

# 1. Megoldodott tudományos kérdések, eredményeink és módszereink

A kutatás és az elért eredmények csapatunk, azaz mindhárom szerző közös munkájának eredményei, így azok egyéni hozzájárulás szerint nem elkülöníthetőek.

Munkánk során különböző permutonkat konstruáltunk, és ezek entrópiasorozatainak asszimptotikus értékét számoltuk ki. A triviális esetek vizsgálata után úgy készítettünk újabb bonyolultabb permutonokat, hogy korábbiakat ragasztottunk össze. A kapott permutonok entrópiáját a Shannon-entrópia alapvető tulajdonságait és elemi kombinatorikát használva számoltuk ki.

A  $H(\mu^n)$  entrópia sorozat asszimptotikájának pontos meghatározása nem egyszerű feladat. Témavezetőnk Maga Balázs belátta, hogy ez abban az esetben, ha a  $\mu$  permuton egy olyan mértéktartó  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  függvénynek felel meg, amely véges sok folytonosan differenciálható darabból áll, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(\mu^n)/n = \int_0^1 \log |f'(x)| dx.$$

Felmerül a kérdés, hogy végtelensok folytonosan differenciálható darabból álló függvényre is működik. A kérdés kapcsán a következő eredményeket értük el:

- A mértéktartó függvények egy olyan családja esetén ahol a függvények végtelensok lineáris darabból állnak megmutattuk, hogy működik a formula.
- Konstruáltunk egy ellenpéldát, ahol nem működik a formula.

További felmerülő kérdés, hogy  $H(\mu^n)$  nagyságrendje és a mintakerülés között van-e összefüggés. Ezzel kapcsolatban a következő eredményeket értük el:

Létrehoztunk egy végtelen sok lineáris darabból álló  $f$  függvényhez tartozó  $\mu_f$  permutont amely nem mintakerülő, viszont  $H(\mu^n) = O(n)$ . Ezzel bemutattuk, hogy ekvivalencia nem áll fenn a mintakerülés és az entrópiasorozat  $O(n)$  nagyságrendje között. Ezután megvizsgáltuk, hogy a  $H(\mu^n) = O(n)$  nagyságrend okoz-e mégis valami mintakerüléshez hasonlót. Bevezettük az  $\varepsilon$  mintakerülés fogalmát:

**Definíció 1.1.** Azt mondjuk, hogy egy  $\mu$  permuton  $\varepsilon$ -mintakerülő, ha létezik olyan  $n$  és olyan  $n$  hosszú  $\tau$  permutáció melyre  $t(\tau, \mu) \leq \varepsilon/n!$ . Ilyenkor azt mondjuk, hogy a  $\mu$  permuton a  $\tau$  mintát  $\varepsilon$ -elkerüli.

Ezen definíciót használva megfogalmaztunk összefüggéseket  $\varepsilon$ -mintakerülés és az asszimptotikus entrópia között.

Dolgozatunk utolsó részeként a tapasztalataink alapján sejtéseket fogalmaztunk meg.

AI használat: A dolgozat elkészítése során mesterséges intelligenciát kizárólag az angol nyelvre történő fordításhoz használtunk. A használt szoftver típusa: ChatGPT (OpenAI)