



Csoportalgebrák meta-Abel egységcsoporttal

Készítette

Kápolnai Ágnes

Matematika-kémia tanár

Témavezető

Dr. Juhász Tibor

Egyetemi docens

EGER, 2025

1. Bevezetés

Legyenek a és b a G csoport tetszőleges elemei. Az $(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab$ elemet az a és b kommutátorának nevezzük. A G csoport összes kommutátora által generált részcsoportot G kommutátor-részcsoportjának nevezzük és G' -vel jelöljük. Azt mondjuk, hogy a G csoport meta-Abel, ha G' Abel-csoport. Tekintsük a G részcsoportjaiból létrehozott $\delta_i(G)$ kommutátor-láncot, melyben $\delta_0(G) = G$ és a következő tag mindig az előző tag kommutátor-részcsoportja. A G csoportot feloldhatónak mondjuk, ha van olyan n természetes szám, hogy $\delta_n(G) = \{1\}$. A legkisebb ilyen n számot nevezzük a csoport feloldható hosszának és $dl(G)$ -vel jelöljük. Világos, hogy G pontosan akkor meta-Abel, ha G feloldható és $dl(G) \leq 2$.

Jelölje FG a G csoport csoportalgebráját az F test felett, továbbá $U(FG)$ az FG csoportalgebra egységcsoportját, amely alatt FG mindazon elemeinek halmazát értjük, melyeknek van inverze a szorzásra nézve. A dolgozat célja annak vizsgálata, hogy $U(FG)$ milyen (az F testre és a G csoportra vonatkozó) feltételek mellett meta-Abel.

Az egységcsoport feloldhatósága egy több évtizede kutatott terület, számos szerző foglalkozott a kérdéssel. Véges csoportok esetén Motose és Tominaga [13], valamint Bateman [1] jutottak eredményre egymástól függetlenül, majd Passman [15] dolgozta át munkájukat átláthatóbb formába. A csoport végeessége egy elég erős feltétel, így a további kutatások ennek feloldására irányultak. Torziócsoportok esetén Bódi és Khripta [3] adtak szükséges és elégséges feltételt az egységcsoport feloldhatóságára. A jelenleg ismert legáltalánosabb leírást végül Bódi Béla [2] adta azon feltétel mellett, hogy a csoportalgebra moduláris, vagyis ha a G csoport tartalmaz p -rendű elemet, ahol a p prím az F test karakterisztikája. (Nulla karakterisztika esetén $U(FG)$ pontosan akkor feloldható, ha G Abel-csoport, így ez az eset számunkra nem érdekes.) Nemmoduláris esetben a teljes leírásnak egyelőre útját állja, hogy bizonyos esetekben még az sem ismert, hogy az egységcsoport tartalmaz-e nemtriviális egységet (lásd Kaplansky-sejtés témaköre [7]).

Az egységcsoport feloldhatósági kritériumának ismerete után kézenfekvő irány a feloldható hosszát vizsgálni, de erről még nagyon keveset tudunk, különösen, amikor a karakterisztika 2. Az eddigi eredmények alapján nem várható olyan általános képlet, amely megadná $U(FG)$ feloldható hosszát az F test és a G csoport ismeretében. Egy másik megközelítés, ha azon csoportalgebrákat határozzuk meg, melyekre a feloldható hossz egy adott szám. Könnyen látható, hogy $U(FG)$ feloldható hossza pontosan akkor 1, ha G nemtriviális Abel-csoport. Ha az egységcsoport feloldható hossza 2, akkor azon csoportalgebrák leírásához jutunk, melyek egységcsoportja meta-Abel.

Az első kutatások itt is véges csoportokra irányultak. Shalev [17] bizonyította, hogy ha G véges nem-Abel-csoport és $p > 2$, akkor $U(FG)$ pontosan akkor meta-Abel, ha $p = 3$, G' centrális és $|G'| = 3$. Vagyis $U(FG)$ „szinte csak akkor” meta-Abel, amikor

Abel. A $p = 2$ esettel Shalev egyetlen mondat erejéig foglalkozott: „The delicate case $\text{char}(F) = 2$ seems to require a separate discussion”. Általában is elmondható, hogy a csoportalgebrák elméletében a páros karakterisztika többnyire más megközelítést igényel, mint a páratlan. A $p = 2$ esettel végül Kurdics [10] illetve Coleman és Sandling [5] foglalkozott. Egymástól függetlenül igazolták, hogy G véges nem-Abel-csoport esetén $U(FG)$ pontosan akkor meta-Abel, ha vagy G' centrális, másod- vagy negyedrendű elemi Abel-csoport, vagy F elemeinek száma 2 és G egy H elemi Abel 3-csoport bővítése egy másodrendű $\langle b \rangle$ csoporttal, ahol $b^{-1}ab = a^{-1}$ minden $a \in H$ esetén. A további kutatások G végességére vonatkozó feltétel lazításával foglalkoznak. Catino és Spinelli [4] igazolták, hogy Shalev tétele torziócsoporthoz is érvényben marad, sőt, Kurdics, Coleman – Sandling tétele is, amennyiben G nilpotens. A nemnilpotens esetben Mozgovoj István [14] TDK dolgozatában jutott ugyanezen eredményre. Juhász és Spinelli [8] moduláris csoportalgebrákra vizsgálta ugyanezt a kérdést, $p > 2$ és tetszőleges csoport esetén. Jellemzésükben a véges csoportokra vonatkozóhoz képest két újabb eset is megjelent. A $p = 2$ esetben Mozgovoj tett ugyanebbe az irányba lépéseket. Megmutatta, hogy ha G nemtorzió és nemnilpotens, akkor $U(FG)$ nem lehet meta-Abel. Azaz, ha G nemnilpotens, akkor nem jelennek meg újabb esetek a Kurdics-, Coleman – Sandling-tételben említetten túl, akkor sem, ha G nem feltétlenül véges. Nilpotens csoportokra viszont még nyitott ez a kérdés, jelen dolgozatban vesszük célba ezt az esetet.

Legyen tehát F 2 karakterisztikájú test, G pedig tetszőleges rendű nilpotens csoport. Először azt bizonyítjuk, hogy ha az egységscsoport meta-Abel, akkor a báziscsoport kommutátor-részcsoportha 2-csoport. Ehhez erősebb feltételre van szükségünk, mint a csoportalgebra modularitása, nevezetesen a 2-Sylow részcsoporthnak több, mint 2 elemet kell tartalmaznia. Egy (nem feltétlenül véges) G csoport p -Sylow részcsoporthján G egy maximális p -részcsoporthját értjük. Ha G nilpotens, akkor ez egyértelműen meghatározott és $S_p(G)$ -vel jelöljük.

1. Tétel. *Legyen F 2 karakterisztikájú test és G olyan nilpotens csoport, melyre teljesül, hogy $|S_2(G)| > 2$. Ha $U(FG)$ meta-Abel, akkor G' 2-csoport.*

Abban az esetben, ha G' ciklikus, az alábbi szükséges és elégséges feltételt kaptuk:

2. Tétel. *Legyen F 2 karakterisztikájú test és G olyan csoport, melynek kommutátor-részcsoportha 2^n -rendű ciklikus csoport, ahol $n \geq 1$. $U(FG)$ pontosan akkor meta-Abel, ha teljesül a következő esetek egyike:*

- i) $n = 1$;
- ii) $n = 2$ és $G' = S_2(G)$;
- iii) $n = 2$, G' centrális és $|S_2(G)| = 8$.

Látható, hogy – a véges esettel ellentétben – az egységcsoport akkor is lehet meta-Abel, ha G' negyedrendű ciklikus csoport. Ebben az esetben könnyen belátható, hogy a 2-Sylow részcsoporthoz vonatkozó további feltételek csak akkor teljesülnek, ha G nem torziócsoport.

Kurdics, valamint Coleman – Sandling tételeiben az az eset is megjelenik, amikor G' Klein-csoporttal izomorf és centrális. A G csoport rendjére vonatkozó véghességi feltétel elhagyásával itt is kapunk egy újabb esetet.

3. Tétel. *Legyen F 2 karakterisztikájú test, G olyan nilpotens csoport, melyre teljesül, hogy $G' \cong C_2 \times C_2$. $U(FG)$ pontosan akkor meta-Abel, ha a következő esetek közül legalább az egyik teljesül:*

i) G' centrális;

ii) $G' = S_2(G)$.

Sőt, a következő tételünk alapján még az is megtörténhet, hogy a kommutátor-részcsoporthoz rendje nagyobb, mint 4.

4. Tétel. *Legyen F 2 karakterisztikájú test és G egy nilpotens csoport. $U(FG)$ meta-Abel, ha $S_2(G)$ centrális és teljesül a következő esetek valamelyike:*

i) $G' \cong C_2 \times C_2 \times C_2$ és $|S_2(G)| \leq 16$;

ii) $S_2(G) = G' \cong C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$

iii) $S_2(G) = G' \cong C_4 \times C_2$.

Egyelőre sejtés szintjén tudjuk megfogalmazni, hogy $U(FG)$ még akkor is lehet meta-Abel, ha $G' \cong C_2 \times C_2 \times C_2$ centrális és $|S_2(G)| = 16$ nem centrális. Sejtjük továbbá, hogy a fentiekén kívül újabb esetek már nem jelennek meg.

Azt viszont sikerült még bizonyítani, hogy ha $|G'| \geq 8$, akkor G' -nek centrálisnak kell lennie.

5. Tétel. *Legyen F 2 karakterisztikájú test, G olyan nilpotens csoport, melyre teljesül, hogy $|G'| = 2^n$, ahol $n \geq 3$. Ha $U(FG)$ meta-Abel, akkor G' centrális.*

2. Előkészületek

Ebben a fejezetben tisztázzuk a jelöléseket és összegyűjtjük azokat a korábbi eredményeket és módszereket, melyeket felhasználunk a tételek bizonyításai során.

A G csoport alsó-centráláncának i -edik tagját $\gamma_i(G)$ -vel jelöljük, ahol $\gamma_1(G) = G$. Ha G nilpotens, akkor a nilpotenciaindexét $cl(G)$ jelöli. Legyen továbbá C_n az n -edrendű ciklikus csoport.

Világos, hogy ha H részcsoportha G -nek és $U(FG)$ meta-Abel, akkor $U(FH)$ is az. Igaz továbbá az alábbi állítás is:

1. Lemma ([11], Lemma 2). *Legyen F egy test, melynek karakterisztikája $p > 0$ és legyen G egy tetszőleges csoport. Tegyük fel, hogy $dl(U(FG)) = k$. Legyen N egy normális részcsoportha G -nek, ami p -csoport vagy p' -csoport. Ekkor $dl(U(F(G/N))) \leq k$.*

Következésképpen, ha $U(FG)$ meta-Abel, akkor $U(F(G/N))$ is az.

Az FG csoportalgebra egységcsoporthjának bizonyos tulajdonságait FG Lie-struktúráján keresztül is vizsgálhatjuk. Ennek segítségével felső korlátot tudunk adni az egységcsoporth feloldható hosszára és meghatározhatunk olyan eseteket, amikor $U(FG)$ meta-Abel. Az R asszociatív gyűrű a és b elemeinek Lie-kommutátorán az $[a, b] = ab - ba$ elemet értjük. A kommutátorláncához hasonlóan definiáljuk az R gyűrűben az erős Lie-derivált sorozatot. Legyen $\delta^{(0)}(R) = R$ és $n \geq 1$ esetén legyen $\delta^{(n)}(R)$ az $[a, b]$ Lie-kommutátorokkal generált asszociatív ideálja R -nek, ahol $a, b \in \delta^{(n-1)}(R)$. Az R gyűrűt erősen Lie-feloldhatónak mondjuk, ha létezik olyan n természetes szám, hogy $\delta^{(n)}(R) = \{0\}$. A legkisebb ilyen n számot R erős Lie-feloldható hosszának nevezzük és $dl^L(R)$ -rel jelöljük. Könnyen belátható, hogy ha az R gyűrű erősen Lie-feloldható, akkor $U(R)$ feloldható és $dl(U(R)) \leq dl^L(R)$. A Levin–Rosenberger-tétel [12] szerint, ha G egy csoport és F egy test, akkor az FG csoportalgebra erősen Lie-meta-Abel (azaz $dl^L(FG) \leq 2$), ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

- i) G Abel-csoport;
- ii) $char(F) = 3$ és $G' \cong C_3$ centrális;
- iii) $char(F) = 2$ és vagy $G' \cong C_2$ centrális vagy $G' \cong C_2 \times C_2$ centrális.

A fenti esetekben (itt a G csoportra nem vonatkozik végtességi feltétel) tehát $U(FG)$ meta-Abel.

A következő kommutátor-azonosságokat szabadon használjuk a számításaink során: tetszőleges G csoportban $(ab, c) = (a, c)(a, c, b)(b, c)$, továbbá tetszőleges R gyűrűben a Lie-kommutátor bilineáris és

$$\begin{aligned} [ab, c] &= a[b, c] + [a, c]b; \\ [a, bc] &= b[a, c] + [a, b]c. \end{aligned}$$

Speciálisan, ha $a, b \in U(R)$, akkor $(a, b) = 1 + a^{-1}b^{-1}[a, b]$ és $[a, b] = ba((a, b) - 1)$.

Legyenek A és B egy tetszőleges R gyűrű részhalmazai. Ekkor $[A, B]$ alatt az összes $[a, b]$ Lie-kommutátor által generált additív részcsoporthját értjük R -nek, ahol $a \in A$ és $b \in B$. A Lie-kommutátorok azonosságaiból adódik, hogy $[AB, C] \subseteq A[B, C] + [A, C]B$ és $[A, BC] \subseteq B[A, C] + [A, B]C$.

A továbbiakban szükségünk lesz a fundamentális ideálok elméletére is. Az FG csoportalgebrában jelölje $\Delta(G)$ mindazon elemek halmazát, melyben az együtthatók összege 0. Ekkor $\Delta(G)$ ideál FG -ben, melyet a csoportalgebra fundamentális ideáljának nevezünk. Ismert, hogy $\Delta(G)$ hivatkozás pontosan akkor nilpotens, ha az F test karakterisztikája p és G véges p -csoport. Jelölje $t(G)$ a nilpotenciaindexét $\Delta(G)$ -nek és legyen $t(G) = \infty$, ha $\Delta(G)$ nem nilpotens. Abban a speciális esetben, amikor G egy véges Abel p -csoport és a $C_{p^{n_i}}$ ciklikus p^{n_i} rendű csoportok direkt szorzata, ahol $1 \leq i \leq m$, könnyen belátható, hogy

$$t(G) = 1 + \sum_{i=1}^m (p^{n_i} - 1).$$

Legyen N normális részcsoportha G -nek és jelölje $\Delta(G, N)$ azt a legszűkebb ideálját FG -nek, mely tartalmazza $\Delta(N)$ -et. Ekkor $\Delta(G, N)$ elemei $g(n-1)$ alakú elemek F -beli együtthatós lineáris kombinációi, ahol $g \in G$ és $n \in N$. Világos, hogy $\Delta(G, N)$ pontosan akkor nilpotens, ha $\Delta(N)$ is nilpotens és ekkor $\Delta(G, N)$ nilpotenciaindexé $t(N)$.

Gyakran fogunk számolni a $\Delta(G, G')$ ideál hatványainak Lie-kommutátoraival, melyhez a következő lemma nyújt támogatást.

2. Lemma ([6], Lemma 2). *Legyen F p -karakterisztikájú test, ahol p prím, és G egy csoport, $\gamma_3(G) \subseteq (G')^p$. Ekkor minden $m, k \geq 1$ esetén, ha G' Abel-csoport, akkor $[\Delta^m(G, G'), \Delta^k(G, G')] \subseteq \Delta^{m+k+1}(G, G')$.*

Az $ab = ba + [a, b]$ azonosság alapján könnyen látható, hogy $ab \equiv ba \pmod{\Delta(G, G')}$ minden $a, b \in FG$ esetén. Továbbá, ha $\gamma_3(G) \subseteq (G')^p$ és $\omega_m \in \Delta^m(G')$, akkor $ab\omega_m$ eredménye független a tényezők sorrendjétől modulo $\Delta^m(G, G')$. Ezen tények nyújtotta lehetőségekkel szabadon fogunk élni a továbbiakban.

Tetszőleges R egységelemes gyűrűben, ha a nilpotens eleme R -nek, akkor $1 + a \in U(R)$. Ismert, hogy ha G feloldható, akkor $\Delta(G, S_p(G))$ nil-ideálja az FG -nek, így az $1 + \Delta(G, S_p(G))$ normális részcsoportha $U(FG)$ -nek. Ez azt jelenti, hogy az $1 + g(a-1)$ alakú elemek egységek, ahol $g \in G$ és $a \in S_p(G)$. További egységek konstruálásához felhasználjuk Kurdics [9, Lemma 2.] következő lemmáját:

3. Lemma. *Legyen F egy p karakterisztikájú test és G egy nilpotens csoport $G' \subseteq S_p(G)$ kommutátor részcsoporthal. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n \in U(FG)$ és $G_1 = \langle \cup_{i=1}^n \text{Supp}(x_i) \rangle$. Legyen Q a G_1 Sylow p' -részcsoporthainak direkt szorzata és legyen $e_1, e_2, \dots, e_r$ páronként ortogonális idempotens elemek rendszere az FG félig egyszerű algebrában, melyek összege 1. Ekkor Q centrális G -ben és létezik $g_{ij} \in G_1, \lambda_{ij} \in U(FQ)$ és $w_i \in \Delta(G_1, S_p(G_1))$ úgy, hogy $x_i = \sum_{j=1}^r \lambda_{ij} g_{ij} e_j + w_i$.*

A továbbiakban 2 karakterisztikájú test feletti csoportalgebrákkal fogunk dolgozni. Abban a speciális esetben, amikor G' ciklikus 2-csoport, szükségünk lesz az alábbiakra.

Amennyiben G' rendje 2^n , akkor G nilpotens és $cl(G) \leq n + 1$. Továbbá $n \geq 2$ esetén legyen $G_\beta = \{g \in G : x \in G', \text{ ahol } (x, g) \in (G')^4\}$. Ekkor G_β normális részcsoportja G -nek és indexe legfeljebb 2. Igazak továbbá az alábbiak:

4. Lemma ([6], Lemma 8). *Legyen $G' = \langle x \rangle$ 2^n -rendű csoport, ahol $n \geq 2$. Ekkor minden $m \geq 1$ esetén $[\Delta^m(G'), FG_\beta] \subseteq \Delta^{m+3}(G, G')$.*

5. Lemma ([6], Lemma 3). *Legyen G egy csoport, G' 2^n -rendű ciklikus, ahol $n \geq 2$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- i) $cl(G) \leq n$;
- ii) $G_\beta = G$;
- iii) $G'_\beta = G'$.

A következő lemma felső korlátot ad az egységscsoport feloldható hosszára.

6. Lemma ([6], Lemma 5). *Legyen G' 2^n -rendű ciklikus csoport, ahol $n \geq 1$. Ekkor $U(FG)$ feloldható és $dl(U(FG)) \leq n + 1$.*

Abban az esetben, amikor $cl(G) \leq n$, pontosan meg tudjuk határozni az egységscsoport feloldható hosszát:

7. Lemma ([6], Theorem 1). *Legyen G' 2^n -rendű ciklikus csoport, ahol $n \geq 2$. Tegyük fel, hogy $cl(G) \leq n$. Ekkor*

$$dl(U(FG)) = \begin{cases} n, & \text{ha } (S_2, G) \neq G' \text{ és } t(S_2/G') \leq 2^{n-1}, \\ n+1, & \text{különben.} \end{cases}$$

A $cl(G) = n + 1$ esetben pedig csak azt tudjuk, hogy a 6. lemmában adott felső korlát mikor pontos:

8. Lemma ([6], Theorem 2). *Legyen G' 2^n -rendű ciklikus csoport, ahol $n \geq 1$. Legyen $cl(G) = n + 1$. Ekkor $dl(U(FG)) = n + 1$ akkor és csak akkor, ha $n \leq 3$ és a következő állítások valamelyike teljesül:*

- i) $(S_2(G), G) = G'$;
- ii) $S_2(G)/G'$ rendje nagyobb, mint $n - 1$.

A G csoportot 2-Engel csoportnak nevezzük, ha $(g, h, h) = 1$ teljesül minden $g, h \in G$ esetén ((g, h, h) alatt a $((g, h), h)$ kommutátort értjük). Levi tételéből [16, Theorem 12.3.6.] ismert, hogy ha G 2-Engel csoport és x, y, z tetszőleges elemei G -nek, akkor $(x, y, z)^3 = 1$, valamint, hogy G nilpotens és nilpotenciaosztálya legfeljebb 3. Mozgovej [14] igazolta, hogy ha $U(FG)$ meta-Abel és G tartalmaz egy c másodrendű centrális

elemet, akkor G nilpotens csoport. Ehhez tulajdonképpen azt látta be, hogy a $G/\langle c \rangle$ faktorcsoport 2-Engel. Mivel ezen állítás még nem került publikálásra, és a továbbiakban szükségünk lesz rá, így a bizonyítást itt megismételjük.

9. Lemma. *Legyen c a G csoport másodrendű centrális eleme. Ha $U(FG)$ meta-Abel, akkor $G/\langle c \rangle$ 2-Engel.*

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvaló, ha G Abel-csoport. Tegyük fel, hogy G nem-Abel és válasszuk meg a $g, h \in G$ elemeket úgy, hogy $(g, h) = d \neq 1$. Továbbá legyen c másodrendű centrális eleme G -nek. Megmutatjuk, hogy $(d, g) \in \langle c \rangle$.

Mivel $1 + (c + 1)g$ másodrendű eleme $U(FG)$ -nek, ezért

$$\begin{aligned} (1 + (c + 1)g, h) &= (1 + (c + 1)g)h^{-1}(1 + (c + 1)g)h \\ &= (1 + (c + 1)g)(1 + h^{-1}(c + 1)gh) \\ &= 1 + h^{-1}(c + 1)gh + (c + 1)g + (c + 1)^2gh^{-1}gh \\ &= 1 + (c + 1)g((g, h) + 1) \\ &= 1 + (c + 1)g(d + 1). \end{aligned}$$

Feltevésünk szerint $U(FG)$ meta-Abel, így

$$\begin{aligned} [(1 + (c + 1)g, h), d] &= [1 + (c + 1)g(d + 1), d] \\ &= (c + 1)[g, d](d + 1) \\ &= (c + 1)gd((d, g) + 1)(d + 1) = 0. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} (c + 1)((d, g) + 1)(d + 1) \\ = 1 + d + (d, g) + d(d, g) + c + cd + c(d, g) + c(d, g)d = 0. \end{aligned}$$

A fenti egyenlőség csak akkor teljesül, ha a bal oldalon minden csoportelem páros multiplicitással van jelen, vagyis c egyenlő kell legyen az összegben szereplő további elemek valamelyikével.

Tegyük fel, hogy $(d, g) \neq 1$. Ekkor evidens, hogy c nem lehet egyenlő a következő elemekkel: $1, d, cd, c(d, g)$. Ha $c = d(d, g)$, akkor $d^g = c$, ami ellentmondás, hiszen c csak önmagával konjugált. Ha $c = c(d, g)d$, akkor $d^g = 1$, ami szintén ellentmondás. Marad a $c = (d, g)$ eset, amely igazolja, hogy $(d, g) \in \langle c \rangle$.

Mivel $(d^{-1}, g) = (h, g, g)$ és

$$(d^{-1}, g) = ((d, g)^{-1})^{d^{-1}} = d(d, g)^{-1}d^{-1} = (d, g)^{-1} \in \langle c \rangle,$$

kapjuk, hogy $(h, g, g) \in \langle c \rangle$ minden $g, h \in G$ esetén. Következésképpen $G/\langle c \rangle$ 2-Engel.

□

9.1. Következmény. Ha $U(FG)$ meta-Abel és G -ben van legalább két különböző másodrendű centrális elem, akkor G 2-Engel.

3. A tételek bizonyítása

Az 1. tétel bizonyítása. Mivel G nilpotens, így $S_2(G)$ -ben van c másodrendű centrális elem. Legyen $C = \langle c \rangle$. Mivel $|S_2(G)| \geq 4$, így G/C is tartalmaz egy dC másodrendű centrális elemet.

Tegyük fel, hogy $U(FG)$ meta-Abel úgy, hogy G' -nek van nem 2-hatványrendű eleme: legyenek $a, b \in G$ olyanok, hogy $x = (a, b) \in G' \setminus S_2(G)$. Legyen $u = (1 + a(c+1), b)$ és $v = (1 + b(d+1), a)$. Mivel c másodrendű centrális elem, így $(1 + a(c+1))^{-1} = 1 + a(c+1)$ és

$$\begin{aligned} u &= (1 + a(c+1), b) = 1 + (1 + a(c+1))^{-1}b^{-1}[a(c+1), b] \\ &= 1 + (1 + a(c+1))b^{-1}[a, b](c+1) \\ &= 1 + (1 + a(c+1))b^{-1}ba((a, b) + 1)(c+1) \\ &= 1 + a(x+1)(c+1). \end{aligned}$$

Mivel dC centrális, így $(g, d) \in C$ és $[g, d] = dg((g, d) + 1) \in \Delta(G, C)$ bármely $g \in G$ esetén. Továbbá $d^2 \in C$, ezért $(1 + b(d+1))^{-1} \equiv 1 + b(d+1) \pmod{\Delta(G, C)}$ és

$$\begin{aligned} v &= (1 + b(d+1), a) = 1 + (1 + b(d+1))^{-1}a^{-1}[b(d+1), a] \\ &= 1 + (1 + b(d+1))^{-1}a^{-1}[b, a](d+1) + (1 + b(d+1))^{-1}a^{-1}b[d, a] \\ &\equiv 1 + (1 + b(d+1))a^{-1}ab((b, a) + 1)(d+1) + (1 + b(d+1))a^{-1}bad((d, a) + 1) \\ &\equiv 1 + b(x^{-1} + 1)(d+1) \pmod{\Delta(G, C)}. \end{aligned}$$

Ekkor, mivel $\Delta^2(G, C) = \{0\}$, így

$$\begin{aligned} [u, v] &= [a(x+1)(c+1), b(x^{-1} + 1)(d+1)] \\ &= ab(x^{-1} + 1)[x, d](c+1) + a[x, b](x^{-1} + 1)(d+1)(c+1) \\ &\quad + b(x^{-1} + 1)[a, d](x+1)(c+1) + b[a, x^{-1}](d+1)(x+1)(c+1) \\ &\quad + [a, b](x^{-1} + 1)(d+1)(x+1)(c+1). \end{aligned}$$

A 9. lemma szerint G/C 2-Engel, ezért $(x, b) \in C$, így $[x, b] = bx((x, b) + 1) \in \Delta(G, C)$. Hasonlóan $[a, x^{-1}] \in \Delta(G, C)$, így

$$[u, v] = ba(x+1)(x^{-1} + 1)(d+1)(x+1)(c+1).$$

Könnyen belátható, hogy a fenti kifejezés x, d és c megválasztása miatt nem lehet egyenlő 0-val, így $U(FG)$ nem meta-Abel, ami ellentmondás. $\square$

9.2. Következmény. *Ha G nilpotens, G' 2-csoport és $U(FG)$ meta-Abel, akkor $\gamma_3(G)$ legfeljebb másodrendű, centrális részcsoportja G -nek. Következésképpen $cl(G) \leq 3$.*

Bizonyítás. Ha $\gamma_3(G) = \{1\}$, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy $|\gamma_3(G)| \geq 2$. Mivel G nilpotens és G' 2-csoport, így $\gamma_3(G)$ tartalmaz egy c másodrendű centrális elemet. Ekkor a 9. lemma szerint $G/\langle c \rangle$ 2-Engel, ezért $\gamma_3(G/\langle c \rangle)$ exponense 3. Viszont $\gamma_3(G/\langle c \rangle) = \gamma_3(G)/\langle c \rangle$ 2-csoport, így csak triviális lehet, azaz $\gamma_3(G) \subseteq \langle c \rangle$. $\square$

A 2. tétel bizonyítása. Az $n = 1$ esetben a 6. lemma szerint $dl(U(FG)) \leq 2$. Mivel G nemkommutatív, ezért $dl(U(FG)) = 2$.

Tegyük fel, hogy $n > 1$ és $cl(G) \leq n$, ekkor a 7. lemma alapján $dl(U(FG)) = 2$ akkor és csak akkor, ha $(S_2(G), G) \neq G'$, $n = 2$ és $|S_2(G)| \leq 8$. Ha $|S_2(G)| = 8$ és $S_2(G)$ centrális, akkor $(S_2(G), G) \neq G'$. Ha $S_2(G)$ nem centrális, akkor belátható, hogy bármely $a \in S_2(G)$ és $g \in G$ esetén (a, g) legfeljebb másodrendű, így $(S_2(G), G) \neq G'$. Ebből kapjuk a *iii*) esetet illetve a *ii*) esetet azzal az extra feltétellel, hogy G' centrális.

Tegyük fel, hogy $n = 2$ és $cl(G) = n + 1$. Ekkor a 6. és 8. lemmák alapján $dl(U(FG)) = 2$ akkor és csak akkor, ha $S_2(G) = G'$, így már a *ii*) eset is teljes.

Már csak azt kell megmutatni, hogy ha $n \geq 3$ és $cl(G) = n + 1$, akkor $U(FG)$ nem meta-Abel. A 9.2. következmény alapján ez könnyen megkapható, ugyanis ha $U(FG)$ meta-Abel, akkor $cl(G) \leq 3$, tehát ha $n \geq 3$, akkor $cl(G)$ nem lehet egyenlő $n + 1$ -gyel. Mindemellett egy alternatív bizonyítást is adunk erre az esetre. Tegyük fel, hogy $cl(G) = n + 1$ és $U(FG)$ meta-Abel. Vegyük a $z \in \gamma_{n+1}(G)$ másodrendű centrális elemet, és tekintsük a $G/\langle z \rangle$ faktorcsoporthat. Ekkor $(G/\langle z \rangle)'$ ciklikus 2^{n-1} rendű és az 1. lemma szerint $U(F(G/\langle z \rangle))$ is meta-Abel. A faktorizálás ismétlésével elérhető, hogy $n = 3$ legyen. Válasszunk $g, h \in G$ elemeket úgy, hogy $x = (g, h)$ és $\langle x \rangle = G'$. Az 5. lemma szerint g és h közül legfeljebb az egyik lehet G_β eleme. Ha $g, h \notin G_\beta$, akkor g vagy h helyett a $gh \in G_\beta$ szorzatot véve az előbbi feltételek továbbra is fennállnak, így feltehető, hogy g és h közül pontosan az egyik G_β -beli: legyen például $h \in G_\beta$ és $g \notin G_\beta$. Tekintsük az $u = (1 + g(x + 1), h)$ kommutátort. Mivel $1 + g(x + 1) \in 1 + \Delta(G, G') \subset U(FG)$, így $(1 + g(x + 1))^{-1} \in 1 + \Delta(G, G')$ és

$$\begin{aligned} u &= 1 + (1 + g(x + 1))^{-1} h^{-1} [g(x + 1), h] \\ &= 1 + (1 + g(x + 1))^{-1} h^{-1} g[x, h] + (1 + g(x + 1))^{-1} h^{-1} [g, h](x + 1) \\ &= 1 + (1 + g(x + 1))^{-1} h^{-1} ghx((x, h) + 1) \\ &\quad + (1 + g(x + 1))^{-1} h^{-1} hg((g, h) + 1)(x + 1) \\ &\equiv 1 + h^{-1} ghx((x, h) + 1) + g(x + 1)^2 \pmod{\Delta^3(G, G')}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $h \in G_\beta$, a 4. lemma szerint $(x, h) + 1 \in \Delta^4(G, G')$, így $u \equiv 1 + g(x+1)^2 \pmod{\Delta^3(G, G')}$. Innen

$$\begin{aligned} [u, x] &\equiv [g(x+1)^2, x] \pmod{\Delta^5(G, G')} \\ &\equiv [g, x](x+1)^2 \pmod{\Delta^5(G, G')} \\ &\equiv xg((g, x) + 1)(x+1)^2 \pmod{\Delta^5(G, G')}. \end{aligned}$$

Továbbá $g \notin G_\beta$, így $(g, x) \in (G')^2 \setminus (G')^4$, azaz

$$(g, x) + 1 \equiv (x+1)^2 \pmod{\Delta^3(G, G')}.$$

Ekkor viszont az

$$[u, x] \equiv xg((g, x) + 1)(x+1)^2 \equiv xg(x+1)^4 \pmod{\Delta^5(G, G')}$$

egyenlettel ellentmondásra jutunk, mivel $(x+1)^4 \in \Delta^4(G, G') \setminus \Delta^5(G, G')$, így $[u, x] \neq 0$. $\square$

10. Lemma. *Ha $G' = S_2(G)$ centrális, akkor $\delta_2(U(FG)) \subseteq \Delta^5(G, G')$.*

Bizonyítás. Legyenek $v_1, v_2 \in U(FG)$. Ekkor a 3. lemma szerint

$$\begin{aligned} x &= (v_1, v_2) = 1 + v_1^{-1}v_2^{-1}[v_1, v_2] \\ &= 1 + v_1^{-1}v_2^{-1} \left[\sum_{j=1}^r \lambda_{1j}g_{1j}e_j + \alpha_0, \sum_{j=1}^r \lambda_{2j}g_{2j}e_j + \beta_0 \right], \end{aligned} \tag{1}$$

ahol $\alpha_0, \beta_0 \in \Delta(G, G')$. Mivel $\gamma_3(G) = \{1\}$, a 2. lemma szerint $[\alpha_0, \beta_0] \in \Delta^3(G, G')$, továbbá $[\alpha_0, \sum_{j=1}^r \lambda_{2j}g_{2j}e_j], [\sum_{j=1}^r \lambda_{1j}g_{1j}e_j, \beta_0] \in \Delta^2(G, G')$, így

$$\begin{aligned} x &= 1 + v_1^{-1}v_2^{-1} \left[\sum_{j=1}^r \lambda_{1j}g_{1j}e_j + \alpha_0, \sum_{j=1}^r \lambda_{2j}g_{2j}e_j + \beta_0 \right] \\ &= 1 + \sum_{j=1}^r \lambda_{1j}^{-1}g_{1j}^{-1}e_j \lambda_{2j}^{-1}g_{2j}^{-1}e_j \lambda_{1j} \lambda_{2j} e_j g_{2j} g_{1j} ((g_{1j}, g_{2j}) + 1) + \alpha_1 \\ &= 1 + \sum_{j=1}^r ((g_{1j}, g_{2j}) + 1)e_j = \sum_{j=1}^r (g_{1j}, g_{2j})e_j + \alpha_1, \end{aligned}$$

ahol $\alpha_1 \in \Delta^2(G, G')$. Legyenek $v_3, v_4 \in U(FG)$. Hasonlóan kapjuk, hogy $y = (v_3, v_4) = \sum_{j=1}^r (g_{3j}, g_{4j})e_j + \alpha_2$, ahol $\alpha_2 \in \Delta^2(G, G')$. Ekkor

$$[x, y] = \left[\sum_{j=1}^r (g_{1j}, g_{2j})e_j + \alpha_1, \sum_{j=1}^r (g_{3j}, g_{4j})e_j + \alpha_2 \right]$$

és mivel G' centrális, a 2. lemma szerint $[\alpha_1, \alpha_2] \in \Delta^5(G, G')$, így $\delta_2(U(FG)) \subseteq \Delta^5(G, G')$. $\square$

10.1. Következmény. Ha $G' = S_2(G)$ centrális és G' izomorf a következő csoportok valamelyikével, akkor $U(FG)$ meta-Abel:

i) $C_2 \times C_2$;

ii) $C_2 \times C_2 \times C_2$;

iii) $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$;

iv) $C_4 \times C_2$.

A 3. tétel bizonyítása. Ha G' centrális, akkor a már említett Levin – Rosenberger-tételből következik az állítás.

Tegyük fel, hogy $G' = S_2(G)$ nem centrális. Ekkor a 10. lemma (1) egyenlete érvényben marad. Viszont ekkor $[\alpha_0, \beta_0] \in \Delta^2(G, G')$ és

$$[\alpha_0, \sum_{j=1}^r \lambda_{2j} g_{2j} e_j], [\sum_{j=1}^r \lambda_{1j} g_{1j} e_j, \beta_0] \in \Delta(G, \gamma_3(G)) + \Delta^2(G, G'),$$

így

$$x = (v_1, v_2) = \sum_{j=1}^r (g_{1j}, g_{2j}) e_j + \alpha_1 + \beta_1 \quad \text{és} \quad y = (v_3, v_4) = \sum_{j=1}^r (g_{3j}, g_{4j}) e_j + \alpha_2 + \beta_2$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta^2(G, G')$ és $\beta_1, \beta_2 \in \Delta(G, \gamma_3(G))$. Innen

$$[x, y] = \left[\sum_{j=1}^r (g_{1j}, g_{2j}) e_j + \alpha_1 + \beta_1, \sum_{j=1}^r (g_{3j}, g_{4j}) e_j + \alpha_2 + \beta_2 \right].$$

A jobb oldalon lévő Lie-kommutátort tagonként kifejtve, és felhasználva, hogy G' Klein-csoport, így $\Delta^3(G, G') = \{0\}$ és $\gamma_3(G)$ centrális másodrendű, kapjuk, hogy $[x, y] = 0$, tehát $U(FG)$ meta-Abel.

Tegyük fel, hogy $G' \neq S_2(G)$ és G' nem centrális. Ekkor G nem 2-Engel, így létezik $a, b \in G$ úgy, hogy $((a, b), b) \neq 1$. Legyen $(a, b) = x$ és $(x, b) = y$; ekkor $\langle x, y \rangle = G'$. Vegyük az $1 + b(h + 1)$ egységet, ahol $h \in S_2(G) \setminus G'$. Világos, hogy h megválasztható úgy, hogy $h^2 \in G'$ legyen. Ekkor $1 + b(h + 1)^{-1} = (1 + b(h + 1)) + \alpha$, ahol $\alpha \in \Delta(G, G')$

és

$$\begin{aligned}
u &= (1 + b(h+1), a) = 1 + (1 + b(h+1))^{-1}a^{-1}[b(h+1), a] \\
&= 1 + (1 + b(h+1) + \alpha)a^{-1}b[h, a] + (1 + b(h+1) + \alpha)a^{-1}[b, a](h+1) \\
&= 1 + (1 + b(h+1))b x h((h, a) + 1) + \alpha b x h((h, a) + 1) \\
&\quad + (1 + b(h+1))b(x+1)(h+1) + \alpha b(x+1)(h+1) \\
&= 1 + b x h((h, a) + 1) + b(h+1)b x h((h, a) + 1) + \alpha b x h((h, a) + 1) \\
&\quad + b(x+1)(h+1) + b(h+1)b(x+1)(h+1) + \alpha b(x+1)(h+1).
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $(h+1)^2 \in \Delta(G, G')$, továbbá a szorzattényezőként előforduló x -ek helyére $x+1+1$ -et, $h(h+1)$ helyére pedig $(h+1)^2+1$ -et helyettesítve kapjuk, hogy

$$u = b h((h, a) + 1) + b^2(h+1)((h, a) + 1) + b(x+1)(h+1) + \beta,$$

ahol $\beta \in \Delta^2(G, G')$. Mivel $[x, \beta] \in \Delta^3(G, G')$, így

$$\begin{aligned}
[x, u] &= [x, b h((h, a) + 1)] + [x, b^2(h+1)((h, a) + 1)] + [x, b(x+1)(h+1)] \\
&= b h((x, h) + 1)((h, a) + 1) + b(y+1)h((h, a) + 1) + b^2 h((x, h) + 1)((h, a) + 1) \\
&\quad + b(x+1)h((x, h) + 1) + b(y+1)(x+1)(h+1).
\end{aligned}$$

Világos, hogy (x, h) vagy y -nal vagy 1 -gyel egyenlő. Ha $(x, h) = 1$, akkor

$$[x, u] = b(y+1)h((h, a) + 1) + b(y+1)(x+1)(h+1),$$

amely $(h, a) \in \langle y \rangle$ esetén $b(y+1)(x+1)(h+1)$, egyébként pedig $b(y+1)(x+1)$, tehát egyik esetben sem 0 . Ugyanerre az eredményre jutunk az $(x, h) = y$ esetben is. Következésképpen $U(FG)$ nem meta-Abel. $\square$

A 4. tétel bizonyítása. A 10.1. következmény alapján csak azt kell megmutatni, hogy ha $G' \cong C_2 \times C_2 \times C_2$ és $|S_2(G)| = 16$ centrális, akkor $U(FG)$ meta-Abel. Tegyük fel, hogy $|S_2(G)| = 16$ Ekkor (1) egyenlőségben $\alpha_0, \beta_0 \in \Delta(G, S_2(G))$ és $\Delta(G, S_2(G)) = \Delta(G, G') + FG(h+1)$, ahol $h \in S_2(G) \setminus G'$, így

$$x = (v_1, v_2) = 1 + v_1^{-1}v_2^{-1} \left[\sum_{j=1}^r \lambda_{1j} g_{1j} e_j + \alpha_1 + \beta_1, \sum_{j=1}^r \lambda_{2j} g_{2j} e_j + \alpha_2 + \beta_2 \right]$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta(G, G')$ és $\beta_1, \beta_2 \in FG(h+1)$. Felhasználva, hogy G' centrális és $h^2 \in G'$ kapjuk, hogy

$$[\sum_{j=1}^r \lambda_{1j} g_{1j} e_j, \alpha_2], [\alpha_1, \sum_{j=1}^r \lambda_{2j} g_{2j} e_j], [\alpha_1, \alpha_2], [\beta_1, \beta_2], [\alpha_1, \beta_2], [\beta_1, \alpha_2] \in \Delta^2(G, G')$$

és $[\sum_{j=1}^r \lambda_{1j} g_{1j} e_j, \beta_2], [\beta_1, \sum_{j=1}^r \lambda_{2j} g_{2j} e_j] \in \Delta(G, G')(h+1)$, így

$$x = \sum_{j=1}^r (g_{1j}, g_{2j}) e_j + \alpha_3 + \beta_3 \quad \text{és} \quad y = (v_3, v_4) = \sum_{j=1}^r (g_{3j}, g_{4j}) e_j + \alpha_4 + \beta_4,$$

ahol $\alpha_3, \alpha_4 \in \Delta(G, G')(h+1)$ és $\beta_3, \beta_4 \in \Delta^2(G, G')$. Ekkor a 2. lemma szerint

$$[\alpha_3, \beta_4], [\beta_3, \alpha_4] \in \Delta^4(G, G')$$

és $[\beta_3, \beta_4] \in \Delta^5(G, G')$, továbbá $[\alpha_3, \alpha_4] \in \Delta^4(G, G')$. Mivel $\Delta^4(G, G') = \{0\}$, így $[x, y] = 0$, tehát $U(FG)$ meta-Abel. $\square$

Az 5. tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy $U(FG)$ meta-Abel, de G' nem centrális. Mivel G' 2-csoport, így G nem 2-Engel, vagyis létezik $a, b \in G$ úgy, hogy $y = (a, b, b) \neq 1$. Ekkor a 9.2. következmény szerint $\langle y \rangle = \gamma_3(G)$ és y másodrendű centrális elem G -ben. Sőt, a 9.1. következmény szerint y az egyetlen centrális másodrendű eleme G -nek.

Az $x = (a, b) \neq 1$ kommutátor rendje szerint két esetet különböztethetünk meg.

Tegyük fel először, hogy x másodrendű. Mivel $|G'| \geq 8$, így létezik $h \in G' \setminus \langle x, y \rangle$. Legyen $H = \langle a, b, h \rangle$. Ekkor $H' = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \cong C_2 \times C_2$ nem centrális H -ban. Mivel $h \in S_2(H) \setminus H'$, így $S_2(H) \neq H'$. Tehát a 3. tétel szerint $U(FH)$ nem meta-Abel, így $U(FG)$ sem az, ami ellentmondás.

Tegyük fel, hogy x rendje nagyobb, mint 2. Ekkor bármely $g \in G$ esetén teljesül, hogy

$$(x^2, g) = (x, g)(x, g, x)(x, g) = (x, g)^2 = 1,$$

tehát x^2 centrális, így $y \in \langle x \rangle$. Legyen $H = \langle a, b \rangle$. Ekkor H' ciklikus, $U(FH)$ meta-Abel, ezért a 2. tétel szerint x negyedrendű. Ekkor létezik $h \in G' \setminus \langle x \rangle$. Legyen $H_1 = \langle a, b, h \rangle$. Ekkor H'_1 negyedrendű ciklikus, nem centrális részcsoporth H_1 -ben, továbbá $S_2(H_1)$ nem esik egybe H'_1 -vel. Ekkor a 2. tétel szerint $U(FH_1)$ nem meta-Abel, ami szintén lehetetlen. $\square$

Irodalom

- [1] BATEMAN, J.: *On the solvability of unit groups of group algebras*, Transactions of the American Mathematical Society 157 (1971), 73–86. old.
- [2] BOVDI, A.: *Group algebras with a solvable group of units*, Communications in Algebra 33.10 (2005), 3725–3738. old.
- [3] BOVDI, A. és KHRIPTA, I.: *Group algebras of periodic groups of a solvable multiplicative group*, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR 22.3 (1977), 725–731. old.
- [4] CATINO, F. és SPINELLI, E.: *On the derived length of the unit group of a group algebra*, Journal of group theory 13.4 (2010), 577–588. old.
- [5] COLEMAN, D. B. és SANDLING, R.: *Mod 2 group algebras with metabelian unit groups*, Journal of Pure and Applied Algebra 131.1 (1998), 25–36. old.
- [6] FIGULA, Á. és JUHÁSZ, T.: *On the derived length of the unit group of group algebras of groups with cyclic commutator subgroup*, Communications in Algebra 51.2 (2022), 633–647. old.
- [7] GARDAM, G.: *A counterexample to the unit conjecture for group rings*, Annals of Mathematics 194.3 (2021), 967–979. old.
- [8] JUHÁSZ, T. és SPINELLI, E.: *Group rings with metabelian unit groups*, Journal of Pure and Applied Algebra 226.6 (2022).
- [9] KURDICS, J.: *Engel properties of group algebras II*, Journal of Pure and Applied Algebra 133.1-2 (1998), 179–196. old.
- [10] KURDICS, J.: *On group algebras with metabelian unit groups*, Periodica Mathematica Hungarica 32.1-2 (1996), 57–64. old.
- [11] LEE, G. T., SEHGAL, S. K. és SPINELLI, E.: *Group Rings with Solvable Unit Groups of Minimal Derived Length*, Algebras and Representation Theory 17 (2014), 1597–1601. old.
- [12] LEVIN, F. és ROSENBERGER, G.: *Lie Metabelian Group Rings*, North-Holland Mathematics Studies 126 (1986), 153–161. old.

- [13] MOTOSE, K. és TOMINAGA, H.: *Group rings with solvable unit groups*, Mathematical Journal of Okayama University 15.1 (1971), 37–40. old.
- [14] MOZGOVOJ, I.: *Csoportalgebrákról, melyek egységcsoportja meta-Abel*, OTDK dolgozat (2023).
- [15] PASSMAN, D.: *Observations on group rings*, Communications in Algebra 5.11 (1977), 1119–1162. old.
- [16] ROBINSON, D. J.: *A Course in the Theory of Groups*, 80. köt., Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] SHALEV, A.: *Meta-abelian unit groups of group algebras are usually abelian*, Journal of Pure and Applied Algebra 72.3 (1991), 295–302. old.