

Homogén polinomok prímosztóinak számáról

2024. december 27.

Füredi Erik

ELTE TTK-Matematikusan MSc 1. év

e-mail: erikfuredi@gmail.com

Témavezető: Gyarmati Katalin egyetemi docens

1. Absztrakt

Legyen $\mathcal{A}$ pozitív egész számok véges halmaza, f homogén kétváltozós egész együtthatós polinom. A TDK dolgozat keretében alsó becslést adok $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} f(a,b))$ értékére, $|\mathcal{A}|$ függvényében bizonyos speciális esetekben. Ezen f polinomoknak közös vonása, hogy $f(a,b)$ minden a, b pozitív egész számra csak pozitív értékeket vesz fel. Ilyen speciális eset pl. az $xa^2 + yab + xb^2$ alakú polinom, ahol $x > 0$ és $2x + y > 0$. Általánosabb vizsgált eset az $x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} b + \dots + x_0 b^n$ alakú polinomoké nemnegatív együtthatók mellett és $x_n = x_0 = 1$ feltételekkel. Ekkor

$$\omega \left(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} f(a,b) \right) \gg \log |\mathcal{A}|,$$

ahol az alkalmazott konstans faktor csak az f polinomtól függ. Hasonló alakú alsó becsléseket korábban Erdős és Turán igazolt $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a+b))$ értékére, továbbá Győry, Sárközy és Stewart $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (ab+1))$ értékére. A bizonyított tételeim élességére vonatkozólag számítógéppel kerestem olyan konkrét $\mathcal{A}$ halmazokat, amelyre $\omega \left(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2) \right)$ értéke viszonylag kicsi.

2. Új eredmények

A dolgozatban pozitív egész számok véges $\mathcal{A}$ halmazára, némely kétváltozós homogén egész együtthatós, legalább másodfokú f polinomokra alsó becslést adok

$$\omega\left(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} f(a,b)\right)$$

értékére, az $f(a,b)$ ($a, b \in \mathcal{A}, a \neq b$) alakú számok különböző prímosztóinak számára, $\mathcal{A}$ méretének függvényében. Az alsó becslés a megadott esetekben $\log |\mathcal{A}|$ -s nagyságrendű, f -től függő konstans szorzóval.

- Az $f(a,b) = a^2 + ab + b^2$ esetről szól az 1. tétel, amely szerint $|\mathcal{A}| = 3^k + 1$ esetén

$$\omega\left(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} a^2 + ab + b^2\right) \geq k + 2.$$

- Ezen polinomra a halmaz adott méretére

$$\omega\left(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} f(a,b)\right)$$

kis lehetséges értékeit keresve számítógépes programmal megvizsgáltam azon 3-8 méretű $\mathcal{A}$ halmazokat, amelyeknek legnagyobb eleme egy-egy korlát alá esik.

- A 2. és 3. tételben másodfokú szimmetrikus $f(a,b) = xa^2 + yab + xb^2$ alakú polinomokra, ahol $x > 0$ és $2x + y > 0$, a

$$\omega\left(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} f(a,b)\right)$$

mennyiségre adok alsó korlátokat $|\mathcal{A}|$ és f függvényében, előbbi tételnél kicsit erősebb becslés adódik ennél szűkebb osztályra, ahol $\text{Inko}(x,y) = 1$, és $v_p(2x+y)$ páratlan vagy 0 minden p prímszámra. Az

$$\omega\left(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} f(a,b)\right) \geq k + 1$$

egyenlőtlenséget igazolom a 2. tételben $|\mathcal{A}| = 3^k + 1$, a 3. tételben $|\mathcal{A}| = 3^k(2x+y) + 1$ esetben, ahol k nemnegatív egész szám.

- A 4. tételben 2-nél magasabb fokú

$$f(a, b) = a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots + x_1ab^{n-1} + b^n$$

alakú polinomokra, ahol $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ nemnegatív egész számok, bizonyítom, hogy $(2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i)^2(n+1)^k + 1$ méretű pozitív egész számokból álló $\mathcal{A}$ halmazokra

$$\omega\left(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} f(a, b)\right) \geq k+1.$$

3. Bevezetés

Jelölje bármely n pozitív egész számra $\omega(n)$ az n -t osztó prímszámok számát, $P(n)$ pedig a legnagyobb prímszámot, amely osztja n -t. Bármely $x \neq 0$ egész számra $v_p(x)$ jelöli azon egyetlen egész számot, amelyre $p^{v_p(x)} \mid x$, de $p^{v_p(x)+1} \nmid x$.

A témakör kutatását elindító cikkben Erdős és Turán [2] alábbi eredménye a legfontosabb:

A. Tétel (Erdős-Turán [2]) Ha az $\mathcal{A}$ halmaz elemei pozitív egész számok és $|\mathcal{A}| = 3 \cdot 2^{k-1}$ egy k pozitív egész számra, akkor $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a+b)) \geq k+1$.

A bizonyítás a következő állítást alkalmazza:

1. Lemma. Bármely a, b pozitív egész számokra létezik olyan p prímszám, amelyre

$$v_p(a+b) > v_p(a) = v_p(b). \quad (1)$$

Bizonyítás:

Mivel $a+b > a$, létezik olyan p prímszám, amelyre $v_p(a+b) > v_p(a)$. Ugyanis minden x pozitív egész szám $p^{v_p(x)}$ alakú prímhatványok szorzata különböző p -kkel a szorzatban. Ekkor a következő lemma miatt $v_p(a) = v_p(b)$ is teljesül.

2. Lemma. Bármely c, d pozitív egész számokra és p prímszámra, ha $v_p(c) > v_p(d)$, akkor

$$v_p(c+d) = v_p(d) = \min(v_p(c), v_p(d)). \quad (2)$$

A lemma bizonyítása:

$p^{v_p(d)} \mid c$ és $p^{v_p(d)} \mid d$ miatt $p^{v_p(d)} \mid c + d$. Ugyanakkor $p^{v_p(d)+1} \nmid d$, és $p^{v_p(d)+1} \mid c$, így $p^{v_p(d)+1} \nmid c + d$. Ezek alapján $v_p(c + d) = v_p(d)$. ■

■

Ezenkívül a bizonyítás egy másik fontos eszköze, hogy bármely p páratlan prímszámra, k pozitív egész számra és pozitív egész számokból álló H halmazra, amelyre $|H| = 2k + 1$, létezik olyan $H' \subset H$ halmaz, amelyre $|H'| = k + 1$ és $d, e \in H'$, $d \neq e$ esetén $v_p(d + e) = \min(v_p(d), v_p(e))$.

Az ezen írásban belátott tételeink bizonyításaiban hasonló elemi ötleteket alkalmazunk.

Győry, Stewart és Tijdeman ennél általánosabb, két halmazos esetben, ahol a különböző halmazok elemeiből álló párok összegének szorzatát vizsgálták, alsó korlátot adtak a különböző prímosztók számára:

B. Tétel (Győry-Stewart-Tijdeman [5]) Létezik olyan c_1 hatékonyan kiszámítható pozitív konstans, amelyre ha az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ véges halmazok elemei pozitív egész számok és $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}| \geq 2$, akkor $\omega(\prod_{a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}} (a + b)) \geq c_1 \log |\mathcal{A}|$.

Bizonyításukban Evertse algebrai számtestek feletti S -egységegyenletekre vonatkozó általánosabb eredményéből [3] következő becslést használták a racionális esetben. Evertse eredményének $\mathbb{Q}$ feletti változata [4]:

3. Lemma. *Legyenek α , β és γ nullától különböző egész számok, $p_1, p_2, \dots, p_s$ különböző prímszámok. Ekkor az $\alpha x + \beta y = \gamma z$ egyenletnek legfeljebb $6 \cdot 7^{2s+3}$ megoldása létezik, ahol $\text{luko}(x, y, z) = 1$ és x, y és z egyike sem osztható a $p_1, p_2, \dots, p_s$ prímszámok mindegyikétől különböző prímszámmal.*

Ellenkező irányban Erdős, Stewart és Tijdeman adtak felső becslést az $\omega(\prod_{a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}} (a + b))$ számra bizonyos kritériumokkal. Speciálisan bizonyították [1], hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ valós számra és minden ε -től függő korlátnál nagyobb k pozitív egész számra vannak olyan $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ pozitív egész számokat tartalmazó halmazok, amelyekre $|\mathcal{A}| = k$, $|\mathcal{B}| = 2$ és

$$\omega\left(\prod_{a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}} (a + b)\right) < \left(\frac{1}{8} + \varepsilon\right)(\log k)^2 \log \log k.$$

Győry, Sárközy és Stewart a B. tételhez hasonló állítást bizonyítottak két különböző halmaz

esetén eltolt szorzatokra:

C. Tétel (Győry-Sárközy-Stewart [6]) Létezik olyan c_2 hatékonyan kiszámítható pozitív konstans, amelyre ha az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ véges halmazok elemei pozitív egész számok és $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}| \geq 2$, akkor

$$\omega\left(\prod_{a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}} (ab + 1)\right) \geq c_2 \log |\mathcal{A}|.$$

A tétel következménye egy halmazra az alábbi

D. Tétel (Győry-Sárközy-Stewart [6]) Létezik olyan c_3 hatékonyan kiszámítható pozitív konstans, amelyre ha az A véges halmaz elemei pozitív egész számok és $|A| \geq 2$, akkor

$$\omega\left(\prod_{a, b \in A, a \neq b} (ab + 1)\right) \geq c_3 \log |A|.$$

A C. tétel bizonyításában használták a következő lemmát.

4. Lemma. (Győry-Sárközy-Stewart [6]) Legyen $n \geq 2$ pozitív egész szám, $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egész számok halmaza, $\mathcal{A} \subset (\mathbb{Z}^+)^n$ és $\mathcal{B} \subset (\mathbb{Z}^+)^n$ véges halmazok. Tegyük fel, hogy $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}| \geq 2n - 2$, $\mathcal{A}$ összes elemének n . koordinátája 1 és $\mathcal{B} \cup (0, 0, \dots, 0, 1)$ bármely n eleme lineárisan független. Ekkor létezik olyan c_4 hatékonyan kiszámolható pozitív konstans, amelyre

$$\omega\left(\prod_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{A}, (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathcal{B}} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)\right) > c_4 \log |\mathcal{A}|.$$

A bizonyítás alapján [6] a prímosztók számát s -sel jelölve az

$$|\mathcal{A}| \leq (2^{33}(2n - 1)^2)^{n^3(s+1)}$$

egyenlőtlenség következik.

Ugyanezen két halmazos esetben az $ab + 1$ alakú számok szorzata különböző prímosztói számának lehetséges minimumára becslést ad Győry, Sárközy és Stewart következő két tétele bizonyos esetekben, amikor a nagyobb halmaz mérete jelentősen nagyobb. Ugyanis a legnagyobb prímosztóra adott K korlát azt is jelenti, hogy a prímosztók száma legfeljebb a korlátnál nem nagyobb prímszámok száma, ami $\frac{K}{\log K}$ -s nagyságrendű.

E. Tétel (Győry-Sárközy-Stewart [6]) Legyenek $k \geq 16$ és l pozitív egész számok, amelyekre $2 \leq l \leq \left(\frac{\log \log k}{\log \log \log k}\right)^{1/2}$ teljesül. Legyen továbbá $\varepsilon > 0$ valós szám. Ekkor ha k nagyobb egy ε -től függő $c_5(\varepsilon)$ hatékonyan kiszámítható pozitív valós számnál, akkor léteznek olyan $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ pozitív egész számokból álló halmazok, amelyekre $|\mathcal{A}| = k$, $|\mathcal{B}| = l$ és

$$P\left(\prod_{a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}} (ab + 1)\right) < (\log k)^{l+1+\varepsilon}.$$

F. Tétel (Győry-Sárközy-Stewart [6]) Legyenek $k \geq 3$ és l pozitív egész számok. Léteznek olyan c_6 és c_7 hatékonyan kiszámítható pozitív valós számok, amelyekre ha $k \geq c_6$ és $2 \leq l \leq c_7 \frac{\log k}{\log \log k}$ teljesül, léteznek olyan $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \{1, 2, \dots, k^3\}$ halmazok, amelyekre $|\mathcal{A}| = k$, $|\mathcal{B}| = l$ és

$$P\left(\prod_{a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}} (ab + 1)\right) < (\log k)^{5l}.$$

4. Az $a^2 + ab + b^2$ polinom

Ebben a részben az $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ kifejezés értékére adunk becsléseket a pozitív egész számokból álló $\mathcal{A}$ halmaz méretének függvényében.

4.1. Általános becslés

1. Tétel. (Füredi E.) Ha egy $\mathcal{A}$ pozitív egész számokból álló halmazra és egy k pozitív egész számra $|\mathcal{A}| = 3^k + 1$, akkor $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2)) \geq k + 2$.

Bizonyítás:

A bizonyításban az Erdős-Turán-féle gondolatmenetet általánosítjuk.

Mivel $|\mathcal{A}| > 3$, ezért $\mathcal{A}$ elemei között van kettő, amelyekre $a \equiv b \pmod{3}$, így $3 \mid a^2 + ab + b^2$. Ezzel a 3 szerepel az $a^2 + ab + b^2$ alakú számok prímosztói között.

Ha $p \neq 3$ prímszám, akkor bármely $3l + 1$ pozitív egész számból létezik $l + 1$, amelyek közül bármely $a \neq b$ párra

$$v_p(a^2 + ab + b^2) = \min(v_p(a^2), v_p(b^2)).$$

Ugyanis ha $v_p(a) = m$ és $v_p(b) = n$, akkor $a = p^m r$ és $b = p^n s$ szorzatokra $m < n$ esetén

$$a^2 + ab + b^2 = p^{2m} r^2 + p^{m+n} rs + p^{2n} s^2 = p^{2m} (r^2 + p^{n-m} rs + p^{2(n-m)} s^2),$$

így $v_p(a^2 + ab + b^2) = \min(v_p(a^2), v_p(b^2))$. Utóbbi teljesül $m > n$ -re is. $m = n$ esetén $a^2 + ab + b^2 = p^{2m} (r^2 + rs + s^2)$, így $v_p(a^2 + ab + b^2) \neq \min(v_p(a^2), v_p(b^2))$ esetén $p \mid r^2 + rs + s^2$. Tudjuk, hogy rs nem osztható p -vel. Adott r , p -vel nem osztható számra $r^2 + rs + s^2$ legfeljebb két különböző, r -től szükségszerűen különböző (redukált) s maradékosztályra osztható p -vel (a fokszámtétel alapján).

Ugyanakkor a mod p redukált maradékosztályokból mindegyik legfeljebb két másikat zár ki $v_p(a^2 + ab + b^2) = \min(v_p(a^2), v_p(b^2))$ érdekében, így a mod p redukált maradékosztályok mohó algoritmussal három részre oszthatók úgy, hogy bármelyik osztályon belüli maradékosztályok két számára, r -re és s -re $p \mid r^2 + rs + s^2$ nem lehetséges.

Ha adott $3l + 1$ pozitív egész szám és egy $p \neq 3$ prímszám, előbbieket p őket osztó legnagyobb hatványával leosztva a kapott számok közül $l + 1$ előbbi három rész közül ugyanabba esnek. Az ezekhez tartozó eredeti számok közül bármely $a \neq b$ párra $v_p(a^2 + ab + b^2) = \min(v_p(a^2), v_p(b^2))$.

Ezt felhasználva ha a $3^k + 1$ elemű $\mathcal{A}$ -ra $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2)) < k + 2$ teljesülne, a 3-n kívül legfeljebb k prímszám osztó szerepelne. Legyenek $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ 3-tól különböző prímosztói $p_1, p_2, \dots, p_z$, ahol $z \leq k$. Ekkor p_1 -re $3^{k-1} + 1$ számot $\mathcal{A}$ -ból megtartva olyan részhalmazt kaphatunk, ahol bármely $a \neq b$ párra $v_{p_1}(a^2 + ab + b^2) = \min(v_{p_1}(a^2), v_{p_1}(b^2))$. Ezután p_2 -re $3^{k-2} + 1$ számot $\mathcal{A}$ $3^{k-1} + 1$ méretű részhalmazából megtartva olyan részhalmazt kaphatunk, ahol bármely $a \neq b$ párra $v_{p_2}(a^2 + ab + b^2) = \min(v_{p_2}(a^2), v_{p_2}(b^2))$, és a $v_{p_1}(a^2 + ab + b^2) = \min(v_{p_1}(a^2), v_{p_1}(b^2))$ egyenlőség is megmarad. Mindig a megmaradt számokra ezt még a többi prímre ismételve maradna legalább $3^0 + 1 = 2$ szám $\mathcal{A}$ -ból, ahol csak a $q = 3$ prímszámra lehetséges, hogy $a \neq b$ elemekre $v_q(a^2 + ab + b^2) > \min(v_q(a^2), v_q(b^2))$. Ugyanakkor ezek közül két megmaradt c és d számra, ahol $c < d$, $c^2 + cd + d^2 > 3c^2$, így $v_3(c^2) + 2 \leq v_3(c^2 + cd + d^2)$. Utóbbi csak $v_3(c) = v_3(d)$ esetén lehetséges, más esetben $v_3(c^2 + cd + d^2) = \min(v_3(c^2), v_3(d^2))$ teljesülne. Legyen $t = v_3(c) = v_3(d)$, $u = \frac{c}{3^t}$ és $w = \frac{d}{3^t}$, ekkor

$$a^2 + ab + b^2 = 3^{2t} (u^2 + uw + w^2).$$

Itt $9 \mid u^2 + uw + w^2$ teljesül $v_3(u^2) + 2 \leq v_3(u^2 + uw + w^2)$ miatt, de sem u , sem w nem

osztható 3-mal. $3 \mid (u - w)^2$ miatt $3 \mid u - w$, de $u = w + 3x$ esetén ha

$$9 \mid (w + 3x)^2 + (w + 3x)w + w^2 = 3w^2 + 9(xw + x^2),$$

$3 \mid w$, ami ellentmondás. A tételt bebizonyítottuk. ■

4.2. Kis esetek

Ebben a részben Python nyelvű programmal elért alsó becsléseket adunk adott kis méretű pozitív egész számokból álló $\mathcal{A}$ halmazok mellett $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ -re. A halmazok mérete 3 és 8 közé esik és ezen méretek mellett az összes esetet megvizsgáltuk programmal, ahol a legnagyobb szám egy-egy korlátot nem lép túl. Ha egy halmaz összes elemének van közös osztója, azzal leosztva az elemeket olyan ugyanakkora halmazt kapunk, melyre $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ nem nagyobb. Ezért a programmal kapott halmazokra azok közül, amelyekre $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ a minimális előforduló érték, az olyanokat listázzuk, ahol $\mathcal{A}$ elemeinek nincs 1-nél nagyobb közös osztója.

Az $|\mathcal{A}| = 3$ esetben programmal azon pozitív egész számokból álló háromelemű halmazokat végignézve, ahol az elemek egyike sem nagyobb 400-nál, $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ legkisebb előforduló értéke 3, és ez a halmaz elemeinek 1-nél nagyobb közös osztója nélkül 28668 esetben fordul elő. Ilyenek $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ vagy $\mathcal{A} = \{1, 2, 4\}$, de $\mathcal{A} = \{388, 395, 399\}$ is.

Ha $a < b < c$ pozitív egész számok, $\omega((a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(a^2 + ac + c^2)) \geq 2$, mert $(b^2 + bc + c^2)$ és $(a^2 + ac + c^2)$ nem lehetnek ugyanannak a prímszámnak hatványai.

$$c^2 < a^2 + ac + c^2 < b^2 + bc + c^2 < 3c^2$$

miatt csak a 2-nek lehetnének hatványai, de $b^2 + bc + c^2$ nem lehet 2-hatvány. Ugyanis

$$v_2(b^2 + bc + c^2) = \min(v_2(b^2), v_2(c^2))$$

akár $v_2(b) \neq v_2(c)$, akár $v_2(b) = v_2(c)$.

Sejtés. (Füredi E.) Ha $a < b < c$ pozitív egész számok, akkor

$$\omega((a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(a^2 + ac + c^2)) \geq 3.$$

Az $|\mathcal{A}| = 4$ esetben programmal azon pozitív egész számokból álló négyelemű halmazokat végignézzve, ahol az elemek egyike sem nagyobb 400-nál, $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ legkisebb előforduló értéke 4, és ez a halmaz elemeinek 1-nél nagyobb közös osztója nélkül öt esetben fordul elő, $\mathcal{A} = \{1, 2, 4, 8\}$, $\mathcal{A} = \{1, 3, 9, 18\}$, $\mathcal{A} = \{1, 3, 9, 27\}$, $\mathcal{A} = \{1, 4, 16, 22\}$ vagy $\mathcal{A} = \{1, 9, 15, 18\}$.

Az $|\mathcal{A}| = 5$ esetben programmal azon pozitív egész számokból álló ötelemű halmazokat végignézzve, ahol az elemek egyike sem nagyobb 200-nál, $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ legkisebb előforduló értéke 5, és ez a halmaz elemeinek 1-nél nagyobb közös osztója nélkül két esetben fordul elő, amikor $\mathcal{A} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ vagy $\mathcal{A} = \{1, 3, 9, 27, 81\}$.

Az $|\mathcal{A}| = 6$ esetben programmal azon pozitív egész számokból álló hatelemű halmazokat végignézzve, ahol az elemek egyike sem nagyobb 200-nál, $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ legkisebb előforduló értéke 6, és ez a halmaz elemeinek 1-nél nagyobb közös osztója nélkül csak az $\mathcal{A} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ esetben fordul elő.

Hasonlóan az $|\mathcal{A}| = 7$ esetben programmal azon pozitív egész számokból álló hételemű halmazokat végignézzve, ahol az elemek egyike sem nagyobb 150-nél, $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ legkisebb előforduló értéke 7, és ez a halmaz elemeinek 1-nél nagyobb közös osztója nélkül csak az $\mathcal{A} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ esetben fordul elő.

Végül az $|\mathcal{A}| = 8$ esetben programmal azon pozitív egész számokból álló nyolcelemű halmazokat végignézzve, ahol az elemek egyike sem nagyobb 100-nál, $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ legkisebb előforduló értéke 9, és ez a halmaz elemeinek 1-nél nagyobb közös osztója nélkül csak három esetben fordul elő, $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$, $\mathcal{A} = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ és $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 36\}$.

Ily módon $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ adott méret melletti minimumára programmal felső korlátokat kaptunk a $4 \leq |\mathcal{A}| \leq 8$ esetekben is, ahol ehhez képest az alsó becslés 3.

5. Másodfokú szimmetrikus homogén polinomok

Ezen fejezetben elemi alsó becsléseket adunk az $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (f(a, b)))$ mennyiségre, ahol f másodfokú szimmetrikus homogén egész együtthatós polinom és $f(1, 1) > 0$, $f(1, 0) = f(0, 1) > 0$.

2. Tétel. (Füredi E.) Legyenek x és y egész számok, amelyekre teljesül, hogy $x > 0$, $2x + y > 0$, $\text{luko}(x, y) = 1$ és minden p prímszámra, melyre $p \mid 2x + y$ teljesül, $v_p(2x + y)$ páratlan. Ekkor bármely $\mathcal{A}$ pozitív egész számokból álló halmazra, amelyre $|\mathcal{A}| = 3^k + 1$ egy k nemnegatív egész számra, $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (xa^2 + yab + xb^2)) \geq k + 1$.

Bizonyítás:

Az $a \neq b$ pozitív egész számokra

$$xa^2 + yab + xb^2 = x(a - b)^2 + (2x + y)ab > (2x + y)ab > 0, \quad (3)$$

így az 1. lemma alapján létezik olyan p prímszám, amelyre $v_p(xa^2 + yab + xb^2) > v_p(2x + y) + v_p(ab)$.

Mivel $\text{luko}(x, y) = 1$ miatt $\text{luko}(x, 2x + y) = 1$ is teljesül, így bármely q prímszám x és $2x + y$ közül legfeljebb az egyiknek osztója. Így két esetet különböztetünk meg, amikor $q \mid x(2x + y)$.

I. eset: $q \mid 2x + y$

Ekkor $v_q(xa^2 + yab + xb^2) \leq v_q(2x + y) + v_q(ab)$. Ugyanis tegyük fel az ellenkezőjét, ekkor

$$v_q(xa^2 + yab + xb^2) > v_q(2x + y) + v_q(ab).$$

Ha van ilyen ellenpélda, feltehető, hogy a és b közül legalább egy nem osztható q -val, másmilyen ellenpéldát az a és b legnagyobb közös q -hatvány osztójával leosztva is ellenpéldát kapnánk. Ekkor $q \mid xa^2 + yab + xb^2$ és $q \nmid x$ miatt $q \nmid ab$ is teljesül. Ellenkező esetben q a és b közül pontosan egy számot osztana, $xa^2 + yab + xb^2$ két darab q -val osztható és egy darab q -val nem osztható szám összegeként q -val nem lenne osztható.

Tudjuk, hogy $v_q(2x + y) = 2h - 1$ valamely h pozitív egész számra, így

$$xa^2 + yab + xb^2 = (2x + y)ab + x(a - b)^2$$

miatt

$$v_q(xa^2 + yab + xb^2) > v_q(2x + y) + v_q(ab) = v_q((2x + y)ab)$$

esetén

$$v_q((2x + y)ab) = v_q(x(a - b)^2) \quad (4)$$

teljesülne. Ugyanakkor $q \nmid ab$ esetén (4) bal oldala páratlan, jobb oldala páros, ami ellentmondás. Így bebizonyítottuk, hogy $q \mid 2x + y$ esetén

$$v_q(xa^2 + yab + xb^2) \leq v_q(2x + y) + v_q(ab).$$

II. eset: $q \mid x$

Ha $q \mid x$ prímszám, amennyiben $v_q(xa^2 + yab + xb^2) > v_q(ab) + v_q(2x + y)$ ($= v_q(yab)$) $q \nmid y$ és $q \nmid 2x + y$ miatt), akkor a 2. lemma miatt

$$v_q(xa^2 + xb^2) = v_q(yab) = v_q(ab), \quad (5)$$

így mivel $v_q(a) = v_q(b)$ ennek ellentmondana, $v_q(a) \neq v_q(b)$, ezért $v_q(xa^2) \neq v_q(xb^2)$ és

$$v_q(xa^2 + xb^2) = v_q(x) + 2 \min(v_q(a), v_q(b)).$$

Eszerint $v_q(x) + 2 \min(v_q(a), v_q(b)) = v_q(ab)$, így

$$v_q(ab) - 2 \min(v_q(a), v_q(b)) = |v_q(a) - v_q(b)| = v_q(x).$$

Tehát $q \mid x$ prímszámra $v_q(xa^2 + yab + xb^2) > v_q(ab) = v_q(yab)$ szükséges feltétele, hogy $|v_q(a) - v_q(b)| = v_q(x)$ teljesüljön.

Eszerint adott (x, y) pár mellett bármely $q \mid x$ prímszámra a pozitív egész számok két csoportba oszthatók, melyek közül tetszőlegesen azonosba tartozó a_1, b_1 számokra

$$v_q(xa_1^2 + ya_1b_1 + xb_1^2) \leq v_q(2x + y) + v_q(a_1b_1).$$

Elég annyit elkerülni, hogy $|v_q(a_1) - v_q(b_1)| = v_q(x)$, amihez bármely r pozitív egész számot $v_q(r) \equiv 0 \pmod{2v_q(x)}$, $v_q(r) \equiv 1 \pmod{2v_q(x)}$, $\dots$, $v_q(r) \equiv v_q(x) - 1 \pmod{2v_q(x)}$ esetén az egyik, míg $v_q(r) \equiv v_q(x) \pmod{2v_q(x)}$, $v_q(r) \equiv v_q(x) + 1 \pmod{2v_q(x)}$, $\dots$, $v_q(r) \equiv 2v_q(x) - 1 \pmod{2v_q(x)}$ esetén pedig a másik halmazba sorolunk.

Ha q prímszám és $q \nmid x(2x + y)$, akkor amennyiben

$$v_q(xa^2 + yab + xb^2) > v_q(ab) + v_q(2x + y) = v_q(ab),$$

$v_q(a) = v_q(b)$. Ugyanis különben

$$v_q(xa^2 + yab + xb^2) = 2 \min(v_q(a), v_q(b)) < v_q(ab).$$

Például $v_q(a) < v_q(b)$ esetén

$$v_q(a^2) = v_q(xa^2) < v_q(yab + xb^2),$$

így a 2. lemmát alkalmazva $v_q(xa^2 + yab + xb^2) = v_q(a^2)$.

Feltéve, hogy $v_q(xa^2 + yab + xb^2) > v_q(ab) + v_q(2x + y)$, legyen $v_q(a) = v_q(b) = l$, így megfelelő m, n (q -val nem osztható) pozitív egész számokra $a = q^l m$ és $b = q^l n$. Ekkor

$$v_q(xm^2 + ymn + xn^2) > v_q(mn) + v_q(2x + y) = 0,$$

így $q \mid xm^2 + ymn + xn^2$. Mod q vizsgálva az egyenletet $q \nmid x$ miatt adott m -re az n legfeljebb két különböző mod q maradékosztályba tartozhat a fokszámtétel miatt. Ugyanakkor $m \equiv n \pmod{q}$ nem lehetséges $q \nmid 2x + y$ miatt.

Adott (x, y) párra és $q \nmid x(2x + y)$ prímszámra a pozitív egész számok három halmazba sorolhatók úgy, hogy egy halmazon belüli a_2, b_2 számokra $v_q(xa_2^2 + ya_2b_2 + xb_2^2) \leq v_q(2x + y) + v_q(a_2b_2)$. Ugyanis bármely s pozitív egész számra $\frac{s}{q^{v_q(s)}} q - 1$ különböző redukált maradékosztályba eshet mod q . Ezen redukált maradékosztály szerint csoportosítjuk s -et. Bármely ilyen redukált maradékosztályra ha legfeljebb kettő, tőle különböző maradékosztály nincs vele egy halmazban, egy halmazon belüli a_2, b_2 számokra $v_q(xa_2^2 + ya_2b_2 + xb_2^2) \leq v_q(2x + y) + v_q(a_2b_2)$. Mohó algoritmussal a redukált maradékosztályokon sorra végigmenve három halmazba oszthatóak úgy, hogy minden redukált maradékosztályt más halmazba teszünk mint a két kerülendő másik redukált maradékosztály elemeit.

Ha $|\mathcal{A}| = 3^k + 1$ és $\mathcal{A}$ pozitív egész számokból áll, akkor $\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (xa^2 + yab + xb^2)$ -ből bármely tényezőre az 1. lemma szerint $xa^2 + yab + xb^2$ -nek van olyan u prímszám osztója, amelyre $v_u(xa^2 + yab + xb^2) > v_u(2x + y) + v_u(ab)$. Ekkor ezen u prímre $\mathcal{A}$ elemei három halmazba oszthatóak úgy, hogy egy halmazon belüli (c, d) párokra

$$v_u(xc^2 + ycd + xd^2) \leq v_u(2x + y) + v_u(cd).$$

Így $\mathcal{A}$ -nak létezik olyan $3^{k-1} + 1$ elemű $\mathcal{A}_1$ részhalmaza, amelyben $c, d \in \mathcal{A}_1, c \neq d$ esetén

$xc^2 + ycd + xd^2$ -nek van olyan w prímosztója, amely u -tól különbözik és $v_w(xc^2 + ycd + xd^2) > v_w(2x + y) + v_w(cd)$. Ezen w prímszámra ismételjük azt, amit u -val csináltunk. Kiválasztható egy $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ halmaz, amelyre $|\mathcal{A}_2| = 3^{k-2} + 1$ és bármely $c, d \in \mathcal{A}_2$, $c \neq d$ esetén $xc^2 + ycd + xd^2$ -nek van olyan z prímosztója, amely nem lehet w vagy u , emellett

$$v_z(xc^2 + ycd + xd^2) > v_z(2x + y) + v_z(cd),$$

mert

$$v_w(xc^2 + ycd + xd^2) \leq v_w(2x + y) + v_w(cd),$$

w -re is három halmazba oszthatóak a pozitív egész számok és $\mathcal{A}_1$ is úgy, hogy egy halmazon belül ez fennáll, az $\mathcal{A}_1$ -et három részre osztva kapott legnagyobból kiválasztunk $3^{k-2} + 1$ elemet $\mathcal{A}_2$ -nek.

Így sorra új prímszám osztókat találunk, miközben a halmaz mérete majdnem megharmadódik, i darab $\prod_{a,b \in \mathcal{A}}(xa^2 + yab + xb^2)$ -t osztó különböző prímszám, $p_1, p_2, \dots, p_i$ megtalálása után van olyan $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ halmaz, amelyre $|\mathcal{A}_i| = 3^{k-i} + 1$ és $c, d \in \mathcal{A}_i$, $c \neq d$ esetén $xc^2 + ycd + xd^2$ -nek van olyan q prímosztója, amely nem lehet az addigi i egyike sem, melyre $v_q(xc^2 + ycd + xd^2) > v_q(2x + y) + v_q(cd)$. Ezzel a módszerrel összesen $k + 1$ prímszámot is kapunk, így a tételt bebizonyítottuk. ■

3. Tétel. (Füredi E.) Legyen x pozitív egész szám és y egész szám, amelyre $2x + y > 0$. Ekkor bármely $\mathcal{A}$ pozitív egész számokból álló halmazra, amelyre $|\mathcal{A}| = 3^k(2x + y) + 1$ egy k nemnegatív egész számra, teljesül, hogy $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b}(xa^2 + yab + xb^2)) \geq k + 1$.

Bizonyítás:

Feltehetjük, hogy $\text{luko}(x, y) = 1$, különben (x, y) -t $(\frac{x}{\text{luko}(x, y)}, \frac{y}{\text{luko}(x, y)})$ -ra cserélve nem nőhet $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b}(xa^2 + yab + xb^2))$.

Ekkor bármely p prímszám x és $2x + y$ közül legfeljebb egyet oszt. $a \neq b$ pozitív egész számokra $xa^2 + yab + xb^2 > (2x + y)ab$, így az 1. lemma alapján létezik olyan q prímszám, amelyre

$$v_q(xa^2 + yab + xb^2) > v_q(2x + y) + v_q(ab).$$

Az előző tétel bizonyítása alapján ekkor ha egy p prímszámra $p \nmid x(2x + y)$ vagy $p \mid x$, a

pozitív egész számok három halmazra particionálhatóak, amelyeken belüli $c \neq d$ számokra $v_p(xc^2 + ycd + xd^2) \leq v_p(2x + y) + v_p(cd)$. Ha $p \mid 2x + y$ és $v_p(2x + y)$ páratlan, akkor tetszőleges $c \neq d$ pozitív egész számokra $v_p(xc^2 + ycd + xd^2) \leq v_p(2x + y) + v_p(cd)$ teljesül.

Nézzük azon esetet, amikor $v_p(2x + y) = 2m$ egy m pozitív egész számra. Ekkor ha $c \neq d$ pozitív egész számokra $v_p(xc^2 + ycd + xd^2) > v_p(2x + y) + v_p(cd)$, akkor $v_p(c) = v_p(d)$, egyéb esetben

$$v_p(xc^2 + ycd + xd^2) = 2 \min(v_p(c), v_p(d)) < v_p(cd).$$

Legyen $v_p(c) = v_p(d) = f$, ekkor $c = p^f g$ és $d = p^f h$, p -vel nem osztható g és h pozitív egész számokkal. Így

$$v_p(xg^2 + ygh + xh^2) > v_p(2x + y) + v_p(gh) = v_p(2x + y) = 2m.$$

$$xg^2 + ygh + xh^2 = (2x + y)gh + x(g - h)^2$$

és $v_p((2x + y)gh) = 2m$ miatt ekkor $v_p(x(g - h)^2) = 2m$. Így $g \equiv h \pmod{p^m}$, de $p^{m+1} \nmid g - h$.

Ekkor $p^{m+1} - p^m$ (vagyis p^{2m} -nél kevesebb) halmazba oszthatók a pozitív egész számok úgy, hogy bármelyiken belüli s számokra az $\frac{s}{p^{v_p(s)}}$ számok mod p^{m+1} ugyanazon redukált maradékosztályba tartoznak, különböző halmazok számaira különbözőkbe. $2x + y$ összes q prímosztójára, amelyre $v_q(2x + y)$ páros, ezt megcsinálva összesen aszerint halmazokat készítve, hogy az egy halmazba eső számok minden ilyen q prímnél a hozzá tartozó beosztásnál egy halmazban vannak, kevesebb mint $2x + y$ halmazt kapunk. Ugyanis $v_p(2x + y) = 2m$ esetén $p^{m+1} - p^m$ -szereződik p alapján a halmazok száma. Bármely ilyen halmazra $c \neq d$ elemeire $v_p(xc^2 + ycd + xd^2) > v_p(2x + y) + v_p(cd)$ csak $p \nmid 2x + y$ prímszám esetén lehetséges. Skatulyaelv alapján van olyan ezek közt, amelyeknek $\mathcal{A}$ -val a metszete legalább $3^k + 1$ elemű. Legyen ezen metszetben egy $3^k + 1$ elemű részhalmaz $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ -re már csak olyan p prímek lehetnek $c, d \in \mathcal{B}$ -re $c \neq d$ esetén $v_p(xc^2 + ycd + xd^2) > v_p(2x + y) + v_p(cd)$ -t teljesítő, amelyekre $v_p(2x + y) = 0$. Innen a befejezés hasonló az előző tételéhez, amit ott $\mathcal{A}$ -ra tettünk prímosztónként harmadolva a halmazt, itt $\mathcal{B}$ -re. Tegyük fel, hogy valamely p prímszám és $3^\ell + 1$ elemű (ℓ pozitív egész szám) pozitív egész számokból álló $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ halmaz, $c, d \in \mathcal{C}$, $c \neq d$ esetén $v_p(xc^2 + ycd + xd^2) > v_p(2x + y) + v_p(cd)$, ilyen p prímszám minden $c, d \in \mathcal{C}$ -re létezik. Ekkor $\mathcal{C}$ elemei három diszjunkt halmazba oszthatóak,

amelyekre bármelyik $\mathcal{D}$ -n belül nincs f és g , amelyekre $f, g \in \mathcal{D}$, $f \neq g$, $v_p(xf^2 + yfg + xg^2) > v_p(2x + y) + v_p(fg)$. Így létezik ilyen $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ halmaz, amelyre $|\mathcal{D}| = 3^{\ell-1} + 1$, $f, g \in \mathcal{D}$, $f \neq g$, $v_p(xf^2 + yfg + xg^2) > v_p(2x + y) + v_p(fg)$ esetén a p prímnek az addigi kiválasztott prímosztóktól ($k - l + 1$ darabtól) különbözőnek kell lennie.

Az eljárást k -szor elismételve $\prod_{a,b \in \mathcal{B}} (xa^2 + yab + xb^2)$ k különböző prímosztóját kapjuk és $\mathcal{B}$ két elemét, r -et és s -et, amelyre bármely q prímszám, amelyre

$$v_q(xr^2 + yrs + xs^2) > v_q(2x + y) + v_q(rs),$$

az addigi k prímosztótól eltér. Ilyen q prímszám létezik, ő egy $(k + 1)$. prímosztó. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

6. Magasabb fokú homogén polinomok

Ebben a fejezetben magasabb fokú homogén polinomokra adunk speciális esetben egy elemi becslést. Sajnos nem lehetnek az együtthatók közt pozitív és negatív egész számok is.

4. Tétel. (Füredi E.) Legyen $n > 2$ pozitív egész szám, $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ nemnegatív egész számok és $2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i = M$. Ha az $\mathcal{A}$ halmaz pozitív egész számokat tartalmaz és $|\mathcal{A}| = M^2(n+1)^k + 1$ egy k nemnegatív egész számra, akkor

$$\omega\left(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n)\right) \geq k + 1.$$

Bizonyítás:

Ha $a \neq b$ pozitív egész számok,

$$a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n > \left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) \min(a^n, b^n).$$

Így létezik olyan p prímszám, amelyre

$$v_p(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) > v_p\left(\left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) \min(a^n, b^n)\right) =$$

$$v_p\left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + v_p(\min(a^n, b^n)) \geq v_p\left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + \min(v_p(a^n), v_p(b^n)).$$

Eszerint

$$v_p(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) > v_p\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_p(a^n), v_p(b^n)). \quad (6)$$

Először nézzük azon esetet, amikor $p \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2$ és

$$v_p(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) > v_p\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_p(a^n), v_p(b^n)).$$

Ekkor $v_p(a) = v_p(b)$, ugyanis $v_p(a) \neq v_p(b)$ esetén

$$v_p(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) = \min(v_p(a^n), v_p(b^n))$$

teljesülne, hiszen pl. $v_p(a) < v_p(b)$ esetén

$$v_p(a^n) = nv_p(a) < (n-1)v_p(a) + v_p(b) \leq v_p(x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n),$$

a jobb oldal tagonként is osztható $p^{v_p(a^{n-1}b)}$ -vel.

Legyen $v_p(a) = v_p(b) = F$ és $r = \frac{a}{p^F}$, míg $s = \frac{b}{p^F}$. r és s p -vel nem osztható pozitív egész számok. Mivel

$$v_p(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) > v_p\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_p(a^n), v_p(b^n)),$$

mindkét oldalt nF -fel csökkentve

$$v_p(r^n + x_{n-1}r^{n-1}s + x_{n-2}r^{n-2}s^2 + \dots + x_1rs^{n-1} + s^n) >$$

$$v_p\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_p(r^n), v_p(s^n)) = v_p\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right).$$

Legyen $v_p(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2) = h$, ekkor

$$v_p(r^n + x_{n-1}r^{n-1}s + x_{n-2}r^{n-2}s^2 + \dots + x_1rs^{n-1} + s^n) > h.$$

Ez $r \equiv s \pmod{p^{h+1}}$ esetén nem lehetséges. Ugyanis ekkor

$$r^n + x_{n-1}r^{n-1}s + x_{n-2}r^{n-2}s^2 + \dots + x_1rs^{n-1} + s^n \equiv r^n + x_{n-1}r^n + x_{n-2}r^n + \dots + x_1r^n + r^n$$

$(\text{mod } p^{h+1})$, így

$$r^n + x_{n-1}r^{n-1}s + x_{n-2}r^{n-2}s^2 + \dots + x_1rs^{n-1} + s^n \equiv r^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2 \right) \pmod{p^{h+1}}.$$

Ezek szerint $p \nmid r$ miatt

$$p^{h+1} \nmid r^n + x_{n-1}r^{n-1}s + x_{n-2}r^{n-2}s^2 + \dots + x_1rs^{n-1} + s^n.$$

Így ha egy p prímszámra $v_p(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2) = h > 0$, akkor a pozitív egész számokat $p^{h+1} - p^h$ halmazba oszthatjuk úgy, hogy ezekből bármelyik $\mathcal{B}$ halmazra $a \neq b, a, b \in \mathcal{B}$ esetén

$$v_p(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) \leq v_p\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_p(a^n), v_p(b^n)).$$

Ugyanis bármely t pozitív egész számra legyen $f(t) \frac{t}{p^{v_p(t)}}$ redukált maradékosztálya $\text{mod } p^{h+1}$, $\varphi(p^{h+1}) = p^{h+1} - p^h$ ilyen redukált maradékosztály létezik. t_1 és t_2 pontosan akkor kerüljön ugyanazon halmazba, ha $f(t_1) = f(t_2)$. Erre az $f(a) = f(b)$ esetre már bebizonyítottuk, hogy

$$v_p(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) \leq v_p\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_p(a^n), v_p(b^n)).$$

Itt $p^{h+1} - p^h < p^{2h}$, de $h = 1$ -re viszonylag közel esnek egymáshoz.

Ezen módon $\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2 = M$ összes p prímosztójára különböző halmazokba particionáljuk a pozitív egész számokat, egy p prímre kevesebb mint $p^{2v_p(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2)} = p^{v_p(M^2)}$ darabba. Összességében ha azon pozitív egész számokat tesszük ugyanazon halmazba, amelyek minden $p \mid M$ esetén készített beosztásra ugyanazon halmazban voltak, legfeljebb (és a kínai maradéktétel következményeként pontosan) $\prod_{p \mid M} (p^{v_p(M)+1} - p^{v_p(M)})$ halmazra particionáljuk a pozitív egész számokat, ez kevesebb, mint $\prod_{p \mid M} (p^{2v_p(M)}) = M^2$. Így M^2 -nél kevesebb olyan halmazba oszthatóak a pozitív egész számok, amelyek közül bármelyik $\mathcal{C}$ halmazra $a, b \in \mathcal{C}$, $a \neq b$ esetén

$$v_p(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) \leq v_p\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_p(a^n), v_p(b^n))$$

minden $p \mid M$ prímszámra. Ezek metszeteit véve $\mathcal{A}$ -val skatulyaelvből a legnagyobb kapott

halmaz egy megfelelő méretű részhalmazát kiválasztva létezik olyan $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{A}$ halmaz, amelyre $|\mathcal{D}_0| = (n+1)^k + 1$ és $a, b \in \mathcal{D}_0, a \neq b$ esetén

$$v_p(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) \leq v_p\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_p(a^n), v_p(b^n))$$

minden $p \mid M$ prímszámra.

Így minden $a, b \in \mathcal{D}_0, a \neq b$ esetén létezik olyan $q \nmid \sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2$ prímszám, amelyre

$$v_q(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) > v_q\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_q(a^n), v_q(b^n)).$$

Ebből $v_q(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) > \min(v_q(a^n), v_q(b^n))$. Így $v_q(a) = v_q(b)$, ellenkező esetben

$$v_q(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) = \min(v_q(a^n), v_q(b^n))$$

lenne, ahogy már láttuk. Legyen $R = \frac{a}{q^{v_q(a)}}$ és $S = \frac{b}{q^{v_q(b)}}$, R és S q -val nem osztható pozitív egész számok. Ekkor

$$v_q(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) > \min(v_q(a^n), v_q(b^n))$$

miatt mindkét oldalt $nv_q(a) = nv_q(b)$ -vel csökkentve

$$v_q(R^n + x_{n-1}R^{n-1}S + x_{n-2}R^{n-2}S^2 + \dots + x_1RS^{n-1} + S^n) > \min(v_q(R^n), v_q(S^n)) = 0.$$

Így

$$q \mid R^n + x_{n-1}R^{n-1}S + x_{n-2}R^{n-2}S^2 + \dots + x_1RS^{n-1} + S^n.$$

Adott R mellett a fokszámtétel miatt S legfeljebb n különböző mod q maradékosztályból kerülhet ki (mod q legfeljebb n különböző gyök van), ezek R -étől különböznek, mert $q \nmid R^n (\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2)$, ha $q \nmid R$.

Így a mod q redukált maradékosztályok mohó algoritmussal legfeljebb $n+1$ halmazba oszthatóak úgy, hogy ezek közül bármely $\mathcal{E}$ halmazra $R, S \in \mathcal{E}$ esetén

$$q \nmid R^n + x_{n-1}R^{n-1}S + x_{n-2}R^{n-2}S^2 + \dots + x_1RS^{n-1} + S^n.$$

Az algoritmus során végigmegyünk a redukált maradékosztályokon és mindet az általuk "kizárt" legfeljebb n addigi maradékosztályétól különböző halmazba tehetjük.

Eszerint bármely $q \nmid \sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2$ prímszámra a pozitív egész számokat legfeljebb $n + 1$ halmazba oszthatjuk (particionálhatjuk) úgy, hogy ezekből bármely $\mathcal{E}$ halmazra $a, b \in \mathcal{E}$ esetén

$$v_q(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) \leq v_q\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_q(a^n), v_q(b^n)).$$

Ugyanis bármely t pozitív egész számot $\frac{t}{q^{v_q(t)}}$ mod q maradékosztályának előbbi legfeljebb $n + 1$ halmazba beosztásának megfelelően osztunk be, t -vel azonos halmazba azon z pozitív egész számok kerülnek, amelyekre $\frac{t}{q^{v_q(t)}}$ mod q redukált maradékosztályával azonos halmazba került az előző beosztásban $\frac{z}{q^{v_q(z)}}$ mod q redukált maradékosztálya.

Kiindulunk a $\mathcal{D}_0$ halmazból. (6) alapján $\prod_{a,b \in \mathcal{D}_0, a \neq b} (a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n)$ bármely szorzótényezőjének létezik olyan q_0 prímosztója, amelyre

$$v_{q_0}(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) > v_{q_0}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_{q_0}(a^n), v_{q_0}(b^n)),$$

q_0 nem lehet $\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2$ osztója. Ezen q_0 -ra a pozitív egész számok halmaza, így $\mathcal{D}_0$ is legfeljebb $n + 1$ diszjunkt halmazba particionálhatóak úgy, hogy ezekből bármely $\mathcal{F}$ halmazra $c, d \in \mathcal{F}, c \neq d$ esetén

$$v_{q_0}(c^n + x_{n-1}c^{n-1}d + x_{n-2}c^{n-2}d^2 + \dots + x_1cd^{n-1} + d^n) \leq v_{q_0}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_{q_0}(c^n), v_{q_0}(d^n)).$$

Így skatulyaelvből van ilyen $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_0$ is, amelyre $|\mathcal{D}_1| = (n + 1)^{k-1} + 1$ és $c, d \in \mathcal{D}_1, c \neq d$ esetén

$$v_{q_0}(c^n + x_{n-1}c^{n-1}d + x_{n-2}c^{n-2}d^2 + \dots + x_1cd^{n-1} + d^n) \leq v_{q_0}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_{q_0}(c^n), v_{q_0}(d^n)).$$

Ezt ismételjük sorra $m = 2, \dots, k - 1, k$ mellett, kiindulunk a $\mathcal{D}_{m-1} \subset \mathcal{D}_0$ halmazból, amelyre $\mathcal{D}_{m-1} = (n + 1)^{k-m+1} + 1$ és ha egy q prímszámra $q = q_0, q = q_1, \dots, q = q_{m-2}$ vagy

$q \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2$, akkor bármely $a, b \in \mathcal{D}_{m-1}, a \neq b$ esetén

$$v_q(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) \leq v_q\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_q(a^n), v_q(b^n)).$$

Ekkor (6) szerint bármely $a, b \in \mathcal{D}_{m-1}, a \neq b$ esetén létezik olyan q_{m-1} prímszám, amelyre

$$q_{m-1} \mid a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n$$

és

$$v_{q_{m-1}}(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n) > v_{q_{m-1}}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_{q_{m-1}}(a^n), v_{q_{m-1}}(b^n)).$$

Ezen q_{m-1} -re a pozitív egész számok halmaza, így $\mathcal{D}_{m-1}$ is legfeljebb $n+1$ diszjunkt halmazba particionálhatóak úgy, hogy ezekből bármely $\mathcal{F}$ halmazra $c, d \in \mathcal{F}, c \neq d$ esetén

$$v_{q_{m-1}}(c^n + x_{n-1}c^{n-1}d + x_{n-2}c^{n-2}d^2 + \dots + x_1cd^{n-1} + d^n) \leq v_{q_{m-1}}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_{q_{m-1}}(c^n), v_{q_{m-1}}(d^n)).$$

Így van ilyen $\mathcal{D}_m \subset \mathcal{D}_{m-1} \subset \mathcal{D}_0$ is, amelyre $\mathcal{D}_m = (n+1)^{k-m} + 1$ és $c, d \in \mathcal{D}_m, c \neq d$ esetén

$$v_{q_{m-1}}(c^n + x_{n-1}c^{n-1}d + x_{n-2}c^{n-2}d^2 + \dots + x_1cd^{n-1} + d^n) \leq v_{q_{m-1}}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_{q_{m-1}}(c^n), v_{q_{m-1}}(d^n)).$$

Végül eljutunk az $m = k$ esetben $\mathcal{D}_0$ két eleméhez, legyenek w_1 és w_2 . Létezik olyan q_k prímszám ((6) miatt), amelyre

$$v_{q_k}(w_1^n + x_{n-1}w_1^{n-1}w_2 + x_{n-2}w_1^{n-2}w_2^2 + \dots + x_1w_1w_2^{n-1} + w_2^n) > v_{q_k}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2\right) + \min(v_{q_k}(w_1^n), v_{q_k}(w_2^n))$$

és a konstrukció lépéseiből $q_k \nmid q_0q_1 \dots q_{k-1}$, $q_k \nmid \sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2$.

Ezzel megvan $\prod_{a,b \in \mathcal{D}_0, a \neq b} (a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n)$ és vele $\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n)$ $k+1$ különböző prímosztója, $q_0, q_1, \dots, q_k$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Hivatkozások

- [1] P. Erdős, C. L. Stewart és R. Tijdeman: Some diophantine equations with many solutions, *Compositio Mathematica* 66 (1988), 37-56
- [2] P. Erdős és P. Turán: On a problem in the elementary theory of numbers, *American Mathematical Monthly* 41 (1934), 608-611
- [3] J.-H. Evertse: On equations in S -units and the Thue-Mahler equation, *Inventiones mathematicae* 75 (1984), 561-584
- [4] J.-H. Evertse, K. Győry, C. L. Stewart és R. Tijdeman: S -unit equations and their applications, In: A. Baker, ed. *New Advances in Transcendence Theory*. Cambridge University Press (1988), 110-174
- [5] K. Győry, C. L. Stewart és R. Tijdeman: On prime factors of sums of integers I, *Compositio Mathematica* 59 (1986), 81-88
- [6] K. Győry, A. Sárközy és C. L. Stewart: On the number of prime factors of integers of the form $ab + 1$, *Acta Arithmetica* 74 (1996), 365-385

7. Függelék - Saját eredmények

Ebben a részben a kiírásnak megfelelően összesítem a saját eredményeket.

A vizsgált témában $\mathcal{A}$ pozitív egész számok véges halmaza, f homogén kétváltozós egész együtthatós polinom, és az $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} f(a, b))$ értékre, azaz az $f(a, b)$ alakú számok ($a, b \in \mathcal{A}, a \neq b$) különböző prímosztóinak darabszámára adtam alsó becslést $|\mathcal{A}|$ -től és f -től függően, $\log |\mathcal{A}|$ nagyságrendű alsó korlátokat bizonyítva egyes speciális esetekben.

- Bebizonyítottam (1. tétel), hogy pozitív egész számok $3^k + 1$ elemű $\mathcal{A}$ halmazára, ahol $k > 0$ egész szám, $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2)) \geq k + 2$.
- Azon esetekben amikor pozitív egész számok $\mathcal{A}$ halmazának mérete 3 és 8 közé esik, adott párszáz nagyságrendű korlátoknál nem nagyobb elemekből álló halmazok esetén Python nyelvű programmal megkerestem, hogy mennyi $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (a^2 + ab + b^2))$ minimuma, és mely $\mathcal{A}$ halmazokra annyi.
- Beláttam, hogyha az $f(a, b) = xa^2 + yab + xb^2$ homogén kétváltozós egész együtthatós polinomra ha $x > 0$ és $2x + y > 0$, akkor pozitív egész számok $3^k(2x + y) + 1$ elemű $\mathcal{A}$ halmazára, ahol $k \geq 0$ egész szám, $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (xa^2 + yab + xb^2)) \geq k + 1$ (3. tétel).
- Ha az $f(a, b) = xa^2 + yab + xb^2$ homogén kétváltozós egész együtthatós polinomra $x > 0$ és $2x + y > 0$ mellett teljesül, hogy minden p prímre $v_p(2x + y)$ páratlan vagy 0, továbbá $\ln ko(x, y) = 1$, akkor pozitív egész számok $3^k + 1$ elemű $\mathcal{A}$ halmazára, ahol $k \geq 0$ egész szám, $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} (xa^2 + yab + xb^2)) \geq k + 1$ (2. tétel).
Az 1-3. tételek egyre általánosabb polinomokra adnak egy picivel gyengülő, de $\log |\mathcal{A}|$ nagyságrendű alsó becsléseket $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} f(a, b))$ -re.
- Végül bizonyítottam, hogyha $n > 2$ egész szám, az $f(a, b) = a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \dots + x_1ab^{n-1} + b^n$ homogén kétváltozós egész együtthatós polinom együtthatói nemnegatívak és $\mathcal{A}$ pozitív egész számok $((\sum_{i=1}^{n-1} x_i) + 2)^2(n + 1)^k + 1$ méretű halmaza egy k nemnegatív egész számra, akkor $\omega(\prod_{a,b \in \mathcal{A}, a \neq b} f(a, b)) \geq k + 1$ (4. tétel).

A bizonyítások elemi kombinatorikai és számelméleti ötleteket használnak, a témakört elindító Erdős-Turán-tétel gondolatmenetét általánosítva.