

Cyclic ordering of split matroids

Own results

Áron Jánosik^a

Bence Mátravölgyi^b

Supervisor: Kristóf Bérczi^c

Our own results in the paper are the following.

- We formulated **Conjecture 3**, a strengthening of Gabow’s conjecture for matroids that are the union of k pairwise disjoint bases. This conjecture would also imply **Conjecture 2** proposed by Kajitani, Ueno and Miyano in the special case when the matroid is the union of k disjoint bases. Our conjecture is stronger in the sense that it also states that the elements of each basis form an interval in the cyclic ordering.
- We proved a stronger version of Conjecture 3 for split matroids, which also states that the bases form intervals in a given order.
- In particular, Conjecture 3 holds for sparse paving and paving matroids, which are conjectured to be almost all matroids asymptotically.
- Our proof gives an algorithm using a polynomial number of independence oracle calls to determine a proper cyclic ordering.
- In **Example 12**, we showed a counterexample to a possible approach of proving Conjecture 2, that would come from a reformulation of the theorem of Van den Heuvel and Thomassé.
- We defined cyclic exchange and the weight of a cyclic exchange for a k -tuple of bases as a possible generalization of symmetric exchange for basis pairs, and using them we proposed Conjectures 7 and 8 as generalizations of Conjectures 5 and 6 for k -tuples of bases instead of basis pairs.

^aMTA-ELTE Matroid Optimization Research Group, Department of Operations Research, Eötvös Loránd University, Budapest, Hungary. Email: aron@janosik.hu.

^bMTA-ELTE Matroid Optimization Research Group, Pázmány Péter sétány 1/C, H-1117, Budapest, Hungary and ETH Zurich, Rämistrasse 101, 8092, Zürich, Switzerland. Email: bmatravoelgy@student.ethz.ch.

^cMTA-ELTE Matroid Optimization Research Group and HUN-REN-ELTE Egerváry Research Group, Department of Operations Research, Eötvös Loránd University, Budapest, Hungary. Email: kristof.berczi@ttk.elte.hu.

Split matroidok ciklikus sorbarendezése

Összefoglaló

Jánosik Áron^a

Mátravölgyi Bence^b

Témavezető: Bérczi Kristóf^c

1 Bevezetés

A dolgozat Bérczi Kristóf, Jánosik Áron és Mátravölgyi Bence azonos című cikke alapján készült.

Egy matroidot jelöljük $M = (S, \mathcal{B})$ -vel, ahol S egy véges alaphalmaz, és $\mathcal{B}$ pedig a bázisok halmaza, amely eleget tesz a bázisaxiómáknak: (B1) $\emptyset \in \mathcal{B}$, és (B2) bármely $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ -re és $e \in B_1 - B_2$ -hez létezik $f \in B_2 - B_1$ úgy, hogy $B_1 - e + f \in \mathcal{B}$. A (B2) tulajdonságot báziskicserélési axiómának nevezzük, amely a matroidelmélet egyik alapvető összefüggése.

Egy $M = (S, \mathcal{B})$ matroidot, melyre $|S| = n$ és a rangja r , ciklikusan sorbarendezhetőnek nevezünk, ha előáll $S = (s_1, \dots, s_n)$ alakban úgy, hogy $\{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+r-1}\} \in \mathcal{B}$ minden $i \in [n]$ -re, ahol az indexeket modulo n értjük.

Sejtés 1 (Gabow). *Legyen $M = (S, \mathcal{B})$ egy matroid és $S = B_1 \cup B_2$ legyen az alaphalmaz két diszjunkt bázisra történő partíciója. Ekkor M ciklikusan sorbarendezhető úgy, hogy B_1 és B_2 elemei ciklikus intervallumokat alkotnak.*

Kajitani, Ueno, és Miyano sejtése egy teljes karakterizációt adna meg a ciklikusan sorbarendezhető matroidokról. Egy $M = (S, \mathcal{B})$ matroidot, melynek rangfüggvénye r_M , *egyenletesen sűrűnek* nevezünk, ha $|S| \cdot r_M(X) \geq r_M(S) \cdot |X|$ fennáll minden $X \subseteq S$ -re. Ha egy matroid ciklikusan sorbarendezhető, akkor kettős leszámolással igazolható, hogy egyenletesen sűrű. A sejtés ennek a megfordítására vonatkozik.

Sejtés 2 (Kajitani, Ueno, és Miyano). *Egy matroid pontosan akkor ciklikusan sorbarendezhető, ha egyenletesen sűrű.*

Van den Heuvel és Thomassé belátta a sejtést abban az esetben, ha $|S|$ és $r(S)$ relatív prímek, és Bonin megmutatta, hogy ritka nagykorú (sparse paving) matroidokra is fennáll a sejtés.

A Gabow-sejtést az alábbi módon lehet erősíteni a ciklikus sorbarendezhetőséghez hasonló állítással.

Sejtés 3. *Legyen $M = (S, \mathcal{B})$ egy matroid és $S = B_1 \cup \dots \cup B_k$ az alaphalmaz partíciója k páronként diszjunkt bázisra. Ekkor M ciklikusan sorbarendezhető úgy, hogy B_i elemei egy-egy intervallumot alkot minden $i \in [k]$ -ra.*

^aMTA-ELTE Matroid Optimization Research Group, Department of Operations Research, Eötvös Loránd University, Budapest, Hungary. Email: aron@janosik.hu.

^bMTA-ELTE Matroid Optimization Research Group, Pázmány Péter sétány 1/C, H-1117, Budapest, Hungary and ETH Zurich, Rämistrasse 101, 8092, Zürich, Switzerland. Email: matravolgyi@student.ethz.ch.

^cMTA-ELTE Matroid Optimization Research Group and HUN-REN-ELTE Egerváry Research Group, Department of Operations Research, Eötvös Loránd University, Budapest, Hungary. Email: kristof.berczi@ttk.elte.hu.

Tétel 1. *Sejtés 3 fennáll split matroidokra.*

A bizonyításunk algoritmikus, azaz megad egy eljárást, amellyel megkapunk egy ciklikus sorbarendezést a függetlenségi orákulum polinom sokszori használatával.

Megjegyzés 2. Valójában egy kicsit erősebb állítást bizonyítunk: a kapott ciklikus sorrendben a $B_1, \dots, B_k$ bázisok által alkotott intervallumok ilyen sorrendben helyezkednek el.

2 Split matroidok

Legyen S egy legalább r nagyságú alaphalmaz, $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$ egy (akár üres) részhalmazcsaládja S -nek, és $r, r_1, \dots, r_q$ nemnegatív egész számok, melyekre fennáll, hogy:

$$(H1) \quad |H_i \cap H_j| \leq r_i + r_j - r \text{ minden különböző } i, j \in [q]\text{-ra,}$$

$$(H2) \quad |S - H_i| + r_i \geq r \text{ minden } i \in [q]\text{-ra.}$$

Akkor az ehhez tartozó $M = (S, \mathcal{B})$ *elemi split matroid* bázisait a következő alakban adhatjuk meg: $\mathcal{B} = \{X \subseteq S \mid |X| = r, |X \cap H_i| \leq r_i \text{ minden } i \in [q]\text{-ra}\}$. Könnyen látható, hogy a hipergráf megválasztható az alábbi módon is:

$$(H3) \quad r_i \leq r - 1 \text{ minden } i \in [q]\text{-ra,}$$

$$(H4) \quad |H_i| \geq r_i + 1 \text{ for } i \in [q]\text{-ra.}$$

A reprezentáció *nem-redundáns* ha (H1)–(H4) mindegyike teljesül. Egy $F \subseteq S$ halmaz *pontos* H_i -re, ha $|F \cap H_i| = r_i$. Végül, egy *split matroid* pedig egy elemi split matroid és néhány (akár 0 db) uniform matroid direkt összege.

Lemma 3 (Bérczi, Király, Schwarcz, Yamaguchi és Yokoi). *Legyen M egy r rangú elemi split matroid egy $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$ és $r, r_1, \dots, r_q$ nem-redundáns reprezentációval. Legyen F egy r méretű halmaz.*

(a) *Ha F pontos H_i -re valamely $i \in [q]$ indexre, akkor F bázis M -ben.*

(b) *Ha F pontos H_i -re és H_j -re is valamely különböző $i, j \in [q]$ indexekre, akkor $H_i \cap H_j \subseteq F \subseteq H_i \cup H_j$.*

A Lemma 3(a) alapján bármely r méretű halmaz, amely pontos valamely hiperélre nézve, a matroid egy bázisa. Ez a megfigyelés a bizonyításunk egyik alapvető eleme.

3 Tétel 1 bizonyítása

Először belátható, hogy elég elemi split matroidokra igazolni a sejtést, így a továbbiakban csak ezzel foglalkozunk. Az algoritmus alapötlete a következő. A bázisok rendezését egyszerre építjük fel, lépésenként. A j . lépés kezdetén már minden bázis első $(j-1)$ eleme rendezve van, és az a cél, hogy mindehová találjunk megfelelő j . elemet. Az i . bázis első $(j-1)$ elemét, amiket már berendeztünk, jelöljük $(b_1^i, \dots, b_{j-1}^i)$ -vel. A B_i -ben még nem rendezett elemeket *maradék elemeknek* nevezzük, és a halmazukat jelölje C_i , azaz $C_i = B_i - \{b_1^i, \dots, b_{j-1}^i\}$. A cél az, hogy válasszunk C_i -ből egy b_j^i elemet minden i -re úgy, hogy $(C_i - b_j^i) \cup (b_1^{i+1}, \dots, b_j^{i+1})$ bázist alkot minden $i \in [k]$ -ra, egy ilyen $(b_j^1, \dots, b_j^k)$ választást *megengedettnek* nevezzük. Kezdetben ez triviálisan teljesül. Ha az r . lépésig van megengedett választás, akkor megkapjuk a matroid egy ciklikus rendezését a berendezett bázisok egymás mellé írásával. Viszont ha nincs megengedett választás, akkor a már berendezett $(j-1)$ elem sorrendjét kissé módosítjuk, figyelembe véve a hiperéleket, hogy ahhoz a sorrendhez már találjunk megengedett választást.

4 További megjegyzések és nyitott kérdések

Tétel 4 (Van den Heuvel és Thomassé). *Legyen $M = (S, \mathcal{B})$ hurokmentes matroid $r: 2^S \rightarrow \mathbb{Z}_+$ rangfüggvénnyel és $|S| = n$, és jelölje g $r(S)$ és n legnagyobb közös osztóját. Ekkor pontosan akkor létezik olyan $S = G_1 \cup \dots \cup G_{n/g}$ partíció g méretű halmazokra úgy, hogy $\bigcup_{t=0}^{r(S)/g-1} G_{i+t}$ bázist alkot minden $i \in [n/g]$ -re, ha $r(S) \cdot |X| \leq n \cdot r(X)$ minden $X \subseteq S$ -re.*

Ekkor már csak a g méretű halmazokat kellene jól berendezni ahhoz, hogy egy ciklikus sorbarendezést kapjunk. Viszont ez nem feltétlenül lehetséges az alábbi példa miatt.

Példa 5. Legyen $S = \{a_1, \dots, a_{10}\}$ és tekintsük a következő hiperélek által definiált ritka nagykorú matroidot: $\{a_1, a_2, a_3, a_{10}\}, \{a_1, a_2, a_4, a_9\}, \{a_1, a_3, a_4, a_5\}, \{a_2, a_3, a_4, a_6\}, \{a_3, a_5, a_6, a_7\}, \{a_4, a_5, a_6, a_8\}, \{a_5, a_7, a_8, a_9\}, \{a_6, a_7, a_8, a_{10}\}, \{a_1, a_7, a_9, a_{10}\}, \{a_2, a_8, a_9, a_{10}\}$, ahol $r = 4$. Ha $G_i = \{a_{2i-1}, a_{2i}\}$ minden $i \in [5]$ -re, akkor könnyen látható, hogy $G_i \cup G_{i+1}$ bázis lesz minden $i \in [5]$ -re.

Viszont a G_i halmazokban lévő elem párokat nem tudjuk megfelelően elrendezni ahhoz, hogy ciklikus rendezést kapjunk, mert minden G_i két hiperélben van benne, ami a szomszédos G_{i-1} és G_{i+1} halmazok 4-féle rendezési lehetőségéből 2-t kizár. Innen már könnyen látható, hogy nincs megfelelő rendezés.

További sejtések, és ciklikus cserékkel történő általánosításai:

Legyen $(B_1, \dots, B_k)$ egy k bázisból álló sorozat az M matroidban, és tegyük fel, hogy létezik $e \in B_i$, $f \in B_j$ valamely $1 \leq i < j \leq k$ -ra úgy, hogy $B_i - e + f$ és $B_j - f + e$ is bázis. Ekkor a $(B_1, \dots, B_{i-1}, B_i - e + f, B_{i+1}, \dots, B_{j-1}, B_j - f + e, B_{j+1}, \dots, B_k)$ megkapható az eredeti bázis k -asból egy *szimmetrikus cserével*. Ennek megfelelően két bázis k -ast *ekvivalensnek* nevezünk, ha az egyik megkapható a másiktól szimmetrikus cserék egymásutánjával.

Az ekvivalencia egy triviális szükséges feltétele, hogy a két bázis k -as multiuniója megegyezzen, ekkor a két bázis k -ast kompatibilisnek nevezzük.

Sejtés 4 (White). *Két bázis k -as pontosan akkor ekvivalens, ha kompatibilis.*

Sejtés 5 (Hamidoune). *Legyen (B_1, B_2) és (B'_1, B'_2) kompatibilis bázispárok egy r rangú $M = (S, \mathcal{B})$ matroidban. Ekkor (B_1, B_2) -ből megkapható (B'_1, B'_2) legfeljebb r szimmetrikus csere egymásutánjával.*

Sejtés 6 (Bérczi, Mátravölgyi, Schwarcz). *Legyen (B_1, B_2) és (B'_1, B'_2) kompatibilis bázispárok egy r rangú $M = (S, \mathcal{B})$ matroidban, és legyen $w: S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Ekkor (B_1, B_2) -ből megkapható (B'_1, B'_2) legfeljebb $w(B_1)/2 + w(B_2)/2 = w(B'_1)/2 + w(B'_2)/2$ összsúlyú szimmetrikus cserével.*

Ezeket általánosítottuk bázispárok helyett bázis k -asokra, és szimmetrikus helyett ciklikus cserékre.

Legyen $(B_1, \dots, B_k)$ egy bázis k -as egy M matroidban, és tegyük fel, hogy léteznek $\{i_1, \dots, i_q\} \subseteq [k]$ különböző indexek és $e_j \in B_{i_j}$ elemek úgy, hogy $B_{i_j} - e_j + e_{j+1}$ bázist alkot minden $j \in [q]$ -ra. Ekkor a $(B'_1, \dots, B'_k)$ bázis k -as, ahol $B'_\ell = B_{i_j} - e_j + e_{j+1}$ ha $\ell = i_j$ valamely $j \in [q]$ -ra és $B'_\ell = B_\ell$ különben, megkapható az eredeti bázis k -asból egy *ciklikus cserével*.

Sejtés 7. *Legyenek $(B_1, \dots, B_k)$ és $(B'_1, \dots, B'_k)$ kompatibilis bázis k -asok egy r rangú matroidban. Ekkor $(B_1, \dots, B_k)$ -ből megkapható $(B'_1, \dots, B'_k)$ legfeljebb r ciklikus csere egymásutánjával.*

Sejtés 8. *Legyenek $(B_1, \dots, B_k)$ és $(B'_1, \dots, B'_k)$ kompatibilis bázis k -asok egy $M = (S, \mathcal{B})$ matroidban, és legyen $w: S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Ekkor $(B_1, \dots, B_k)$ -ből megkapható $(B'_1, \dots, B'_k)$ legfeljebb $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(B_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(B'_i)$ összsúlyú ciklikus cserével.*