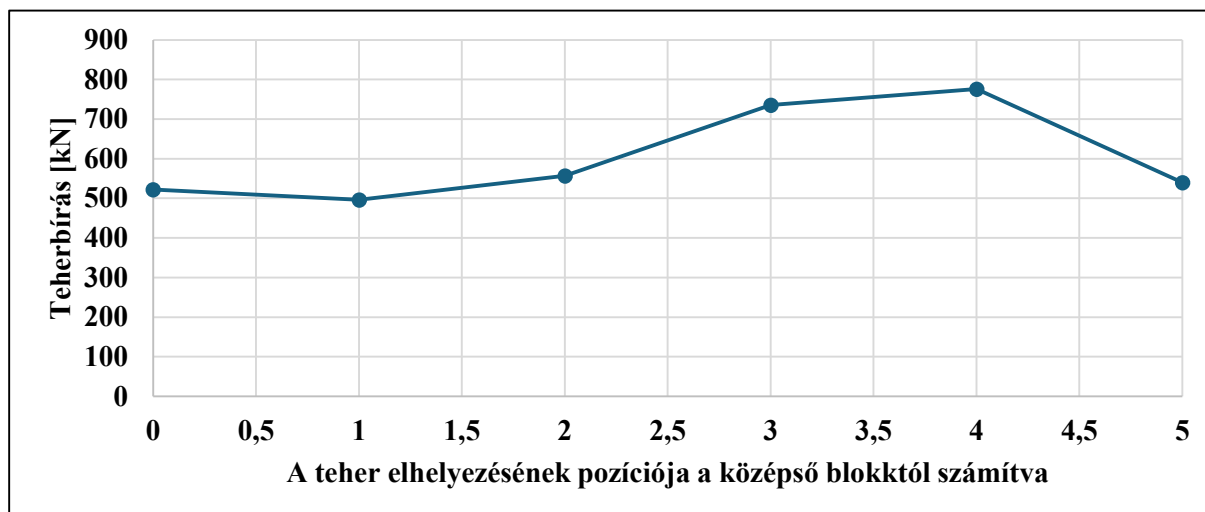
3.4.2.1. ábra. A terhelőblokk elhelyezése az optimális geometriai méretek megtalálására vonatkozó futtatásokhoz.

3.4.2.1. A terhelőblokk elhelyezésével kapcsolatos futtatások

A terhelőblokk elhelyezésével kapcsolatban 6 db futtatást végeztem el (a vizsgálatok során a terhelőblokkot a középső elemtől elkezdve egyre kijebb helyeztem el). A teszt során a 3.2.2.1-es táblázatban szereplő anyagjellemzőket használtam, a kapcsolatok anyagjellemzőit, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paramétereit a 3.4.2.1.1-es táblázat tartalmazza, a terhelés intenzitása $3375 \frac{N}{Tether \text{ épcső}}$ volt. A vizsgálat eredményeit a 3.4.2.1.2-es ábra foglalja össze.

Jellemző geometriai méretek		
sz	[m]	0,3
M	[m]	0,8
s	[m]	0,075
k	[m]	0,15
m1	[m]	0,4
m2	[m]	0,6
b	[m]	0,6
f	[m]	0,8
t	[m]	2,4
Közepső elemek száma	[db]	11
Kapcsolatok anyagjellemzői		
Kapcsolatok normálmerevsége	[Pa/m]	1,00E+10
Kapcsolatok nyírási merevsége	[Pa/m]	1,00E+10
Súrlódási együttható	[°]	42

3.4.2.1.1. táblázat. A vizsgálat során használt kapcsolatok anyagjellemzői, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paraméterei.



3.4.2.1.2. ábra. A vizsgált ív teherbírási a teher elhelyezésének függvényében (a 0-ás pozíció a középső elemet, amíg az 5-ös a legszélsőt jelöli).

3.4.3. A teherbírási értelmezése

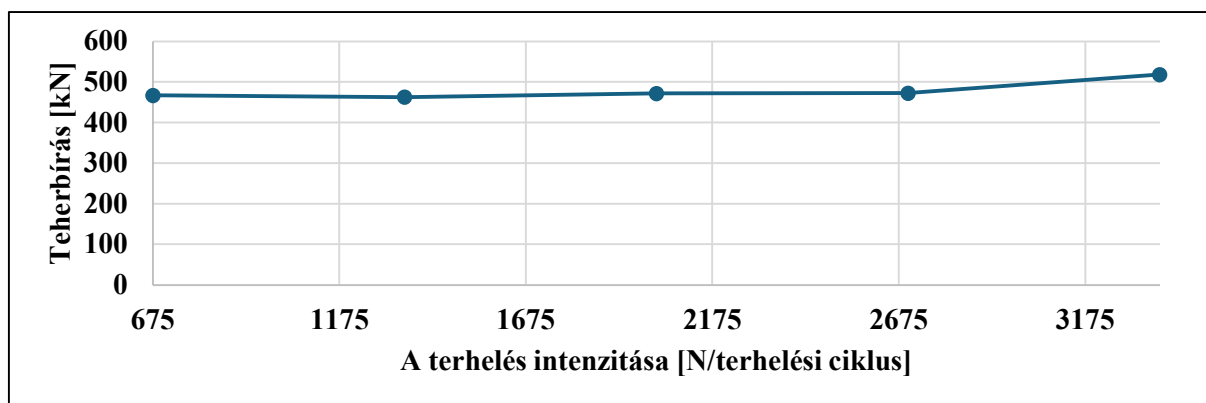
A maximális teherbírási jelentése a dolgozat egészében az alábbi két erőnek az átlaga: a legnagyobb erő, amelyre az ív még képes volt megtalálni az egyensúlyt, valamint az az erő, amelyet az ív már éppen nem bírt el. A terhelés módja miatt ennek pontossága megegyezik a terhelőblokk ciklusonkénti sűrűség-növekedéséből származó súlyerő felével, ez az optimális geometriai méretekre vonatkozó futtatások alatt: 337,5 N volt.

3.4.4. A teherlépcsők nagyságával kapcsolatos futtatások

A teherlépcsők nagyságával kapcsolatban elvégzett futtatássorozat annak a vizsgálatára vonatkozott, hogy mekkora „adagokban” érdemes ráadni a szerkezetre a terhelést. Mivel a hirtelen nagy elmozdulásokra és erőkre a 3DEC (amely explicit időintegrálást alkalmaz) különösen érzékeny, szükséges volt megvizsgálni, hogy mekkora porciókban lehet elvégezni a terhelési folyamatot úgy, hogy a maximális teher konvergáljon egy adott értékhez, és a futási idő se növekedjen meg túlságosan. Ennek érdekében 5 futtatást végeztem el különböző nagyságú teherlépcsőkkel ($675, 1350, 2025, 2700, 3375 \frac{N}{\text{Teherlépcső}}$). A teszt során a 3.2.2.1-es táblázatban szereplő anyagi jellemzőket használtam, a kapcsolatok anyagi jellemzőit, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paramétereit a 3.4.4.1-es táblázat tartalmazza, vizsgálat eredményeit a 3.4.4.2-es diagramm foglalja össze.

Jellemző geometriai méretek		
sz	[m]	0,3
M	[m]	0,8
s	[m]	0,075
k	[m]	0,15
m1	[m]	0,4
m2	[m]	0,6
b	[m]	0,6
f	[m]	0,8
t	[m]	2,4
Közbenső elemek száma	[db]	11
Kapcsolatok anyagi jellemzői		
Kapcsolatok normálmerevsége	[Pa/m]	1,00E+10
Kapcsolatok nyírási merevsége	[Pa/m]	1,00E+10
Súrlódási együttható	[°]	42

3.4.4.1. táblázat. A vizsgálat során használt kapcsolatok anyagi jellemzői, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paramétereit.

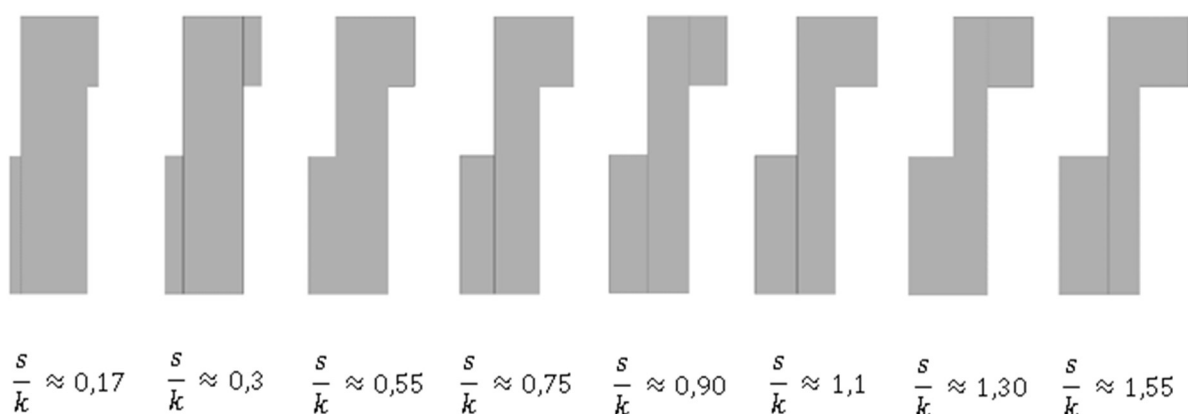


3.4.4.2. ábra. A teszt során vizsgált ív teherbírása a terhelés intenzitásának függvényében.

A tesztből kapott eredmények azt mutatják, hogy a maximálisan elérhető teher nem függött jelentősen a vizsgált terhelési intenzitásoktól (a legnagyobb és legkisebb teherbírás között csupán 10% eltérés volt), viszont az ív ellenállásának kimerülése után a nagyobb intenzitású terheléseknél sokkal jelentősebb, az anyag „megfolyásából” származó deformációk keletkeztek, amelyek, habár a végeredményt nem, de a futási időt jelentősen befolyásolták. A bemutatott eredmények alapján a végső futtatásokhoz a legkisebb teherlépcső került kiválasztásra, terhelési ciklusonkénti 675 N-os növekedéssel.

3.5. Végleges futtatások

A végleges futtatásokat a tesztek során meghatározott anyagjellemzőkkel és terhelési módszerekkel végeztem el. A vizsgált ívek támaszköz/magasság arányait az 1.5.1-es ábra, közbenső elemeiknek s/k arányait a 3.5.1-es ábra szemlélteti. A kiválasztott anyag és kapcsolati jellemzőket a 3.2.2.1-es, 3.2.2.2-es és a 3.2.3.1-es táblázat tartalmazza. Erő-jellegű terhelés esetében a terhelőblokkot a 3.4.2.-es fejezetben kijelölt pozícióban helyeztem el, a terhelés intenzitása $675 \frac{N}{Teherlépcső}$ volt. Az elmozdulás-jellegű terheket a 3.4.1.2-es fejezetben leírtaknak megfelelően működtettem.



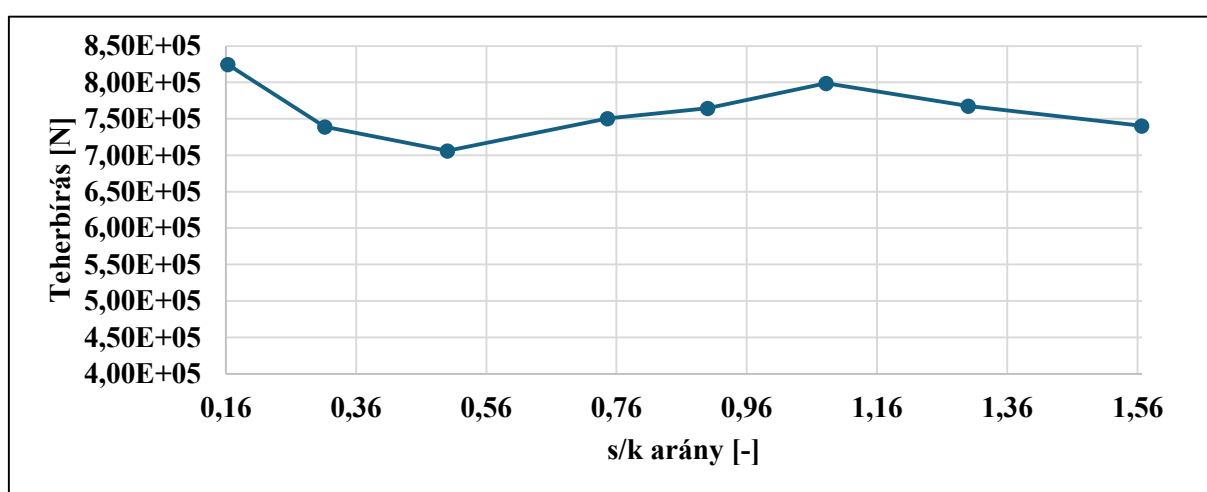
3.5.1. ábra. A végleges futtatások során felhasznált közbenső elemek geometriai aránya.

3.5.1. Optimális geometriai arányok meghatározása

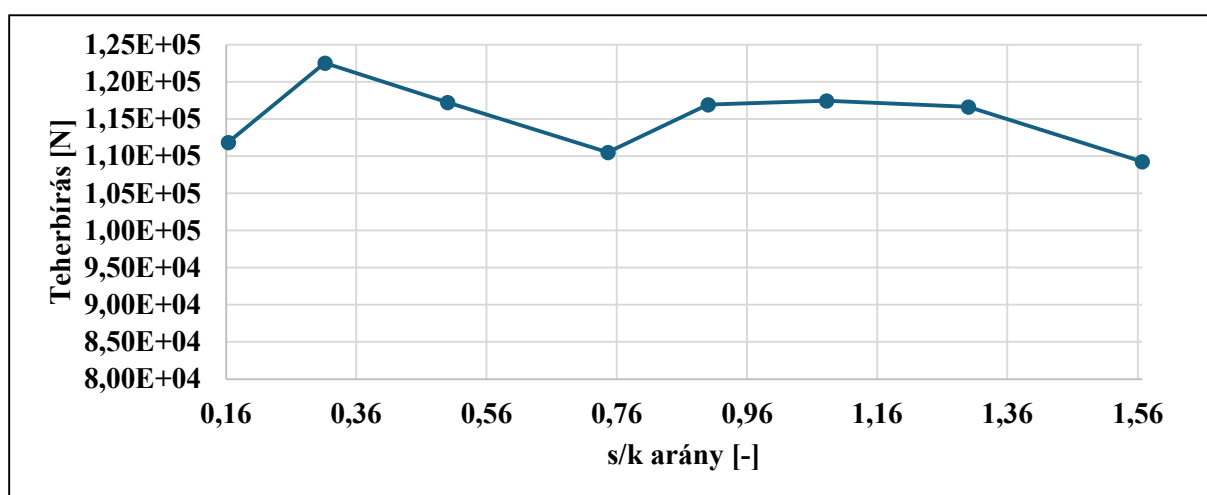
A közbenső elemek optimális geometriai arányait erő-jellegű teherre határoztam meg, a 3.2.2.1-es táblázatban bemutatott mészke és a 3.2.2.2-es táblázatban bemutatott beton anyagjellemzőit felhasználva. Ezen futtatások esetében a támaszköz (t) az ív magasságának (M) 2,4-szerese volt (ezt az 1.5.1-es ábra a) része mutatja). A geometriai kialakítások általános paramétereit a 3.5.1.1-es táblázat tartalmazza. A mészke anyagjellemzőivel készített futtatások eredményeit a 3.5.1.2-es, a beton anyagjellemzőivel készítetteteket a 3.5.1.3-as ábra mutatja.

Jellemző geometriai méretek		
sz	[m]	0,3
M	[m]	0,8
s	[m]	Változó
k	[m]	Változó
m1	[m]	0,4
m2	[m]	0,6
b	[m]	0,6
f	[m]	0,8
t	[m]	2,4
Közbenső elemek száma	[db]	11

3.5.1.1. táblázat. Az optimális geometriai kialakítások vizsgálatához felhasznált kialakítások általános geometriai méretei.



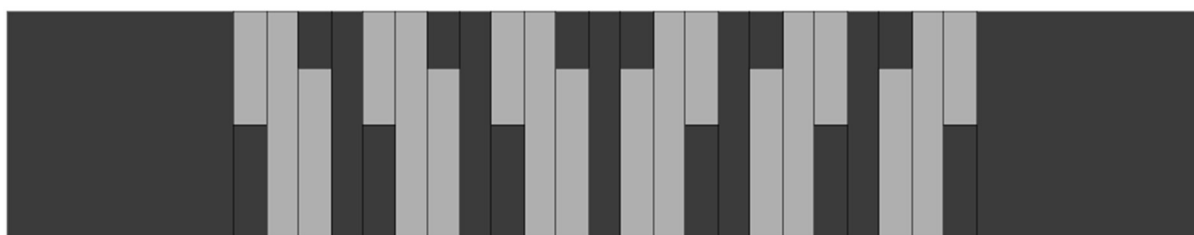
3.5.1.2. ábra. A mészko anyagjellemzőivel készített futtatások eredményei.



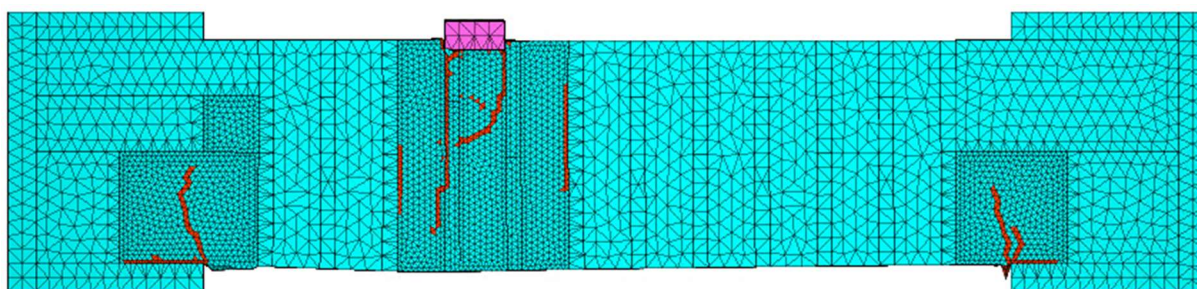
3.5.1.3. ábra. A beton anyagjellemzőivel készített futtatások eredményei.

A mészko, valamint a beton anyagjellemzőivel készített futtatások esetében is kettő, a többitől kiemelkedő teherbírási eredmény jelentkezett (a mészko esetében az $s/k \approx 0,16$ és $s/k \approx 1,10$ a beton esetében pedig az $s/k \approx 0,30$ és $s/k \approx 1,10$ értékeknél). Ezek közül azonban a nagyobbik

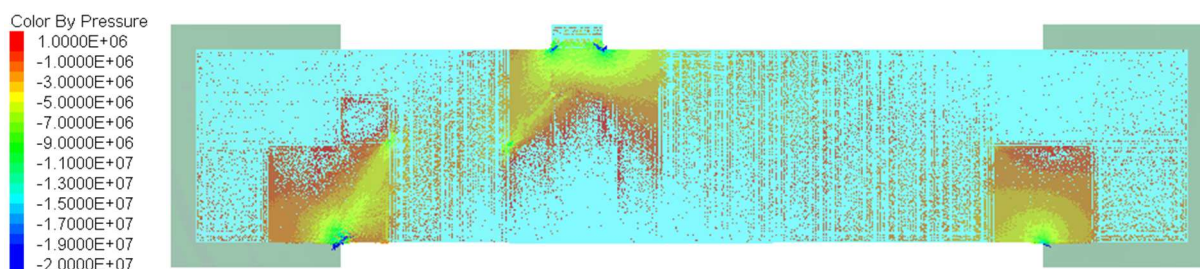
teherbíráshoz mindkét esetben igen kicsiny sarokméretek tartoztak. Mivel az elmozdulás-jellegű terhekre a kis sarokméretekkel rendelkező kialakítások igencsak kedvezőtlennek bizonyultak (erről bővebb ismertetés a 3.5.3-as fejezetben található), a közbenső elemek optimális geometriai arányainak az $s/k \approx 1,10$ -es értékeket tekintettem (az optimálisnak tekintett geometriával rendelkező szerkezet a 3.5.1.4-es ábra mutatja). A tönkremenetel mindkét anyag esetében igencsak hasonló volt, a futtatásaim alapján az anyag nyírószilárdsága volt a meghatározó (szilárdsági anyagjellemző) teherbírás szempontjából (az ív elemeiben minden esetben húzási repedések is megjelentek, azonban a nyírási repedések kialakulása okozta az ív tönkremenetelét). Az ívek jellemző tönkremenetelét a 3.5.1.5-es, közvetlenül a tönkremenetel előtti feszültségeloszlást a 3.5.1.6-ös ábra mutatja.



3.5.1.4. ábra. Az optimális geometriai arányokkal rendelkező ív kialakítása.



3.5.1.5-es ábra. A fejezetben vizsgált ívek jellemző tönkremenetele, pirossal jelölve a nyírási szilárdságukban kimerült zónákat.



3.5.1.6. ábra. A tönkremenetel előtt jelentkező normálfeszültségek eloszlása (pozitív előjellel a húzás, negatívval a nyomás).

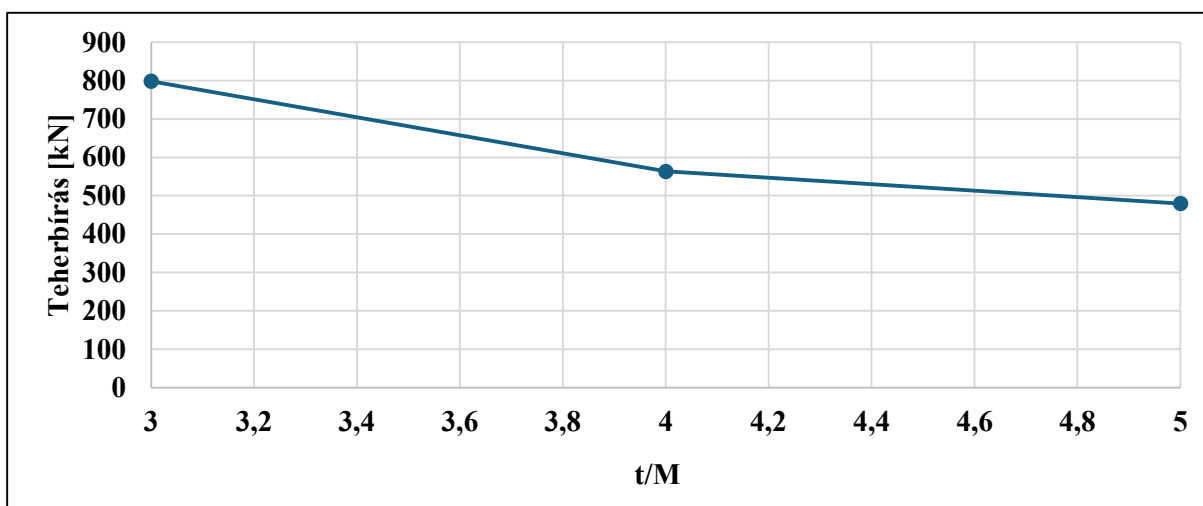
3.5.2. Az ív viselkedése nagyobb támaszközök esetében

A 3.5.1.-es fejezetben meghatározott, optimálisnak tekintett geometriai arányokat két további támaszköz esetében is megvizsgáltam, ezeknek geometriai paramétereit a 3.5.2.1-es táblázat tartalmazza (a két vizsgált ív támaszköz/magasság arányait az 1.5.1-es ábra b) és c) része mutatja). A futtatások során felhasznált anyagjellemzők értékeit a 3.2.2.1-es és a 3.2.3.1 táblázat tartalmazza, a terhelést a 3.5-ös fejezet elején leírtak szerint működtettem. A futtatások számszerű eredményeit a 3.5.2.2-es ábra mutatja (az ábrán a $t/M = 3$ -as aránnyal rendelkező ív teherbírását is feltüntettem viszonyítási alapul).

Jellemző geometriai méretek		
sz	[m]	0,3
M	[m]	0,8
s	[m]	0,106
k	[m]	0,115
m1	[m]	0,4
m2	[m]	0,6
b	[m]	0,6
f	[m]	0,8
t	[m]	3,2
Közberső elemek száma	[db]	15

Jellemző geometriai méretek		
sz	[m]	0,3
M	[m]	0,8
s	[m]	0,103
k	[m]	0,1135
m1	[m]	0,4
m2	[m]	0,6
b	[m]	0,6
f	[m]	0,8
t	[m]	4
Közberső elemek száma	[db]	19

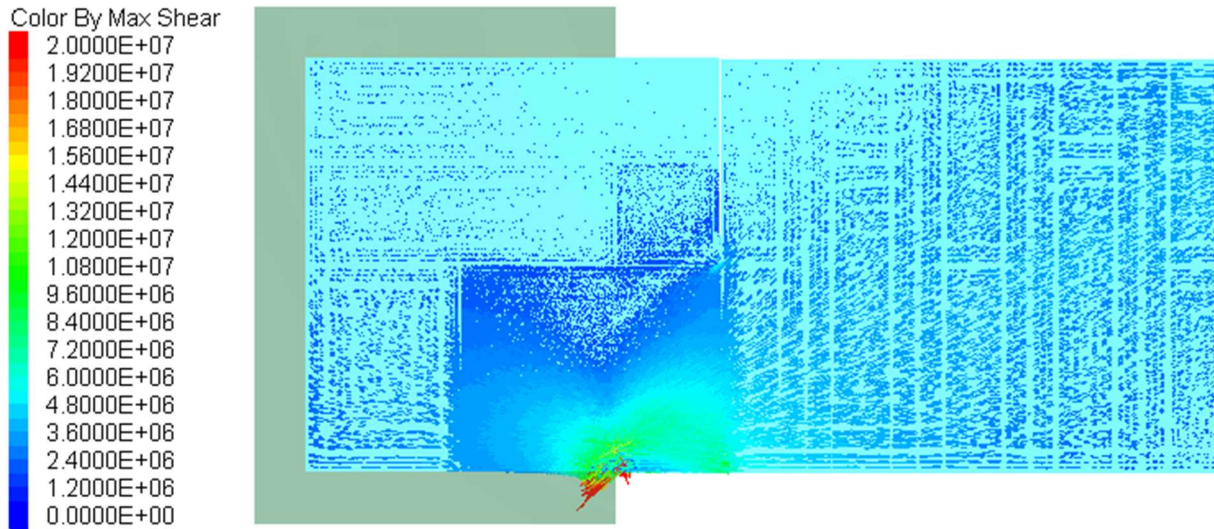
3.5.2.1. táblázat. A két nagyobb támaszközzel rendelkező ív geometriai paramétereit.



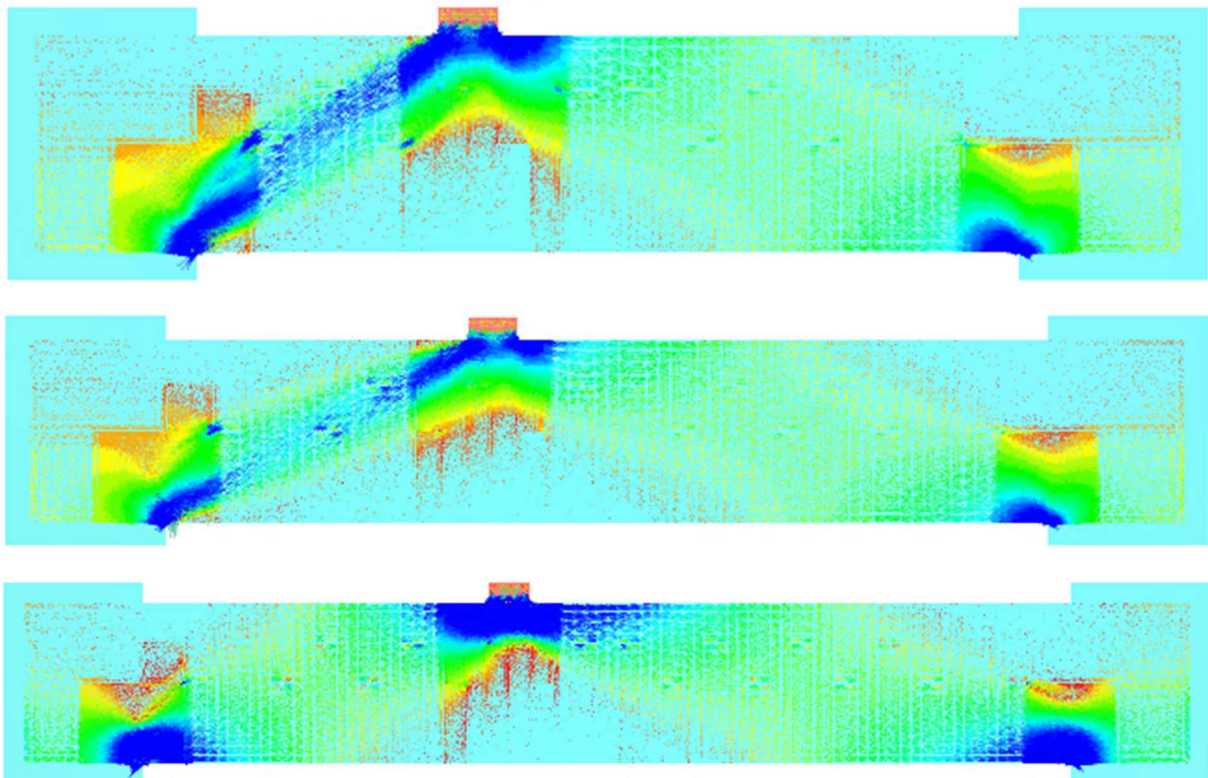
3.5.2.2. ábra. A teherbírás értékei a támaszköz függvényében.

Ahogy azt a 3.5.2.2-es ábra mutatja (és ahogy az várható is volt), a teherbírás jelentősen csökkent a nagyobb támaszközök esetében. A vizsgálatok során (a többi tesztelt ívhez hasonlóan) a nyírószilárdság volt a meghatározó, azonban a maximálisan kialakuló nyomófeszültségek már jelentősen megközelítették az anyag nyomószilárdságát (≈ 180 MPa). A teherbírás csökkenését nagyobb támaszközök esetében a támaszoknál kialakuló

csúcsheszültségek okozták, erre a 3.5.2.3-as ábra mutat példát. A vizsgált ívek jellemző feszültségeloszlásait a 3.5.2.4-es ábra mutatja be, elsősorban az ívekben létrejövő támaszvonalak ellaposodását szemléltetve (viszonyítási alapként a $t/M = 3$ -as arányokkal rendelkező ív feszültségeloszlását is feltüntetve).

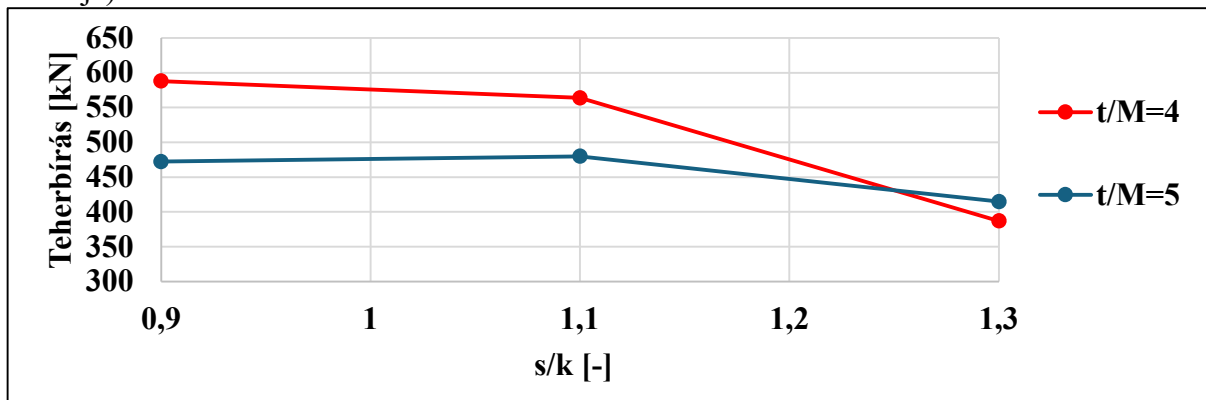


3.5.2.3. ábra. A támaszoknál kialakuló nyírási csúcsheszültségek.



3.5.2.4. ábra. A vizsgált ívekben létrejövő támaszvonalak (kékkel jelölve a legnagyobb nyomósheszültségek).

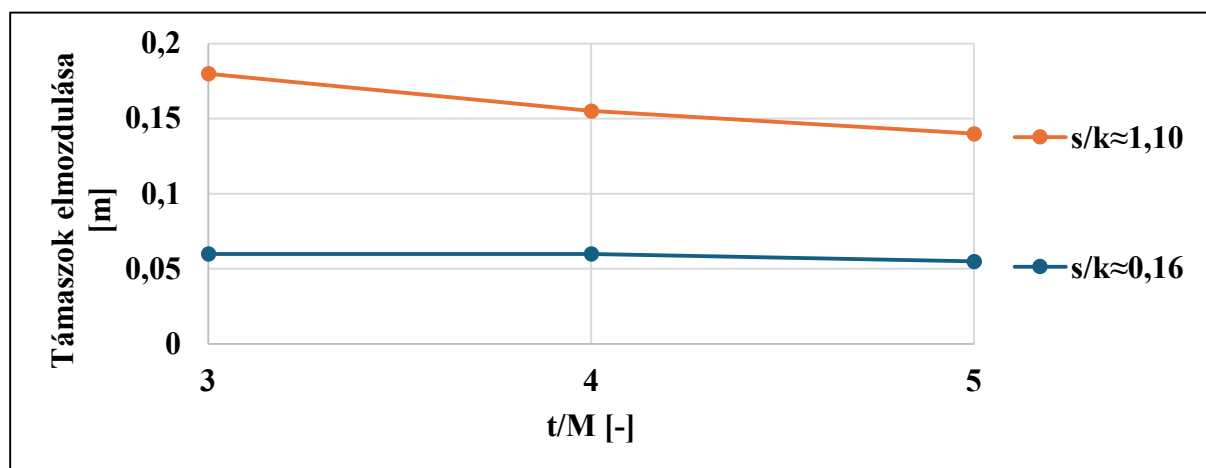
A $t/M=4$ -es és $t/M=5$ -ös arányokkal rendelkező íveknél 2-2 további ($s/k \approx 0,9$ -es és $s/k \approx 1,30$ -as arányokkal rendelkező) kialakítás teherbírását is megállapítottam. Ezen futtatások eredményei azt mutatják, hogy a támaszköz növekedésével az optimális geometriai arányok is változhatnak, azonban az $s/k \approx 1,10$ -es arányokkal rendelkező kialakítás teherbírása mindkét esetben helytállónak bizonyult a vizsgált tartományon (a futtatások eredményeit a 3.5.2.5-ös ábra mutatja).



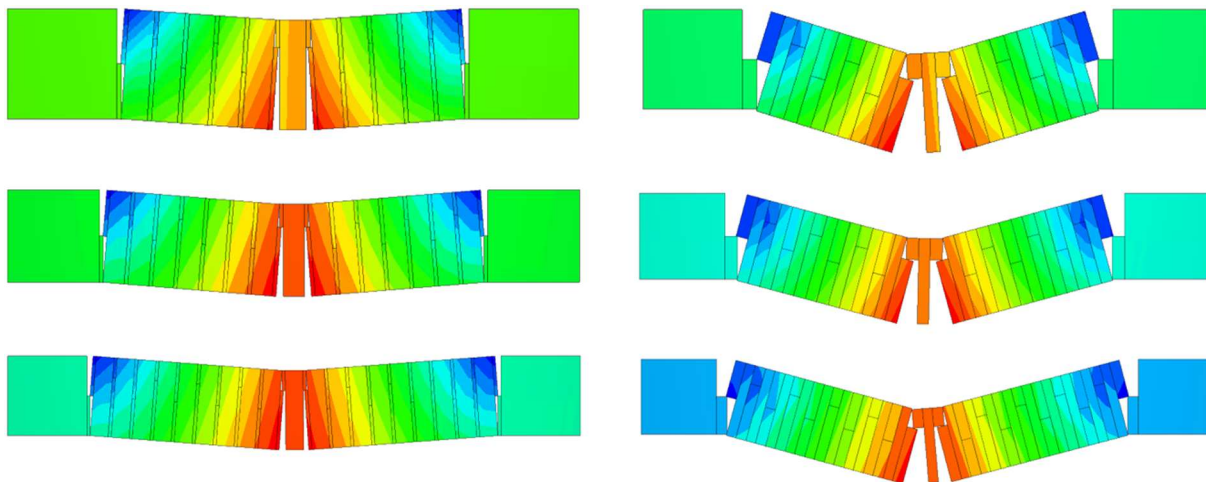
3.5.2.5. ábra. A $t/M=4$ -es és $t/M=5$ -ös arányokkal rendelkező ívek teherbírása a belső elemek s/k arányainak függvényében.

3.5.3. Elmozdulás jellegű terhelés

A vizsgált ívek elmozdulás jellegű terhelésével kapcsolatban 6 futtatást végeztem el, 3-at a 3.5.1.-es fejezetben megállapított optimális geometriai arányokkal ($s/k \approx 1,10$), 3-at pedig lényegesen kisebb $s/k \approx 0,16$ -os arányok mellett. Mindkét esetben 3 különböző (az 1.5.1-es ábrán bemutatott) támaszközméret mellett végeztem el a vizsgálatokat. A futtatások során a 3.2.1.1-es táblázatban bemutatott anyagjellemzőket és a 3.2.2.1-es táblázatban szereplő anyagjellemzőket használtam. A vizsgálat számszerű eredményeit a 3.5.3.1-es ábra, a tönkremeneteli módokat a 3.5.3.2-es ábra mutatja.



3.5.3.1. ábra. Az elmozdulással terhelt ívek maximális, még éppen elbírt támaszelmozdulásai.

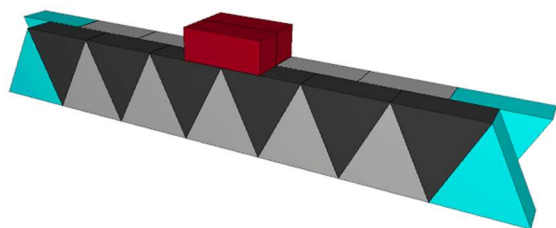


3.5.3.2. ábra. A vizsgált ívek tönkremenetele elmozdulás jellegű teher esetében (bal oldalt az $s/k \approx 0,16$, jobb oldalt az $s/k \approx 1,10$ es arányok esetében).

Ahogy az a 3.5.3.1-es és a 3.5.3.2-es ábra mutatja, a közbenső elemek geometriai arányaitól valamint a támaszköz nagyságától erősen függött a maximális megnyílás nagysága. A kisebb sarokméretekkel rendelkező kialakítások igencsak kedvezőtlennek bizonyultak a támaszok eltolódásával szemben.

4. A háromszög ívvel kapcsolatos futtatások

A háromszög ívvel kapcsolatos futtatásokat a lépcsős ív teszteléséből kapott anyag és kapcsolati jellemzőkkel, valamint terhelési módszerrel végeztem el, ezeket 3.4.1.1-es fejezet, a 3.2.2.1-es és a 3.2.3.1-es táblázat mutatja be. Az ív közepén két terhelőblokkot helyeztem el egymás mellett, a szélső elemeket fixen rögzítettem (a megtámasztás módját és a terhelőblokk elhelyezését 4.1-es ábra mutatja). A futtatások során használt geometriai jellemzőket a 4.2-es táblázat tartalmazza.

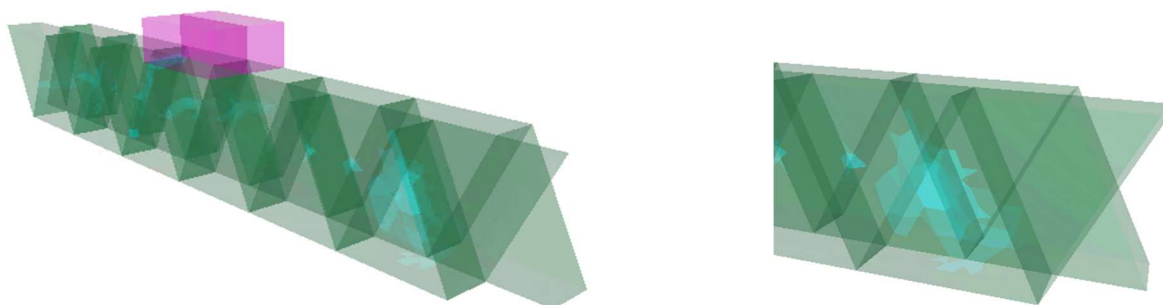


4.1. ábra. Az íven elhelyezett terhek (pirossal), valamint a fix elemek (kékkel).

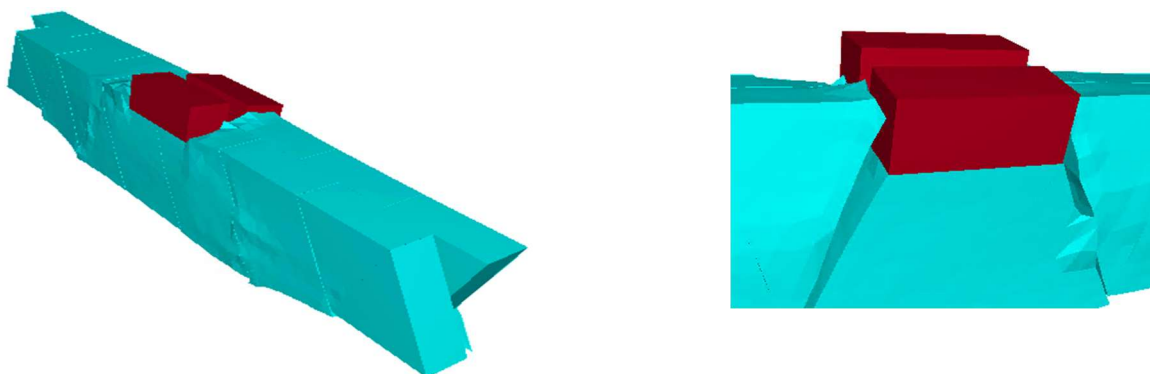
Jellemző geometriai méretek	
Háromszögek alsó élhossza [m]	0,5
Háromszögek magassága [m]	0,5
Gerenda szélessége [m]	0,4
Közbenső elemek száma [db]	11

4.2. táblázat. A futtatások során felhasznált jellemző geometriai méretek.

A modellkísérletek során az elemek összeillesztésénél számottevő húzás ébredt, az összeillesztett elemek elváltak egymástól, az ív jelentősen megcsavarodott (a teherbírás megközelítőleg a lépcsős ív teherbírásának egyharmadával egyezett meg). Az ív repedéseit, valamint tönkremenetelét a 4.3-as és a 4.4-es ábra mutatja. A bemutatott problémák miatt ez a konstrukció gyakorlati felhasználás céljára nem javasolható, ezért a kialakítás tesztelését nem folytattam.



4.3. ábra. Az ív tönkremenetel előtti állapota, az ábrán lévő kék térrészek a húzási teherbírásukban kimerült zónákat jelölik.



4.4. ábra. A vizsgált ív elcsavarodással járó tönkremenetele.

5. Eredmények összefoglalása

A futtatásaim alapján a két ív közül a háromszög alapú hasábokból álló ív igencsak kedvezőtlenül viselkedett erő jellegű terhelésre, az elemekben nagy húzófeszültségek ébredtek, az összeillesztett háromszöghasábok könnyen elszakadtak egymástól. A felsoroltak miatt a kialakítás kedvezőtlennek bizonyult a nagy nyomó-, azonban kis húzószilárdsággal rendelkező anyagok felhasználására, így a vizsgálataim döntő része a másik, lépcsős kialakítással rendelkező ívre irányult. A háromszögekből álló íven végzett modellkísérleteket a 4.-es fejezet mutatja be.

A lépcsős elemekkel rendelkező ív optimális geometriai méreteit két különböző anyag anyagjellemzői mellett is megállapítottam (erő-jellegű teherre). Az elmozdulás-jellegű terhekre

való érzékenységet is figyelembe véve **mindkét esetben az $s/k \approx 1,10$ -es arányokkal rendelkező kialakítás bizonyult a legjobbnak** (az optimális kialakítás arányait a 3.5.1.4-es ábra mutatja). Ezen futtatások esetében a teherbírás meghatározó anyagi paramétere a felhasznált anyag nyírószilárdsága volt. Az optimális kialakítás meghatározására vonatkozó futtatásokat a 3.5.1.-es fejezet mutatja be.

Az optimális kialakítást két további támaszköz esetében is megvizsgáltam (ezeknek szemléltetését az 1.5.1-es ábra b) és c) része mutatja), ezeknek eredményeit 2-2 további ($s/k \approx 0,9$ -es és $s/k \approx 1,30$ -as arányokkal rendelkező) kialakítás teherbírásával is összevetettem. Az ív viselkedése és a tönkremenetel módja jó egyezést mutatott a kisebb támaszközzel rendelkező ívekével, azonban az optimális geometriai kialakítás arányai változtak, a támaszoknál ébredő vízszintes erők nőttek. Fontos kiemelni, hogy a támaszköz további növelésével jelentősen változhat a tönkremenetel módja, az ívben fellépő maximális nyomófeszültségek egyre jobban közelítették a felhasznált anyag nyomószilárdságát. A mészke anyagjellemzőivel készített futtatásaim alapján **a nyomószilárdság maximális kihasználásához előreláthatólag $t/M=6-7$ -es geometriai arányok tartoznak** ($M=0,8$ m-es szerkezeti magasság mellett). A $t/M=4$ -es és a $t/M=5$ -ös kialakítások vizsgálatát a 3.5.2.-es fejezet mutatja be.

A lépcsős ívek elmozdulás-jellegű teherre kialakuló tönkremenetele erősen függött a közbenső elemek geometriai arányaitól, sarokméreteitől. A két vizsgált ($s/k \approx 1,10$; $s/k \approx 0,16$) eset maximális, még elbírt elmozdulásai között igen nagy, közel háromszoros eltérést tapasztaltam. Ebből fakadóan a gyakorlatban sokkal előnyösebb lehet a nagyobb sarokméretekkel rendelkező kialakítások használata, még akkor is, ha erő jellegű teherre a kis sarokméretek némileg teherbíróbbak lennének. Az elmozdulás-jellegű terheléssel kapcsolatos futtatásokat a 3.5.3.-as fejezet mutatja be.

A dolgozatban bemutatott modellkísérletek jól mutatják az ívek vizsgálatának összetettségét, valamint a diszkrétételes programok által kínált lehetőségeket a diszkontinuum rendszerek vizsgálatára. Mivel a dolgozat fő célja a bemutatott ívek viselkedésének teljes megértése volt, a későbbiekben szükségessé válhat az anyagmodell kiterjesztése oly módon, hogy a modellekben szereplő elemek nyomásra is törhetőek legyenek. Ezen kívül az eredmények laborkísérletek történő igazolása is szintén nagyon fontos.

Irodalomjegyzék

Bagi, K. (2018): Mechanics of Masonry Structures. Course handouts, Department of Structural Mechanics, Budapest University of Technology and Economics

Boni, Royer, 2023. Boni C, Royer-Carfagni G. 2023 Shear and flexural deformations in flextegrity segmental beams inspired by Leonardo's triangular masonry construction, Proceedings of the Royal Society A, Volume 479, Issue 2279, DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.02.036

Bucolo, M., Buscarino, A., Famoso, C., Fortuna, L., Gagliano, S., 2020. Automation of the Leonardo da Vinci Machines, Machines, 8(3), 53; <https://doi.org/10.3390/machines8030053>

Cundall, P.A. (1971) A Computer Model for Simulating Progressive Large Scale Movements in Blocky Rock Systems. Proceedings of the Symposium of the International Society for Rock Mechanics, Society for Rock Mechanics (ISRM), France, II-8.

Cundall P. A., Marti J., Beresford P., Last, N., & Asgian, M. (1978). Computer modeling of jointed rock masses. Waterways Experiment Station Report WES-TR-N-78-4

Forgács, T., Sarhosis, V., & Bagi, K., (2017). Minimum thickness of semi-circular skewed masonry arches, Engineering Structures, Volume 140, Pages 317-336, ISSN 0141-0296, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.02.036>.

Huerta, S., F., 2000. Mechanics of masonry vaults: The equilibrium approach. In: "Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques". Universidade do Minho, Guimaraes, Portugal, pp. 47-69. ISBN 972 8692 01 3. Heyman, J. (1966). The Stone Skeleton, International Journal of Solids and Structures Vol.2, pp. 249 – 279

Ianuzzo, A., Herczeg, M., Bagi, K., Mousavian, E., 2024. Equilibrium Analysis of 2D Complex Discrete Assemblies Modelled using Cracking Blocks with Non-Dilatant Interfaces, DOI: 10.4203/ccc.9.12.1

Itasca. (2024). 3DEC—Three-dimensional distinct element code. Itasca Consulting Group, Minneapolis, MN.

Lemos, J. V. (2007). Discrete element modeling of masonry structures. International Journal Architectural Heritage, 1(2), 190–213, <https://doi.org/10.1080/15583050601176868>.

Marchetti, E., Rossi Costa, L. (2020). Mathematical Aspects of Leonardo's Production in Milan. In: Emmer, M., Abate, M. (eds) *Imagine Math 7*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42653-8_14

Palermo, M., Pagliara, S., 2020. Teaching Hydraulics and Hydraulic Structure Design with Leonardo da Vinci, *Journal of Hydraulic Engineering*, Volume 146, issue 5, 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001744

Ranjbaran, A., Ranjabran, M., Ranjabran, F., 2021. Story of Leonardo da Vinci and pioneers of structural mechanics, 10.13140/RG.2.2.21313.28006

Rizzi, E., Cocchetti, G., Colasante, G., & Rusconi, F. (2010). Analytical and Numerical Analysis on the Collapse Mode of Circular Masonry Arches. In *Advanced Materials Research* (Vols. 133–134, pp. 467–472). Trans Tech Publications, Ltd. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.133-134.467>McInerney, J., & DeJong, M. J. (2015). Discrete element modeling of groin vault displacement capacity. *International Journal of Architectural Heritage*, 9(8), 1037–1049.

Shen, Y.; Lin, L.; Wei, S.; Yan, J.; Xu, T.; 2022, Research on the Preparation and Mechanical Properties of Solidified 3D Printed Concrete Materials, *Buildings* 12(12):2264, DOI: 10.3390/buildings12122264

Szakály, F., Hortobágyi, Zs., Bagi, K., 2016. Discrete Element Analysis of The Shear Resistance of Planar Walls with Different Bond Patterns, *The Open Construction and Building Technology Journal*, Volume 10, 190-202, DOI: 10.2174/1874836801610010220.

Tóth, A. R., Orbán, Z., & Bagi, K. (2009). Discrete element analysis of a stone masonry arch. *Mechanics Research Communications*, 36(4), 469–480.

Ábrajegyzék

1.1.1. ábra. Egy ív (bal) és egy gerenda (jobb) támaszreakciói önsúly esetén.....	7
1.2.1. ábra. Edublalmahr Templom 2100 BC, https://traveltoeat.com/the-arch-in-architectureand-history	8
1.2.1.1. ábra. A bal oldal a „hamis”, a jobb oldal az „igaz” ívre mutat egy-egy példát. (Bagi, 2018).....	9

1.2.1.2. ábra. Öt különböző ívtípus a középvonal geometriája szerint: (a)csúcsos, (b)patkó, (c)félkör, (d)szegmens, és (e)lapos/egyenes ív. (Bagi, 2018).....	9
1.2.1.1.1. ábra. Két félkör ív csuklósodással történő tönkremenetele (bal) támaszmozgásra, valamint (jobb) erőteherre (Huerta, 2001).	10
1.2.1.2.1. ábra. Heyman lapos ívekre vonatkozó definíciójának szemléltetése két különböző geometriai kialakítás esetében (pirossal jelölve a nézetvonalakat).	11
1.2.1.2.2. ábra. A szegmens és lapos íveket elválasztó kritikus magasságra vonatkozó képlet paraméterei és levezetése.	11
1.2.1.2.3. ábra. A lehetségesen kialakuló támaszvonalak intervalluma két különböző kialakítás esetében (koncentrált erőteherre).	12
1.2.1.2.4. ábra. Egy áthidaló ív tipikus kialakítása, jobb oldalt lépcsőztetés nélküli, bal oldalt lépcsőztetett elemekkel. (H. Gautier, Dissertation sur l'épaisseur des culees des Pans, sur 10 Largeur des piles, sur 10 Portee des vousoirs, sur l'Erfort Et 10 Pesanteur des Arches adifferens surbaissemens, Paris, 1717, fig . 4 in pI. 11).....	13
1.2.1.2.5. ábra. A Dulton-Peto fődém metszete (1885). https://attiladery.hu/download/08_tortszerk_vb1.pdf	13
1.2.1.2.6. ábra. A Sekura fődém metszete (1900 körül épült). https://attiladery.hu/download/08_tortszerk_vb1.pdf	13
1.2.1.2.7. ábra. A Triumph fődémszerkezet (1890-es évek). https://attiladery.hu/download/08_tortszerk_vb1.pdf	14
1.3.1. ábra. Leonardo da Vinci eredeti rajzai a vizsgált ívekről. A dolgozat során a felsőre „háromszögekből álló” az alsóra „lépcsős” ívként hivatkoztam. https://codex-atlanticus.ambrosiana.it/#/Overview	15
1.4.1. ábra. Leonardo da Vinci rajzai alapján általam elkészített lapos ívek 3D-s modellje....	15
1.4.2. ábra. Boni és Royer által tesztelt ív 3D nyomtatott modellje. https://doi.org/10.1098/rspa.2023.0453	16
1.4.1.1. ábra. A vizsgált ívek közbenső elemeinek paraméteres méretei.	16
1.4.1.2. ábra. A vizsgált ívek támaszközének, valamint a megfogási méreteinek paraméterezése.	17

1.5.1. ábra. A végleges futtatásokban szereplő ívek t/M arányai.	18
2.2.2.2.1. ábra. Téglatest alakú blokkokból összeállított konkáv elem a tetraéder alapú felosztás előtt (balra), valamint után (jobbra).	21
2.2.2.3.1. ábra. A „common-plane” elhelyezkedése síkban. (Bagi,Angelillo, CISM)	22
2.2.3.1. ábra. Az explicit időlépéses algoritmusok általános folyamatábrája.....	22
3.2.1.1. ábra. Egy tesztelt ív „húzási” repedései.	24
3.2.1.2. ábra. Az anyagmodell teszteléséből kapott $\sigma(\epsilon)$ függvény.	24
3.2.1.3. ábra. A fejezetben tárgyalt folyási probléma.	25
3.2.2.1. táblázat. A futtatásaim során felhasznált mészke anyagjellemzői.....	25
3.2.2.2. táblázat. A futtatásaim során felhasznált beton anyagjellemzői.	25
3.2.2.1.1. ábra. A többlettől felosztás jellegében eltérő 0,02-es felosztású ív.	26
3.2.2.1.2. táblázat. A vizsgálat során használt kapcsolatok anyagjellemzői, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paraméterei.	26
3.2.2.1.3. ábra. A vizsgált ív teherbírása a felosztás sűrűségének függvényében.	27
3.2.3.1. táblázat. A végleges futtatások során felhasznált kapcsolati anyagjellemzők.....	27
3.2.3.1.1. táblázat. A vizsgálat során használt kapcsolatok anyagjellemzői, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paraméterei.	28
3.2.3.1.1. ábra. A vizsgált ív teherbírása a felhasznált kapcsolati merevségek függvényében.	28
3.3.1. ábra. A futtatásaim során alkalmazott peremfeltételek (a késsel jelölt támaszok nem szenvedhetnek el deformációkat).	29
3.4.1.1.1. ábra. A terhelőblokk sűrűsége (függőleges tengely) az időlépések (vízszintes tengely) függvényében.	30
3.4.1.2.1. ábra. Előírt támaszmozgással ellátott ív jellemző elmozdulásai.	30
3.4.1.2.2. ábra. A támaszok vízszintes elmozdulása (függőleges tengely) az időlépések (vízszintes tengely) függvényében.	31

3.4.1.2.3. ábra. Az (Iannuzzo et al., 2024) cikk keretein belül elvégzett laborkísérleteink egyik eredménye.	31
3.4.2.1. ábra. A terhelőblokk elhelyezése az optimális geometriai méretek megtalálására vonatkozó futtatásokhoz.	32
3.4.2.1.1. táblázat. A vizsgálat során használt kapcsolatok anyagjellemzői, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paraméterei.	33
3.4.2.1.2. ábra. A vizsgált ív teherbírása a teher elhelyezésének függvényében (a 0-ás pozíció a középső elemet, amíg az 5-ös a legszélsőt jelöli).	33
3.4.4.1. táblázat. A vizsgálat során használt kapcsolatok anyagjellemzői, valamint a felhasznált geometriai kialakítás paraméterei.	34
3.4.4.2. ábra. A teszt során vizsgált ív teherbírása a terhelés intenzitásának függvényében. ...	34
3.5.1. ábra. A végleges futtatások során felhasznált közbenső elemek geometriai aránya.	35
3.5.1.1. táblázat. Az optimális geometriai kialakítások vizsgálatához felhasznált kialakítások általános geometriai méretei.	36
3.5.1.2. ábra. A mészkő anyagjellemzőivel készített futtatások eredményei.	36
3.5.1.3. ábra. A beton anyagjellemzőivel készített futtatások eredményei.	36
3.5.1.4. ábra. Az optimális geometriai arányokkal rendelkező ív kialakítása.	37
3.5.1.5-es ábra. A fejezetben vizsgált ívek jellemző tönkremenetele, pirossal jelölve a nyírási szilárdságukban kimerült zónákat.	37
3.5.1.6. ábra. A tönkremenetel előtt jelentkező normálfeszültségek eloszlása (pozitív előjellel a húzás, negatívval a nyomás).	37
3.5.2.1. táblázat. A két nagyobb támaszközzel rendelkező ív geometriai paraméterei.	38
3.5.2.2. ábra. A teherbírás értékei a támaszköz függvényében.	38
3.5.2.3. ábra. A támaszoknál kialakuló nyírási csúcsfeszültségek.	39
3.5.2.4. ábra. A vizsgált ívekben létrejövő támaszvonalak (kézzel jelölve a legnagyobb nyomófeszültségek).	39

3.5.2.5. ábra. A $t/M=4$ -es és $t/M=5$ -ös arányokkal rendelkező ívek teherbírása a belső elemek s/k arányainak függvényében.	40
3.5.3.1. ábra. Az elmozdulással terhelt ívek maximális, még éppen elbírt támaszelmozdulásai.	40
3.5.3.2. ábra. A vizsgált ívek tönkremenetele elmozdulás jellegű teher esetében (bal oldalt az $s/k \approx 0,16$, jobb oldalt az $s/k \approx 1,10$ es arányok esetében).	41
4.1. ábra. Az íven elhelyezett terhek (pirossal), valamint a fix elemek (késsel).	41
4.2. táblázat. A futtatások során felhasznált jellemző geometriai méretek.....	41
4.3. ábra. Az ív tönkremenetel előtti állapota, az ábrán lévő kék térrészek a húzási teherbírásukban kimerült zónákat jelölik.	42
4.4. ábra. A vizsgált ív elcsavarodással járó tönkremenetele.	42