



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Építőmérnöki Kar

Általános -és Felsőgeodézia Tanszék

**A VERTIKÁLIS GRADIENSEK HATÁSA A FAYE-
ANOMÁLIÁKRA**

Szerző: Pongrácz Dániel

(NEPTUN kód: IE5G3N)

Földmérő- és térinformatikai mérnök

Msc. szakos hallgató, 3. félév

Konzulensek: Dr. Tóth Gyula

egyetemi docens

Dr. Völgyesi Lajos

egyetemi tanár

Budapest, 2024

Bevezetés.....	3
1. A Földi nehézségi erőter.....	3
1.1. Alapfogalmak	3
1.2. A Föld normál nehézségi erőtere	6
1.3. Nehézségi rendellenességek és gravitációs zavar	7
1.4. Mérések redukciója a geoidra.....	8
1.4.1. Szabadlevegő-anomália.....	8
1.4.2. Faye- anomália	9
1.4.3. Bouguer- anomália	9
1.4.4. Izosztatikus anomália	11
1.5. Az Eötvös-tenzor és a vertikális gradiens.....	12
2. Számításhoz felhasznált adatok.....	12
2.1. Szabadlevegő - anomáliák.....	12
2.2. Magassági adatok	14
2.2. Globális geopotenciál modell.....	15
2.3. Regionális SRBF modell.....	15
2.4. Mérések redukciója	17
3. Pontosabb vertikális gradiensek hatásának számítása.....	18
3.1. Lehetőségek a vertikális gradiens pontosabb figyelembevételére	18
3.2. Vertikális gradiensek számításához használt modell előállítása.....	19
3.3. Vertikális gradiensek változása a magasság függvényében	21
3.4. Vertikális gradiensek a Faye-anomália rácspontokban	22
3.5. Vertikális gradiensek módosító hatása a Faye-redukcióra	25
4. Javított Szabadlevegő- és Bouguer-anomáliák értékelése.....	26
4.1. Szabadlevegő- anomáliák.....	26
4.2. Bouguer – anomáliák	28
4.2.1. Bouguer-anomáliák számítása terepi korrekcióval	28

4.2.2. Javított Bouguer-anomáliák	30
4.3. Bouguer- anomáliák a globális topografikus hatás figyelembevételével (SRTM2GRAVITY).....	31
4.4. Módosított Faye-redukció hatása a kőzetek sűrűségeloszlására	34
5. Összefoglalás.....	34
6. Irodalomjegyzék.....	35

Bevezetés

A Föld gravitációs erőterének pontos ismerete és modellezése alapvető fontosságú a geodézia és geofizika különféle alkalmazási területein. A nehézségi rendellenességek térbeli változásai jelentős információkat hordoznak a földkéreg sűrűségeloszlásáról és geológiai szerkezetéről. Ezen anomáliákat általában a geoidra vonatkoztatjuk, amihez méréseinket különböző redukciókkal kell ellátni, amelyek közé tartozik a szabadlevegő- redukció. Ehhez a vertikális gradiens értékére van szükségünk, amit általában annak normál értékével helyettesítünk, és a különböző gravitációs anomáliák számításához azt használjuk. A vertikális gradiensekről kevés mérési adat áll rendelkezésre, továbbá térben rendkívül gyorsan változik. Mérések hiányában ennek értékét a nehézségi erőter modellezésével állíthatjuk elő. Egy gömbi radiális bázisfüggvényekkel létrehozott modell alapján a nehézségi erőterre vonatkozóan bármilyen mennyiség modellezhető, többek között a vertikális gradiens is. Ezzel a módszerrel a globális geopotenciál modelleknél nagyobb fokszámgig modellezhető a nehézségi erőter. Míg a legrészletesebb globális geopotenciál modellek jellemző fokszáma 2190, addig gömbi radiális bázisfüggvényekkel a rendelkezésre álló adatok alapján kb. 6500-ig növelhető a fokszámg. Dolgozatom célja egy ilyen modell segítségével a vertikális gradiensek magyarországi eloszlásának meghatározása, majd ennek használata geoidi nehézségi rendellenességek meghatározásához.

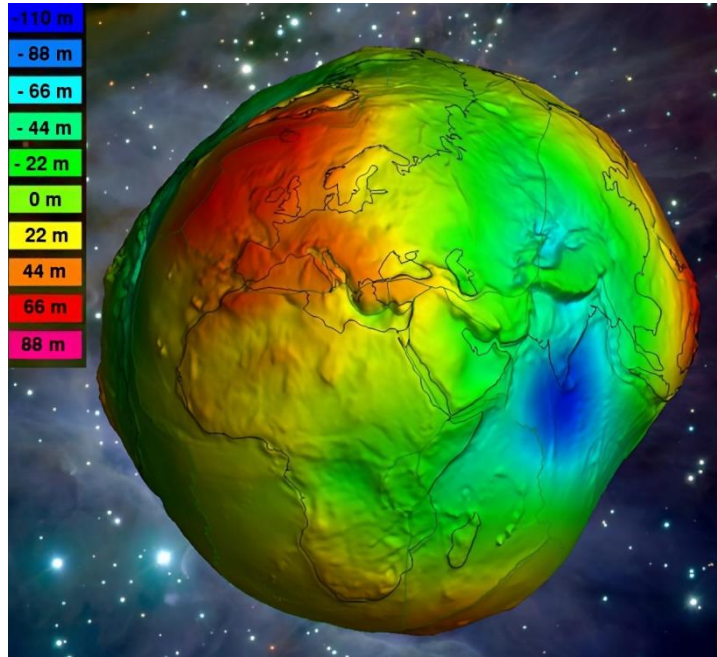
1. A Földi nehézségi erőter

1.1. Alapfogalmak

A Föld matematikai alakját a nehézségi erőter potenciáljának szintfelületeként értelmezzük, míg a nehézségi térerősség vektorának iránya a függőleges irányt határozza meg, a nagysága pedig a szabadon eső test gyorsulásával egyezik meg. Így a nehézségi erőter minél részletesebb leírása rendkívül fontos feladat. A GNSS mérések magasságadatai és a hagyományos módon meghatározott magasságok közötti kapcsolat megteremtéséhez különösen fontos a nehézségi erőter precíz ismerete, hiszen a magasságokat a geoidra, azaz a nehézségi erőter kiválasztott szintfelületére vonatkoztatjuk. Példaként az 1.1 ábrán a globális geoidképet láthatjuk torzított megjelenítésben.

Ha valamely x, y, z 3 dimenziós tér minden pontjához valamilyen V skalármennyiség tartozik, akkor skalártérrel beszélünk. Ennek leírására a $V(r) = V(x, y, z)$ skalárvektor függvényt alkalmazzuk.

Ha az (x, y, z) 3 dimenziós tér minden pontjához valamilyen A vektormennyiség tartozik, akkor vektortérrel beszélünk. Ilyen például a g nehézségi térerősség, ennek mértékegysége m/s^2 . Leírására vektor-vektor függvényt használunk, ez vektorkomponensenként egy skalárfüggvényt jelent:



1.1. ábra: Geoid torzított megjelenítésben geoidunduláció szerint színezve

Forrás: <http://icgem.gfz-potsdam.de/vis3d/longtime>

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} g_x(x, y, z) \\ g_y(x, y, z) \\ g_z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Mivel a vektor-vektorfüggvényt nehezebb használni, mint egy skalár-vektor függvényt, így a vektor-vektor függvényt egy skalár-vektor függvénnyel szeretnénk helyettesíteni. Ez akkor lehetséges, ha az adott erőterhez rendelhető potenciál.

Ha egy $A(x, y, z)$ vektortér azonos egy V skalártér gradiensvektorainak terével, akkor a V az A erőter potenciálja, így A helyett használható V .

Így a nehézségi térerősség felírható a nehézségi erőter W potenciáljának gradienseként.

$$\mathbf{g} = \mathbf{grad}(W) = \left[\frac{\partial W}{\partial x} \quad \frac{\partial W}{\partial y} \quad \frac{\partial W}{\partial z} \right]^T \quad (1.2)$$

A földi nehézségi erő a tömegvonzási erő, a forgási centrifugális erő, illetve az árapálykeltő erők eredőjeként írható fel. Utóbbi hatását rendszerint eltávolítjuk a mérési eredményeinkből, így a továbbiakban nem foglalkozom vele. A tömegvonzási erő potenciálját V -vel jelöljük, míg a nehézségi erő potenciálját W -vel.

Egy M tömegű pontszerű test által keltett tömegvonzási erőter V potenciálja a következőképpen írható fel attól l távolságban:

$$V = \frac{GM}{l} \quad (1.3)$$

ahol G a Newton-féle tömegvonzási állandó

Nem pontszerű testre az összefüggés a következőképpen módosul:

$$V(\mathbf{r}) = k \cdot \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}_M)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} dx dy dz \quad (1.4)$$

Ebben a képletben $\rho(\mathbf{r}_M)$ a tömegelem sűrűsége, $\mathbf{r}$ a pont helyvektora, ahol a potenciált keressük. A fenti hármassintegrált a Föld teljes térfogatára ki kellene számítani. Ezzel az a probléma, hogy nem ismerjük pontosan a Föld belső sűrűség-eloszlását.

A forgási centrifugális erőter potenciálját a következő összefüggés adja meg:

$$V_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \psi \quad (1.5)$$

Az (1.4) egyenlet alkalmazásának nehézsége miatt a tömegvonzási erőter V potenciálját a jobban használható gömbfüggvény-soros alakban szoktuk felírni. Ez a Laplace-egyenlet alapján vezethető le. Külső, forrásmentes erőterben igaz:

$$\Delta V = \text{div}(\mathbf{grad}(V)) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.6)$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldásával, a forgásszimmetrikus tagok különválasztásával és a forgási centrifugális erőter potenciáljának hozzáadásával a nehézségi erőter W potenciálja az alábbi alakban írható fel:

$$W = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\sin \psi) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \psi \quad (1.7)$$

A jelölések magyarázata: R – skálatényező, $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ – normalizált gömbfüggvény-együtthatók, ψ – geocentrikus földrajzi szélesség, λ – földrajzi hosszúság, $\bar{P}_{n,m}(\sin \psi)$ – normalizált asszociált Legendre-függvények, r – geocentrikus helyvektor hossza

1.2. A Föld normál nehézségi erőtere

A Föld normál nehézségi erőtere a Föld valódi nehézségi erőterét jól megközelítő szabályos (forgási és egyenlítői szimmetriás) eloszlású, viszonylag egyszerű matematikai összefüggésekkel leírható erőter. A normál nehézségi erőter meghatározható a szintszferoidok elméletével, illetve szintellipszoid segítségével. Stokes és Poincaré tétele értelmében egy ω szögsebességgel forgó M tömegű test S külső szintfelületének önkényes felvétele után az U normálpotenciál és a γ normál nehézségi gyorsulás már számítható a belső tömegeloszlás ismerete nélkül a Stokes-féle elemekből (ω, M, S) . Az S külső szintfelületnek a Föld normálalakját, azaz egy forgási ellipszoidot veszünk fel. A normálpotenciált az alábbi összefüggéssel számíthatjuk a szintellipszoidon:

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_{2n,0}^* \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin\psi) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \psi \quad (1.8)$$

a $\bar{C}_{2n,0}^* (= -\bar{J}_{2n,0}^*)$ gömbfüggvény-együtthatók a Stokes-féle elemekből zárt képlettel számíthatók

A potenciálzavar a valódi potenciál és a normálpotenciál különbsége:

$$T = W - U \quad (1.9)$$

A normál nehézségi térerősség vektort a normálpotenciál gradienseként értelmezzük, és a következőképpen számítható (Biró et al., 2013).:

$$\gamma = \mathbf{grad} U = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{\partial U}{r \partial \psi} \\ \frac{\partial U}{r \cos \psi \partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

A nehézségi térerősség vektorának nagyságát Helmert-féle szintszferoid alkalmazása esetén a következő sorfejtett képlet adja meg ($\psi \approx \varphi$ közelítéssel) a földrajzi szélesség függvényében a szintszferoid felszínén:

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi) \quad (1.11)$$

Ha a Helmert-féle szintszferoid helyett a Föld normáلالakját szintellipszoidként értelmezzük, akkor a normál nehézségi térerősség Somigliana zárt képletéből számítható a szintellipszoid felszínén:

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{ahol} \quad k = \frac{b \gamma_p}{a \gamma_e} - 1 \quad (1.12)$$

A nemzetközi gyakorlatban az (1.11) összefüggést a szintellipszoid vonatkozásában is szokás alkalmazni. A sorfejtett alakból a normál nehézségi térerősség $0,1 \text{ mGal}$ pontossággal számítható. Nagyobb pontossági igény esetén használatos egy több tagból álló sorfejtett alak is (Moritz, 2000).

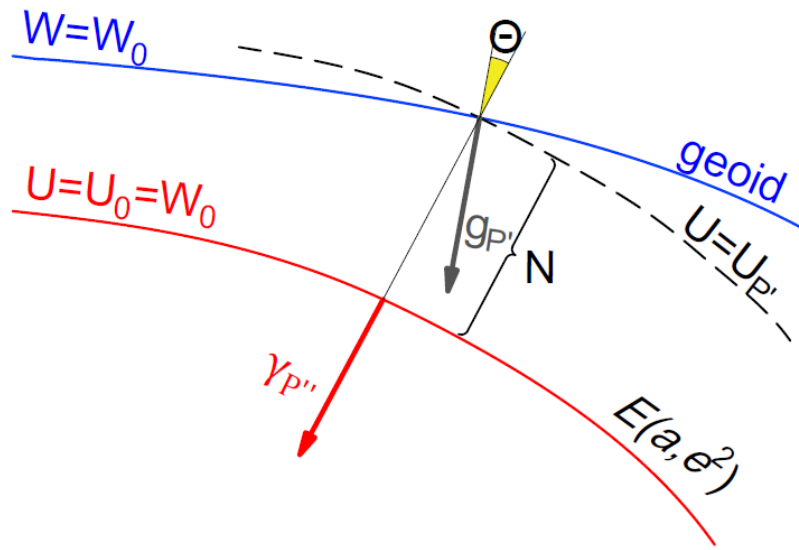
1.3. Nehézségi rendellenességek és gravitációs zavar

A g valódi nehézségi gyorsulásnak és a γ normál nehézségi gyorsulásnak a különbségét nehézségi rendellenességnek, vagy gravitációs anomáliának nevezzük. Attól függően, hogy a g és a γ értékeket mely pontokban értelmezzük, beszélhetünk geoidi, illetve földfelszíni nehézségi rendellenességekről.

A geoidi nehézségi rendellenesség a földfelszíni P pont P' geoidi megfelelőjébe átszámított g valódi, illetve a P pont P'' ellipszoidi megfelelőjében kiszámított normál nehézségi térerősség különbsége.

A földfelszíni nehézségi rendellenesség esetében a g valódi nehézségi térerősséget a földfelszíni P pontban értelmezzük, a γ normál nehézségi térerősséget pedig abban a P''' pontban, amely a P pont függővonalán helyezkedik el, és az arra vonatkozó $U_{P'''}$ normálpotenciál megegyezik a P pont W_P valódi potenciáljával (Bíró et al., 2013).

A nehézségi rendellenességgel ellentétben a gravitációs zavar (δg) a földfelszíni P pontban mért nehézségi gyorsulás és ugyanabban a P pontban számított normál nehézségi gyorsulás különbsége. Ennek számítása során ismernünk a pont ellipszoid feletti magasságát, tehát a geoidundulációt is. A GNSS helymeghatározás széles körű elterjedése előtt ez nem volt egyszerű feladat, így ehelyett a gravitációs anomália (nehézségi rendellenesség) használata vált megszokottá.



1.2. ábra: A geoidi nehézségi rendellenességek értelmezése

1.4. Mérések redukciója a geoidra

A nehézségi méréseinket a földfelszínen végezzük, de a geodéziai, geofizikai felhasználás céljából ezeket a méréseinket általában a geoid felszínére kell redukálnunk. Az SRBF inverzió ez alól kivétel, hiszen itt dolgozhatunk földfelszíni adatokkal, feltéve, ha ismerjük a pontok ellipszoid feletti magasságát. Viszont pl., ha Stokes-integrállal számítunk geoidundulációkat, geoidra redukált értékekkel kell számolnunk.

1.4.1. Szabadlevegő-anomália

A δg_F **tiszta magassági javítással (a Faye-féle redukcióval)** a mérési pont tényleges tengerszint feletti H magasságáról a vonatkoztatási szint (általában a tengerszint) magasságára számítjuk át a mért nehézségi gyorsulás értékeit. Az átszámítást úgy végezzük, mintha a mérési pont és a vonatkoztatási szint között nem lennének tömegek.

A redukció mértéke:

$$\delta g_F = -\frac{dg}{dr} H \approx +3.086 \cdot 10^{-6} H \quad (1.13)$$

A képletben szereplő negatív előjel ellenére a redukció értéke pozitív (ha tengerszint felett vagyunk), mivel a g nehézségi gyorsulás értéke a magasság növekedésével csökken. A dg/dr függőleges gradiens számításánál általában élünk a $dg/dr \approx d\gamma/dr$ közelítéssel. További közelítéssel Földet egy gömbnek tekintve dg/dr egy konstans érték lesz: $-3.086 \cdot 10^{-6} 1/s^2$

Attól függően, hogy milyen módon redukáltuk a g méréseinket, különféle gravitációs anomáliákat kapunk. A szabadlevegő-anomália a következőképpen számítható (az 1.2. ábra jelölései alapján) (Völgyesi, 2002):

$$\Delta g_F = g + \delta g_F - \gamma = g_P - \frac{dg}{dr} H - \gamma_{P''} \quad (1.14)$$

A vertikális gradiens normál értékét pontosabban is figyelembe vehetjük a következő képlettel, ami a szélességi hatást is tartalmazza (Csapó – Papp, 2000):

$$\frac{d\gamma}{dr} = -0.30877 \cdot 10^{-5} (1 - 0.00142 \sin^2 \varphi) \text{ s}^{-2} [1/\text{s}^2] \quad (1.15)$$

Belátható, hogy mivel a tömegek hatását nem vettük figyelembe, és a vertikális gradienst annak normálértékével helyettesítettük, a szabadlevegő-anomália számértékét tekintve megegyezik a földfelszíni nehézségi rendellenességgel, annak ellenére, hogy előbbi mennyiség elvileg a geoidra vonatkozik, utóbbi pedig a fizikai földfelszínre. Az 1.15 egyenlet a következőképpen írható át:

$$\Delta g_F = g_P - \frac{dg}{dr} H - \gamma_{P''} = g_P - \frac{dg}{dr} H - \left(\gamma_{P'''} - \frac{d\gamma}{dr} H \right) \approx g_P - \gamma_{P'''} \quad (1.16)$$

Viszont, ha a vertikális gradienseket a normálértéknél pontosabban vesszük figyelembe, a két érték már nem fog megegyezni.

1.4.2. Faye- anomália

A Faye -anomáliát a szabadlevegő-anomáliából úgy kapjuk, hogy azt a terepi korrekcióval megjavítjuk. Tehát:

$$\Delta g_{FA} = g + \delta g_F + \delta g_T - \gamma \quad (1.17)$$

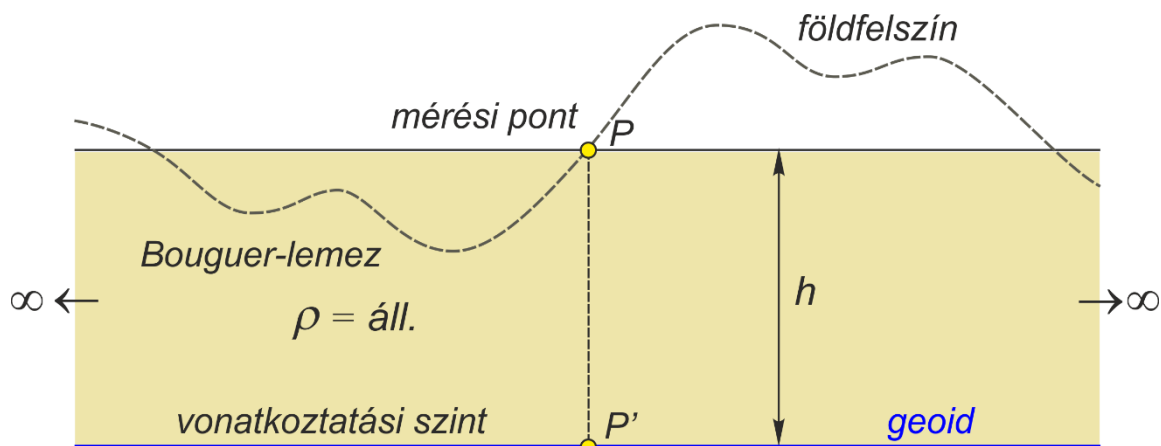
Viszont a szabadlevegő-anomáliákra gyakran nem számították ki a terepi korrekciót, mivel rendkívül munkaigényes (Hackney - Featherstone, 2003), leginkább csak Bouguer-anomáliákhoz számították ki. Ezért Faye-anomáliaként is szoktak hivatkozni a szabadlevegő-anomáliákra, miközben ezek nem teljesen azonos fogalmak.

1.4.3. Bouguer- anomália

A δg_B **Bouguer-javítással** a mérési állomás és a vonatkoztatási szint (a tengerszint) között elhelyezkedő tömegek hatását távolítjuk el. Az átszámítás során első közelítésben eltekintünk a mérési pont közvetlen környezetének domborzati hatásától és így a tényleges felszíni topográfia

és a vonatkoztatási szint közötti tömegek hatását egy H vastagságú, horizontálisan végtelen kiterjedésű Bouguer-lemez hatásával közelítjük. Egy vízszintesen végtelen kiterjedésű H vastagságú és ρ sűrűségű lemez által okozott δg_B gravitációs gyorsulás a lemez felső szélén levő tetszőleges pontban:

$$\delta g_B = 2\pi k \rho H \approx 1.119 \cdot 10^{-6} H \quad (1.18)$$



1.3. ábra: A Bouguer-lemez

A δg_T **topográfiai javítás** a valódi földfelszín és a Bouguer-lemez felső határa közötti tömegek, illetve "tömeghiányok" hatását veszi figyelembe. A topográfiai javítás minden esetben pozitív előjelű, mivel a mérési pont síkja fölött elhelyezkedő tömegek a mért g értékét csökkentik, tehát a javítást a mért értékhez hozzá kell adni; ugyanakkor a völgyek esetében a Bouguer-korrekción elvégzésekor feltételeztük, hogy anyaggal van kitöltve és ennek az anyagnak a hatását a Bouguer-korrekciónal eltávolítottuk. A valóságban azonban itt nincsenek tömegek, tehát ezt a fölöslegesen eltávolított hatást is hozzá kell adni a mért értékhez.

A topográfikus korrekció két részből áll: a 100 m-en belüli környezet hatását térszínhatásnak, a távolabbi tömegek hatását térképhatásnak nevezzük (Völgyesi, 2002). Előbbit a pont közelében, 8 irányban végzett színtezés alapján határozhatjuk meg, utóbbit manapság digitális domborzatmodellek alapján számíthatjuk. Régen a topográfiai térképek alapján végezték ezeket a számításokat, ez rendkívül munkaigényes feladat volt. A térszínhatás számítására nem mindig került sor.

A Bouguer- anomáliát a következőképpen kapjuk meg:

$$\Delta g_B = g + \delta g_F - \delta g_B + \delta g_T - \gamma \quad (1.19)$$

A Bouguer-anomáliatérkép az adott terület földtani felépítésétől, a képződmények sűrűségétől függő integrált képet ad. Ez azt jelenti, hogy a felszíntől több, néhány száz kilométeres

mélységig minden képződmény együttes gravitációs hatása látszik a Bouguer-anomáliatérképen. A nyersanyagkutatóban és a földtani térképezés során ezeket az anomáliákat szokták használni. A Bouguer-anomáliák tovább javíthatóak, ha a regionális hatást eltávolítjuk, amelyet a környező országok Bouguer-anomália térképei alapján vezethetünk le. Az ELGI ezek alapján egy harmadfokú felületet vezetett le, amelyet a magyarországi Bouguer-anomáliatérképből kivontak. Magyarországon összességében a regionális hatás kiszűrése megnövelné a kontrasztot a hegyvidéki és medence területek gravitációs hatása között, csökkentve az Alföld Bouguer- anomália értékeit (Kiss, 2009).

Geodéziai célra viszont leginkább a Faye-anomáliákat (illetve a topografikus korrekció hiányában szabadlevegő-anomáliákat is) szoktak alkalmazni.

A szabadlevegő-anomáliák az összes tömeg hatását tartalmazzák, ezért gyakorlatilag feltevésmentesek, viszont igen gyorsan változnak, ezért nehezen interpolálhatók, ahogyan a terepi korrekcióval javított Faye-anomáliák is. Viszont a Bouguer- anomáliák sima lefutásúak, könnyen interpolálhatók (Völgyesi, 2002).

1.4.4. Izosztatikus anomália

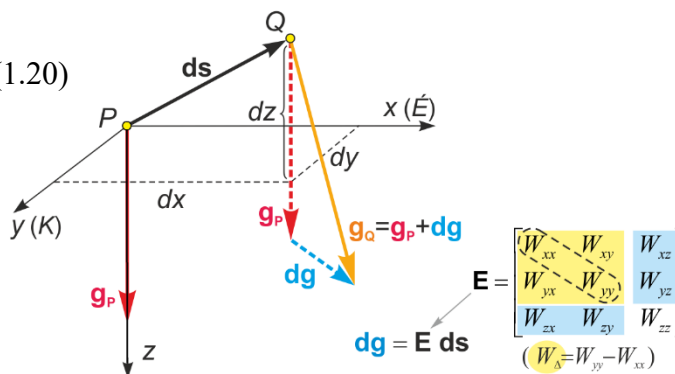
Az Airy-féle izosztatikus modell szerint a tengerszint feletti domborzat egyfajta tükörképeként egy mély gyökérzónája is van a hegyeknek. A domborzat és a gyökérzóna azonos gravitációs hatásának köszönhető az izosztatikus egyensúly (mint az úszó test egyensúlya, pl. a jégtáblák a vízen). Az Airy-féle elméletből az következik, hogy a magas hegyek alatt mély gyökérzónák nyúlnak bele a köpenybe a kéregre jellemző kisebb sűrűséggel. A topográfiai magasság értéknek durván 4,5-szeresével kell számolni a gyökérzónák meghatározása során. A magas hegyek izosztatikus hatása abban nyilvánul meg, hogy ott jelentős Bouguer-anomáliaminimumokat, míg a mély üledékes medencék területén Bouguer-anomáliamaximumot tapasztalunk. Az izosztatikus korrekció meghatározásához a viszonylag távolabbi tömegek hatását is figyelembe kell venni, így pl. Magyarország területére elvégzett korrekció esetén a teljes közép-európai domborzatot figyelembe kell venni (Kiss, 2009).

1.5. Az Eötvös-tenzor és a vertikális gradiens

Az Eötvös-tenzor a g nehézségi gyorsulás 3 vektorkomponensének x, y, z szerinti deriváltjait tartalmazza, megadja a nehézségi gyorsulás komponenseinek hosszegységre eső megváltozását. Mivel a g nehézségi térerősség a W potenciál gradiensvektora, ezért az Eötvös-tenzor elemei a W potenciálfüggvény második parciális deriváltjai.

$$\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

A Young-tétel szerint vegyes második deriváltak egyenlők, így az Eötvös-tenzor 9 eleméből csak 6 független, a tenzor szimmetrikus. Az Eötvös-tenzor elemeinek SI mértékegysége $1/s^2$ a gyakorlatban azonban inkább ennek a 10^{-9} -



1.4. ábra: A nehézségi erő két pont közötti elemi megváltozása

szerese használatos, amit Eötvös Loránd tiszteletére 1 Eötvösnek neveznek. Az Eötvös-ingával négyféle mennyiség mérhető: a W_{xz} , W_{yz} horizontális gradiensek és a $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$, W_{xy} görbületi gradiensek. A mérések pontossága 1-2 E középhibával jellemezhető (Bíró et al., 2013).

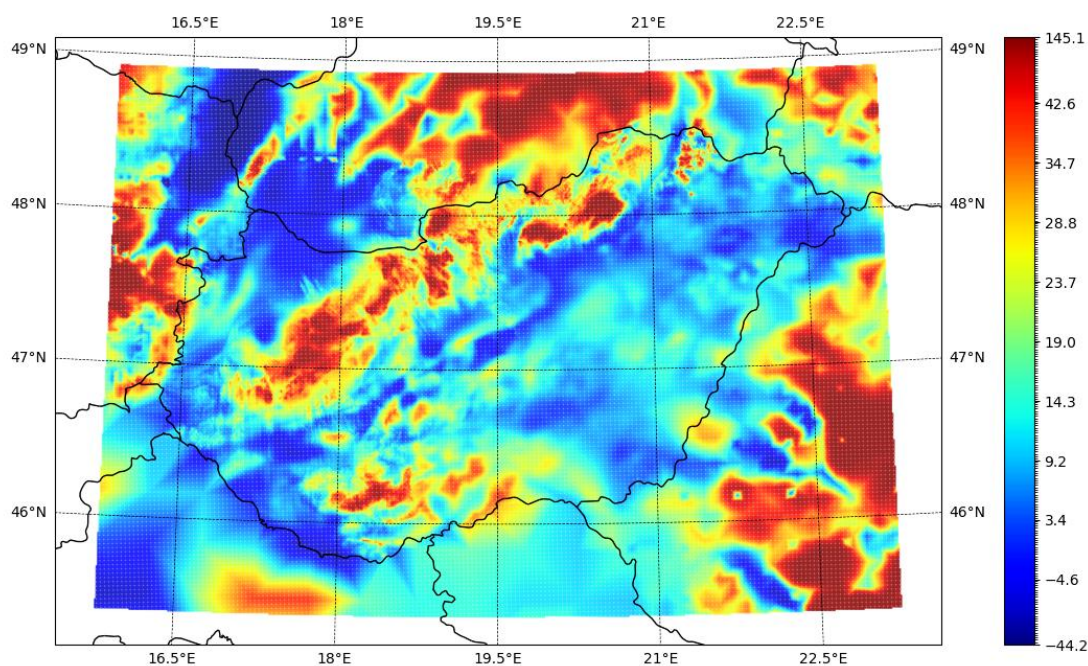
A vertikális gradiens is mérhető eltérő módszerrel. A kétpontos eljárás lényege az, hogy a mérendő pont függőlegesében egymás fölött egy méternél nagyobb távolságban kijelölt két pont között végzünk Δg méréseket, majd a számított értéket lineáris interpolációval 1 méteres intervallumra vonatkoztatjuk (Csapó-Völgyesi, 2002).

2. Számításhoz felhasznált adatok

2.1. Szabadlevegő - anomáliák

A szabadlevegő- anomáliákat egy $1 \times 1 \text{ km}$ -es lépésközű EOVS vetületű rács formájában bocsátotta a FÖMI a BME részére kutatási célra, az ELGI pedig egy $1' \times 1.5'$ felbontású rácsot bocsátott az az egyetem részére.

A gravimetriai adatbázis az SZTFH (korábbi Eötvös Loránd Geofizikai Intézet (ELGI)) kezelésében van, amely 1999-ben kb. 380 000 gravimetriai pont ($\approx 4 \text{ pont/km}^2$) adatait tartalmazta. Az adatok jórészt nagy pontosságú nyersanyagkutató mérésekből származnak, várható pontosságuk $\approx 1 \text{ mGal}$. Az említett rácshálóra ezekből történt a szabadlevegő-anomáliák interpolációja. A szórt pontok rácsra történő interpolálása a geoid meghatározásának kulcsfontosságú lépése, nem megfelelő eljárással nem kívánt torzulások vihetők be a geoidmegoldásba. Az egykori FÖMI megbízásából az ELGI-ben 10 különböző interpolációs módszert teszteltek le, és választották ki a legjobb tulajdonságokkal bíró MINCURV eljárást. A rácsra interpolált gravimetriai adatok és az ezekből levezethető magasságanomáliák pontosságát az interpolációs eljárás túl a felhasznált alapadatrendszer sűrűsége is befolyásolja. Az országhatáron kívüli területekről az adatbázis lényegesen ritkább és kevésbé megbízható.



2.1. ábra: A Faye-anomália értékek eloszlása az adatterületen belül (az értékek mGal-ban értendők)

A Kárpát-medence térségére rendelkezésre áll egy geofizikai vizsgálatokra összeállított kb. $5 \times 5 \text{ km}$ -es rácson lévő Bouguer-anomália adatbázis, amely egyes országok területén (Szlovákia, Ukrajna, Románia $5' \times 7.5'$ -es, Horvátország, Lengyelország, $5' \times 5'$ -es átlag Bouguer-anomáliák és Ausztria területéről válogatott 6 km -es átlagos ponttávolságú nyers g adatok) megbízhatóbbnak tartott adatokkal lett kiváltva. Az országhatáron túli Bouguer-adatbázis átszámítása (beleértve a terepkorrekciót is) szabadlevegő-anomáliává a GLOBE $30' \times 30'$ -es rácson adott DTM segítségével történt. A magyar és az országhatáron túli

adatbázisok összevonásával alakult ki a teljes munkaterületre egy $1' \times 1.5'$ -es szabadlevegő-anomália adatbázis (kb. $1,85 \times 1,95 \text{ km}$). E megoldásnak az az óriási előnye, hogy a teljes munkaterületről azonos, nagy térbeli felbontású (csak a pontosság területfüggő) adatbázis áll rendelkezésre (Kenyeres, 2001). Ezt tovább sűrítve készült el az $1 \times 1 \text{ km}$ -es EOVRács, illetve egy $30'' \times 50''$ felbontású földrajzi rácson is rendelkezésre állnak az adatok.

Az $1' \times 1.5'$ felbontású rácstra számítottak terepi korrekciókat is, így a szabadlevegő-anomáliák mellett terepi hatással javított Faye-anomáliák is rendelkezésre állnak. Viszont a jobb felbontású EOVRács, illetve, $30'' \times 50''$ felbontású földrajzi rácset esetén nem állt rendelkezésünkre terepi korrekcióval ellátott változat. Ezekhez sajnos a leírás elveszett, viszont a földrajzi rácset esetén a fájlnevből kiderül (free3050.gmt), hogy szabadlevegő-anomáliáról van szó. Az EOVRácsot ezzel összehasonlítva megállapítottam, hogy az sem tartalmaz terepi korrekciót.

2.2. Magassági adatok

A szabadlevegő-anomáliák rácspontjaiban korábbi TDK-m eredményei alapján rendelkezésre álltak a pontok ellipszoid feletti magasságai a WGS84 ellipszoidra vonatkozóan.

A geoid feletti H magasságon kívül, ha ismerjük az N geoidundulációt, azaz a geoid-ellipszoid távolságot, meghatározható az ellipszoid feletti h magasság.

$$h = N + H \quad (2.1)$$

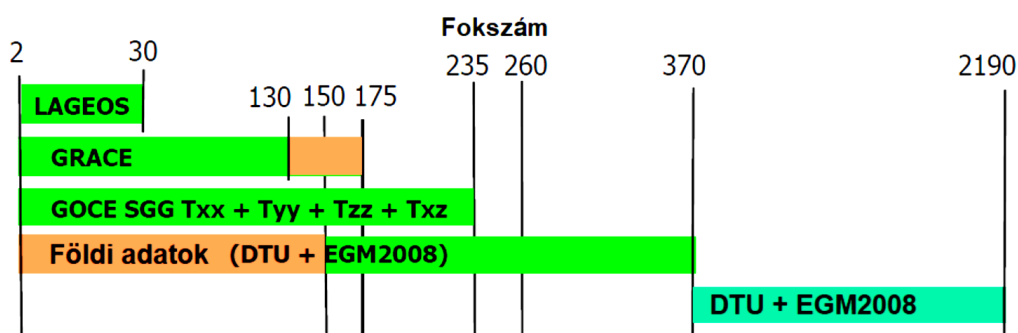
A rácspontok ellipszoid feletti magasságait úgy kaptam meg, hogy a pontok tengerszint feletti magasságait az EU-DEM $1''$ felbontású felszínmodellről interpoláltam, majd ehhez hozzáadtam a geoidundulációt, amelyet egy EGM2008 geoidmodell alapján készült $1'$ felbontású raszterről¹ interpoláltam. A számítás során bilineáris interpolációt használtam. A magasságok számításához használt Python scriptet úgy módosítottam, hogy külön oszlopban rendelkezésre álljon a tengerszint feletti, illetve ellipszoid feletti magasság is, mivel később mindkettőre szükség lesz (korábban csak az ellipszoid feletti magasságokra volt szükség).

¹ <https://www.agisoft.com/downloads/geoids/>

2.2. Globális geopotenciál modell

A számításhoz használt EIGEN-6C4 geopotenciál modellt az ICGEM (International Centre for Global Earth Models) honlapjáról² töltöttem le. A modelleket *gfc* formátumban lehetett letölteni. Ezek szövegfájlok, jegyzettömbben is megnyithatók. A fájlok elején található egy rövid leírás a modellről, majd az R skálátényező és a GM geocentrikus gravitációs állandó következik. Ezután az 1.7. egyenlet $\bar{C}_{nm}$ és $\bar{S}_{nm}$ együtthatói következnek, az együtthatók számértékei mellett szerepelnek az azok megbízhatóságát jellemző értékek.

Az EIGEN-6C4 statikus globális kombinált gravitációs modellben $n = 2190$ foksámig és $m = 2190$ rendig határozták meg a $\bar{C}_{n,m}$, $\bar{S}_{n,m}$ együtthatókat együttesen földi és műholdas mérési adatok felhasználásával. A műholdak közül a LAGEOS, GOCE és GRACE műholdak adatait használták, ezen kívül földfelszíni mérési adatokat $n = 370$ foksámig vették igénybe



2.2. ábra: Az EIGEN-6c4 modell előállításához felhasznált adatok fokszám szerint

Forrás: Förste et al., 2014

a számításhoz, a magasabb fokszámú összetevőket DTU óceáni geoidadatokról és EGM2008 geoidmagasságokról nyerték (Förste et al., 2014). A különböző adattípusok hozzájárulását a modellhez a 2.2. ábra mutatja.

2.3. Regionális SRBF modell

A globális geopotenciál modellek közül a legrészletesebbek (pl. EIGEN-6C4) $N=2190$ foksámig írják le a nehézségi erőter szerkezetét. Ennél magasabb foksámig történő modellezéshez regionális modellt kell előállítani a helyi nehézségi és egyéb mérések (pl. inga, függővonal-elhajlás stb.) alapján. Előző TDK dolgozatomban a nehézségi erőter gömbi radiális bázisfüggvények alapján történő modellezésével foglalkoztam. Ehhez a már említett szabadlevegő-anomáliákat használtam. A modellezést 400-6500 foksám-tartományban

² http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime

hajtottam végre. Később a modellben felhasználtam a rendelkezésre álló 40671 mai Magyarország területére eső Eötvös-inga mérést is. Mivel a gömbi radiális bázisfüggvényekről előző TDK dolgozatomban részletesen írtam (Pongrácz, 2023), így csak röviden foglalom össze a legfontosabbakat.

A gömbi radiális bázisfüggvények a gömbfüggvénysor alapján vezethetők le. A potenciálzavar adott i pontban leírható térben lokalizált gömbi radiális bázisfüggvények segítségével:

$$T(r_i, \varphi_i, \lambda_i) = \frac{GM}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B(r_i, r_k) \quad (2.2)$$

Az előző egyenletben szereplő $B(r_i, r_k)$ gömbi radiális bázisfüggvény a következő alakú:

$$B(r_i, r_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r_i}\right)^{n+1} b_n (2n+1) P_n(\cos \psi) \quad (2.3)$$

Ahol ψ a gömbi szögtávolság:

$$\cos \psi = \sin \varphi_i \sin \varphi_k + \cos \varphi_i \cos \varphi_k \cos(\lambda_i - \lambda_k) \quad (2.4)$$

A bázisfüggvényekben szereplő b_n együtthatónak fontos szerepe van a függvény spektrális tulajdonságainak meghatározásában. Az együtthatók a $P_n(\cos \psi)$ Legendre-polinomok foksám-függő súlyainak tekinthetők, a jelfeldolgozás tekintetében szűrőként funkcionálnak. A legegyszerűbb sáváteresztő szűrő a Shannon-kernel, a modellezés során ezt használtuk. Ez esetben a b_n együtthatók az N_{min} alsó korlát és az N_{max} felső korlát között 1, azon kívül 0 értéket vesznek fel.

A bázisfüggvényeket egy rácson kell elhelyezni, erre egy lehetőség a Reuter-rács, amely segítségével a gömbfelületen egymástól egyenletes távolságban elhelyezkedő pontok állíthatók elő. Miután felvettük a bázispontokat, a feladatunk a bázisfüggvények α_k súlyainak meghatározása, ehhez sok mérés és magas foksám esetén igen nagy méretű lineáris egyenletrendszer kell megoldanunk.

N_{min} értékét a modellterület kiterjedése, N_{max} értékét pedig a mérési adatok sűrűsége határozza meg, az alábbi összefüggésekkel számíthatók.

$$N_{min} = 40\,000/w \quad , \text{ ahol } w \text{ a modellterület rövidebb oldalhossza km-ben} \quad (2.5)$$

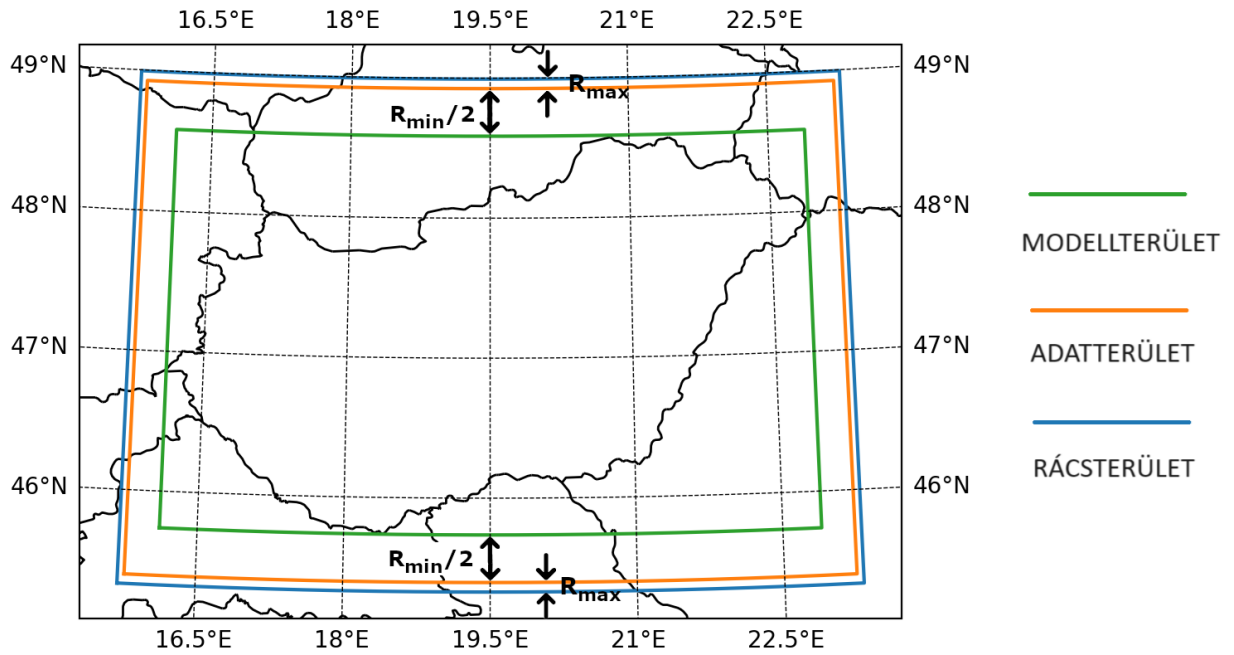
$$N_{max} = 20\,000/p \quad , \text{ ahol } p \text{ a bázispontok távolsága km-ben} \quad (2.6)$$

A peremhatás csökkentése, illetve elkerülése érdekében az adatterületnek a modellterületnél nagyobb kiterjedésűnek kell lennie, minden irányban $R_{min}/2$ -vel növelni kell azt. A rácsterület meghatározásához tovább kell növelni az adatterületet minden irányban R_{max} értékkel. Ezek kiterjedésének meghatározásához R_{min} és R_{max} számítása a (2.7) és (2.8) összefüggésekkel lehetséges.

$$R_{min} = \frac{20\,000}{N_{min} R \cos \varphi_{max}} \quad (2.7)$$

$$R_{max} = \frac{20\,000}{N_{max} R \cos \varphi_{max}} \quad (2.8)$$

A 2.3. ábrán a modell-, az adat-, illetve a rácsterület kiterjedése látható $N_{min} = 400$ és $N_{max} = 6500$ esetén.



2.3. ábra: Adat- és rácsterület $N_{min} = 400$ és $N_{max} = 6500$ esetén

2.4. Mérések redukciója

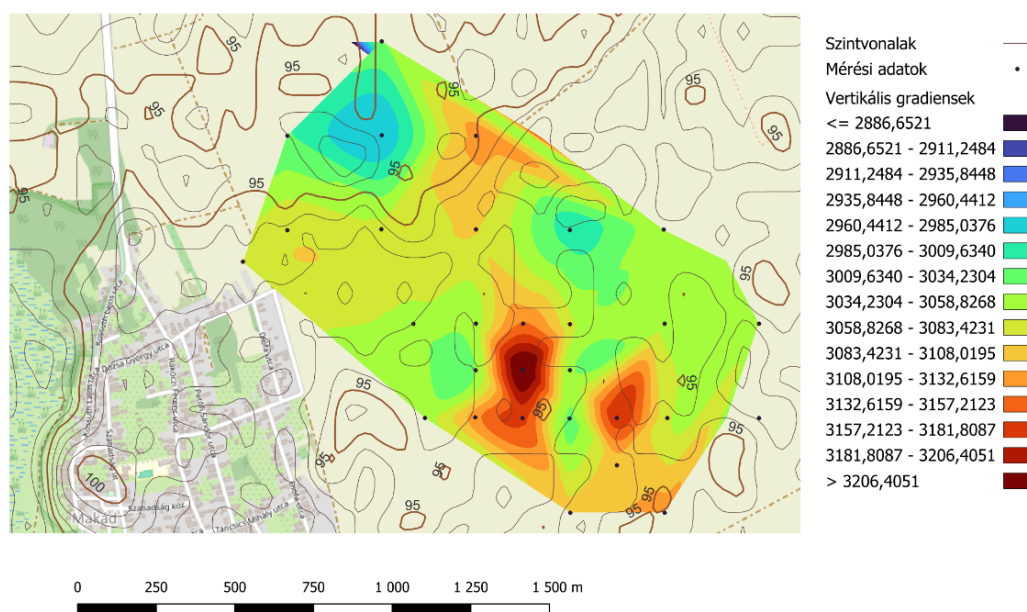
A gömbi radiális bázisfüggvényekkel való számítás előtt a rendelkezésre álló adatokból el kell távolítanunk az N_{min} alatti összetevőket, amihez a már említett *EIGEN-6C4* geopotenciál modellt és Tscherning et al. (1992) által Fortran nyelven írt *GEOCOL* programot használtam. Ezen kívül az N_{min} alatti összetevőkre akkor is szükségünk van, amikor a kész modell alapján valamilyen mennyiséget (most éppen vertikális gradienst) számítunk ki, ezeket hozzá kell adnunk a bázisfüggvények alapján számolt értékekhez.

A GEOCOL program nem képes a letöltött gfc formátumú modelleket beolvasni. A gfc fájlban m szerint vannak rendezve az együtthatók, míg a program n szerint rendezett együtthatókat tud beolvasni. Ezért egy Python script segítségével az együtthatókat a megfelelő formátumra hoztuk, a geopotenciál modell metaadatait (pl. *GM*, *a*, stb.) egy azonos nevű json fájlba mentettük (ezeket a gfc fájl tartalmazza), ahonnan a GEOCOL programot futtató script képes ezeket beolvasni.

3. Pontosabb vertikális gradiensek hatásának számítása

3.1. Lehetőségek a vertikális gradiens pontosabb figyelembevételére

A $\delta g_F = -(\partial g / \partial H) H$ Faye-redukcióhoz, ha a normálértéknél pontosabban szeretnénk figyelembe venni a $\partial g / \partial H$ vertikális gradienst, két út áll előttünk. Mért értékeket használunk fel vagy egy modellezett értékeket használunk. A mért vertikális gradiensek térben rendkívül gyorsan változnak, ezen kívül ezeket a változásokat nagy mértékben befolyásolja a helyi topográfia. Viszont még síkvidéki területeken is rendkívül gyorsan változnak ezek az értékek. Továbbá vertikális gradiens mérésekből Magyarországon nem sok áll rendelkezésre. A 3.1. ábrán Makád környékén található vertikális gradiens mérések láthatók. A helyi topográfia nem túl változatos, ennek ellenére a vertikális gradiensek értékei több, mint 300 E terjedelmű



3.1. ábra: Vertikális gradiens mérések Makád környékén

intervallumon belül változnak. Ez jól mutatja, hogy ha lenne is elegendő vertikális gradiens mérésünk, ezeket szabadlevegő-redukcióhoz nem lehetne felhasználni.

Gömbi radiális bázisfüggvényekkel előállított regionális erőter-modell segítségével modellezhetjük a vertikális gradiensek eloszlását. Ezzel a globális geopotenciál modelleknél részletesebb képet kapunk ezekről, de nem változik olyan gyorsan az eloszlásuk, mint a mért adatok esetén.

A g nehézségi gyorsulás különbsége a földfelszínen és a geoidon, azaz a Faye-redukció:

$$\delta g_F = g_0 - g_H = - \int_0^H W_{zz} dH = -\overline{W_{zz}} H \quad (3.1)$$

Tehát a geoid és a földfelszín közötti átlagos vertikális gradiensre van szükségünk. Amennyiben W_{zz} a magassággal lineárisan változik, a vertikális gradiens $H/2$ magasságban való kiszámítása a célravezető a szabadlevegő-redukcióhoz úgy, mintha nem a pont és a geoid között nem lennének tömegek. Szerencsére erre a gömbi radiális bázisfüggvényekkel előállított modell alkalmas, hiszen egy 3D modelltől van szó. Mivel a Laplace-egyenleten alapszik, így a modell akkor érvényes, ha külső térben vagyunk, a Föld belsejében a modell nem érvényes. Mivel a Faye-redukciónál a geoid feletti tömegek hatását nem vesszük figyelembe, így tekinthetjük úgy, mintha külső térben lennénk.

Törökországban már próbálkoztak vertikális gradiensek (VG) modellezésével annak érdekében, hogy a VG normál értéke helyett a modellezett értékeket használják fel a Faye-redukcióhoz. A modellezés során az alacsony fokszerű összetevőket globális geopotenciál modellből ($N = 220$) számították. A magasabb fokszerű összetevőkhöz legkisebb négyzetes kollokációt alkalmaztak, a számítást topografikus redukcióval ellátott nehézségi rendellenességek alapján végezték, ezt követően a MERIT DEM domborzatmodell alapján levezetett RTM modell alapján kiszámították topográfiából származó VG összetevőket (Akdogan et al., 2021). A modellezett VG értékek tehát az alábbi összetevőkből állnak:

$$W_{zz}^{\text{model}} = U_{zz} + T_{zz}^{GGM} + T_{zz}^{\text{res.}} + T_{zz}^{RTM} \quad (3.2)$$

3.2. Vertikális gradiensek számításához használt modell előállítása

A radiális bázisfüggvényes inverzióhoz és szintézishez a konzulensem által írt *GeoRBF*, illetve *SynRBF* programokat használtam. Ezek Python scriptek, futtatásokhoz bonyolult konfigurációs

fájlokra van szükség, amelyekben a paraméterek beállítása történik. A konfigurációs fájlokat egy-egy mindkét programhoz rendelkezésre álló minta alapján írtam meg.

Az eredeti verzióban mindkét program az alakmátrix előállításánál során mindössze egyetlen processzormagot képes kihasználni, utána viszont az egyenletrendszer VCE iterációval történő megoldásánál történő pszeudoinverz számítás már parallel fut több magon. A programokat úgy módosítottam, hogy az alakmátrix előállításához is ki tudjuk használni az összes magot. Ehhez sorok szerint bontottam részmátrixokra az alakmátrixot, amelyeket egy-egy mag számol. A végső modell előállításához felhasználtam szabadlevegő-anomáliákat és Eötvös-inga méréseket is (a horizontális- és görbületi gradienseket egyaránt). Összesen 6 részre osztottam az adatokat:

3.1. táblázat: Az SRBF modell előállításához felhasznált adatok

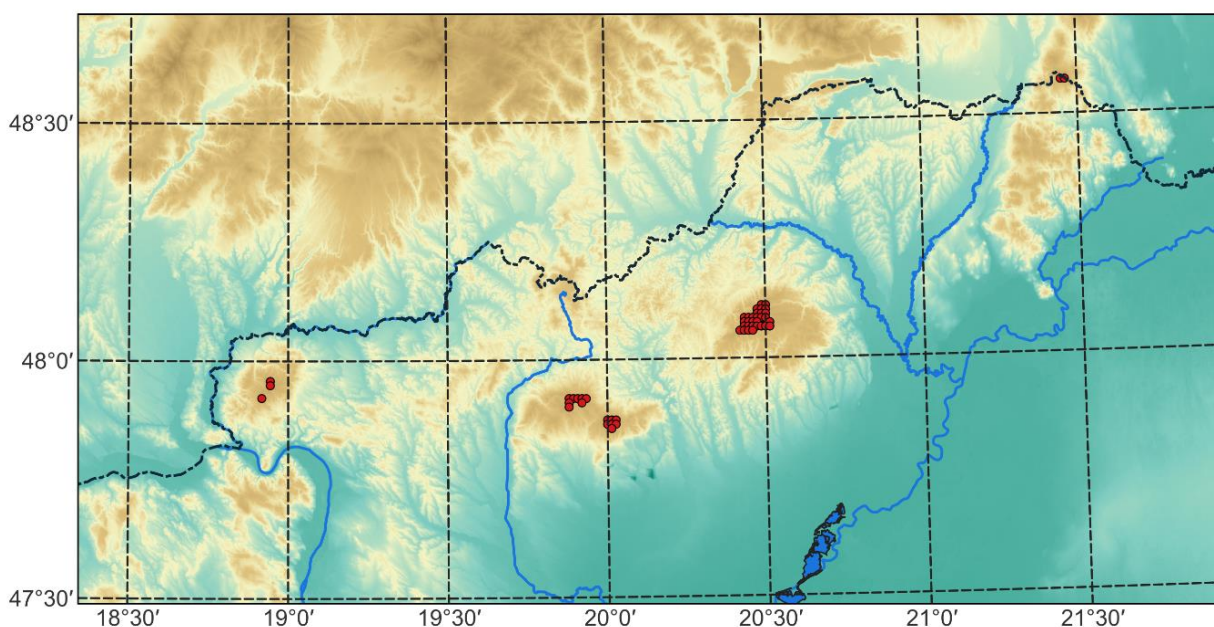
	adattípus	adatok száma	szórás	átlag	mértékegység
1	Δg (Magyarországon belüli)	41230	-9.983	-1.32	$mGal$
2	Δg (Magyarországon kívüli)	57191	-13.693	-1.93	$mGal$
3	W_{xz}	40671	-13.463	1.023	E
4	W_{yz}	40671	-13.989	0.656	E
5	W_{Δ}	34347	-27.406	-6.843	E
6	$2W_{xy}$	34347	-28.422	1.702	E

A modell előállítása az MSc diplomamunkám része volt, a dolgozatomban ezen modell alapján számítható vertikális gradiensek hatását vizsgálom a geoidi nehézségi rendellenességekre, ez a diplomamunkától független vizsgálat, a diplomakiírásban nem szerepel.

A modell előállítása $N = 6500$ foksámgig a debreceni Komondor szuperszámítógépen történt 128 processzormag felhasználásával, a modell előállítása kb. 20 órát vett igénybe. Készítettem egy olyan modellt is, amelyhez csak a Δg értékeket használtam fel, így az ingaméréseket a modell ellenőrzésére tudtam felhasználni. A csak Δg értékek alapján készült modell esetén a T_{xz} gradiens esetén a mért és számított értékek között 0.584-re, a T_{yz} gradiens esetén 0.547-re adódott a korrelációs együttható. Ez lényegesen jobb, mint a legrészletesebb globális geopotenciál modellek alapján elérhető egyezés. Az ingamérések felhasználásával készült modell esetén a korrelációs együttható a T_{xz} gradiens esetén 0.744-re, a T_{yz} gradiens esetén 0.681-re adódott. Ez esetben viszont az ingamérések validációra történő felhasználása elméletileg nem teljesen helytálló, hiszen azok a modelltől nem független mérések.

3.3. Vertikális gradiensek változása a magasság függvényében

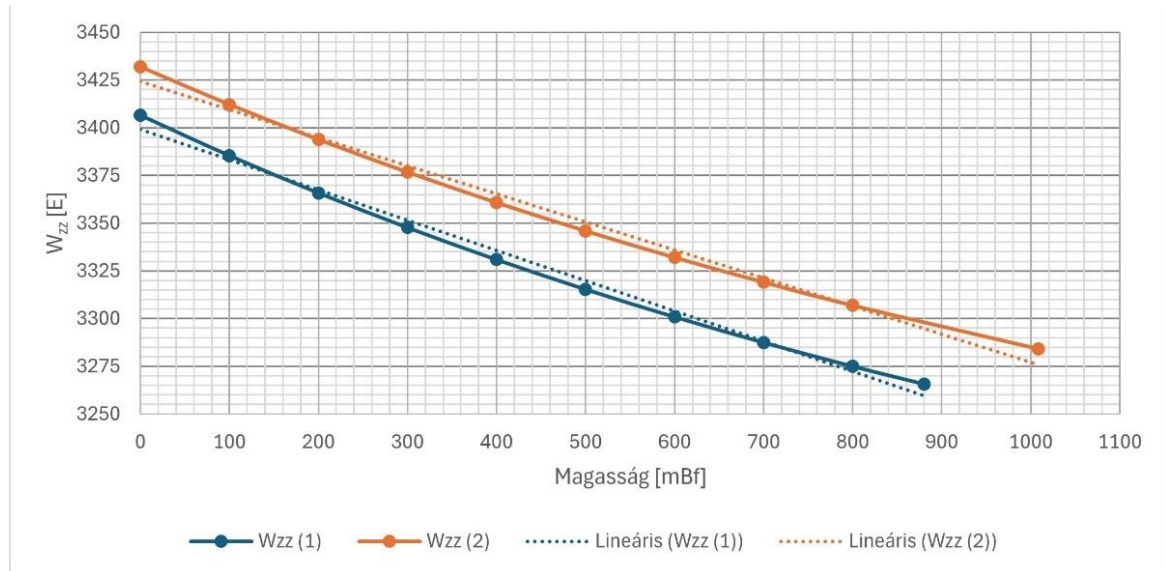
A vertikális gradiensek linearitását megvizsgáltam a magasság függvényében, erre a Magyarország területére eső 92997 szabadlevegő-anomália rácspont közül 50-et választottam ki, amelyek mindegyikében a tengerszint feletti magasság 800 m feletti. A tengerszinttől haladva 100 m-enként számítottam ki W_{zz} értékét minden pontra 800 m-ig, továbbá a földfelszíni pontban is. Mivel a radiális bázisfüggvényes értékekhez ellipszoid feletti magasság kellett, így a felvett tengerszint feletti magasságokhoz hozzáadtam a pontbeli geoidunduláció értékét. A radiális bázisfüggvényes inverzióból kapott gradiens értékekhez hozzáadtam az EIGEN-6C4 modellből számított $N = 400$ foksám alatti összetevőket, majd a normál vertikális gradienst. Az alacsony foksámú komponensek számításához az adatok redukciójához is használt GEOCOL programot használtam.



3.2. ábra: Vertikális gradiens linearitásának vizsgálatához használt pontok

A 3.2. ábrán láthatók a vizsgálatához használt pontok. A felszínen az 50 pontban átlagosan 3271.9 E-re adódik a vertikális gradiens, szórása 33.3 E. A számítást 100 m-enként elvégezve az látszik, hogy W_{zz} magasság szerinti változása jól közelíthető egy egyenessel, de jobban közelíthető egy másodfokú függvénnyel. Két kiválasztott pontban látható a magasság szerinti változás a 3.3. ábrán. Az 50 pontban átlagosan a magasság és W_{zz} közötti korrelációs együttható -0.9975, ez alapján a kapcsolat jól közelíthető egy lineáris függvénnyel. Mivel 0-tól 800m -ig egyenletes lépésközzel számítottam ki a vertikális gradienst, így lehetőségem volt a lineáris közelítés hibájának becslésére. Összehasonlítottam mind az 50 pontban a 400 m magasságban

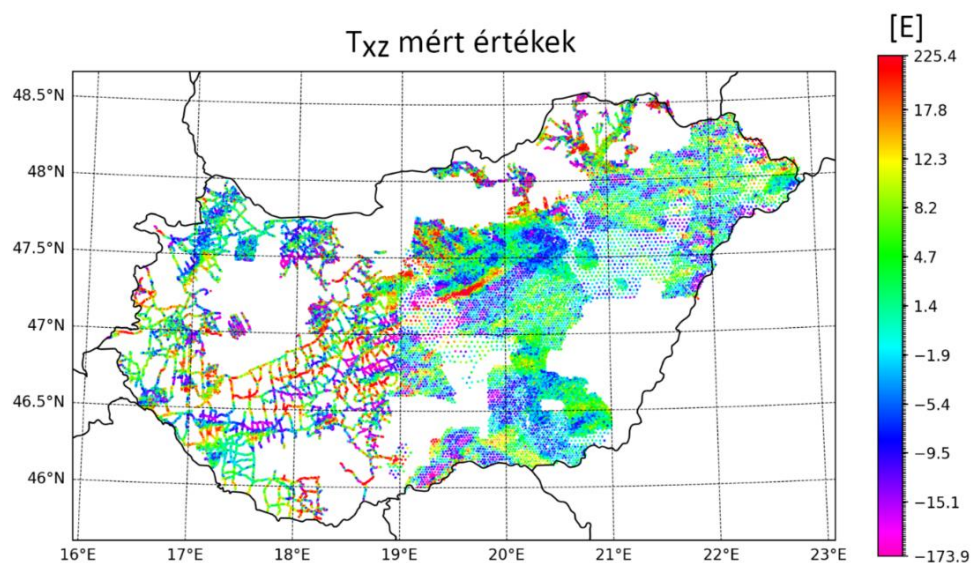
számított gradiens, illetve a 0 és 800 m magasságban mért gradiensek átlagát. Tökéletesen lineáris kapcsolat esetén a 2 megegyezik. A két érték között átlagosan $2.14 E$ eltérés adódott, míg a 0 és 800 m között a gradiensek különbsége átlagosan $84.43 E$. Ez alapján a lineáris közelítés relatív hibája 2.531%.



3.3. ábra: W_{zz} változása a magasság függvényében

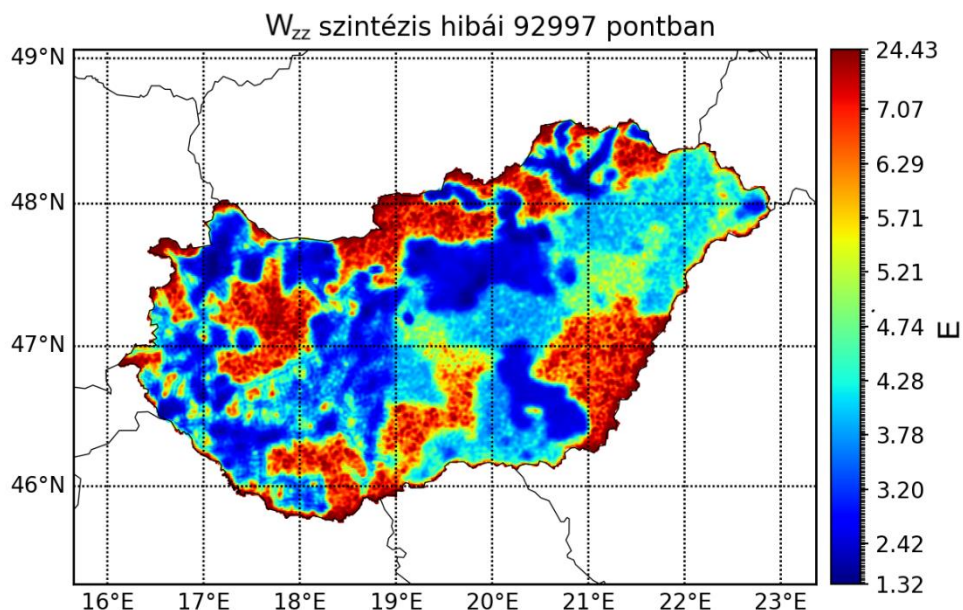
3.4. Vertikális gradiensek a Faye-anomália rácspontokban

A vertikális gradiens értékét mind a 92997 rácspontban kiszámítottam $H/2$ tengerszint feletti magasságban. A radiális bázisfüggvényes szintézis során lehetőség van a számított értékek hibáinak becslésére is. A 3.4. ábrán a rendelkezésre álló Eötvös-inga mérésekből a T_{xz} gradiens



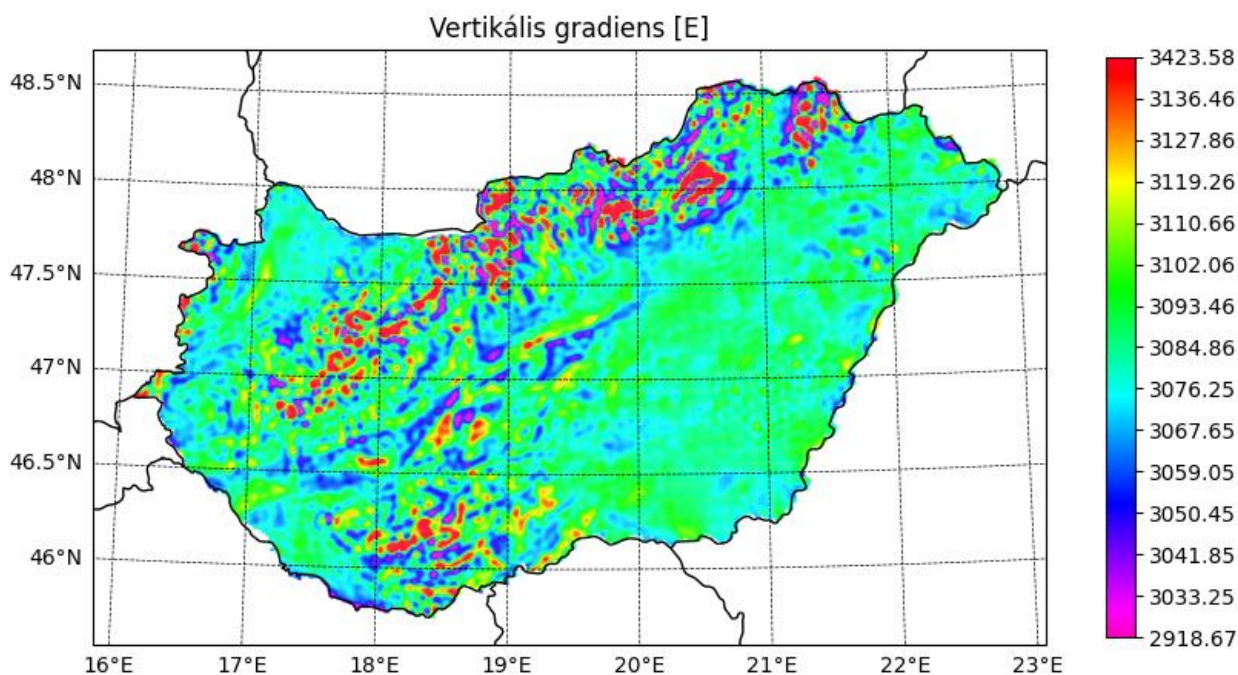
3.4. ábra: Eötvös-ingával mért T_{xz} gradiensek eloszlása Magyarországon

adatok láthatók, a 3.5. ábrán pedig a vertikális gradiens szintézis hibái. Jól látszik, hogy ahol rendelkezésre állnak ingamérések, a számított vertikális gradiens becslései hibája jóval kisebb.



3.5. ábra: Vertikális gradiens szintézis hibái [E]

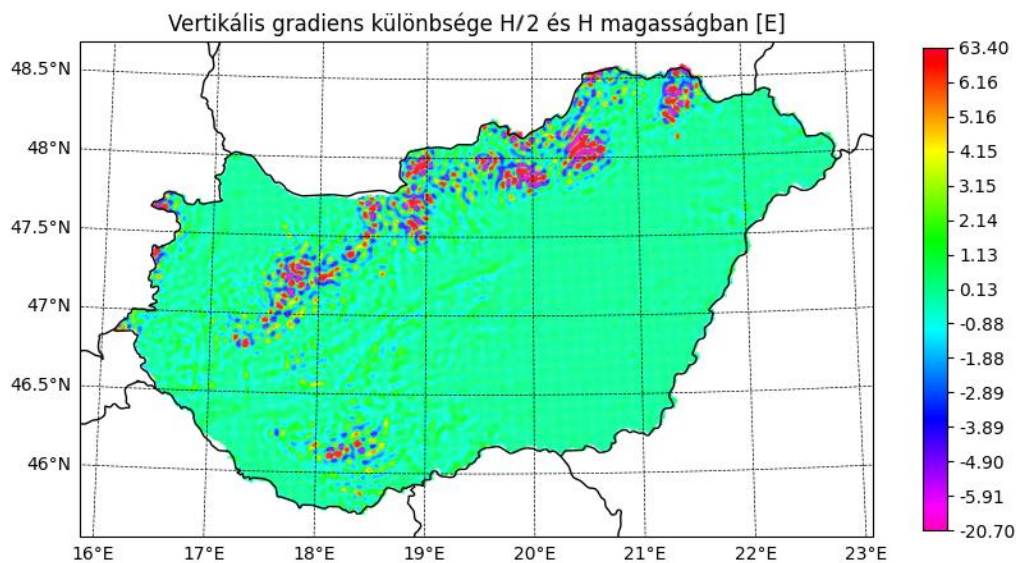
A radiális bázisfüggvényes inverzióból kapott eredményekhez hozzáadtam az EIGEN-6C4 geopotenciál modellből a 400 foksám alatti összetevőket, továbbá a vertikális gradiens normál értékét, így kaptam meg a 3.6. ábrán látható vertikális gradienseket. A vertikális gradienseket a felszínre is kiszámítottam, majd megvizsgáltam ezek különbségét, ez a 3.7. ábrán látható. A $H/2$ magasságban számított értékekből vontam ki a H magasságban mért értékeket, mivel a



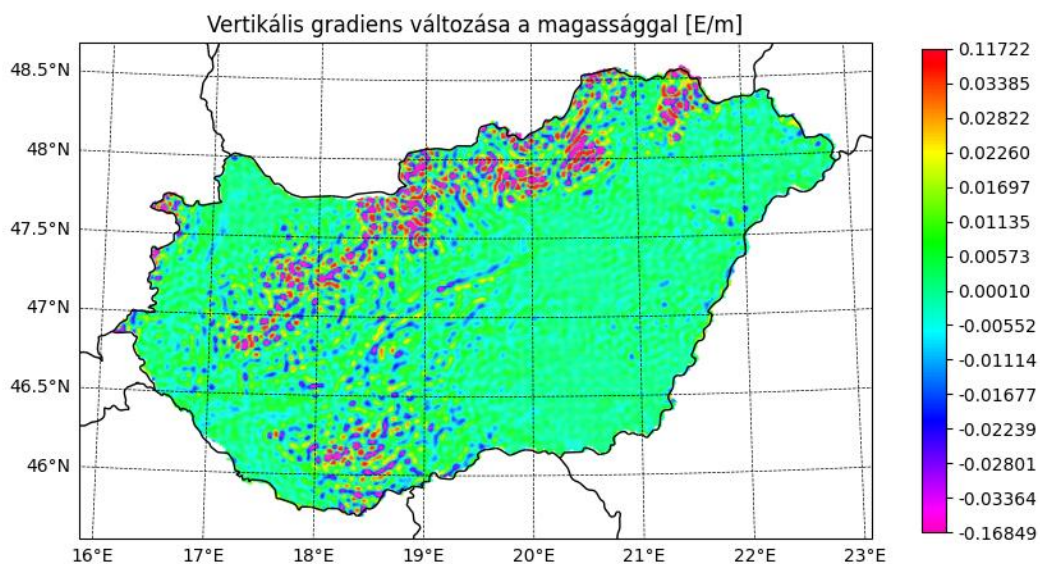
3.6. ábra: Számított W_{zz} értékek a szabadlevegő-anomália rácspontokban $H/2$ magasságban

korábban vizsgált 50 pont alapján úgy tűnt, hogy lefelé növekszik, de az újabb eredmények alapján látható, hogy nem mindig.

A H és $H/2$ magasságban mért értékek különbségéből az is kiszámítható, hogy a vertikális gradiens mennyire gyorsan változik a magassággal, azaz m -enként mennyit emelkedik vagy csökken a gradiens értéke. Ez a potenciálfüggvény 3. deriváltjának közelítése, de azzal nem egyezik meg, hiszen a kapcsolat nem teljesen mondható lineárisnak. Ez a 3.8. ábrán látható.



3.7. ábra: Vertikális gradiens különbsége $H/2$ és H magasságban



3.8. ábra: Vertikális gradiens változása a magassággal

Az előbb említett adatokra kiszámoltam az átlag és a szórás értékét a teljes adathalmazra, és a 300 m magasság feletti rácspontokra is. A domb- és hegyvidéki területeken ahogy vártam,

jóval nagyobb a vertikális gradiens átlagértéke és szórása, mint a síkvidéki területeken, ezen kívül a magassággal fajlagosan is gyorsabban változik. Ezeket a 3.2. táblázat mutatja.

3.2. táblázat: Vertikális gradiens és annak változásának statisztikái

	minden adat		300 m feletti pontok		mértékegység
	átlag	szórás	átlag	szórás	
Vertikális gradiens ($H/2$ magasságban)	3084.86	24.08	3129.22	57.83	E
Vertikális gradiensek különbsége $H/2$ és H magasságban	0.1286	2.3465	3.4295	8.7304	E
Vertikális gradiens változása a magassággal	0.00010	0.01312	-0.01324	0.03386	E/m

3.5. Vertikális gradiensek módosító hatása a Faye-redukcióra

A Faye -redukcióhoz használt vertikális gradiens esetünkben két részre bontható. A normál gradiens hatását már figyelembe vették a rendelkezésre álló szabadlevegő-anomáliák készítésekor, így a redukcióhoz csak a normál gradienstől való eltérést kell figyelembe vennünk. Ez utóbbi egyrészt a geopotenciál modellből származó alacsony fokszámú, illetve a radiális bázisfüggvény modellből származó magasabb fokszámú összetevőkből áll. Tehát:

$$W_{zz} = U_{zz} + T_{zz} = U_{zz} + T_{zz}^{GGM} + T_{zz}^{SRBF} (+T_{zz}^{topo}) \quad (3.3)$$

A topográfiát nem vettem figyelembe. Egyrészt a topográfia okozta hatást csak a földfelszíni pontban tudjuk figyelembe venni, $H/2$ magasságban nem. Másrészt a domborzatmodellekből származó VG értékeknek bár a mérésekhez hasonlóan igen nagy a szórása, ez a gyors változás inkább csak a felszín közelében igaz, továbbá a szabadon elérhető domborzatmodellek hibája több m-es is lehet, így a valós topográfiai hatástól több 100 E mértékben eltérő értékeket kaphatunk. Erre megoldás lehet a nagyon magas fokszámú összetevők kiszűrése a domborzatmodellből a számítási zaj elkerülésére.

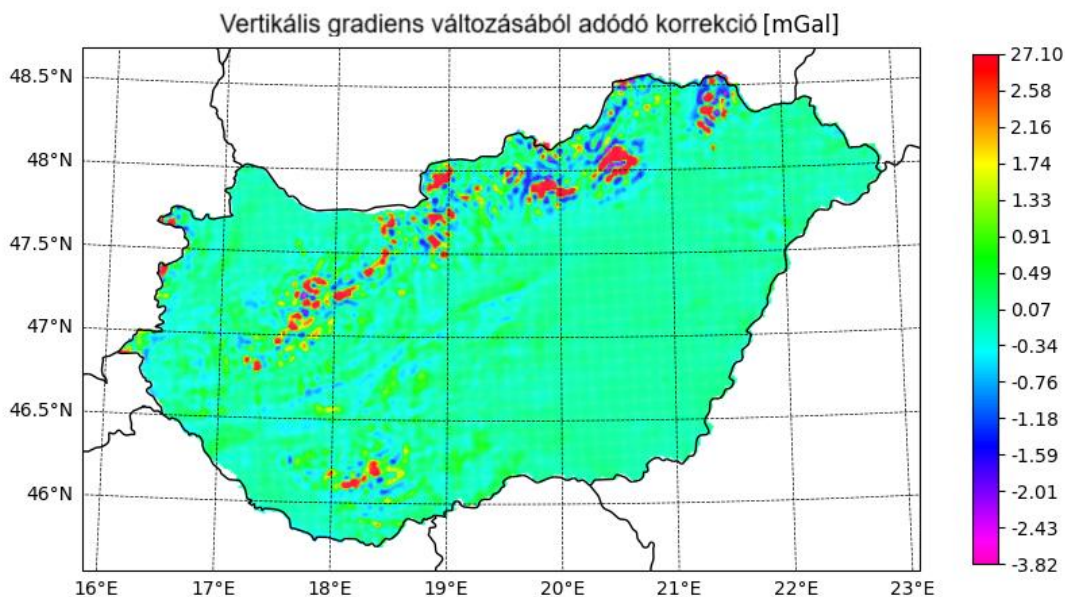
Tehát a vertikális gradiens normálértéktől való eltérését figyelembe véve a Faye-redukció:

$$\delta g_F = -\overline{W_{zz}} H = -\frac{\partial \gamma}{\partial H} H - \overline{T_{zz}} H \quad (3.4)$$

A fenti összefüggésbe a vertikális gradienst $mGal/m$ mértékegységben kell behelyettesíteni. Korábban E egységben kaptuk meg az eredményeket, a következőképpen válthatjuk át ezeket:

$$W_{zz} \left[\frac{mGal}{m} \right] = -10^{-4} W_{zz} [E] \quad (3.5)$$

A negatív előjel az átváltáskor onnan ered, hogy a g nehézségi gyorsulás vektora H növekedésével ellentétes irányú.



3.9. ábra: Vertikális gradiensek normál értéktől való eltérésének hatása a Faye-redukcióra

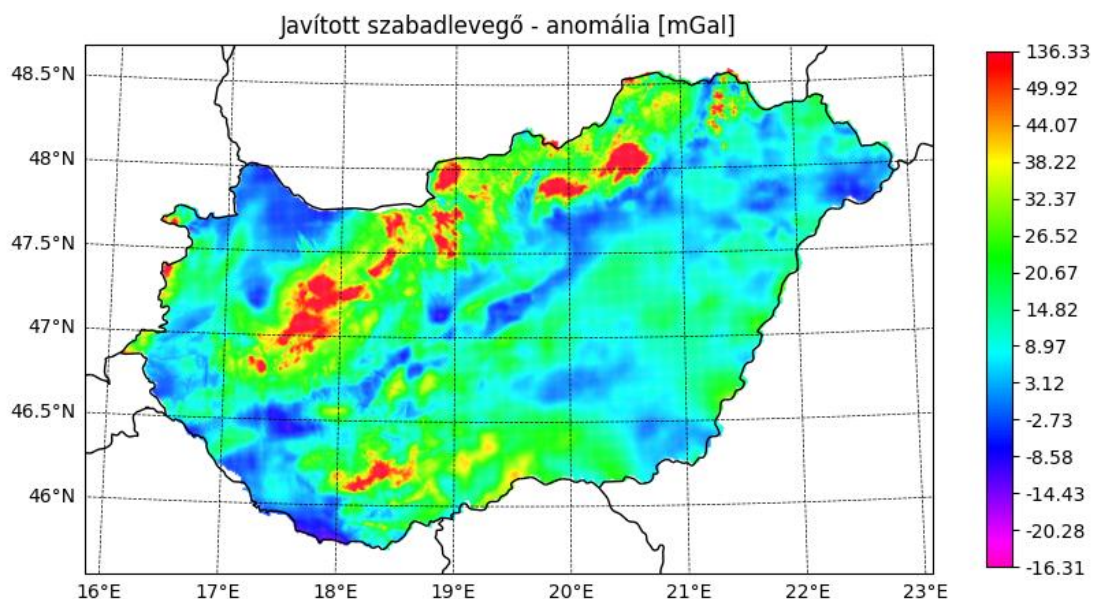
Annak ellenére, hogy az alföldi területeken is jelentősen eltérhet a vertikális gradiens a normál értéktől, ennek a csekély tengerszint feletti magasság miatt nincs jelentős hatása a nehézségi rendellenességekre.

4. Javított Szabadlevegő- és Bouguer-anomáliák értékelése

4.1. Szabadlevegő- anomáliák

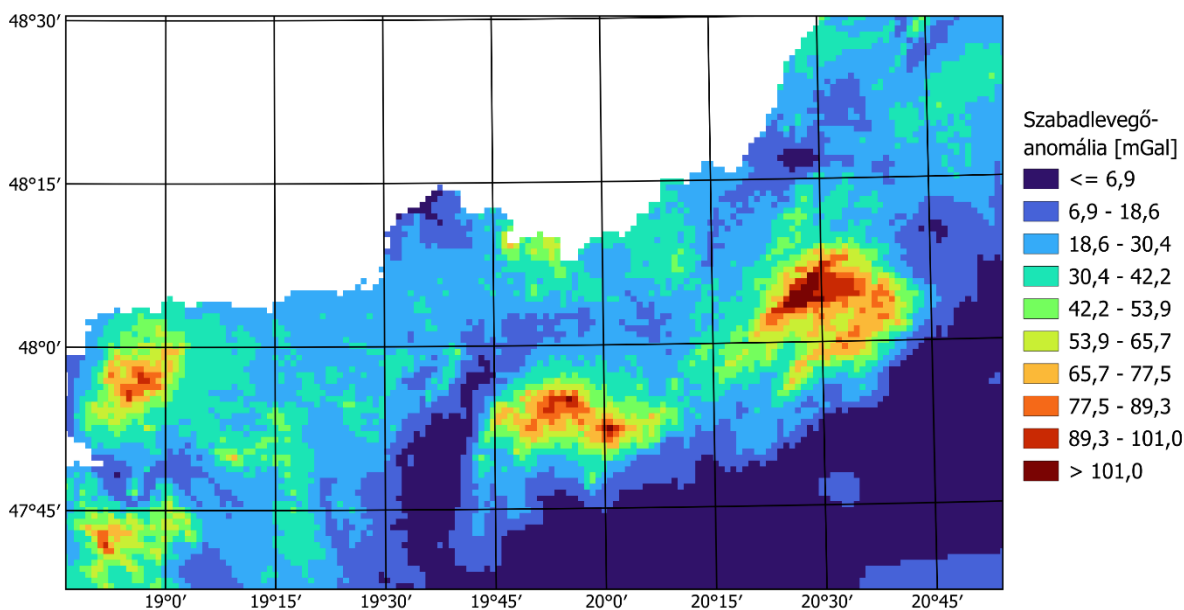
A szabadlevegő-anomáliákhoz a 3.9. ábrán látható, a vertikális gradiensek normál értéktől való eltérése miatti korrekciót adtam hozzá. Így olyan szabadlevegő-anomáliákat kaptam, amelyek esetén a geoidra történő átszámításhoz a szokásosnál pontosabban vettem figyelembe a vertikális gradienst. A korrigált szabadlevegő-anomáliák a 4.1. ábrán láthatók.

A jobb megjelenítés érdekében csak az átlagtól a szórás háromszorosán belül eső adatok esetén lineáris a színskála, így ezzel a megjelenítéssel nem látszanak jól az eredeti, illetve korrigált szabadlevegő-anomáliák közti különbségek. Ezért készítettem egy kivágatot az Északi-középhegységre, ahol ezeket ábrázoltam. A színskálán nem végeztem levágást a szórás alapján.

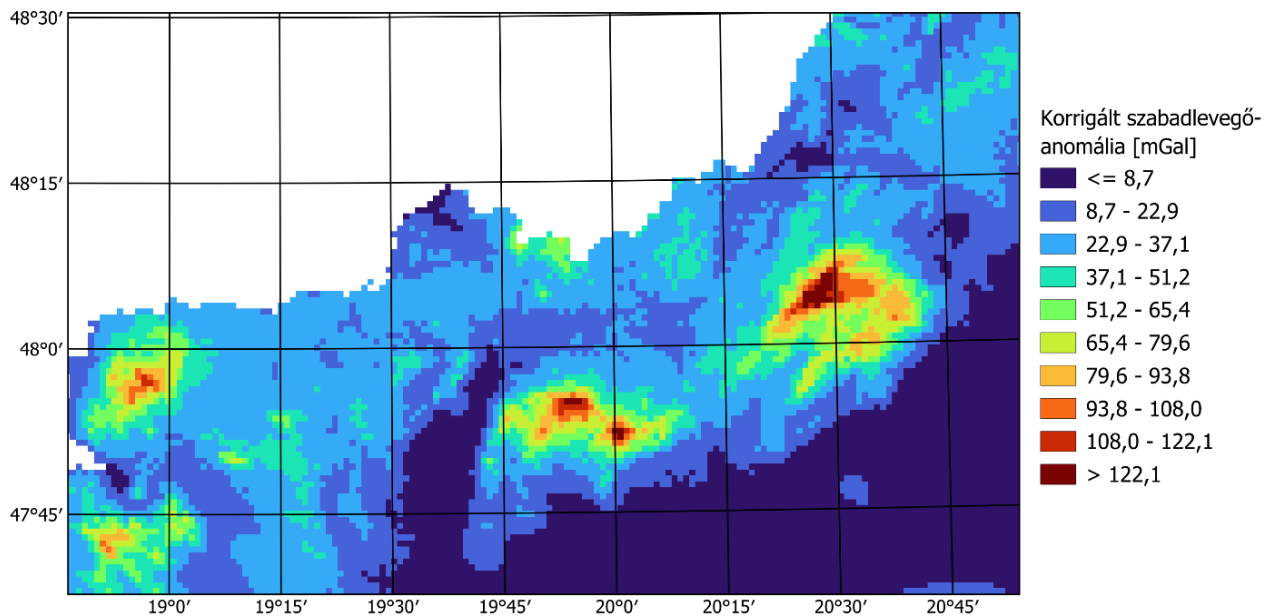


4.1. ábra: Javított szabadlevegő- anomáliák

A kivágot a QGIS programban készítettem, ehhez a szabadlevegő-anomália adatpontokból egy 1x1 km-es EOVS vetületű rasztert hoztam létre (eredetileg is rácsra interpolálva álltak rendelkezésre az adatok). Ezek a 4.2., illetve a 4.3. ábrán láthatók. A vertikális gradiensek változása miatti korrekciók, továbbá a szabadlevegő-anomáliák átlagát és szórását is kiszámítottam, ezek láthatók a 4.1. táblázatban. A domb- és hegyvidéki területeken általában a korrekció pozitív, kivéve a hegységek közötti völgyekben, ahol negatív a korrekció.



4.2. ábra: Szabadlevegő- anomáliák az Északi-középhegységben



4.3. ábra: Korrigált szabadlevegő- anomáliák az Északi-középhegységben

4.1. táblázat: Szabadlevegő- anomáliák és annak korrekcióinak statisztikái

	minden adat		300 m feletti pontok	
	átlag	szórás	átlag	szórás
VG normál értéktől való eltérése miatti korrekció [mGal]	0.075	0.974	2.146	3.437
Szabadlevegő-anomália [mGal]	14.74	13.09	48.11	15.76
Korrigált szabadlevegő-anomália [mGal]	14.82	13.65	50.26	18.31

4.2. Bouguer – anomáliák

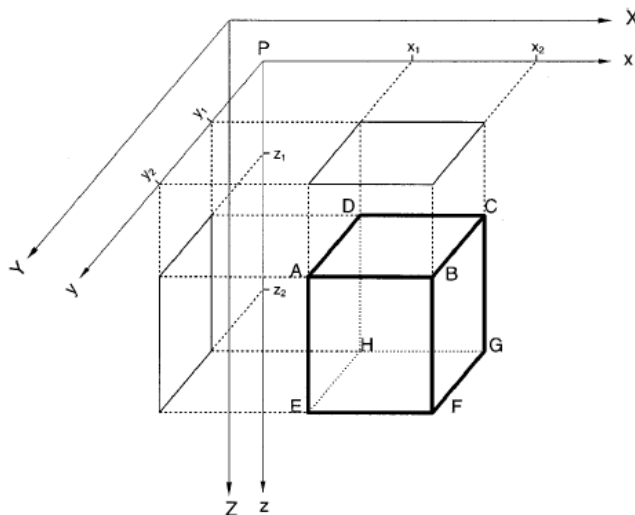
Mivel a szabadlevegő-anomáliák jelentősen függenek a tengerszint feletti magasságtól, így az előbb bemutatott korrekció relatív hatása ezekre nem annyira jelentős. Viszont, ha a felszíni pont és a geoidi pont közötti tömegek hatását eltávolítjuk, jobban látszódnak a különbségek. Ha ezeket a hatásokat eltávolítjuk, a Bouguer-anomáliákat kapjuk meg. Így a szabadlevegő-anomáliákon kívül a Bouguer-anomáliákat is kiszámítottam az összes rácspontra.

4.2.1. Bouguer-anomáliák számítása terepi korrekcióval

A Bouguer- anomáliákhoz a Bouguer- javítást és a topografikus javítást is ki kell számítanunk (1.4.3. fejezet). A topografikus és a Bouguer-javítás egy lépésben is kiszámítható prizma modell segítségével. Egy prizma elem gravitációs hatása a következőképpen írható le egy adott P pontban (Nagy et al., 2000):

$$g(P) = \rho G \left\| \left\| x \ln(y + r) + y \ln(x + r) - z \tan^{-1} \frac{xy}{zr} \right\|_{x_1}^{x_2} \right\|_{y_1}^{y_2} \right\|_{z_1}^{z_2} \quad (4.1)$$

A fenti képlet jelöléseit a 4.4. ábra szemlélteti. A redukcióhoz használt MATLAB kódot a Geoscience Australia³ egyik GitHub repozitóriumából⁴ töltöttem le. Mivel a szabadlevegő-levegő anomáliák nem mérésekből származnak, hanem interpolált értékek, így nem éreztem szükségét nagy felbontású domborzatmodell alkalmazásának, hiszen az interpoláció hibája jóval nagyobb, mint a topografikus korrekció hibája. A topografikus redukcióhoz a MERIT DEM domborzatmodellt használtam, de annak

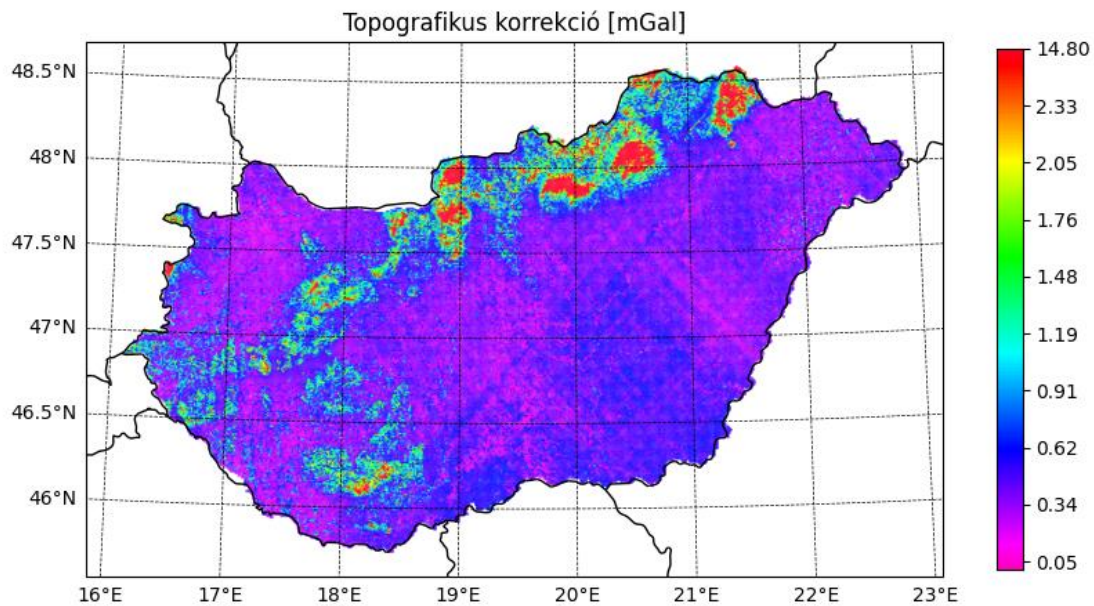


4.4. ábra: A (4.1.) képletben használt jelölések a prizma vonatkozásán

felbontását 3"-ról 6"-re csökkentettem (tehát a felbontás meridián irányban kb. 180 m, a paralelkör menti felbontás m-ben kifejezve a szélességgel változik). A GitHub-ról letöltött computeTerrainCorrection.m MATLAB szkriptben található azonos nevű függvényben a kódba bele van égetve a raszter felbontása, ennek korrigálására egy újabb paramétert adtam hozzá a függvényhez. Egy rövid MATLAB szkriptet írtam, ami beolvassa a pontokat, majd a domborzatmodellt egy mátrixként, majd minden pixel földrajzi hosszúság és szélesség értékeit újabb két mátrixban eltárolja. Ezután ezekre a már említett függvényt hívva elvégzi a Bouguer- és topografikus javítást egy lépésben. A számításhoz a 0.5° távolságon belüli hatásokat vettem figyelembe. A szemléltetést kedvéért külön kiszámítottam a topografikus javítást úgy, hogy az egyszerűen kiszámítható Bouguer-javításból kivontam az előbb kiszámított korrekciót. Ez egyben jó ellenőrzés is: a topografikus javításnak mindig pozitívnak kell lennie. A számítás kb. 2 óra alatt futott le az összes pontra. A topografikus és Bouguer- korrekcióhoz konstans $2,67 \text{ g/cm}^3$ sűrűséget feltételeztem.

³ <https://www.ga.gov.au/>

⁴ <https://github.com/GeoscienceAustralia/analysis-ready-gravity-data-workflow>



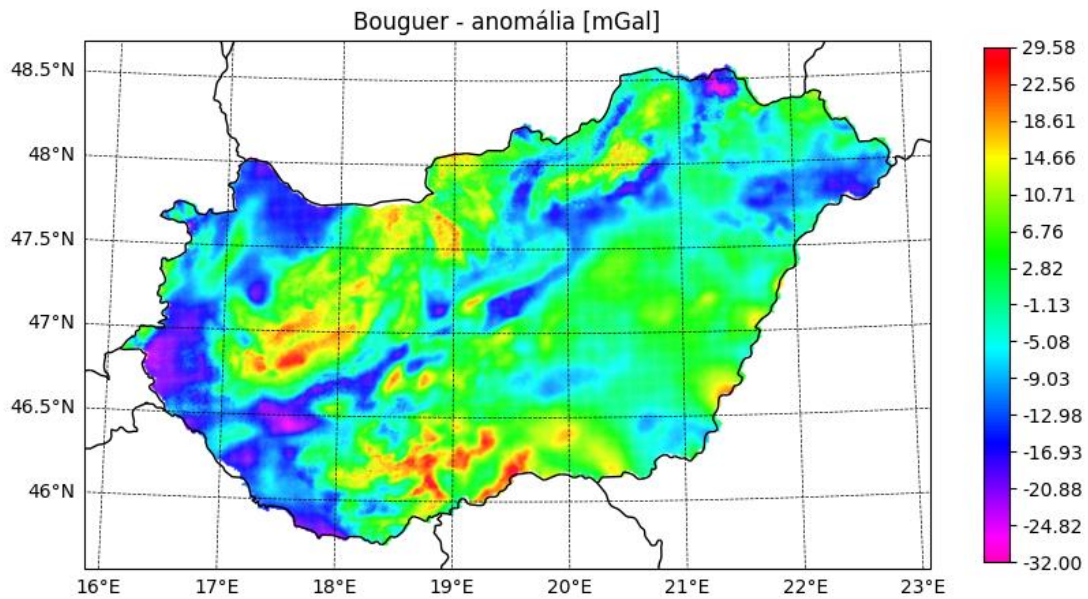
4.5. ábra: Topografikus korrekció

4.2.2. Javított Bouguer-anomáliák

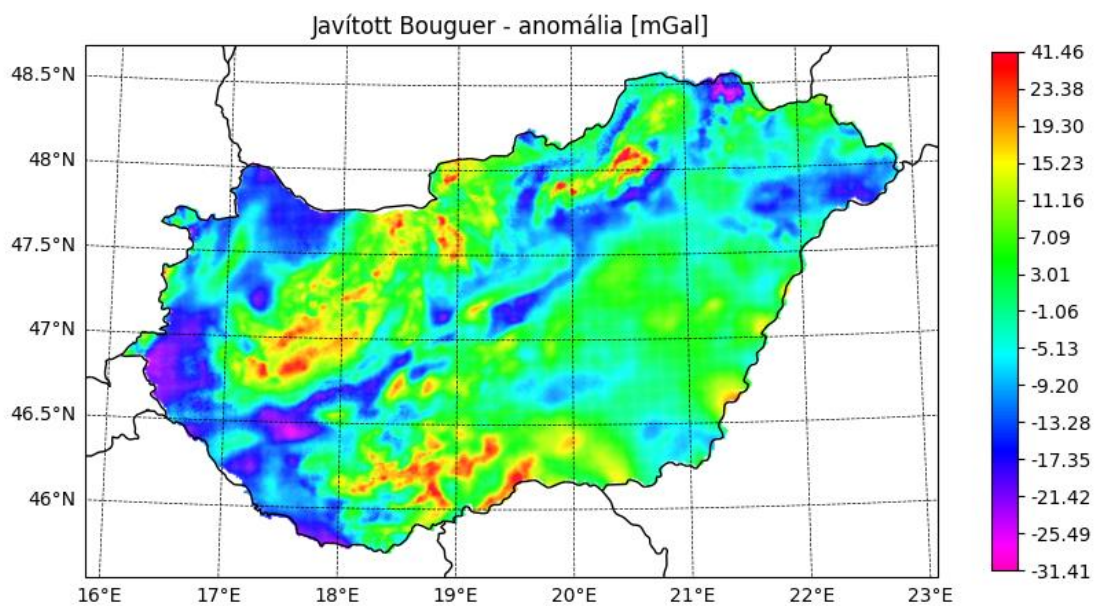
A topografikus korrekcióval ellátott Bouguer- anomáliákat a hagyományos, azaz normál vertikális gradiens értékkel számolt, illetve a modellezett vertikális gradiensekkel számolt szabadlevegő- anomáliákból is kiszámítottam. Ezek között már jobban látszik az eltérő vertikális gradiensek hatása, a 4.6. és 4.7. ábrákon jól látszik, hogy ez szinte minden hegyvidéki területen pozitív eltérést eredményez. A 4.2. táblázatban láthatóak a Bouguer-anomáliák és az alkalmazott korrekciók statisztikái. Ezek alapján kijelenthető, hogy a vertikális gradiens figyelembevétele a topografikus korrekcióhoz hasonló nagyságrendű változást eredményez a geoidi nehézségi rendellenességekben.

4.2. táblázat: Bouguer- anomáliák és korrekciók statisztikái

	minden adat		300 m feletti pontok	
	átlag	szórás	átlag	szórás
Topografikus korrekció	0.6222	0.6647	2.4457	1.5823
VG normál értéktől való eltérése miatti korrekció	0.0749	0.9735	2.1455	3.4374
Bouguer - anomália	-1.133	9.213	4.748	10.399
Javított Bouguer - anomália	-1.058	9.502	6.893	11.744



4.6. ábra: Bouguer- anomália



4.7. ábra: Javított Bouguer-anomália

4.3. Bouguer- anomáliák a globális topografikus hatás figyelembevételével (SRTM2GRAVITY)

Az SRTM2GRAVITY egy nagyfelbontású, globális nehézségi terepi korrekciókat tartalmazó modell, amely a Föld felszínének topográfiai tömegeinek gravitációs hatását modellezi 3" térbeli felbontással. A modell globálisan lefedi a szárazföldi területeket (Antarktiszt és Grönland jégtakarója nélkül) -60° és +85° földrajzi szélesség között, és lehetőséget nyújt a gravimetriai mérések helyszíni korrekciójára.

A modell egyedülálló abban a tekintetben, hogy minden pontban a teljes Föld topográfiájának hatását figyelembe veszi. A számítás gyorsítására különválasztották a topográfiai felszín magas, illetve alacsony foksámú komponenseit ($N = 2160$ felett, illetve alatt). A magas foksámú összetevőket nagy felbontással, de a pont ~ 40 km-es környezetében vették figyelembe, míg az alacsony foksámú összetevőket globálisan, de jóval kisebb felbontással. A modell korlátja, hogy állandó sűrűséget ($2,67 \text{ g/cm}^3$) feltételez, ezért nem veszi figyelembe a sűrűségváltozásokat, ezen kívül az óceánok, tavak és jégtakarók gravitációs hatásait (Hirt et al., 2019).

A modell $1^\circ \times 1^\circ$ -os raszter csempékben tölthető le⁵. Kétféle adat érhető el: *full-scale*, illetve *residual* modell. Az előbbi töltöttem le, hiszen az alacsony és magas foksámú összetevőket is tartalmazza. A csempék letöltése után egy szintén szabadon elérhető MATLAB függvény segítségével kaphatunk meg egy adott területre ezekből egy mozaikot. Ehhez írtam egy rövid szkriptet, amely a mozaikolt rasztert GEOTIFF formátumban elmenti, így térinformatikai szoftverekbe (pl. QGIS) is betölthető. Fontos megjegyezni, hogy a letöltött adatok a gravitációs zavart tartalmazzák, nem a gravitációs anomáliát. A kettő között szerencsére nem bonyolult az átszámítás:

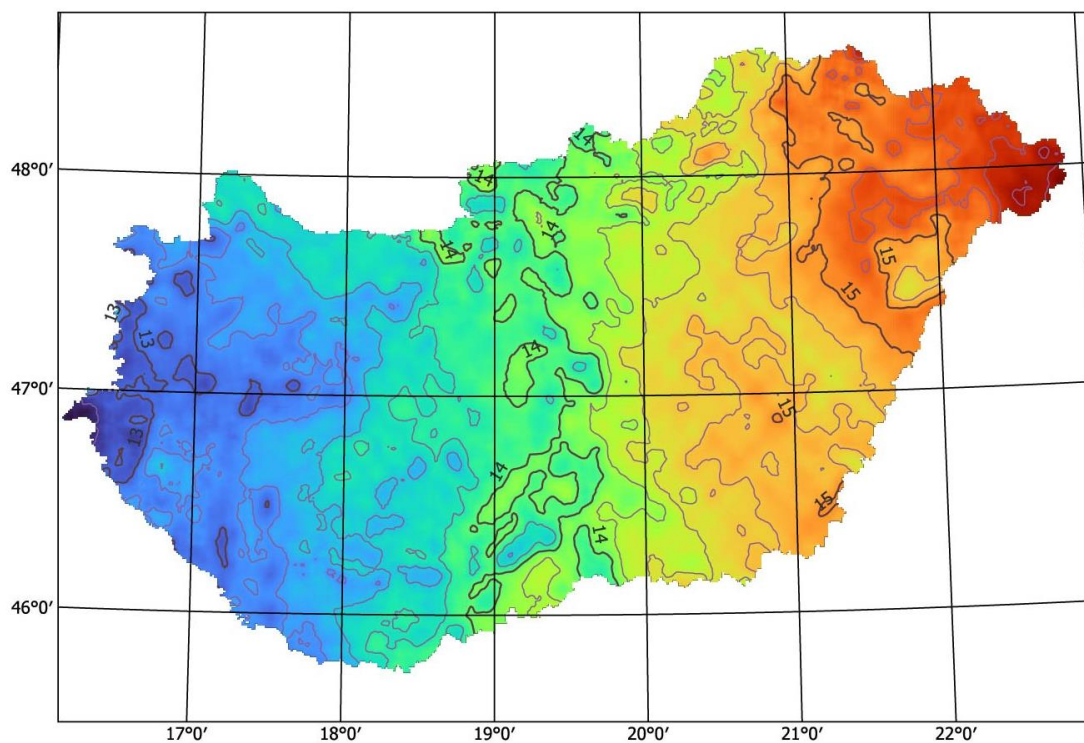
$$\Delta g = \delta g + \frac{d\gamma}{dH} N \quad (4.2)$$

Az átszámításhoz a QGIS programban elérhető Raster Calculator-t használtam, a fenti képletben szereplő N geoidundulációt a 2.2. fejezetben említett raszter segítségével vettem figyelembe. Ezután az SRTM2GRAVITY modellből kivontam a lokális terepi és Bouguer-korrektúra összegét, így a globális hatást kaptam meg. A két modell közti különbségeket egy 1×1 km felbontású raszteren kaptam. A véletlenszerű zaj kiszűrésére egy 5×5 méretű átlagoló szűrőt alkalmaztam. Így kaptam meg a 4.8. ábrán látható globális hatást.

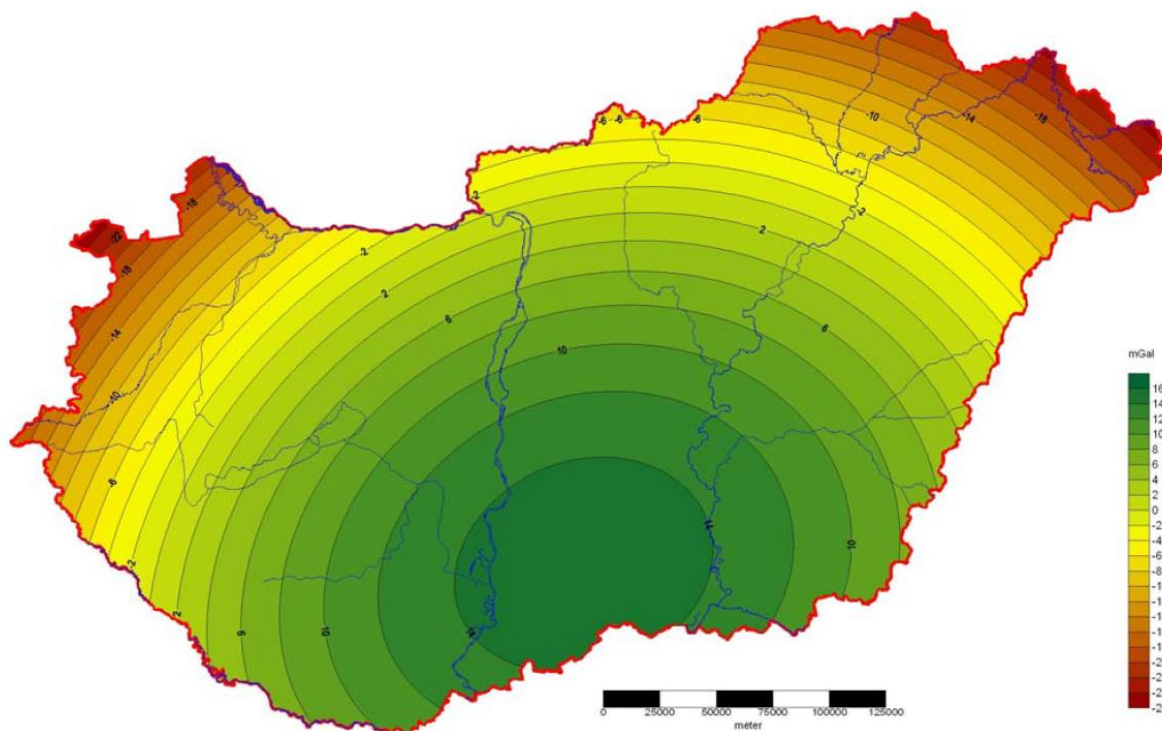
Ez a topográfiából származó globális hatás lényegesen eltér a Kiss János és munkatársai által az ELGI-ben meghatározott regionális hatástól, amit a környező országok Bouguer-anomália térképei alapján vezettek le. A topográfiából származó globális hatás lassú NY-K irányú változást mutat, míg a Bouguer-anomáliatérképekből levezetett regionális hatás gyors változást mutat a hegyvidékek és az Alföld között.

⁵ <https://ddfe.blazejbuch.com/models/SRTM2gravity2018/>

Topográfiából származó globális hatás [mGal]



4.8. ábra: Topográfiából származó gravitációs anomáliák globális összetevője



4.9. ábra: Környező országok Bouguer- anomália térképei által levezetett regionális hatás (3. fokú felület)

4.4. Módosított Faye-redukció hatása a kőzetek sűrűségeloszlására

A Bouguer- anomáliák meghatározásánál amennyiben nem ismerjük a kőzetek átlagsűrűségének eloszlását, konstans $2,67 \text{ g/cm}^3$ sűrűséggel számolunk. A felszínközeli tömegek átlagsűrűségét a Nettleton-elv alapján is meghatározhatjuk, amely azt mondja ki, hogy ha helyes sűrűségértékekkel javítjuk meg a szabadlevegő- anomáliákat, akkor a terep, illetve az így meghatározott Bouguer-anomáliák között nem tapasztalunk korrelációt. Ezzel egyszerre határozhatjuk meg a tömegek átlagsűrűségét, és a Bouguer- anomáliákat is pontosabban számíthatjuk. A korrelációs együtthatót 0-val egyenlővé téve a sűrűség a terepi korrekciót is figyelembe véve:

$$\rho = \frac{\sum_i \sum_k g_{ik} h_{ik}}{\sum_i \sum_k (-\Delta g_{ik}^t + 0,04193 h_{ik}) h_{ik}} \quad (4.3)$$

ahol g_{ik} az adott pontban az anomália értéke, h_{ik} a terepmagasság, Δg_{ik}^t az előzetesen meghatározott terepi javítás értéke egységnyi sűrűséggel számítva. Ez a képlet egy konstans sűrűségértéket ad vissza. Ahhoz, hogy sűrűségmodellt kapjunk, a számítást kisebb területre kell leszűkítenünk a pont környezetében, azaz ablakoló szűrőt kell bevezetnünk (Rózsa, 2000).

Ezek alapján belátható, hogy ha a vertikális gradiens pontosabb figyelembevétele miatt megváltozik a szabadlevegő- anomália, akkor a Nettleton- módszer alapján számítható kőzetsűrűségek is megváltoznak. A korrigált Faye- anomáliák tesztelhetők, ha pl. gravimetriai geoidot számítunk az eredeti és a korrigált anomáliák felhasználásával is, majd az eredményeket összehasonlítjuk. Az eredmények ellenőrizhetők a GPS/szintezési pontokban. Geoidmagasságok helyett akár függővonal-elhajlások mért és számított értékeit is összehasonlítjuk. Mivel Magyarországon a vertikális gradiensek pontosabb figyelembevételére nem találtam példát, így ezen számított vertikális gradiensek használhatóságának ellenőrzésére további vizsgálatok szükségesek.

5. Összefoglalás

Dolgozatomban sikeresen modelleztem a vertikális gradiensek eloszlását Magyarország területére gömbi radiális bázisfüggvényekkel előállított modell alapján. A modellezéshez használt bázisfüggvények fokszáma $N = 6500$, ez határozza meg a modell részletességét. A számítás során rendkívül nagy méretű egyenletrendszert kellett megoldani, ezt a debreceni

Komondor szuperszámítógépen sikerült megvalósítanom. Ezeket a számított gradienseket használtam geoidi nehézségi rendellenességek előállításához.

Megállapítható, hogy a vertikális gradiensek a normál értéknél pontosabb figyelembevétele jelentősen befolyásolja a geoidra számított nehézségi rendellenességet. A hatás ott jelentős, ahol a vertikális gradiens anomália és a tengerszint feletti magasság egyaránt nagy, így a hatás a hegyvidéki területeken jelentős. A vertikális gradiens anomáliák miatti korrekció a topográfiai javításhoz hasonló nagyságrendű, azonban azzal ellentétben negatív is lehet. Negatív korrekciók leginkább a hegységek közötti völgyekben fordulnak elő. A Bouguer- anomáliák esetén a különbség sokkal jobban látszik a hagyományos módon számított, illetve az előbb említett korrekcióval ellátott értékek között, mint a szabadlevegő- anomáliák esetén. A korrigált gravitációs anomáliák alapján korrigált sűrűségmodellt is le lehetne vezetni. Ez alapján végzett geoid és egyéb mennyiségekre vonatkozó számításokkal lehetne igazolni a bemutatott korrekciók használhatóságát.

6. Irodalomjegyzék

Akdoğan, Y.A. – Ahi, G.O. - Yildiz, H. (2021): Free-air vertical gravity gradient modelling and its validation, <http://dx.doi.org/10.4430/bgo00385>

Biró P. - Ádám J. - Völgyesi L. - Tóth Gy. (2013): A Felsőgeodézia elmélete és gyakorlata. HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest. Egyetemi tankönyv és kézikönyv, ISBN 978-963-257-248-2.

Csapó G. – Völgyesi L. (2002): A nehézségi erő vertikális gradiensének mérése és szerepe a nagy pontosságú graviméteres méréseknél magyarországi példák alapján, Magyar Geofizika, 43. évf. 4. szám, pp. 151-160., https://www.agt.bme.hu/volgyesi/gravity/vg_mgeo.pdf

Csapó G. - Papp G. (2000): a nehézségi erő vertikális gradiensének mérése és modellezése – hazai példák alapján, Geomatikai Közlemények III.

Förste, C.; Bruinsma, S. L.; Abrykosov, O.; Lemoine, J.-M.; Marty, J. C.; Flechtner, F.; Balmino, G.; Barthelmes, F.; Biancale, R. (2014): EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse, <https://doi.org/10.5880/icgem.2015.1>

Hackney, R. I. - Featherstone, W. E. (2003): Geodetic versus geophysical perspectives of the ‘gravity anomaly’, <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.2003.01941.x>

Hirt, C. - Yang, M. - Kuhn, M. – Bucha, B. – Kurzmann, A. – Pail, R. (2019): SRTM2gravity: An Ultrahigh Resolution Global Model of Gravimetric Terrain Corrections, Geophysical Research Letters, 46, 4618-4627., <https://doi.org/10.1029/2019GL082521>

Kenyeres A. (2001): A geoid hosszúhullámú komponense a Stokes-integrál módosítási eljárásaiban és a GPS-gravimetriai geoidban. PhD-értékezés, BME Általános -és Felsőgeodézia Tanszék

Kiss J. (2009): Regionális gravitációs anomáliák, izosztikus hatások Magyarországon, Magyar Geofizika 50. évf. 4. szám, https://real.mtak.hu/33108/1/KJ_MGF_50_4_u.pdf

Moritz, H. (2000): Geodetic Reference System 1980. Journal of Geodesy 74, 128–133. <https://doi.org/10.1007/s001900050278>

Nagy D. - Papp G. - Benedek J. (2000): The gravitational potential and its derivatives for the prism, Journal of Geodesy 74. pp. 552-560, <https://doi.org/10.1007/s001900000116>

Pongrácz D. (2023): A nehézségi erőter gradienseinek meghatározása Magyarország területére nehézségi mérések alapján, TDK dolgozat, BME Építőmérnöki Kar

Rózsa Sz. (2000): Sűrűségmodellek felhasználása a geoidmeghatározásban, Geomatikai Közlemények III.

Tscherning, C.; Christian, C.; Forsberg, C.; Rene, P.; Knudsen, P. (1992): The GRAVSOFIT package for geoid determination. Continued Workshop on the European Geoid.

Völgyesi L. (2002): Geofizika, Műegyetemi Kiadó, Budapest, <http://volgyesi.hotserver.hu/geofiz/geofiz.htm>