

Characterization of graphs with orientable total domination number equal to $|V| - 1$

Saját eredmények

- A tudományos kérdés bevezetése: Egy D irányított gráfban egy $S \subseteq V$ csúcshalmaz totálisan domináló halmaz, ha minden D -beli csúcs felé vezet legalább egy él az S csúcshalmaz valamelyik csúcsából. Egy irányított gráfban pontosan akkor létezik totálisan domináló halmaz, ha minden csúcs befoka legalább egy. A legkisebb totálisan domináló halmaz méretét D -ben a gráf *totális dominálási számának* nevezzük, a jele $\gamma_t(D)$.
- Egy egyszerű, irányítatlan gráf éleinek egy megirányítását *értékesnek* nevezzük, ha semelyik csúcs befoka sem 0. Egy egyszerű, irányítatlan gráf éleinek pontosan akkor létezik értékes irányítása, ha a gráf minden összefüggőségi komponensében van legalább egy kör. Az ilyen gráfok alkotják a $\mathcal{C}$ gráfosztályt, a továbbiakban ilyen gráfokat vizsgálunk.
- Egy egyszerű, irányítatlan G gráf éleinek vegyük az összes értékes irányítását. Az így kapott irányított gráfok totális dominálási számainak maximuma (vagy minimuma) a gráf *felső (vagy alsó) orientable totális dominálási száma*, ennek jele $\text{DOM}_t(G)$ (illetve $\text{dom}_t(G)$). Formálisan $\text{DOM}_t(G) = \max\{\gamma_t(D) : D \text{ értékes irányítása } G\text{-nek}\}$, és $\text{dom}_t(G) = \min\{\gamma_t(D) : D \text{ értékes irányítása } G\text{-nek}\}$.
- **Kérdés:** Karakterizáljuk azokat a gráfokat, amelyekre $\text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$.
- Sikertelen meghatároztam ezeket a gráfokat. Továbbá megvizsgáltam, hogy létezik olyan G gráf, amire $\text{dom}_t(G) < |V(G)| - 1 = \text{DOM}_t(G)$ teljesül, de olyan is létezik, amire a $\text{DOM}_t(G) - \text{dom}_t(G)$ különbség és a $\frac{\text{DOM}_t(G)}{\text{dom}_t(G)}$ hányados a lehető legnagyobb. $\text{dom}_t(G)$ lehet akár 3 is olyan gráfok esetén, ahol $\text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$.
- A bizonyítás során a gráf csúcsainak befokaira és kifokaira alsó és felső becslést adva, esetvizsgálattal és rekurzív megközelítéssel is meghatároztam a feltételnek megfelelő gráfokat.
- Három gráfcsaládot kaptam ami a feltételeknek megfelelő:
 - Az első gráfosztály az $\mathcal{F}_2$, itt minden csúcs fokszáma legalább 2. Az összefüggő gráf néhány körből és egy tőlük diszjunkt s csúcsból áll. Minden körből legalább egy él vezet az s csúcsba és az s csúcsnak legalább 2 a fokszáma.
 - A második gráfosztály az $\mathcal{F}_1$. Az ide tartozó gráfoknak legyen pontosan 1 db elsőfokú csúcsa, az s csúcs. Az s csúcsból vezessen egy út a w_k csúcsba. A gráfnak lehet még néhány körkomponense, amik mind legalább egy éllel csatlakoznak a w_k csúcsához és az sw_k út belső csúcsaiból is indulhat él a w_k csúcsba.
 - A harmadik gráfosztály az $\mathcal{F}_3$. Ezeket a gráfokat az $\mathcal{F}_1$ -beli gráfokból kapjuk meg, 1 vagy 2, az s -sel szomszédos él hozzávételével bizonyos extra feltételek mellett.

Characterization of graphs with orientable total domination number equal to $|V| - 1$ - magyar nyelvű összefoglaló

Nagy Leila Vivien*

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest (Magyarország)

Matematika BSc 2. év

leilanagy@student.elte.hu

Témavezető: Blázsik L. Zoltán

SZTE TTIK Bolyai Intézet, Szeged (Magyarország)

egyetemi adjunktus

blazsik@server.math.u-szeged.hu

Egy D irányított gráfban egy $S \subseteq V$ csúcshalmaz totálisan domináló halmaz, ha minden D -beli csúcs felé vezet legalább egy él az S csúcshalmaz valamelyik csúcsából. Egy irányított gráfban pontosan akkor létezik totálisan domináló halmaz, ha minden csúcs befoka legalább egy. A legkisebb totálisan domináló halmaz méretét D -ben a gráf *totális dominálási számának* nevezzük, a jele $\gamma_t(D)$.

Egy egyszerű, irányítatlan gráf éleinek megírását *érvényesnek* nevezzük, ha semelyik csúcs befoka sem 0. Belátható, hogy egy egyszerű, irányítatlan gráf éleinek pontosan akkor létezik érvényes irányítása, ha a gráf minden összefüggőségi komponensében van legalább egy kör. Az ilyen gráfok alkotják a $\mathcal{C}$ gráfosztályt, a továbbiakban ilyen gráfokat vizsgáljuk.

Egy egyszerű, irányítatlan G gráf éleinek vegyük az összes érvényes irányítását. Az így kapott irányított gráfok totális dominálási számainak maximuma (vagy minimuma) a gráf *felső (vagy alsó) orientable totális dominálási száma*, ennek jele $\text{DOM}_t(G)$ (illetve $\text{dom}_t(G)$). Azaz formálisan $\text{DOM}_t(G) = \max\{\gamma_t(D) : D \text{ érvényes irányítása } G\text{-nek}\}$, és a másik fogalom $\text{dom}_t(G) = \min\{\gamma_t(D) : D \text{ érvényes irányítása } G\text{-nek}\}$.

Korábbi cikkekben [8, 9] megmutatták, hogy $\text{DOM}_t(G) = |V(G)| = \text{dom}_t(G)$ akkor és csak akkor, ha G körök diszjunkt uniója.

Anderson és munkatársai [1] vizsgálták az orientable totális dominálási számok alsó és felső korlátjait, és jellemezték azokat a gráfokat, amelyekben a legrövidebb kör hossza legalább 7 és teljesül, hogy $\text{DOM}_t(G) = \text{dom}_t(G)$, valamint karakterizálták azokat a gráfokat is, amelyekre $\text{dom}_t(G) = |V(G)| - 1$. Bevezették a $\mathcal{F}$ gráfcsaládot, mely azon gráfok halmaza, amelyek előállíthatók egy $k \geq 3$ hosszú C_k körből és egy $\ell \geq 2$ csúcsszámú P_ℓ útból úgy, hogy az út egyik végét azonosítjuk a kör egy tetszőleges csúcsával.



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM

* keretében valósult meg.

A kutatás az ÚNKP-23-6-I-ELTE-1256 Új Nemzeti Kiválósági Program

Tétel 1 (Anderson et al. [1]). Legyen $G \in \mathcal{C}$ egy összefüggő gráf. Ekkor $\text{dom}_t(G) = |V(G)| - 1$ akkor és csak akkor, ha $G \in \mathcal{F} \cup \{K_4, K_{2,3}, K_4 - e\}$.

Ugyanebben a cikkben problémaként felvetették, hogy létezik-e olyan gráf G , amelyre $\text{dom}_t(G) < \text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$ teljesül. Azt ők is észrevették, hogy ha $\text{dom}_t(G) = |V(G)| - 1$, akkor $\text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$ is teljesül.

Probléma 2. Karakterizáljuk azokat a gráfokat, amelyekre $\text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$.

Az volt tehát a kutatási kérdés, amit a témavezetőmtől kaptam, hogy találjuk meg azokat a gráfokat, ha egyáltalán léteznek, amelyekre $\text{dom}_t(G) < \text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$ fennáll. A szerzők a cikkükben kifejezték, hogy azt képzelik, hogy ilyen gráfoknak kellene létezniük, amit sikerült igazolni, ráadásul pontosan karakterizáltam ezeket a gráfcsaládokat.

Bevezetünk további összefüggő gráfcsaládokat, hogy megfogalmazhassuk a fő eredményünket. Egy $G \in \mathcal{C}$ összefüggő gráf az $\mathcal{F}_2$ gráfcsaládba tartozik, ha $\delta(G) \geq 2$ (ahol $\delta(G)$ jelöli a G minimális fokszámát), és G tartalmaz $\ell \geq 1$ páronként diszjunkt kört és egy további s csúcsot. A G további élei s -hez kapcsolódnak úgy, hogy s minden körkomponens legalább egy csúcsával szomszédos, és $d(s) \geq 2$.

Legyen $\mathcal{F}_1$ egy olyan család, amely a [1] cikkben definiált $\mathcal{F}$ családból konstruálható a következő módon. Ha egy $G \in \mathcal{C}$ összefüggő gráf az $\mathcal{F}_1$ családba tartozik, akkor $\delta(G) = 1$ teljesül, és G -nek pontosan egy darab egy fokszámú csúcsa van, az s . Ezenkívül G tartalmaz egy $sw_1w_2 \dots w_k$, $k \geq 1$ hosszúságú utat, és G tartalmazhat $\ell \geq 0$ páronként diszjunkt körkomponenst. Minden további él w_k -hoz kapcsolódik úgy, hogy w_k szomszédos minden körkomponens legalább egy csúcsával, és $d(w_k) \geq 2$. Megfigyelhető, hogy ha $\ell = 1$ és $d(w_k) = 2$, akkor ezek a gráfok pontosan az $\mathcal{F}$ elemei. Továbbá, ha egy $G \in \mathcal{F}_2$ gráfot egy úttal bővítünk úgy, hogy az út egyik végpontját s -sel azonosítjuk, és további éleket adunk az út belső csúcsai és s között, akkor minden olyan gráfot megkaphatunk, amely az $\mathcal{F}_1$ -be tartozik és legalább egy körkomponense van, azaz $\ell \geq 1$. Így $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$, és K_4 , $K_{2,3}$, valamint $K_4 - e$ az $\mathcal{F}_2$ elemei.

Legyen $\mathcal{F}_3$ egy újabb összefüggő gráfokból álló család, melyek a $\mathcal{C}$ elemei és az $R \in \mathcal{F}_1$ gráfból konstruálhatóak. G vagy egy, vagy kettő további élben különbözik R -től. Vegyük az R -ben található s csúcsot az $\mathcal{F}_1$ definíciója szerint. Ha G és R között csak egy él, e a különbség, akkor e -nek s -hez kell kapcsolódnia, de e másik végpontja bármelyik csúcs lehet. Ha G és R pontosan két élben, e_1 , e_2 különbözik, akkor mindkét élnek s -hez kell kapcsolódnia, de további feltételeknek is teljesülniük kell. A precíz definíció elég technikai, így az összefoglalóban ezt nem részletezem.

Tétel 3. Legyen $G \in \mathcal{C}$ egy összefüggő gráf. Ekkor $\text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$ akkor és csak akkor, ha $G \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$. Ha $G \in \mathcal{C}$ nem összefüggő, de $\text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$, akkor G néhány kör és egy $G_0 \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ gráf diszjunkt uniója.

A továbbiakban vázlatosan összefoglalom a bizonyítás főbb lépéseit. Az első fontos megfigyelésünk az volt, hogy a totális dominálás esetén a gráf különböző komponensei nem befolyásolják egymást. Így elég ezt a kérdést összefüggő gráfok esetében vizsgálnunk, majd

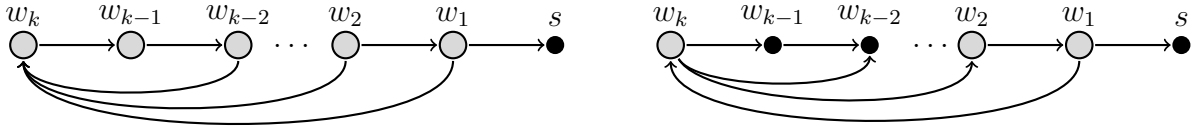
a kapott gráfokhoz hozzávéve tetszőlegesen sok diszjunkt kört szintén megfelelő gráfokat kapunk.

A bizonyítás során a gráf csúcsainak befokaira és kifokaira alsó és felső becslést adva, esetvizsgálattal és rekurzív megközelítéssel is meghatároztam a feltételnek megfelelő gráfokat.

Az egyik, a bizonyítás során használt fontos segédállítás a következőt mondja ki: ha $\text{DOM}_t(G) = |V| - 1$, akkor nem létezhet olyan S csúcshalmaz a gráfban, amely egy legalább $|S| + 2$ méretű csúcshalmazt dominál. Ha létezne ilyen csúcshalmaz, az azt jelentené, hogy ha az S halmazt bevesszük a totálisan domináló halmazba, akkor a maradék $|V| - (|S| + 2)$ csúcs dominálásához biztosan elég még legfeljebb $|V| - (|S| + 2)$ db csúcsot bevennünk a totálisan domináló halmazba az összes csúcs totális dominálásához. Ez azt jelenti, hogy létezik a gráf ezen irányításában egy legfeljebb $|V| - 2$ méretű totálisan domináló halmaz, ami ellentmondás.

Ezeknek a megfigyeléseknek a segítségével sikerült meghatároznom azokat a gráfokat, amikre $\text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$ teljesül. Így kiderült, hogy nemcsak hogy létezik olyan G gráf, amire $\text{dom}_t(G) < |V(G)| - 1 = \text{DOM}_t(G)$ teljesül, de olyan is létezik, amire a $\text{DOM}_t(G) - \text{dom}_t(G)$ különbség és a $\frac{\text{DOM}_t(G)}{\text{dom}_t(G)}$ hányados a lehető legnagyobb. Kiderült, hogy $\text{dom}_t(G)$ lehet akár 3 is olyan gráfok esetén, ahol $\text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$.

Vegyük észre, hogy $\text{dom}_t(G) \geq 3$ mindig teljesül, mivel G egyszerű gráf. Valóban, egy csúcs nem dominálhatja totálisan saját magát (nincsenek hurokélek), és két csúcs nem dominálhatja totálisan egymást (nincsenek párhuzamos élek). Ezért ezek a példák a legjobbak $\frac{\text{DOM}_t(G)}{\text{dom}_t(G)}$ és $\text{DOM}_t(G) - \text{dom}_t(G)$ maximalizálására. Az 1. ábrán egy ilyen példát mutatok.



Ábra 1: Egy példa $G \in \mathcal{F}_1$ gráfra, amelyre $3 = \text{dom}_t(G) < \text{DOM}_t(G) = |V(G)| - 1$ teljesül. A szürke csúcsok jelölik a minimális totális domináló halmazokat G mindkét irányításában.

Ezen a példán a két irányítás jelentősen különbözik a w_k -hoz csatlakozó éleknél. Minél nagyobb w_k kifoka, annál kisebb lehet $\text{dom}_t(G)$. Ezért vannak a 1 ábrához hasonló példák, amelyekre $\text{dom}_t(G) = m$ bármely $3 \leq m \leq |V(G)| - 1$ esetén.

Irodalomjegyzék

- [1] S.E. ANDERSON, T. DRAVEC, D. JOHNSTON, K. KUENZEL: Orientable total domination in graphs. (*arXiv preprint*: <https://arxiv.org/abs/2311.16307>)

- [2] T.W. HAYNES, S.T. HEDETNIEMI, M.A. HENNING (EDS): Topics in Domination in Graphs. Series: Developments in Mathematics, **Vol. 64**, Springer, Cham, (2020), viii + 545 pp.
- [3] T.W. HAYNES, S.T. HEDETNIEMI, M.A. HENNING (EDS): Structures of Domination in Graphs. Series: Developments in Mathematics, **Vol. 66**, Springer, Cham, (2021), viii + 536 pp.
- [4] T.W. HAYNES, S.T. HEDETNIEMI, M.A. HENNING: Domination in Graphs: Core Concepts. Series: Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2023. xx + 644 pp.
- [5] M.A. HENNING, A. YEO: Total Domination in Graphs. *Series: Springer Monographs in Mathematics*, Springer, Cham, (2013), xiv + 178 pp.
- [6] S.E. ANDERSON, B. BREŠAR, S. KLAVŽAR, K. KUENZEL, D.F. RALL: Orientable domination in product-like graphs. *Discrete Appl. Math.*, **326**, (2023), 62–69.)
- [7] Y. CARO, M.A. HENNING: Directed domination in oriented graphs. *Discrete Appl. Math.*, **160**, (2012), 1053–1063.
- [8] L. HANSEN, Y-L. LAI, AND B.Q. YUE: Orientable open domination of graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **29**, (1999), 159–181.
- [9] L. HOLLEY, Y-L. LAI, AND B.Q. YUE: Orientable step domination in graphs. *Congressus Numerantium*, (1996), 129–144.