

EÖTVÖS LÓRÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

# Legyen minél több összeg racionális!

Móricz Benjamin

Matematika szak, Bsc 2  
moricz.ben@gmail.com



TDK dolgozat

Témavezető: Nagy Zoltán Lóránt, adjunktus  
Számítógéptudományi tanszék, Matematika Intézet

Budapest, 2024

## Kivonat

Munkánkban a következő problémával foglalkozunk: adott  $n$  irracionális szám és ezekből képezzük minden lehetséges módon szám- $k$ -asok összegeit. Legfeljebb mennyi összeg eshet  $\mathbb{Q}$ -ba ezek közül és mi az az extrémális struktúrája a számoknak, amikor az ilyen összegek száma maximális? Belátjuk, hogy  $k = 2$  esetén legfeljebb  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  (ez az eset a páronkénti összegek racionális értékéről folklórnak tekinthető),  $k = 3$  esetén pedig legfeljebb  $k \cdot \binom{2k+l}{2}$  racionális összeg lehet, amennyiben  $n = 3k + l$ ,  $k \in \mathbb{N}$  és  $l \in \{0, 1, 2\}$ . Emellett bizonyítjuk, hogy  $k > \frac{n}{2}$  esetén  $\binom{n-1}{k-1}$ , míg  $k = \frac{n}{2}$  esetben  $2 \binom{n-2}{k-1}$  a racionális összegek maximális száma. Minden esetben megadjuk azt a kötött extrémális struktúrát, ami ezt a maximumot teljesíti, ezzel kapcsolatban sejtést fogalmazunk meg a többi  $k$  esetére. Kapcsolódó kérdésként vizsgálunk olyan eseteket is, amikor az összeadandók száma nincs megkötve, hanem egy intervallumba eső számok összegei közül szeretnénk lehető legtöbb racionálisat. Belátjuk, hogy ekkor legfeljebb  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  racionális összeg érhető el. Végül bizonyítjuk azt is, hogy az összes képezhető összeg közül legfeljebb  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  lehet racionális, ha kezdetben  $n$  darab irracionális számunk volt, és ez a korlát is éles. Bizonyítási módszereinkben ötvöztünk algebrai technikákat (homomorfizmusok alkalmazása) klasszikus gráfelméleti és halmazrendszeres módszerekkel.

# 1. Bevezetés

Az extrémális gráfelméleti problémák  $n$ -csúcsú (hiper)gráfokban keresik az élek vagy hiperélek maximális (vagy minimális) számát, amelyek teljesítenek bizonyos előírásokat/feltételeket. Ilyen lehet például bizonyos tartalmazásra nézve kizárt részgráf, mint a Turán típusú kérdéskörben. Vizsgálatunk tárgya egy hasonló extrémális probléma, melyben a csúcshalmaz algebrai struktúrája adott: mi a maximális száma az olyan  $k$ -elemű összegeknek, amelyek racionális értéket adnak, egy  $n$  irracionális számból álló halmazban.

Vizsgáljuk a következő extrémális gráfelméleti problémát.

**1.1. Probléma.** Adott  $n$  valós szám, és képezzük belőlük a szám- $k$ -asok összegeit ( $k \geq 2$ ). Legfeljebb hány lehet racionális, ha az eredeti  $n$  valós számunk mind irracionális volt? Formálisan:  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  és vegyünk minden  $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  részhalmazra a  $\sum_{j=1}^k a_{i_j}$  összeget. Legfeljebb mennyi összeg eshet ezek közül  $\mathbb{Q}$ -ba?

**1.2. Tétel.**  $k = 2$  esetén legfeljebb  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  racionális összeget kaphatunk,  $k = 3$  esetén ha  $n = 3k + l$  alakú, akkor pedig legfeljebb  $k \cdot \binom{2k+l}{2}$  összeg lehet racionális. Ezek a korlátok élesek  $\forall n$ -re.

**1.3. Tétel.**  $k > \frac{n}{2}$  uniform esetben legfeljebb  $\binom{n-1}{k-1}$ , míg  $k = \frac{n}{2}$  esetén legfeljebb  $2\binom{n-2}{k-1}$  összeg eshet  $\mathbb{Q}$ -ba. Ezek a korlátok is élesek  $\forall n$ -re.

Kapcsolódó kérdésként vizsgálhatunk olyan esetet is, amikor nem szám- $k$ -asok összegeit képezzük, hanem tetszőleges összeget megkötés nélkül az összeadandókra. Ebben a nem uniform esetben  $n$  irracionális számból képezzük az összes lehetséges összeget ( $2^n$  darabot) és ezek közül szeretnénk a lehető legtöbb racionálisat.

**1.4. Probléma.** Legyen  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  és legyen  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ . Vegyük minden  $T \subseteq S$ -re  $\sum_{s_i \in T} s_i$  összeget. Legfeljebb mennyi összeg eshet  $\mathbb{Q}$ -ba ezek közül?

**1.5. Tétel.** Ebben az esetben legfeljebb  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  racionális összeg lehet, ez a korlát pedig éles  $\forall n$ -re.

A korlátunk hasonlóságot a klasszikus Sperner-tétel állításának számszerű eredményével. A bizonyításunk a Sperner-tétel bizonyításával rokon gondolatokat is fog használni (lásd például [8]), nevezetesen láncfelbontásokat és ezek leszámolását.

Vizsgáljuk továbbá azt a nem uniform esetet is, amikor nem az összes, hanem mindig egy intervallumba eső számok összegeit nézzük. Ekkor lesz 1 darab szám- $n$ -es, 2 darab szám- $(n-1)$ -es, ..., és  $n$  darab szám-1-es összeg.

**1.6. Probléma.**  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Minden  $1 \leq i \leq j \leq n$ -re vegyük a  $\sum_{k=i}^j r_k$  összeget. Legfeljebb mennyi összeg esik  $\mathbb{Q}$ -ba ezek közül?

**1.7. Tétel.** Ebben a problémában legfeljebb  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  racionális összeg képezhető, és ez a korlát éles  $\forall n$ -re.

Számos korábban vizsgált extrémális probléma rendelkezik ismert eredménnyel, ahol az alaphalmaz a valós számok egy részhalmaza, míg a gráf (hiper)éleihez bizonyos összegek tartoznak. Itt megemlíthetjük a jól ismert Manickam-Miklós-Singhi-tételt [11, 12] és az ehhez tartozó új eredményeket a sejtéssel kapcsolatban. A sejtés állítása, hogy pozitív egész  $n, k$  esetén, ahol  $n \geq 4k$ , minden  $n$  valós számból álló halmaz, melyek összege nemnegatív, tartalmaz legalább  $\binom{n-1}{k-1}$  darab  $k$  elemű részhalmazt melyekben az összeg szintén nemnegatív. Ismert a sejtésről, hogy teljesül, amennyiben  $n$  elég nagy  $k$ -hoz képest. A korábbi legjobb ismert eredmény Alon, Huang és Sudakov-tól származott, akik belátták a sejtést abban az esetben, amikor  $n \geq 33k^2$  teljesül [1]. Ezt a határt és eredményt tovább javította Alexey Pokrovskiy 2015-ben [13], ahol belátta, hogy létezik olyan  $C$  konstans, hogy a sejtés teljesül, ha  $n \geq Ck$ . Ezzel az eredménnyel már csak egy konstansszoros eltérés van a legjobb ismert korlát és a sejtés között. További kapcsolódó problémakör a 0-összegű problémák, v.ö. Gao és Geroldinger nagyszerű összefoglaló cikke a

témában [6]. Ehhez a kapcsolódáshoz a dolgozat végén térünk vissza.

Munkánkban először uniform esetekkel foglalkozunk, az 1.1 Problémát vizsgáljuk adott  $k$ -k esetén. A feladatot megoldjuk  $k = 2$ -re és  $k = 3$ -ra és belátjuk az 1.2 Tétel eredményeit ezekre és megfogalmazzunk állításokat a számok struktúrájára. Megadjuk a problémakör egy másik megközelítését vektortérhomomorfizmussal, ahol ismét igazoljuk a korábbi eredményeinket. Az uniform esetből végül a  $k \geq \frac{n}{2}$  esetet vizsgáljuk, itt is belátjuk az 1.3 tételben megfogalmazott maximumot és megadjuk az extrémális struktúrát a tárgyalt uniform esetekben. Vizsgáljuk továbbá általános uniform esetben a kétosztályú struktúra optimumát, mellyel az extrémális struktúrát szeretnénk jobban megérteni. A dolgozat végén rátérünk a két felvetett nem uniform problémára. Az 1.4 Problémában a Sperner-tétel bizonyításával rokon bizonyítást adunk az 1.5 Tétel értékére és megadjuk az extrémális struktúrát. Végül az 1.6 Problémával foglalkozunk, és belátjuk a 1.7 Tétel állítását, erre konstrukciót adunk. A munkánk legvégén kitérünk egyéb kapcsolódó pontokra, nyitott kérdéseket fogalmazunk meg a témával kapcsolatban.

## 2. $k = 2$ uniform eset

Ebben a részben az 1.1 Probléma  $k = 2$  esetében fogjuk belátni a maximumot és erre konstrukciót mutatni. Belátjuk, hogy  $k = 2$  esetén legfeljebb  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  darab racionális összeg érhető el.

Amennyiben két szám különbsége racionális, egy összegbe mindegy melyiket vesszük be, ugyanis az összeg csak racionálissal fog változni, így a racionalitásán nem fog változtatni. Ha az egyik szám racionális összeget ad további számokkal, akkor azokkal a másik szám is azt fog adni, illetve ugyanez igaz visszafelé is.

**2.1. Definíció.** *Nevezzük osztálynak a számok egy részhalmazát, amelyben egy szám és a vele racionális különbséget adó számok szerepelnek.  $\forall r, s \in \mathbb{R} : r \sim s \iff (r - s) \in \mathbb{Q}$*

**2.2. Állítás.** *Két szám felcserélhető, ha egy osztályból vannak.*

*Bizonyítás.* Ha  $r \sim s$ , akkor  $r - s \in \mathbb{Q}$ . Így az összeg racionalitását nem változtatja meg, ha  $s$  helyett  $s + r - s = r$ -et vesszük.  $\square$

**2.3. Következmény.** *Elég minden osztályból egy reprezentánst venni megfelelő multiplicitással.*

**2.4. Állítás.** *Elérhető  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  racionális összeg.*

*Bizonyítás.* Vegyünk  $n = 2m$  esetén  $m$  darab  $\sqrt{2}$  és  $m$  darab  $-\sqrt{2}$  számot, míg  $n = 2m + 1$  esetén az egyikből  $m + 1$ -et. Ekkor  $n = 2m$  esetén elérhető  $m^2 = \frac{n^2}{4}$  racionális összeg, míg páratlan  $n$  esetén is  $m^2 + m = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  racionális összeg.  $\square$

**2.5. Definíció.** *Definiáljunk egy relációt az ekvivalenciaosztályokon, melyet egy (elfajuló)  $G$  hipergráf-ként értelmezünk.  $V(G)$  elemei legyenek az ekvivalenciaosztályok.  $k$  nem feltétlenül különböző osztály álljon relációban, ha a  $k$  darab osztályba tartozó számok összege racionális (az osztályokat multiplicitással véve). Ezek a relációk (elfajuló) hiperélek lesznek a gráfban  $k$  csúcson át.*

**2.6. Definíció.** *Minden csúcs súlya legyen az adott osztályban szereplő számok darabszáma. Minden él súlya legyen az adott osztályokból képezhető összegek száma.*

Ekkor az 1.1 Probléma átfogalmazható a számokból képzett (elfajuló)  $k$ -uniform hipergráf maximális élsúlyösszeg keresésére. Jelöljük egy  $V$  csúcs súlyát  $x_V$ -vel és egy  $E$  hiperél súlyát  $w_E$ -vel.

**2.7. Probléma.** *Adott  $G$  hipergráf,  $V(G) \leq n$ , minden él  $k$ -szor érint csúcsot.  $a_i \in V(G)$  esetén  $(a_1 a_2 \dots a_k) \in E(G) \iff a_1 + a_2 + \dots + a_k \in \mathbb{Q}$ . Mennyi  $\sum_{e \in E(G)} w_e$  maximuma?*

Vegyük ezt a gráfot  $k = 2$ -re: 2 csúcs közt akkor fut él, ha az osztályokba tartozó számok összege racionális. Az élek egyértelműek, hiszen az összeg racionalitása szempontjából az osztályok elemei felcserélhetőek.

**2.8. Lemma.** *A  $k = 2$  esetén készített gráfban nincs 2 hosszú út.*

*Bizonyítás.* Minden osztály csak egy másik osztállyal adhat racionális összeget, hiszen egy osztály meghatározza a másik összeadandó osztályát. Így nem lehet a gráfban legalább 2 hosszú út.  $\square$

**2.9. Következmény.** *A gráf egymástól független élekből áll, az élek súlya definíció szerint a két csúcának súlyának szorzata.*

**2.10. Állítás.** *Ha van legalább két független él a gráfban, akkor ezek közül az egyik súlya 0-ba vihető, egy másik él súlyának növelésével úgy, hogy az összecsúly közben nem csökken.*

*Bizonyítás.* Az élek és csúcsok súlyai definícióból nemnegatívak. Minden él súlya megegyezik a rajta lévő csúcsok súlyainak szorzatával. Legyen két él  $(ab), (cd) \in E(G)$ , ahol az adott csúcsok súlya rendre  $x_a, x_b, x_c, x_d$ . Ekkor az összes számot  $c$ -ből helyezzük át  $a$ -ba, míg hasonlóan  $d$ -ből  $b$ -be, az egyik élt eltüntetve. Így a két él összcsúlya a változtatás előtt  $x_a x_b + x_c x_d$  volt, míg az egyik él nullázása után ez  $(x_a + x_c)(x_b + x_d) = x_a x_b + x_c x_d + x_a x_d + x_c x_b \geq x_a x_b + x_c x_d$ .  $\square$

Ezzel beláttuk, hogy csak olyan konstrukció lehet optimális, amiben csupán egy él szerepel.

**2.11. Állítás.** *Ezen gráfok közül az élösszsúly maximuma pontosan  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ , azaz legfeljebb ennyi racionális összeg lehet.*

*Bizonyítás.* Ha egy él két csúcának súlya legalább 2-vel tér el, akkor egy számot áttéve a nagyobb osztályból a kisebbre növelni tudjuk az összcsúlyt:  $x_a^2 + x_a e = x_a \cdot (x_a + e) < (x_a + 1) \cdot (x_a + e - 1) = x_a^2 + x_a e + e - 1$ , ahol  $e \geq 2$ . Így akkor maximális az összcsúly, ha  $|x_a - x_b| \leq 1$ . Azaz  $n = 2m$  esetén ez  $m^2$ , míg páratlan  $n$  esetén  $m^2 + m = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  összcsúly.  $\square$

**2.12. Eredmény.** *Ezzel beláttuk a 1.2 Tétel állítását, legfeljebb  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  darab racionális összeg érhető el.*

### 3. $k = 3$ uniform eset konstrukció és kizárt részgráfok

**3.1. Definíció.** *A definiált hipergráfban azokat a hiperéleket nevezzük elfajuló éleknek, amelyek egy csúcson többször is átmennek.*

Ebben a fejezetben az 1.1 Probléma  $k = 3$  esetére fogjuk belátni a maximumot és erre konstrukciót mutatni. Követjük a 2. fejezet megközelítését: súlyozott hipergráfot veszünk, miután minden ekvivalenciaosztályhoz 1 csúcsot rendeltünk. A feladat összetettebb, a számok alkotta struktúrát egy 3-uniform  $G$  hipergráffal tudjuk azonosítani.

**3.2. Probléma.** *Adott  $G$  hipergráf,  $V(G) \leq n$ , minden él  $k$ -szor érint csúcsot.  $a_i \in V(G)$  esetén  $(a_1 a_2 \dots a_k) \in E(G) \iff a_1 + a_2 + \dots + a_k \in \mathbb{Q}$ . Mennyi  $\sum_{e \in E(G)} w_e$  maximuma?*

**3.3. Konstrukció.** *Ha  $n = 3k + l$  alakú  $k \in \mathbb{N}$ ,  $l \in \{0, 1, 2\}$ , akkor elérhető  $k \cdot \binom{2k+l}{2}$  darab racionális összeg.*

*Bizonyítás.* Vegyünk  $k$  darab  $\sqrt{2}$ -t és  $2k + l$  darab  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  számot. Ekkor minden olyan összeg racionális lesz, amiben 1 darab  $\sqrt{2}$  szerepel és kettő darab  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ , amiből pontosan  $k \cdot \binom{2k+l}{2}$  darab összeg van.  $\square$

**3.4. Állítás.** *Két hiperél metszete legfeljebb egy csúcs lehet, vagyis a hipergráf lineáris.*

*Bizonyítás.* Két osztály egyértelműen meghatározza az összeg harmadik összeadandójának osztályát, így ha két hiperél két csúcsa megegyezik, akkor a harmadik csúcs is, így azonosak. A hipergráf lineáris.  $\square$

Egy tetszőleges csúcsba állva az onnan kifutó éleket vizsgálva a struktúra jó struktúrát kell, hogy alkosson  $k = 2$ -re, azaz független 2 nagyságú élrészletekből kell állnia.

**3.5. Állítás.** (i) Nem lehet a gráfban két csúcs, amire illeszkedik néhány hiperél úgy, hogy a két csúcs szomszédhalmaza megegyezik.

(ii) Nem lehet olyan csúcs sem, amelynek néhány rá illeszkedő hiperélen vett szomszédhalmaza megegyezik néhány hiperél uniójával.

*Bizonyítás.* Az (i)-es részgráf esetén a két csúcsból kiválasztott reprezentánsok valójában egy osztályban vannak, mivel összeadva a rájuk illeszkedő, azonos szomszédhalmazú éleket, azonos összeget kapunk. A két összeg csak a két reprezentánsban tér el, így ezek valóban egy osztályba kell, hogy tartozzanak.

A (ii)-es részgráf esetén a csúcsból kiválasztott reprezentáns nem lehetne irracionális, hiszen ekkor a reprezentáns értéke felírható racionális összegek különbségeként, így ez a racionális osztályba tartozna.  $\square$

**3.6. Definíció.** A 3-uniform hipergráfunkban lehetnek hiperélek, amelyek egy csúcson kétszer is átmennek. Nevezzük a hiperél fejének azt a csúcsot, amelyet kétszer tartalmaz és a hiperél végének azt a csúcsot, melyet csak egyszer tartalmaz.

Egy hiperél súlya ekkor a súly definíciójából  $\binom{x_F}{2} \cdot x_V$ , ahol  $x_F$  a hiperél fejének súlyát jelöli, míg  $x_V$  a végének a súlyát. Az hiperélek és csúcsok súlyai definícióból nemnegatívak, minden nem elfajuló hiperél súlya megegyezik a rajta lévő csúcsok súlyainak szorzatával.

**3.7. Lemma.** Minden csúcs csak legfeljebb egy hiperélnek lehet a feje és legfeljebb egy hiperélnek lehet a vége.

*Bizonyítás.* Az elfajuló éleken lévő összegek csak két osztályt érintenek valamilyen multiplicitással, így az egyik csúcs meghatározza egyértelműen a másikat, ha tudjuk, hogy az adott csúcs a feje vagy a vége az elfajuló élnek. Így egy csúcs nem lehet két elfajuló élnek is a feje vagy kettőnek is a vége.  $\square$

A gráfban emiatt legfeljebb  $n$  darab elfajuló él lehet, hiszen legfeljebb  $n$  fej szerepelhet. Az elfajuló élek számát jelöljük  $y$ -nal.

**3.8. Definíció.** Defináljunk egy új  $H$  páros gráfot, amelyen a struktúrában szereplő 3-uniform éleket ábrázoljuk. A páros gráf egyik csúcsosztályában legyenek az eredeti  $G$  gráf csúcsai, ezt jelöljük  $V$ -vel, míg másik csúcsosztályában szerepeljenek az eredeti  $G$  gráf élei, ezt az osztályt jelöljük  $E_3$ -mal. Tudjuk, hogy  $|V| = n$  és legyen  $|E_3| = m$ . A páros gráfban a két csúcsosztály közt akkor fusson él, ha az eredeti  $G$  gráfban az adott csúcs illeszkedett az  $E_3$ -beli csúcs által reprezentált élre.

Megjegyzés: Elfajuló  $G$ -beli hiperélek esetén a páros gráfban a megfelelő élt multiplicitással húzzuk be a csúcs elfajuló élben való multiplicitása alapján.

**3.9. Definíció.** Nevezzük a  $H$  gráfban cseresznyének az egy  $E_3$ -beli csúcsból kiinduló három él unióját.

**3.10. Lemma.**  $H$ -ban összesen  $3m$  él van behúzva, mivel  $|E_3| = m$  és innen minden csúcs pontosan 3 másikkal lesz összekötve.

**3.11. Állítás.** A  $H$  gráfban legfeljebb  $\frac{\binom{n}{2}-y}{3} + y$  darab  $E_3$ -beli csúcs lehet.

*Bizonyítás.*  $G$ -ben egy él két csúcsához egyértelmű a harmadik csúcs, ezért legfeljebb  $\frac{\binom{n}{2}}{3}$  darab csúcs lehet  $E_3$ -ban, hiszen minden cseresznyét  $\binom{3}{2} = 3$ -szor számolunk meg a  $V$ -beli csúcspárok mentén és  $\binom{n}{2}$  darab csúcspár van összesen. Az elfajuló élek cseresznyéjét viszont csak pontosan egyszer számoljuk

meg, hiszen ezek összesen két  $V$ -beli csúcsot tartalmaznak. Így összesen legfeljebb  $\frac{\binom{n}{2}-y}{3} + y$  darab  $E_3$ -beli csúcs lehet, ha mindent pontosan egyszer számolunk meg, így ebből

$$\frac{\binom{n}{2}-y}{3} + y \geq m \quad (1)$$

□

**3.12. Definíció.** Az eredeti  $G$  gráfban nevezzünk két csúcsot függetlennek, ha nem illeszkedik közös él a két csúcsra.

Vizsgáljunk olyan  $G$  gráfnak a  $H$ -beli megfelelőjét, amiben nincsen független csúcspár.

**3.13. Állítás.** Ilyen  $G$  gráf  $H$ -beli megfelelőjében legalább  $\binom{n}{2} + 2y$  darab él van.

*Bizonyítás.* Mivel semelyik két csúcs se független  $G$ -ben, ezért  $V$ -ben bármely két csúcsnak van közös cseresznyéje (és csak egy lehet az egyértelműség miatt). Ezzel számoljuk meg a páros gráf éleit:  $\binom{n}{2}$  csúcspár mindegyikéhez egy 2 élű cseresznye tartozik. A nem elfajuló élek esetén a 3 végű cseresznyék minden élet kétszer számoltuk meg (összesen a 3 élt 6-szor), míg az elfajuló élek esetén a 3 élből csak 2-t számoltunk meg, hiszen csak egy csúcspár esetén kapjuk meg az adott élt. Ekkor  $H$ -ban legalább  $\frac{(\binom{n}{2}-y) \cdot 2}{2} + \frac{y \cdot 2}{3} = \binom{n}{2} + 2y$  darab él van, ha nincs két független csúcs  $G$ -ben. Ebből az élek száma miatt tudjuk, hogy

$$3m \geq \binom{n}{2} + 2y \quad (2)$$

□

**3.14. Következmény.** Összevetve (1)-et és (2)-t:  $3m \geq \binom{n}{2} + 2y \geq 3m$ , azaz csak egyenlőségek esetén teljesülhet mindkét feltétel. Ha nincsen két független csúcs  $G$ -ben, akkor a struktúra telített, minden csúcsból az elfajuló éleken kívül kiinduló nemelfajuló élek a többi csúcsot párokra partícionálja.

## 4. $k = 3$ uniform eset maximuma független csúcspárok mentén

Ebben a részben belátjuk, hogy két struktúrát leszámítva mindig létezik  $G$ -ben független csúcspár és ezen esetekben a független csúcsok mentén optimalizálni tudjuk az élek összsúlyát. Ennek segítségével belátjuk a 1.2 Tételben megadott korlátot.

**4.1. Definíció.** Nevezzük a  $G$  gráfban egy csúcs elfajuló fokának a rá illeszkedő elfajuló élek számát. Ezt jelöljük  $d^*(v)$ -vel.

$d^*(v) \leq 2$  lehet, mivel minden csúcs legfeljebb egy elfajuló él feje és vége.

**4.2. Állítás.** Ha minden  $v$  csúcsra  $d^*(v) = 0$ , akkor vagy lesz független csúcspár  $G$ -ben vagy a struktúra csak egy élt tartalmaz.

*Bizonyítás.* Ha nincsen független csúcspár a struktúrában, akkor vegyünk egy  $(abc) \in E(G)$  élt! Tudjuk, hogy  $a$ -ból és  $b$ -ből is a többi él párosítja  $V(G) \setminus \{a, b, c\}$  csúcsokat (mivel minden  $v$  csúcsra  $d^*(v) = 0$ , ezért nincsenek elfajuló élek  $G$ -ben). Ez viszont nem lehetséges, mert ez megegyezik az (i)-es kizárt részgráffal. Ha nincsen független csúcspár, akkor  $V(G) \setminus \{a, b, c\}$  üres, azaz a struktúra egy darab nemelfajuló élből áll (I). □

**4.3. Állítás.** Ha  $\exists v : d^*(v) = 1$ , akkor vagy lesz független csúcspár  $G$ -ben vagy a struktúra csak egy elfajuló élt tartalmaz.

*Bizonyítás.* Ekkor összesen páros sok csúcsból áll a struktúra, hiszen  $v$ -n és az elfajuló él másik csúcsán,  $w$ -n kívül a többi csúcs párosítva van  $v$ -ből nézve. Ekkor viszont  $w$  se független semmitől, így a többi élnek innen is párosítania kell  $V(G) \setminus \{v, w\}$  csúcsokat. Ez ismét az (i)-es kizárt részstruktúra, ha  $V(G) \setminus \{v, w\}$  nemüres. Ha nincsen független csúcspár ebben az esetben, akkor a struktúra egy darab elfajuló  $\{v, w\}$  élből áll (II).  $\square$

**4.4. Állítás.** *Nem lehet olyan gráf, amiben  $\forall d^*(v) \in \{0, 2\}$  és van legalább egy elfajuló fok, ami 2.*

*Bizonyítás.* Ebben az esetben az elfajuló élek köröket alkotnak, viszont egy körre az osztályoknak a racionális összeghez így kell kinéznie:  $l, -2l, 4l, \dots$ . Amikor körbeérünk a körön, akkor azt kapjuk, hogy  $(\pm 2^k + 1)l$  racionális, ahol  $\pm 2^k + 1 \neq 0$ , azaz ebből  $l$  racionális osztályba tartozna, ami ellentmondás. Nincs ilyen gráf.  $\square$

Ezzel beláttuk, hogy az (I)-es és a (II)-es gráf kivételével  $G$ -ben mindig lesz független csúcspár. Megmutatjuk, hogy ahol létezik független csúcspár ( $a$  és  $b$ ), ott ezek mentén tudunk optimalizálni.

$a$ -ban és  $b$ -ben is lehet legfeljebb 1-1 él, ami elfajuló és a feje az adott csúcs. Ezen elfajuló élek végének súlyát az  $a$  csúcs esetén jelöljük  $X'_a$ -val, míg  $b$  csúcsból  $X'_b$ -vel. A többi élen vett szomszéd csúcspárok összsúlyát jelöljük  $W'_a$ -val az  $a$  csúcs szomszédaira és  $W'_b$ -vel a  $b$  csúcs szomszédai esetén. Az  $a$  és  $b$  osztályok súlyát inentől kezdve az egyszerűség kedvéért jelöljük  $A$ -val és  $B$ -vel.

**4.5. Lemma.** *Az  $a$  vagy  $b$  osztályt tartalmazó összegek száma, azaz az itteni élek összsúlya:*

$$\binom{A}{2} \cdot X'_a + A \cdot W'_a + \binom{B}{2} \cdot X'_b + B \cdot W'_b = A^2 \frac{X'_a}{2} + A W'_a + B^2 \frac{X'_b}{2} + B W'_b := A^2 X_a + A W_a + B^2 X_b + B W_b \quad (0)$$

Itt tudjuk, hogy  $X_a, X_b, A, B \geq 0$ .

**4.6. Állítás.** *Az élek összsúlyát növelni tudjuk azzal, hogy az  $a$  és  $b$  csúcsok egyikét kinullázzuk, azaz az összes súlyát áttoljuk a másikba.*

*Bizonyítás.* A tolás után a megváltoztatott összsúly

$$(A + B)^2 X_a + (A + B) W_a \quad (1) \quad \text{vagy} \quad (A + B)^2 X_b + (A + B) W_b \quad (2)$$

lesz. Akkor nem sikerült csak optimalizálni, ha mindkettő kisebb lenne az eredeti összsúlynál:  $(0) > (1)$  és  $(0) > (2)$ . Ez azt jelenti, hogy

$$A^2 X_a + A W_a + B^2 X_b + B W_b > (A + B)^2 X_a + (A + B) W_a$$

$$\text{és } A^2 X_a + A W_a + B^2 X_b + B W_b > (A + B)^2 X_b + (A + B) W_b$$

ezt rendezzük át.

$$B^2 X_b + B W_b > B^2 X_a + 2ABX_a + B W_a \quad \text{és} \quad A^2 X_a + A W_a > A^2 X_b + 2ABX_b + A W_b$$

$$B X_b + W_b > B X_a + 2A X_a + W_a \quad \text{és} \quad A X_a + W_a > A X_b + 2B X_b + W_b$$

A kapott két egyenlőtlenséget összeadva:

$$B X_b + W_b + A X_a + W_a > B X_a + 2A X_a + W_a + A X_b + 2B X_b + W_b$$

$$0 > A X_a + A X_b + B X_a + B X_b = (A + B) \cdot (X_a + X_b) \geq 0$$

Ez viszont ellentmondás,  $0 > 0$  nem teljesülhet. Így valamelyik tolás biztos nem csökkenti az élek összsúlyát, azaz a racionális összegek számát.  $\square$

Ekkor két független  $G$ -beli csúcs közül az egyiket minden esetben 0-ba tolhatjuk, minden ezen áthaladó él súlyát is 0-ra vihetjük. A kinullázott csúcs és a rajta áthaladó élek elhagyhatóak, ezek már nem befolyásolják az összszúlyt. Így eggyel kisebb csúcsszámú struktúrába jutunk a lépéssel úgy, hogy lokálisan optimalizáltunk. A kisebb struktúrára ezt megismételhetjük, a folyamat csak akkor áll meg, amikor már nincsen két független csúcs  $G$ -ben. Így elég az (I)-es és (II)-es gráfra megvizsgálni, hogy mikor lesz maximális az összszúly.

**4.7. Állítás.** *Az (I)-es gráf esetén nem lesz maximális az összszúly, mivel a (II)-es gráf esetén ez nagyobb.*

*Bizonyítás.* Legyen az (I)-es gráf esetén a három osztály (amin az egyetlen él áthalad) súlya  $A, B, C \geq 1$ . Ekkor az él súlya (azaz a teljes összszúly)  $A \cdot B \cdot C$ . Vegyük ehelyett azt a struktúrát, amiben csak két osztály van, közte egy elfajuló éllel. Az elfajuló él vége legyen  $A$  súlyú, míg feje  $B + C$  súlyú. Erre a gráfra az összszúly  $A \cdot \binom{B+C}{2}$ . Most belátjuk, hogy  $A \cdot \binom{B+C}{2} \geq ABC$ .

$$\binom{B+C}{2} \geq BC \quad \rightarrow \quad (B+C)(B+C-1) \geq 2BC$$

$$B^2 + 2BC + C^2 \geq 2BC + B + C \quad \rightarrow \quad B^2 + C^2 \geq B + C$$

A kapott egyenlőtlenség teljesül, hiszen  $B, C \geq 1$ . Ezzel beláttuk az állítást.  $\square$

**4.8. Következmény.** *Csak olyan struktúrát kell vizsgálnunk, amiben mindössze két osztály és ezek közt egy elfajuló él fut, ebben az esetben lesz maximális az összszúly és ezzel a racionális összegek száma.*

Legyen az egyik osztály elemszáma  $A$ , a másiké pedig  $B$  úgy, hogy a  $B$  elemű osztályból szeretnénk kettőt választani a racionális összegbe. Ekkor  $A + B = n$  és a racionális összegek száma  $A \cdot \binom{B}{2} = 2A \cdot \frac{B}{2} \cdot \frac{B-1}{2}$ , ahol  $A + \frac{B}{2} + \frac{B-1}{2} = n - \frac{1}{2}$  és ismét legyen  $n = 3k + l$ , ahol  $0 \leq l \leq 2$ . Ha  $A \geq \frac{B+1}{2}$ , akkor  $A$ -t eggyel csökkentve és  $B$ -t eggyel növelve a jó összegek száma nem fog csökkenni. Emellett ha  $A \leq \frac{B-3}{2}$ , akkor  $A$ -t növelhetjük eggyel és  $B$ -t csökkenthetjük, az összegek száma így se csökkenhet. Az optimális esetben  $\frac{B-2}{2} \leq A \leq \frac{B}{2}$ , csak egy optimális  $A$  elemszám van.  $n = 3k + l$  esetén  $A = k$  és  $B = 2k + l$ , ekkor teljesülnek az egyenlőtlenségek. A racionális összegek maximális száma ebben az esetben  $k \cdot \binom{2k+l}{2} = k \cdot \frac{4k^2 + 4kl + l^2 - 2k - l}{2}$ . Ezzel igazoltuk a 1.2 Tétel állítást, az előző részben erre konstrukciót is adtunk.

## 5. Vektortérhomomorfizmussal való átfogalmazás és $k = 2, 3$ esete

**5.1. Lemma.** *Jelölje  $R$  az irracionális számaink halmazát. Vegyük az  $R$  által generált vektorteret  $\mathbb{Q}$  felett,  $\langle R \rangle \subset \mathbb{R}$ . Létezik olyan összeztartó homomorfizmus ezen a vektortéren, amely magtère pontosan a racionális számok halmaza.*

*Bizonyítás.* Ennek a vektortérnek véges bázisa van  $\mathbb{Q}$  felett, ezért létezik vektortér homomorfizmus  $\phi : \langle R \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  úgy, hogy  $\ker(\phi) = \mathbb{Q}$ .  $\square$

**5.2. Következmény.** *Ez a vektortérhomomorfizmus minden racionális számot a 0-ba visz.*

A vektortérhomomorfizmust elvégezve tudjuk, hogy az irracionális számok nem nulla valóságba kerülnek. Minden racionális összeg a 0-ba kerül, ezért most a lehető legtöbb 0-összeget keressük az új számaink között.

**5.3. Állítás.** *A 0-összegek maximális száma felvétetik olyan konstrukcióban is, ahol a racionálisok vektortere csupán egy irracionális számmal van bővítve.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy legalább két különböző irracionális számmal bővítettük  $\mathbb{Q}$ -t, legyen két különböző báziselem  $b_1$  és  $b_2$ . A feladatban szereplő irracionális számaink a báziselemek lineáris kombinációi, ezeknek vizsgáljuk az összegeit, amelyek közül a lehető legtöbb 0-összeget szeretnénk elérni. Minden 0-összegben az irracionális számok együtthatói pontosan 0-ra kell, hogy összeadódjanak. Nézzük meg minden számban  $b_1$  és  $b_2$  együtthatóját. Megmutatjuk, hogy  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , hogy a  $b_2 \rightarrow \lambda b_1$  báziscserével a nullösszegek száma nem csökken. Minden 0-összegben a csere előtt a báziselemek együtthatóinak összege külön-külön 0 volt, ez a csere után is megmarad, hiszen a  $\lambda \in \mathbb{R}$ -val való szorzás meghagyja az együtthatók összegét 0-nak. Az lehet csupán probléma, ha valamelyik korábbi irracionális számból a csere után racionális lett, azaz  $a_1 b_1 + a_2 b_2 \rightarrow a_1 b_1 + a_2 \lambda b_1 = (a_1 + \lambda a_2) b_1 \in \mathbb{Q}$ . Mivel csak véges sok számunk van, ezért meg tudjuk olyannak választani  $\lambda$ -t, hogy semelyik számra se legyen  $a_1 + \lambda a_2 = 0$ , így mindegyik szám valóban irracionális maradjon. Ez után a báziscsere után az első két báziselemet  $(b_1, \lambda b_1)$  egybevonhatjuk. Így eggyel kevesebb báziselem esetén is találtunk legalább annyi 0-összeget, mint korábban. Ezzel eggyel csökkentettük a vektortér dimenzióját.  $\square$

**5.4. Következmény.** *A 0-összegek maximális száma felvétetik olyan konstrukcióban is, ahol  $\mathbb{Q}$  csak egy irracionális számmal van bővítve, azaz a számaink között csak egy irracionális szám racionális többszörösei szerepelnek. Ekkor ezzel az irracionális számmal mindent leosztva megmaradnak a 0-összegek. A probléma átfogalmazható racionális számokra, amelyek között a lehető legtöbb 0-összeget keressük.*

Egy ilyen összegbe biztosan kerül pozitív és negatív szám is, így tudjuk, hogy két részre oszthatók a számok úgy, hogy minden összeg elemei mindkét csoportból valók.

**5.5. Állítás.**  *$k = 2$  esetén legfeljebb  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  nulla összeg lehetséges.*

*Bizonyítás.* Minden összeg egyik száma pozitív, a másik negatív kell, hogy legyen. Ha  $p$  darab pozitív szám van, akkor  $n - p$  darab negatív. Ekkor a nulla összegű összegek maximális száma  $(n - p)p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség miatt.  $\square$

**5.6. Állítás.**  *$k = 3$  esetén az optimális esetben minden összegben két pozitív és egy negatív szám szerepel vagy fordítva.*

*Bizonyítás.* Minden összeg vagy kettő pozitív és egy negatív vagy egy pozitív és két negatív számból áll. Legyen a pozitív számok száma  $p$ , ekkor a negatívak száma  $N - p$ . Feltehető, hogy  $p > n - p$ . Elérhető  $(n - p) \cdot \binom{p}{2}$  darab nulla összeg, ha minden pozitív szám 1-es és minden negatív szám -2-es. Akárhogyan választunk ki egy pozitív és egy negatív számot, összegük alapján egyértelmű, hogy a harmadik összeadandó milyen előjelű, így egy ilyen számpár legfeljebb  $\max(p - 1, n - p - 1) = p - 1$  darab nulla összegben lehet. Összesen  $(n - p) \cdot p$  módon tudunk ilyen számpárt kiválasztani, míg minden összeget két számpárnál számolunk. Azaz legfeljebb  $(n - p) \cdot p \cdot \frac{(p-1)}{2} = (n - p) \cdot \binom{p}{2}$  darab nulla összeg érhető el, ennyi pedig csak akkor, ha minden számpárhoz a harmadik összeadandó is pozitív (most feltettük, hogy több pozitív szám van, mint negatív). Az optimális esetben tehát csak az egyik fajta összeg szerepel az összeadandók közt, ezek közül pedig minden.  $\square$

**5.7. Állítás.**  *$k = 3$  esetén legfeljebb  $a \cdot \binom{2a+l}{2}$  nulla összeg lehetséges, ha  $n = 3a + l$ , ahol  $a \in \mathbb{N}$  és  $l \in \{0, 1, 2\}$ .*

*Bizonyítás.* Az előző állítás miatt  $(n - p) \cdot \binom{p}{2}$  értékét szeretnénk maximalizálni. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségből ismét következik, hogy  $(n - p) \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{(p-1)}{2} \leq a \cdot \frac{2a+l}{2} \cdot \frac{2a+l-1}{2}$ , azaz  $(n - p) \cdot \binom{p}{2} \leq a \cdot \binom{2a+l}{2}$ . Ezzel beláttuk az állítást.  $\square$

Ismét beláttuk az átfogalmazással az 1.2 Tétel felső korlátait.

## 6. $k \geq \frac{n}{2}$ uniform eset

Ebben a részben igazoljuk a 1.1 Problémához kapcsolódóan az 1.3 Tétel állítását  $k \geq \frac{n}{2}$  esetén. Ehhez bevezetünk egy új  $g$  függvényt, amely egy  $N, k$  párhoz rendel egy értéket.

**6.1. Definíció.**  $g(N, k)$  értéke annyi, amennyi azonos osztályú  $k$ -uniform összeg legfeljebb képezhető  $N$  szám esetén, ha az  $N$  szám nem tartozik mind ugyanabba az osztályba.

Megjegyzés: Ha minden szám egy ekvivalenciaosztályból kerülne ki, az azt jelentené, hogy az összeg biztosan nem lehet racionális, mert a számok sem lehetnek azok.

**6.2. Lemma.**  $g(N, k) = g(N, N - k)$

*Bizonyítás.* Ha van egy konstrukció  $N, k$  esetén, ami tartalmaz  $g(N, k)$  azonos osztályú összeget, akkor ezeknek vehetjük a komplementereit. Ezek  $N - k$  elemű összegek és szintén mindegyik egy osztályba kerül, hiszen a teljes  $N$ -es összege állandó és az  $N - k$  elemű összegek erre egészítik ki az azonos osztályú  $k$ -as összegeket. Ez igaz szimmetria miatt visszafelé is, így  $g(N, k) = g(N, N - k)$ .  $\square$

**6.3. Lemma.**

$$g(N, k) \geq \begin{cases} \binom{N-1}{k-1} & \text{ha } k > \frac{N}{2}, \\ 2\binom{N-2}{k-1} & \text{ha } k = \frac{N}{2}, \\ \binom{N-1}{k} & \text{ha } k < \frac{N}{2}. \end{cases}$$

*Bizonyítás.* Ha  $k \neq \frac{N}{2}$ , akkor vegyünk egy 1 elemű osztályt és egy  $N - 1$  elemű osztályt. Ha  $k < \frac{N}{2}$ , akkor az egy elem kiválasztásával és az  $N - 1$  elemű osztályból tetszőleges  $k - 1$  reprezentánst véve el tudunk érni  $\binom{N-1}{k-1}$  azonos osztályú összeget. Ha pedig  $k > \frac{N}{2}$ , akkor az  $N - 1$  elemű osztályból tetszőleges  $k$ -t választva elérhető  $\binom{N-1}{k}$  ilyen összeg. (A két eset eredménye azért különbözik, hogy  $\binom{N-1}{k-1}$  és  $\binom{N-1}{k}$  közül melyik a nagyobb.) Ha  $k = \frac{N}{2}$ , egy kételemű osztályból 1 szám választásával és egy  $N - 2$  elemű osztályból való  $k - 1$  szám választásával elérhető  $2\binom{N-2}{k-1}$  azonos osztályú összeg. Ezzel beláttuk, a lemma állítását.  $\square$

**6.4. Lemma.** Vagy  $g(N, k) \leq g(N - 1, k) \cdot \frac{N}{N-k}$  vagy  $g(N, k) = \binom{N-1}{k-1}$  vagy  $g(N, k) = \binom{N-1}{k}$ .

*Bizonyítás.* Számoljuk meg az azonos osztályú összegeket azokból a számokból nézve, amelyek nincsenek benne az adott  $k$ -as összegben. Mivel egy ilyen szám nincs benne az összegben, ezért a maradék  $N - 1$  számból kell  $k$ -t kiválasztani. Ekkor vagy mind az  $N - 1$  maradék szám egy osztályban van vagy  $g$  definíciója miatt legfeljebb  $g(N - 1, k)$  ilyen összeg létezhet. Ha nincsen a számok közt legalább  $N - 1$  elemű osztály, akkor minden szám esetén legfeljebb  $g(N - 1, k)$  ilyen összeget számolunk meg. Egy  $k$ -ast pontosan  $N - k$ -szor számoltunk meg, így összesen legfeljebb  $g(N - 1, k) \cdot \frac{N}{N-k}$  azonos racionalitás osztályú összeg lehet ekkor  $N, k$ -ra. Ha van  $N - 1$  elemű osztály, akkor 6.3 miatt tudjuk, hogy legfeljebb  $\binom{N-1}{k-1}$  vagy  $\binom{N-1}{k}$  azonos osztályú összeg lehet attól függően, hogy az egy elemű osztályt bele vesszük e a  $k$ -asokba. Ezzel beláttuk a lemma állítását.  $\square$

**6.5. Lemma.**  $g(N, k) \leq g(N - 1, k - 1) + g(N - 1, k)$  vagy  $g(N, k) = \binom{N-1}{k-1}$  vagy  $g(N, k) = \binom{N-1}{k}$ .

*Bizonyítás.* Ha a konstrukcióban létezik  $N - 1$  elemű osztály, akkor 6.3 lemma miatt  $g(N, k) = \binom{N-1}{k-1}$  vagy  $g(N, k) = \binom{N-1}{k}$ . Ha nincs ilyen osztály, akkor válasszunk ki egy tetszőleges számot. Vannak  $k$ -as összegek, amiben nincsen benne, azaz a maradék  $N - 1$  számból kell még  $k$  darabot venni, míg vannak  $k$ -asok, amiben a kitüntetett szám benne van, azaz a maradék  $N - 1$  számból még  $k - 1$ -et kell az összegbe bevinni. Nincs mind az  $N - 1$  szám egy osztályban, ezért ezekből legfeljebb  $g(N - 1, k - 1)$  és  $g(N - 1, k)$  darab összeg lehet azonos osztályú. Ekkor  $g(N, k) \leq g(N - 1, k - 1) + g(N - 1, k)$ , hiszen minden összeget pontosan egyszer számoltunk meg. Beláttuk a lemma állítását.  $\square$

**6.6. Állítás.** Ha  $k < \frac{N}{2}$ , akkor  $g(N, k) = \binom{N-1}{k}$ .

**6.7. Következmény.** Ekkor a 6.2 lemma és a 6.6 állítás miatt  $k < \frac{N}{2}$  esetén  $g(N, N-k) = g(N, k) = \binom{N-1}{k} = \binom{N-1}{N-k-1}$ . Ekkor  $N-k > \frac{N}{2}$ . Így ha  $l > \frac{N}{2}$ , akkor az állítás szerint  $g(N, l) = \binom{N-1}{l-1}$ .

*Bizonyítás.* Bizonyítsunk indukcióval  $k$  szerint.  $k = 1$  esetén összesen  $N$  darab összeg van, de mind nem lehet azonos osztályú  $g$  definíciója miatt, így legfeljebb  $N-1$  azonos osztályú összeg lehet. Ekkor  $g(N, 1) = \binom{N-1}{1}$  teljesül. Most tegyük fel, hogy  $k$ -ig beláttuk az állítást és nézzük meg  $k+1$  esetére. Tudjuk, hogy  $g(N, k+1) = \binom{N-1}{k}$ , ha  $N \leq 2k+1$  a 6.7 következmény miatt.

Továbbá a 6.4 lemma miatt  $g(2k+2, k+1) \leq g(2k+1, k+1) \cdot \frac{2k+2}{k+1} = 2 \binom{2k}{k}$  az indukciót használva vagy  $g(2k+2, k+1) = \binom{2k+1}{k+1}$ , de ez utóbbi kisebb. Így  $g(2k+2, k+1) \leq 2 \binom{2k}{k}$ , de a 6.3 lemma miatt  $g(N, k) \geq 2 \binom{N-2}{k-1}$ , ha  $k = \frac{N}{2}$ , azaz  $g(2k+2, k+1) \geq 2 \binom{2k}{k}$ . Megkaptuk, hogy egyenlőség teljesül:  $g(2k+2, k+1) = 2 \binom{2k}{k}$ .

Most vizsgáljuk  $g(2k+3, k+1)$  értékét és tegyük fel indirekten, hogy  $g(2k+3, k+1) > \binom{2k+2}{k+1}$ . Legyen az összes  $(2k+3)$  darab számunk halmaza  $V$  és vegyünk ezekből két tetszőlegeset,  $x$ -et és  $y$ -t. Azon összegekből, ami tartalmazza  $x$ -et, legfeljebb  $g(2k+2, k)$  azonos osztályú lehet és ez indukció miatt (a)  $\binom{2k+1}{k}$  vagy (b) van legalább  $2k+2$  elemű osztály a számok közt. Először az (a) esetet tárgyaljuk, a (b) lehetőségre a bizonyítás végén térünk vissza.

(a) Tehát tegyük fel, hogy  $x$ -et tartalmazó összegekből legfeljebb  $g(2k+2, k) = \binom{2k+1}{k}$  azonos osztályú van. Így ahhoz hogy a felvevés teljesüljön, több, mint  $\binom{2k+2}{k+1} - \binom{2k+1}{k} = \binom{2k+1}{k+1}$  azonos osztályú összegnek kell lennie, ami nem tartalmazza  $x$ -et. Jelöljük ezen összegek számát  $A > \binom{2k+1}{k+1}$ -val. Szimmetrikusan ugyanez elmondható  $y$ -ről is.

Nézzük azt az  $A$  darab összeget, ami nem tartalmazza  $x$ -et. Ebből  $a$  darab menjen át  $y$ -on és  $A-a$  darab ezen kívül. Tudjuk, hogy az  $y$ -t tartalmazó  $a$  darab összeg  $V \setminus \{x\}$ -beli komplementerei is azonos osztályúak lesznek és ezek se  $y$ -t, se  $x$ -et nem tartalmaznak, de továbbra is  $k+1$  elemű összegek. Így van egyrészt  $A-a$  darab azonos osztályú  $k+1$ -uniform összeg  $V \setminus \{x, y\}$ -ban, valamint még  $a$  darab ilyen.  $A-a+a = A > \binom{2k+1}{k+1}$ , azonban  $V \setminus \{x, y\}$ -ban összesen  $\binom{2k+1}{k+1}$  darab  $k+1$ -uniform összeg választható ki. Emiatt van az  $x$ -et nem tartalmazó összegek közül olyan, aminek a komplementere is  $V \setminus \{x\}$ -beli egy kiválasztott összeg. Mivel a komplementerek is egymással azonos osztályúak voltak, ezért ekkor minden  $y$ -t tartalmazó összegnek a komplementere is ebbe az azonos osztályba kell, hogy kerüljön.

Azaz ezek elemszámaira  $A-a = a = \frac{A}{2} > \frac{1}{2} \binom{2k+1}{k+1}$ , ennyi azonos osztályú összeg van  $V \setminus \{x, y\}$ -ban. Szimmetrikusan elmondhatjuk ezt  $y$ -ből is: ha ehhez  $B$  azonos osztályú összeg tartozik, ami nem tartalmazza, amiből  $B-b$  nem tartalmazza  $x$ -et se, akkor hasonlóan  $B-b = b = \frac{B}{2} > \frac{1}{2} \binom{2k+1}{k+1}$ .

Így  $V \setminus \{x, y\}$ -ban összesen találtunk  $k+1$ -uniform összegekből  $B-b+A-a > \binom{2k+1}{k+1}$  darab azonos osztályút, ami több, mint az összes lehetőség, így van köztük megegyező. Ezeknek a  $V \setminus \{x\}$ , illetve  $V \setminus \{y\}$ -beli komplementerei is ki lesznek választva, amelyek megegyeznek, kivéve hogy az egyik  $x$ -et, a másik  $y$ -t tartalmazza. Mivel ezek a komplementer halmazból képzett összegek is egy osztályba esnek, ezért  $x$  és  $y$  is egy osztályba tartozik.

Beláttuk, hogy tetszőleges két szám egy osztályba kell, hogy tartozzon, ami ellentmondás, mivel nem lehet minden szám egy osztálybeli. Ebben az esetben valóban  $g(2k+3, k+1) \leq \binom{2k+2}{k+1}$ .

(b) Ha van  $2k+2$  elemű osztály a  $2k+3$  darab számunk közül, akkor úgy kapjuk a legtöbb azonos osztályú összeget, ha ezek közül választunk ki tetszőleges  $k+1$  darabot, ez legfeljebb  $\binom{2k+2}{k+1}$  azonos osztályú összeg.

Igazoltuk, hogy  $g(2k+3, k+1) \leq \binom{2k+2}{k+1}$ . Innentől pedig ha  $N > 2k+3$ , akkor a 6.4 lemma miatt  $g(N, k+1) \leq g(N-1, k+1) \cdot \frac{N}{N-k-1} \leq \binom{N-2}{k+1} \cdot \frac{N}{N-k-1} \leq \binom{N-2}{k+1} \cdot \frac{N-1}{N-k-2} = \binom{N-1}{k+1}$  indukció miatt vagy  $g(N, k+1) = \binom{N-1}{k}$  vagy  $g(N, k+1) = \binom{N-1}{k+1}$ . Mivel  $k+1 < \frac{N}{2}$ , ezért  $g(N, k+1) \leq \binom{N-1}{k+1}$  tényleg teljesül. Így az indukciós feltétel megmarad, tovább tudunk lépni  $k+1$ -re.

Emellett a 6.3 lemma miatt  $g(N, k+1) \geq \binom{N-1}{k+1}$ , ha  $k+1 < \frac{N}{2}$ . Tehát egyenlőség áll fenn,  $g(N, k+1) = \binom{N-1}{k+1}$ , ha  $k+1 < \frac{N}{2}$ . Indukcióval beláttuk a 6.6 állítást, azaz minden  $N$ -re, ha  $k < \frac{N}{2}$ , akkor  $g(N, k) = \binom{N-1}{k}$ .  $\square$

**6.8. Állítás.**  $k > \frac{n}{2}$  uniform esetben legfeljebb  $\binom{n-1}{k-1}$  racionális összeg lehet, ez a határ pedig éles.

*Bizonyítás.* A 6.7 következmény miatt tudjuk, hogy ha  $k > \frac{n}{2}$ , akkor  $g(n, k) = \binom{n-1}{k-1}$ , azaz legfeljebb ennyi azonos osztályú összeg lehet, speciálisan racionálisból is. Vegyünk egy  $-(k-1)\alpha$  irracionális számot és  $n-1$  darab  $\alpha$  irracionális számot. Ekkor pontosan  $\binom{n-1}{k-1}$  racionális összegünk lesz, így tényleg ez az extrémális struktúra. Ezzel igazoltuk az 1.3 Tétel ide vonatkozó korlátját.  $\square$

**6.9. Állítás.**  $k = \frac{n}{2}$  uniform esetben legfeljebb  $2\binom{n-2}{k-1}$  racionális összeg lehet, ez a korlát is éles.

*Bizonyítás.* A 6.3-as lemma és a 6.6-os állítás bizonyításából tudjuk, hogy  $g(2k, k) = 2\binom{2k-2}{k-1}$ , azaz legfeljebb ennyi összeg lehet racionális. Ennyi racionális összeg elérhető két darab  $-(k-1)\alpha$  irracionális számmal és  $2k-2$  darab  $\alpha$  irracionális szám esetén. Beláttuk az 1.3 Tétel ide vonatkozó állítását és megadtuk az extrémális struktúrát.  $\square$

Beláttuk az 1.3 Tétel állításait és a korlátra megadtuk az extrémális struktúrát is mindkét esetben.

## 7. Kétosztályú konstrukció optimuma

Ebben a fejezetben megfogalmazunk egy általános sejtést, hogy rögzített  $k$  esetén legfeljebb mennyi racionális összeg érhető el a  $k$ -uniform esetben.

**7.1. Sejtés.** Minden rögzített  $k$  esetén az 1.1 problémához tartozó extrémális struktúra két osztályú:  $\alpha$  és  $-\alpha$  valamilyen  $q \in \mathbb{Q}^+$ -ra.

Nézzük meg először rögzített  $t$  esetén mi lesz a két osztály elemszámának optimális elosztása. Azaz ha  $A+B=n$ , akkor milyen  $A$ -ra lesz  $\binom{A}{t} \cdot \binom{B}{k-t}$  maximális, hiszen ez a szorzat mutatja meg, hogy hányféleképpen tudunk a két osztályból előállítani összegeket  $t$  és  $k-t$  arányban.

**7.2. Állítás.** Rögzített  $t \leq k-t$  és  $k$  esetén  $\binom{A}{t} \cdot \binom{B}{k-t}$  akkor lesz maximális, ha  $A = \lfloor \frac{tn+t}{k} \rfloor$ , ekkor  $B = \lceil \frac{(k-t)n-t}{k} \rceil$ .

*Bizonyítás.* A bizonyítás két kisebb lemmára épül, melyeket a bizonyításon belül mondunk ki és fogunk belátni.  $\binom{A}{t} \cdot \binom{B}{k-t}$  ugyanakkor maximális, mint  $C = \frac{A}{t} \cdot \frac{A-1}{t} \cdot \dots \cdot \frac{A-t+1}{t} \cdot \frac{B}{k-t} \cdot \frac{B-1}{k-t} \cdot \dots \cdot \frac{B-k+t+1}{k-t}$  maximális.

**7.3. Lemma.** A  $C$  szorzat  $k$  darab szorzóból áll, ezek összege rögzített  $t$  esetén  $A$ -tól függetlenül állandó.

*Bizonyítás.*  $\frac{A}{t} + \frac{A-1}{t} + \dots + \frac{A-t+1}{t} + \frac{B}{k-t} + \frac{B-1}{k-t} + \dots + \frac{B-k+t+1}{k-t} = \frac{tA}{t} - \frac{\binom{t}{2}}{t} + \frac{(k-t)B}{k-t} - \frac{\binom{k-t}{2}}{k-t} = n - \frac{\binom{t}{2}}{t} - \frac{\binom{k-t}{2}}{k-t}$ , ami rögzített  $t$  esetén tényleg állandó.  $\square$

Innentől a  $C$  szorzatot a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséggel tudjuk maximalizálni. A szorzatban szereplő  $\frac{A}{t}, \frac{A-1}{t}, \dots, \frac{A-t+1}{t}$  szorzók egymástól  $\frac{1}{t}$  távolságra vannak, az első és utolsó szorzó különbsége  $\frac{t-1}{t}$ . Emellett a  $\frac{B}{k-t}, \frac{B-1}{k-t}, \dots, \frac{B-k+t+1}{k-t}$  szorzók egymástól  $\frac{1}{k-t}$  távolságra vannak, az első és utolsó szorzó különbsége  $\frac{k-t-1}{k-t}$ . Így amikor  $A$ -t eggyel csökkentjük  $B$  növelése mellett, akkor az  $\frac{A}{t}$  és  $\frac{B-k+t+1}{k-t}$  szorzók helyett kerülnek be az  $\frac{A-1}{t}$  és  $\frac{B+1}{k-t}$  szorzók. Ez akkor nem csökkenti a szorzatot, ha a két szorzó különbsége legfeljebb annyi, mint korábban (összegük állandó, két számra számtani-mértani egyenlőtlenség). Mivel az egyik szorzót eggyel csökkentettük, a másikat eggyel növeltük, ez pontosan akkor növel, ha eredetileg  $\frac{A}{t} - \frac{B-k+t+1}{k-t} > 1 \iff \frac{A}{t} - \frac{B+1}{k-t} > 0$ . Amikor pedig  $A$ -t eggyel növeljük  $B$  csökkentése mellett, akkor az  $\frac{A-t+1}{t}$  és  $\frac{B}{k-t}$  szorzók helyett kerülnek be az  $\frac{A+1}{t}$  és  $\frac{B-k+t}{k-t}$  szorzók. Ez pedig pontosan akkor növeli a szorzatot, ha  $\frac{B}{k-t} - \frac{A-t+1}{t} > 1 \iff \frac{B}{k-t} - \frac{A+1}{t} > 0$ .

**7.4. Lemma.** Ha  $A = \lfloor \frac{tn+t}{k} \rfloor$ , akkor a szorzat nem növelhető  $A$  eggyel való megváltoztatásával, míg minden más esetben eggyel megváltoztatva  $A$ -t legalább akkora szorzatot kapunk.

*Bizonyítás.* Ha  $A = \lfloor \frac{tn+t}{k} \rfloor = \frac{tn+t}{k} - \frac{a}{k}$  valamilyen  $0 \leq a < k$  egészre, akkor  $B = \lceil \frac{(k-t)n+1}{k} \rceil = \frac{(k-t)n-t}{k} + \frac{a}{k}$ , hiszen  $A + B$  egész.

(I) Így  $\frac{A+1}{t} = \frac{n+1}{k} - \frac{a}{tk} + \frac{1}{t} = \frac{n}{k} + \frac{k-a+t}{tk}$ , míg  $\frac{B}{k-t} = \frac{n}{k} + \frac{a-t}{(k-t)k}$ . Azaz  $\frac{B}{k-t} - \frac{A+1}{t} = \frac{a-t}{(k-t)k} - \frac{k-a+t}{tk} = \frac{ta-t^2-(k-a+t)(k-t)}{(k-t)tk} = \frac{ak-k^2}{(k-t)tk} = \frac{(a-k)k}{(k-t)tk} < 0$ , így  $A$  eggyel való növelésével nem tudunk optimalizálni.

(II) Emellett ekkor  $\frac{A}{t} = \frac{n+1}{k} - \frac{a}{tk} = \frac{n}{k} + \frac{t-a}{tk}$ , míg  $\frac{B+1}{k-t} = \frac{n}{k} + \frac{a-t+k}{(k-t)k}$ . Ekkor a szorzat növeléséhez szükséges különbség értéke:  $\frac{A}{t} - \frac{B+1}{k-t} = \frac{t-a}{tk} - \frac{a-t+k}{(k-t)k} = \frac{(k-t)(t-a)-t(a-t+k)}{(k-t)tk} = \frac{-ak}{(k-t)tk} \leq 0$ . Beláttuk, hogy  $A$  eggyel való csökkentésével sem tudjuk a szorzatot növelni.

$A$  eggyel való megváltoztatása nem növeli a szorzatot, mivel az összes szorzó közül a legkisebb és legnagyobb különbsége legfeljebb 1. Minden más esetben viszont ez a különbség legalább 1 lesz, így azoknál a szorzatoknál találunk legalább akkora másik szorzatot.  $\square$

Az  $\binom{A}{t} \cdot \binom{B}{k-t}$  szorzat is akkor maximális rögzített  $t \leq k-t$  esetén, ha  $A = \lfloor \frac{tn+t}{k} \rfloor$ , ekkor  $B = \lceil \frac{(k-t)n-t}{k} \rceil$ .  $\square$

**7.5. Következmény.** Elég egy adott  $n$  esetén megvizsgálni a  $\binom{\lfloor \frac{tn+t}{k} \rfloor}{t} \cdot \binom{\lceil \frac{(k-t)n-t}{k} \rceil}{k-t}$  szorzatokat és ezek közül megtalálni a maximálisat ( $t \leq k-t$ ).

## 8. 1.4 Probléma Összes képezhető összeg

Eddig az összegek adott méretűek voltak, de most vizsgáljunk egy másik kérdést, vegyük az összes képezhető összeget a számokból és ezek közül szeretnénk minél több racionálisat garantálni. A részben belátjuk az 1.5 Tétel felső korlátját és megadjuk az ehhez tartozó extrémális struktúrát. Az 5.1-es Lemma és következménye miatt ismét átfogalmazhatjuk a feladatot racionális számokkal, amelyek összegei között minél több nulla összegűt szeretnénk találni.

**8.1. Konstrukció.** Ha  $n$  számunk van, akkor elérhető  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  darab nulla összegű összeg.

*Bizonyítás.* Vegyünk  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  darab  $-1$ -est és  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$   $1$ -est. Ekkor azok az összegek lesznek nullák, amikben ugyanannyi  $1$ -es és  $-1$ -es van. Ebből összesen

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{i} \cdot \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i} \cdot \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{i} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

darab van.  $\square$

**8.2. Definíció.** Ebben a problémában legyen egy összeg előjeles elemszáma a benne lévő pozitív összeadandók számának és a benne lévő negatív összeadandók számának a különbsége.

Egy összeg előjeles elemszáma negatív is lehet.

**8.3. Állítás.** Legfeljebb  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  darab  $0$ -összeg lehet.

*Bizonyítás.* Vegyük az összes lehetséges összeget és ezek legyenek egy gráf csúcsai. Fusson irányított él az  $A$  összegből egy  $B$  összegbe ( $A, B$  az összeadandók halmazai az adott összegben), ha  $B$  pontosan eggyel több elemű, mint  $A$  és  $B \setminus A$  egyetlen pozitív számot tartalmaz vagy ha  $B$  pontosan eggyel kevesebb elemű, mint  $A$  és  $A \setminus B$  egyetlen negatív számot tartalmaz. Azaz minden összegből a nála eggyel nagyobb előjeles elemszámú halmazokba mutat irányított él. A legkisebb előjeles elemszámú összeg a csupa negatív számból álló összeg, míg a legnagyobb ilyen a csupa pozitív összeadandót tartalmazó összeg.

**8.4. Definíció.** Nevezünk most láncnak egy irányított utat a csupa negatív halmazból a csupa pozitív halmazig.

**8.5. Lemma.** Minden lánc  $n + 1$  különböző összeget tartalmaz és összesen  $n!$  különböző lánc van.

*Bizonyítás.* Minden pozitív szám pontosan egyszer kerül bele az összeadandók halmazába és benne marad a lánc során, míg minden negatív szám pontosan egyszer kerül ki belőle és nem kerülhet vissza. Így  $n$  szám esetén ez  $n$  lépés, azaz  $n + 1$  összeget tartalmaz egy lánc. Minden lépésben eldönthetjük, hogy az addig nem változtatott számok közül melyiket változtatjuk meg (negatív esetén vesszük ki, pozitív esetén tesszük be a halmazba). Így összesen  $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$  darab különböző lánc van.  $\square$

**8.6. Lemma.** Egy láncban csak egy nulla összegű összeg lehet.

Mivel egy lépésben (vagyis egy élen áthaladva) vagy egy pozitív szám kerül be az összegbe vagy egy negatív kerül ki, ezért az összeadandók összege szigorúan monoton nő a láncban. Emiatt legfeljebb egy 0 összeg lehet egy láncban.

**8.7. Lemma.** Minden összeg legalább  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil!$  darab láncban van benne.

*Bizonyítás.* A csupa pozitív összeg előjeles elemszáma legyen  $p$ , ekkor a csupa negatív összeg előjeles elemszáma  $-(n - p) = p - n$ . Ha egy összeg előjeles elemszáma  $k$ , akkor ehhez még  $p - k$  lépés kell, hogy eljusson a csupa pozitív összegbe. Emellett ez előtt a csupa negatív összegtől kezdve már  $n - p + k$  lépés történt. Ezek a lépések tetszőleges sorrendben lehettek, így ez a halmaz legalább  $(p - k)! \cdot (n - p + k)! \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil!$  különböző láncban szerepel.  $\square$

Ekkor a nulla összegek száma legfeljebb  $\frac{n!}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil!}$ , mivel összesen  $n!$  lánc van és minden láncban csak egy nulla összegű halmaz lehet.  $\frac{n!}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil!} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ , azaz tényleg legfeljebb ennyi összeg lehet nulla.  $\square$

Beláttuk az 1.5-ös tétel állítását, legfeljebb  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  racionális összeg lehet ebben a nem uniform esetben, erre konstrukciót adtunk.

## 9. 1.6 Probléma Intervallumokból alkotott összegek

Most vizsgáljunk egy másik nem uniform kérdést, amikor az összegeket a számok intervallumaiból képezzük és ezek közül szeretnénk a lehető legtöbb racionálisat találni. Így most csak bizonyos kapcsolatban álló számok összegeit vesszük, azonban tetszőleges elemszámút ezek közül. Ebben az esetben  $n$  szám mellett  $n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$  összeg képezhető, hiszen  $i$  elemű összegből pontosan  $n + 1 - i$  különböző lehetőség van  $1 \leq i \leq n$ .

Ebben a részben belátjuk az 1.7 Tétel állítását, miszerint legfeljebb  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  racionális összeg érhető el.

**9.1. Állítás.** Létezik konstrukció legalább  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  racionális összeggel.

*Bizonyítás.* Legyen  $n = 2m$  először páros. Ekkor vegyünk  $m$  darab  $\sqrt{2}$  számot és ugyanennyi  $-\sqrt{2}$  számot. Ezeket egészek hozzáadásával toljuk el egymáshoz képest, hogy felváltva helyezkedjenek el a növekvő sorrendben a különböző egészrésű számok. Ekkor bármilyen páros hosszú intervallumban a számok összege felírható  $B + (\sqrt{2} - \sqrt{2})$  alakban, ahol  $B$  egész, így az összeg ezekben tényleg racionális lesz.  $2m$  hosszú intervallumból 1 darab,  $2m - 2$  hosszúból 3 darab, ..., 2 hosszúból  $2m - 1$  darab van. Így ez összesen  $1 + 3 + \dots + 2m - 1 = m^2 = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  racionális összeg. Ha pedig  $n = 2m + 1$  alakú, akkor minden páros hosszú intervallumból még eggyel több van, mint az előbb, így ebben az esetben találunk  $m^2 + m = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  darab racionális összeget. Ezzel beláttuk az állítást, van ennyi racionális összeg.  $\square$

Megjegyezzük, hogy ez körülbelül az összes összeg számának a felét jelenti.

**9.2. Definíció.** Legyenek a számok növekvő sorrendben  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Nevezzük összegláncnak azon összezsorozatot, amelyek egy kezdőelemtől a következő szám hozzáadásával vannak generálva. Legyen az összeglánc kezdőeleme az az egy szám, amelytől kezdve a láncot generáljuk. Legyen az összeglánc hossza az a szám, ahány összeg van az adott összegláncban.

Például  $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_n$  egy összeglánc, a kezdőeleme  $a_1$  és hossza pedig  $n$ .

**9.3. Lemma.** Minden intervallumként képezhető összeg pontosan egy összegláncban szerepel.

*Bizonyítás.* Egy intervallumból képzett összeg egymás melletti számok összegéből áll. Vegyük az összeadandók közül a legkisebbet. Az ezáltal generált összegláncban szerepelni fog ez az összeg, amikor elérünk az ugyanennyi elemű generált összeghez. Más összegláncban nem szerepelhet ez az összeg, mert egy ilyenben minden összegben a legkisebb összeadandó megegyezik az összeglánc kezdőelemével. Minden összeg pontosan egy összegláncban szerepel.  $\square$

**9.4. Lemma.** Egy összegláncban legfeljebb az összegek felének alsó egészrésze lehet racionális.

*Bizonyítás.* Ha egy összegláncban szerepel egy racionális összeg, akkor az őt megelőző összeg biztos irracionális, hiszen ez a következő összegből egy irracionális szám kivonásával kapható meg. Emellett minden összeglánc első összege maga a kezdőeleme, ami egy irracionális szám. Így minden racionális összeget megelőz az összegláncában egy hozzátartozó irracionális összeg, azaz legfeljebb az összegek felének alsó egészrésze lehet racionális.  $\square$

**9.5. Állítás.** Legfeljebb  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  racionális összeg képezhető.

*Bizonyítás.* Tudjuk, hogy összesen  $n$  darab összegláncunk van, kezdőelemeik  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Ezek hosszai rendre  $n, (n-1), \dots, 2, 1$ , hiszen ennyi különböző összeget generálnak (láthatjuk, hogy a hosszok összege megegyezik az összes összeg számával, mivel minden összeg pontosan egy összegláncban szerepel). Minden összegláncban legfeljebb az összegek felének alsó egészrésze darabszámú lehet racionális, ez  $\lfloor n \rfloor + \lfloor n-1 \rfloor + \dots + 1 + 1 + 0$ . Ha  $n = 2m$ , akkor  $\lfloor 2m \rfloor + \lfloor 2m-1 \rfloor + \dots + 1 + 1 + 0 = m + (m-1) + (m-1) + \dots + 1 + 1 = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} = m^2$  darab racionális összeg, míg  $n = 2m+1$  esetén ez  $\lfloor 2m+1 \rfloor + \lfloor 2m \rfloor + \dots + 1 + 1 + 0 = m + m + \dots + 1 + 1 = 2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = m^2 + m$  darab. Legfeljebb  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  racionális összeg képezhető ilyen módon.  $\square$

Ezzel beláttuk az 1.7 Tétel állítását, legfeljebb  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  darab racionális összeg érhető el ebben az esetben, erre pedig megadtuk a konstrukciót.

## 10. Összefoglalás és nyitott kérdések

Megadtuk a racionális összegű szám- $k$ -asok maximális számát egy  $n$  irracionális számot tartalmazó halmaz esetén  $k = 2, 3$  és  $k \geq \frac{n}{2}$  esetén. Nyitott maradt a racionális összegek maximális száma  $(n, k)$  esetén, ha  $4 \leq k < \frac{n}{2}$ . A bizonyításunkból természetes sejtés, hogy adott  $(n, k)$  esetén a számok extrémális struktúrája pontosan két ekvivalenciaosztályból tartalmaz számokat modulo  $\mathbb{Q}$ .

**10.1. Konstrukció.** Legyen  $\alpha$  egy irracionális szám és legyen  $1 < k < n$ . Vegyük a halmazba  $\lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor$  reprezentánst  $\mathbb{Q} - \alpha(k-1)$ -ből és  $(n - \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor)$  darab reprezentánst  $\mathbb{Q} + \alpha$ -ból.

Ez a konstrukció igazolja a következő állítást.

**10.2. Állítás.** A racionális összegek maximális száma adott  $(n, k)$  esetén legalább  $\binom{n - \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor}{k-1} \cdot \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor$ .

**10.3. Sejtés.** Tegyük fel, hogy  $1 < k < n$ . Ekkor az  $n$  elemű irracionálisakból álló halmazba a racionális összegű szám- $k$ -asok maximális számát a 10.1 konstrukcióval tudjuk elérni.

Megjegyezzük, hogy beláttuk a 10.3 sejtést  $k = 2, 3$  és  $\frac{n}{2} \leq k < n$  esetén.

Rámutattunk a problémánk fő kérdésének kapcsolatára a 0-összegű kérdéskörrel, mégpedig, hogy a mi problémánk átfogalmazható 0-összegű szám- $k$ -asok darabszámának maximalizálására  $n$ -elemű sorozatokban vagy racionálisok, avagy ekvivalensen ezzel, egészek közt egy megfelelő vektortér homomorfizmus alkalmazásával.

Általánosságban, a problémánk alapkérdése értelmezhető úgy, hogy adott egy  $V$  vektortér egy hozzá tartozó  $W$  altérrel és a célunk minél több olyan összeget találni, amely  $W$ -be esik úgy, hogy az összeadandók mind  $W$ -n kívüliek. Egy olyan vektortérhomomorfizmust elvégezve, amelynek magja pontosan  $W$  (mint például amit az 5 fejezetben használunk), átfogalmazza a problémát 0-összegek keresésére, ahogy említettük.

Természetes gondolat hasonló kérdéseket feltenni általános csoportok esetén is, a jól ismert Davenport konstans és az Erdős-Ginzburg-Ziv konstans szellemében, melyekhez lásd a [4, 6, 7] hivatkozásokat.

**10.4. Probléma.** *Legyen  $G$  egy additív csoport és  $k < n$  egész számok. Mi a  $(k$ -elemű) részsorozatok maximális száma az  $n$ -elemű nemnulla számokból álló  $G$ -beli sorozatoknak, melyeknek összege 0?*

Ehhez kapcsolódóan, Bialostocki a következő kérdést tette fel.

**10.5. Sejtés** (Bialostocki, [2]). *Legyen  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  egészekből álló sorozat. Ekkor  $A$  tartalmaz legalább  $\binom{\lfloor n/2 \rfloor}{m} + \binom{\lceil n/2 \rceil}{m}$  0-összegű  $m$ -hosszú részsorozatot (mod  $m$ ).*

Ezt a sejtést Kisin látta be [10] abban az esetben, amikor  $m$  egy prímszám  $p^h$ , vagy pedig  $p^h \cdot q$  alakú, ahol  $p, q$  prímszámok, míg Füredi és Kleitman igazolta azokban az esetekben, amikor  $m$  vagy  $m = pq$  alakban írható vagy  $n$  elég nagy  $m$ -hez képest [5]. Később Grynkiewicz belátta a sejtést akkor is, amikor  $n$  nem túl nagy  $m$ -hez képest, egzaktan abban az esetben, amikor  $n < \frac{19}{3}m$  [9] teljesül. Tehát, a 10.5-ös sejtés ezeknek a minimális számára kíváncsi, míg a 10.4-es probléma a 0-összegek lehetséges maximumát keresi, komplementálva a korábbi Erdős-Ginzburg-Ziv típusú kérdéssel.

## Hivatkozások

- [1] Alon, N., Huang, H., Sudakov, B. (2012). Nonnegative  $k$ -sums, fractional covers, and probability of small deviations. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102(3), 784-796.
- [2] Bialostocki, A. (1989). Some combinatorial number theory aspects of Ramsey theory. *Research Proposal*
- [3] Caro, Y. (1996). Zero-sum problems—a survey. *Discrete Mathematics*, 152(1-3), 93-113.
- [4] Fan, Y., Gao, W., Zhong, Q. (2011). On the Erdős–Ginzburg–Ziv constant of finite abelian groups of high rank. *Journal of Number Theory*, 131(10), 1864-1874.
- [5] Füredi, Z., Kleitman, D. J. (1993) The minimal number of zero sums. In *Combinatorics: Paul Erdős is Eighty, Vol. 1* (D. Miklós, V. T. Sós and T. Szönyi, eds), Bolyai Society Mathematical Studies, Keszthely, Hungary, pp. 159-172.
- [6] Gao, W., Geroldinger, A. (2006). Zero-sum problems in finite abelian groups: a survey. *Expositiones Mathematicae*, 24(4), 337-369.
- [7] Geroldinger, A. (2009). Additive group theory and non-unique factorizations. *Combinatorial number theory and additive group theory*, 1-86.
- [8] Gerbner, D., Patkós, B. (2018). *Extremal finite set theory*. CRC Press.
- [9] Grynkiewicz, D.J. (2006). On the number of  $m$ -term zero-sum subsequences. *Acta Arith.* 121(3), 275–298.

- [10] Kisin, M. (1994). The number of zero sums modulo  $m$  in a sequence of length  $n$ . *Mathematika*, 41(1), 149-163.
- [11] Manickam, N., Miklós, D. (1987, July). On the number of non-negative partial sums of a non-negative sum. In *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai* (Vol. 52, pp. 385-392).
- [12] Manickam, N., Singhi, N. M. (1988). First distribution invariants and EKR theorems. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 48(1), 91-103.
- [13] Pokrovskiy, A. (2015). A linear bound on the Manickam–Miklós–Singhi conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 133, 280-306.
- [14] Sperner, E. (1928). Ein satz über untermengen einer endlichen menge. *Mathematische Zeitschrift*, 27(1), 544-548.