

Legyen minél több összeg racionális!

Móricz Benjamin OTDK 2025.

Saját eredmények

Kutatásomban a következő kérdéssel foglalkoztam: adott n irracionális szám és ezekből képezzük minden lehetséges módon szám- k -asok összegeit. Legfeljebb mennyi összeg eshet $\mathbb{Q}$ -ba ezek közül és mi az az extrémális struktúrája a számoknak, amikor az ilyen összegek száma maximális? Ez a kérdés egy ismert feladat $k = 2$ esetén, azonban $k > 2$ -re korábban nem kutatták a kérdéskört. Emellett speciális kapcsolódó kérdéseket is feltettem, amelyeket szintén megválaszoltam. Ilyen feladat volt, amikor az összeadandók számát nem kötöttem meg, hanem az összes képezhető összeg közül szerettem volna a lehető legtöbb racionálisat kapni vagy egy strukturális megkötést alkalmaztam az összegekre (minden összeg egy intervallumba eső összeadandók közül kerül ki). A kutatás során a kérdéseket átfogalmaztam 0-összeg keresési problémára, amely ma is egy széles körben kutatott területe a kombinatorikának. Így az első feladat átfogalmazása a következőképpen szól: adott n darab nemnulla valós szám és ezekből képezzük a szám- k -asok összegeit. Legfeljebb mennyi összeg lehet 0 ezek közül és mi a struktúrája a számoknak, amikor a 0-összegek száma maximális?

Bizonyítási módszereimben ötvöztem algebrai technikákat (homomorfizmusok alkalmazása) klasszikus gráfelméleti és halmazrendszeres módszerekkel. A probléma átfogalmazásához egy vektortérhomomorfizmus kulcs lemmára volt szükség, míg a lehető legtöbb racionális összeg keresésekor többször is kettős leszámítást kellett alkalmazni. Az egyik kapcsolódó kérdés bizonyítása nagyon hasonlít a Sperner-tétel halmazrendszeres bizonyításához, a kapott számszerű eredmény is megegyezik a tétel állításával.

Beláttam ismét az ismert eredményt, hogy $k = 2$ esetén legfeljebb $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ racionális összeg érhető el. Új eredményként beláttam, hogy $k = 3$ esetén legfeljebb $k \cdot \binom{2k+l}{2}$ racionális összeg lehet, amennyiben $n = 3k + l$, $k \in \mathbb{N}$ és $l \in \{0, 1, 2\}$. Emellett bizonyítottam, hogy $k > \frac{n}{2}$ esetén $\binom{n-1}{k-1}$, míg $k = \frac{n}{2}$ esetben $2\binom{n-2}{k-1}$ a racionális összegek maximális száma. Minden esetben igazoltam, hogy ezek a korlátok élesek, megadtam azt a kötött extrémális struktúrát, ami ezt a maximumot teljesíti, ezzel kapcsolatban sejtést fogalmaztam meg a többi k esetére.

Abban a kapcsolódó feladatban, amikor az összes lehetséges összeget képezhetjük, beláttam, hogy az összegek közül legfeljebb $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ lehet racionális, ha kezdetben n darab irracionális számunk volt, és ez a korlát is éles. Végül a másik csatlakozó feladat esetén, amikor egy intervallumba eső számok összegei közül szeretnénk lehető legtöbb racionálisat, igazoltam, hogy legfeljebb $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ racionális összeg érhető el.