

A p -adikus affin varietások fraktál zéta-függvényei

Robin Eszter

Témavezető: Tóth Árpád

A dolgozat egy valósokra kidolgozott elmélet általánosításáról szól.

Lapidus és Van Frankenhuysen bemutatta az $\mathbb{R}$ -en a fraktál hurok elméletét. Az általuk bevezetett fogalmak általánosíthatók olyan metrikus terekre, amelyek topologikus csoportok is. Ebben a tanulmányban arra a speciális esetre koncentrálok, amikor a kérdéses csoport a $(\mathbb{Z}_p, +)$.

A valósokra bevezetett fogalmak megadásával a p -adikus egészen definiáltam a p -adikus fraktál zéta-függvényt. Bizonyítottam, hogy affin varietások komplementere $\mathbb{Z}_p$ -ben mindig egy p -adikus fraktál húr. A bizonyításból megmutattam, hogy a p^{-k} sugarú gömbök száma kifejezhető a $\bmod p^k$ és $\bmod p^{k-1}$ pontok számának függvényében, így ezek segítségével egy képletet adtam az affin varietásokhoz tartozó p -adikus fraktál zéta-függvényre. A továbbiakban az affin varietásokhoz tartozó p -adikus fraktál zéta-függvények fő tulajdonságaival foglalkoztam.

Megmutattam nem szinguláris affin varietásokra, hogy a hozzájuk tartozó p -adikus fraktál zéta-függvény mindig racionális $T = p^{-s}$ -ben. Ennek a bizonyításnak kulcs lépése egy lemma volt, ami egy rekurzív képletet ad a $\bmod p^k$ pontok számára. Amit behelyettesítve a p -adikus fraktál zéta-függvény fentebb említett képletébe egy mértani sort kapunk, ami kifejezhető racionális függvényként.

A kutatás egyik fő célja annak a valós fraktál hurokra vonatkozó állításnak bizonyítása volt, hogy a fraktál húr Minkowski-dimenziója és a hozzátartozó fraktál zéta-függvény konvergencia határa megegyezik. A p -adikus fraktál zéta-függvény megfelelő definiálásával nem szinguláris affin varietásra öröklődik ez a tulajdonság. Ezt úgy bizonyítottam, hogy külön-külön a varietás Minkowski-dimenziójáról és a p -adikus fraktál zéta-függvény konvergencia határáról is beláttam, hogy az algebrai dimenzióval esik egybe.

Végül egy zárt képletet is adtam az affin varietásokkal kapcsolatos p -adikus fraktál zéta-függvényre. Ehhez megjegyeztem, hogy minden affin varietás kifejezhető egy polinom nullhelyeként is, majd főideálok affin varietásaival kapcsolatos függvényeket vizsgáltam: a p -adikus fraktál zéta-függvényt, a varietás generátor függvényét és az Igusa lokális zéta-függvényt. Ezek egymás lineáris függvényei, így a p -adikus fraktál zéta-függvény megadható egy p -adikus integrálként, és mivel Igusa belátta, hogy az Igusa lokális zéta-függvény racionális, ez bizonyítja a p -adikus fraktál zéta-függvény racionalitását általános, szinguláris esetre is.

Összefoglalva a fő eredmények:

1. A fraktál húr és a fraktál zéta-függvény definíciójának általánosítása p -adikus egészekre.
2. Affin varietásokhoz kapcsolódó p -adikus fraktál zéta-függvény megadása $(\zeta_{V(I)}(s))$.
3. $\zeta_{V(I)}(s)$ p^{-s} -ben való racionalitásának bizonyítása.
4. Nem szinguláris varietásra $\zeta_{V(I)}(s)$ konvergencia határának és a Minkowski-dimenzió egybeesésének megmutatása.
5. $\zeta_{V(I)}(s)$ megadása p -adikus integrálként.