

Characterization of graphs with orientable total domination number equal to $|V| - 1$

Saját eredmények

- A tudományos kérdés bevezetése: Egy D irányított gráfban egy $S \subseteq V$ csúcshalmaz totálisan domináló halmaz, ha minden D -beli csúcs felé vezet legalább egy él az S csúcshalmaz valamelyik csúcsából. Egy irányított gráfban pontosan akkor létezik totálisan domináló halmaz, ha minden csúcs befoka legalább egy. A legkisebb totálisan domináló halmaz méretét D -ben a gráf *totális dominálási számának* nevezzük, a jele $\gamma_t(D)$.
- Egy egyszerű, irányítatlan gráf éleinek egy megirányítását *értékesnek* nevezzük, ha semelyik csúcs befoka sem 0. Egy egyszerű, irányítatlan gráf éleinek pontosan akkor létezik értékes irányítása, ha a gráf minden összefüggőségi komponensében van legalább egy kör. Az ilyen gráfok alkotják a $\mathcal{C}$ gráfosztályt, a továbbiakban ilyen gráfokat vizsgálunk.
- Egy egyszerű, irányítatlan G gráf éleinek vegyük az összes értékes irányítását. Az így kapott irányított gráfok totális dominálási számainak maximuma (vagy minimuma) a gráf *felső (vagy alsó) orientable totális dominálási száma*, ennek jele $\text{DOM}_t(G)$ (illetve $\text{dom}_t(G)$). Formálisan $\text{DOM}_t(G) = \max\{\gamma_t(D) : D \text{ értékes irányítása } G\text{-nek}\}$, és $\text{dom}_t(G) = \min\{\gamma_t(D) : D \text{ értékes irányítása } G\text{-nek}\}$.
- **Kérdés:** Karakterizáljuk azokat a gráfokat, amelyekre $\text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$.
- Sikertelen meghatároztam ezeket a gráfokat. Továbbá megvizsgáltam, hogy létezik olyan G gráf, amire $\text{dom}_t(G) < |V(G)| - 1 = \text{DOM}_t(G)$ teljesül, de olyan is létezik, amire a $\text{DOM}_t(G) - \text{dom}_t(G)$ különbség és a $\frac{\text{DOM}_t(G)}{\text{dom}_t(G)}$ hányados a lehető legnagyobb. $\text{dom}_t(G)$ lehet akár 3 is olyan gráfok esetén, ahol $\text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$.
- A bizonyítás során a gráf csúcsainak befokaira és kifokaira alsó és felső becslést adva, esetvizsgálattal és rekurzív megközelítéssel is meghatároztam a feltételnek megfelelő gráfokat.
- Három gráfcsaládot kaptam ami a feltételeknek megfelelő:
 - Az első gráfosztály az $\mathcal{F}_2$, itt minden csúcs fokszáma legalább 2. Az összefüggő gráf néhány körből és egy tőlük diszjunkt s csúcsból áll. Minden körből legalább egy él vezet az s csúcsba és az s csúcsnak legalább 2 a fokszáma.
 - A második gráfosztály az $\mathcal{F}_1$. Az ide tartozó gráfoknak legyen pontosan 1 db elsőfokú csúcsa, az s csúcs. Az s csúcsból vezessen egy út a w_k csúcsba. A gráfnak lehet még néhány körkomponense, amik mind legalább egy éllel csatlakoznak a w_k csúcsához és az sw_k út belső csúcsaiból is indulhat él a w_k csúcsba.
 - A harmadik gráfosztály az $\mathcal{F}_3$. Ezeket a gráfokat az $\mathcal{F}_1$ -beli gráfokból kapjuk meg, 1 vagy 2, az s -sel szomszédos él hozzávételével bizonyos extra feltételek mellett.