

A p -adikus affin varietások fraktál zéta-függvényei

Robin Eszter

Témavezető: Tóth Árpád

A dolgozatom témája a p -adikus affin varietásokkal kapcsolatos fraktál zéta-függvények. Pályamunkámban egy Lapidus és Van Frankenhuysen által a valósokra kidolgozott elméletet, a fraktál húrok elméletét általánosítottam a p -adikus egészekre.

Egy *fraktál húr* a valósokon egy korlátos nyílt halmaz, tehát megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallum uniója. Egy ilyen halmazhoz így hozzárendelhető az intervallumok hossza: $\mathcal{L} = l_1, l_2, l_3, \dots$. Feltéhetjük, hogy ezekből végtelen van, és hogy ezeket monoton csökkenő módon soroltuk fel.

Egy ilyen fraktál húrhoz így hozzárendelhetjük a következő fraktál zéta-függvényt:

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} l_j^s$$

A fraktál zéta-függvény konvergencia határa a következőképpen definiálható:

$$\sigma_{\mathcal{L}} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^{\infty} l_j^s \text{ konvergál, ha } \operatorname{Re} s > \alpha\}$$

A Minkowski-dimenzió többféleképp megadható, itt a fraktál húr belső ε -tubusának segítségével definiáljuk:

$$D_{\mathcal{L}} = \inf\{\alpha \geq 0 : \operatorname{vol}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{1-\alpha}) \text{ ahogy } \varepsilon \rightarrow 0^+\}$$

ahol

$$\operatorname{vol}(\varepsilon) = \operatorname{vol}_1\{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}$$

az ε -tubus mértéke.

Lapidus és Van Frankenhuysen megfigyelte és bizonyította, hogy a fraktál zéta-függvény konvergencia határa és Minkowski-dimenziója mindig egybeesik:

$$\forall \mathcal{L} : D_{\mathcal{L}} = \sigma_{\mathcal{L}}$$

A kutatás egyik fő célja ennek az állításnak általánosítása volt a p -adikus egészekre.

Egy *p -adikus fraktál húr* (V) megszámlálható sok diszjunkt gömb uniója. $\mathbb{Z}_p$ -ben minden gömb nyílt-zárt. Mivel $\mathbb{Z}_p$ korlátos, egy halmaz pontosan akkor fraktál húr benne, ha korlátos és megszámlálható sok diszjunkt nyílt gömb uniója. És valósakon is a fraktál húr definíciója ekvivalens azzal, hogy a halmaz korlátos és megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallum uniója.

A p -adikus számokon érdekesen viselkednek a gömbök, abból a szempontból, hogy két gömb egybeeshet akkor is, ha sugaruk és középpontjuk sem egyezik, de csak akkor, ha a középpontok és sugarak kellően közel vannak egymáshoz:

$$B_r(x) = B_s(y) \iff \exists k((p^{-(k+1)} < r, s \leq p^{-k}) \wedge (d_p(x, y) < p^{-k}))$$

A gömbök ezen tulajdonságai miatt nem egyértelmű egy p -adikus fraktál húr felbontása, ezért azt rendeljük hozzá, ami csak olyan gömbökből áll, amely tartamazásra nézve maximális, és minden gömb sugara p^{-k} alakú. Ekkor a hozzá tartozó p -adikus fraktál zéta-függvény

$$\zeta_V(s) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j p^{-js}$$

ahol k_j a p^{-j} sugarú gömbök száma a p -adikus fraktál húrhoz rendelt maximális gömb felbontásban.

Legyen $I \subset \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ véges sok polinom egy halmaza. Ekkor a hozzá tartozó affin varietás:

$$V(I) = \{x \in \mathbb{Z}_p^n : f(x) = 0, \forall f \in I\}$$

Dolgozatomban megmutattam, hogy $\mathbb{Z}_p^n \setminus V(I)$ egy p -adikus fraktál húr. A bizonyításból az is kijött, hogy a felbontásában a p^{-k} sugarú gömbök száma $p^n N(p^{k-1}) - N(p^k)$, ahol $N(p^k)$ az I -t alkotó véges sok polinom közös mod p^k megoldásainak száma, azaz

$$N(p^k) = |\{x \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^n : f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}, \forall f \in I\}|$$

Így egy affin varietáshoz, hozzárendelhető a komplementere p -adikus fraktál zéta-függvénye:

$$\zeta_{V(I)}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (p^n N(p^{k-1}) - N(p^k)) p^{-ks}$$

Továbbiakban ezen fraktál zéta-függvénnyel foglalkoztam, melynek a kutatás során három tulajdonságát vizsgáltuk:

1. $\zeta_{V(I)}(s)$ racionális $T = p^{-s}$ -ben
2. nem szinguláris varietásra öröklődött az a tulajdonság, hogy a $\zeta_{V(I)}(s)$ konvergencia határa és a varietás Minkowski-dimenziója egybeesik
3. $\zeta_{V(I)}(s)$ megadható zárt képlettel

A racionalitásra csak nem szinguláris esetre adtam bizonyítást a dolgozatban, ennek alapja egy lemma volt, ami egy rekurzív formulát ad a mod p^k megoldások számára a mod p megoldások számának függvényében:

$$N(p^k) = p^{(n-m)(k-1)} N(p)$$

ahol $n - m$ a varietás algebrai dimenziója. A lemmát hasznosítva behelyettesítettem a zéta-függvénybe így egy mértani sort kaptam, ami megadható egy racionális függvényként:

$$\begin{aligned} \zeta_{V(I)}(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} (p^n N(p^{k-1}) - N(p^k)) p^{-ks} \\ &= N(p) \sum_{k=1}^{\infty} (p^{(n-m)(k-2)+n} - p^{(n-m)(k-1)}) p^{-ks} \\ &= N(p) (p^m - 1) \frac{T}{1 - p^{n-m} T} \end{aligned}$$

Az örökölt tulajdonság bizonyításához, a korábbi rekurzív képletet használva mind a konvergencia határról, mind a Minkowski-dimenzióról látható, hogy egybeesik az algebrai dimenzióval nem szinguláris esetben:

A konvergencia határa a $\zeta_{V(I)}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j p^{-js}$ p -adikus fraktál zéta-függvénynek a következő érték:

$$\sigma_{V(I)} = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^{\infty} k_j p^{-js} \text{ konvergál, ha } \operatorname{Re} s > \alpha \}$$

A rekurzív képletet behelyettesítve:

$$\zeta_{V(I)}(s) = N(p)(p^{-(n-2m)} - p^{-(n-m)}) \sum_{k=1}^{\infty} (p^{n-m-s})^k < \infty$$

$$\iff n - m < \operatorname{Re} s$$

A Minkowski-dimenzió ismét definiálható az ε -tubus segítségével:
Az affin varietás ε -tubusának mértéke:

$$\operatorname{vol}(\varepsilon) = \lambda(\{x \in \mathbb{Z}_p^n \setminus V(I) \mid \exists y \in V(I) : |x - y|_p < \varepsilon\}).$$

Ebből a varietás Minkowski-dimenziója:

$$D_{V(I)} = \inf\{\alpha \geq 0 : \operatorname{vol}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{n-\alpha}) \text{ ahogy } \varepsilon \rightarrow 0^+\}$$

Ha $\varepsilon = p^{-l}$, akkor azt vizsgáljuk, hogy mekkora a mértéke annak a halmaznak, amely p^{-l} -nél kisebb távolságra van a varietás $\bmod p^l$ pontjaitól a komplementerben:

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(p^{-l}) &= N(p) \sum_{k=l+1}^{\infty} (p^{(n-m)(k-2)+n} - p^{(n-m)(k-1)}) p^{-nk} = \\ &= N(p)(p^{-(n-2m)} - p^{-(n-m)}) \sum_{k=l+1}^{\infty} p^{-mk} = \\ &= N(p)(p^{-(n-2m)} - p^{-(n-m)}) \cdot \frac{p^{-ml}}{p^m - 1} = \frac{N(p)}{p^{(n-m)}} p^{-ml} \end{aligned}$$

Ennek vége az ε szerinti logaritmusát megkapjuk, hogy az így definiált Minkowski-dimenzió egybeesik az algebrai dimenzióval:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \log_{p^{-l}}(\operatorname{vol}(p^{-l})) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\log(N(p)) - (lm + n - m) \log(p)}{-l \log(p)} = m$$

De a szokásos dobozdimenzióként is definiálható a Minkowski-dimenzió:

$$\dim_{\mathcal{M}}(V(I)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N((V(I), \varepsilon))}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

Mivel a $\bmod p^k$ megoldások p^{-k} sugarú környezetei megadnak egy optimális fedést:

$$\dim_{\mathcal{M}}(V(I)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(p^{(n-m)(k-1)} N(p))}{k \log(p)} = n - m$$

Ezzel bizonyítva, hogy egy $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ felett nem szinguláris varietás Minkowski-dimenziója megegyezik a p -adikus zéta-függvény konvergencia határával.

A zárt képlet megadásához elég azokat a varietásokat vizsgálni, amiket főideálok definiálnak, mert minden varietás egy polinom nullhelyeiként is leírható. Ekkor a zárt formula három zéta-függvény kapcsolatán múlik:

Az affin varietáshoz kapcsolódó p -adikus zéta-függvény:

$$\zeta_{V(f)}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (p^n N(p^{k-1}) - N(p^k)) p^{-ks}$$

A varietás generátor függvénye, a Poincaré-sor:

$$P_{V(f)}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} N(p^k) p^{-nk} T^k$$

Igusa lokális zéta-függvénye:

$$Z_{V(f)}(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s d\lambda(x)$$

Ezek egymás lineáris függvényei:

$$\zeta_{V(f)}(s) = (p^n T - 1) P_{V(f)}(p^n T) + 1$$

Igusa megmutatta (1975):

$$Z_{V(f)}(s) = \frac{(p^{-s} - 1) P_{V(f)}(p^{-s}) + 1}{p^{-s}}$$

A korábbiakból következik, hogy

$$\zeta_{V(f)}(s) = p^{-(n-s)} Z_{V(f)}(-(n-s)) = p^{-(n-s)} \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^{-(n-s)} d\lambda(x)$$

így kifejezve a p -adikus fraktál zéta-függvényt egy p -adikus integrálként.

Mivel Igusa belátta, hogy az Igusa lokális zéta-függvény racionális, ez általános, szinguláris esetre is mutatja a p -adikus fraktál zéta-függvény racionalitását p^{-s} -ben.