

Ebben a tanulmányban a [?] által bevezetett módszert használjuk, hogy analitikus formulát állítsunk fel mind a pozitív definit szimmetrikus mátrixok egész számok feletti,  $\mathbb{Z}$ , mind pedig a pozitív definit Hermit-mátrixok Eisenstein-gyűrű feletti,  $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ , osztályszámának kiszámításához, ahol  $\omega$  az egység primitív harmadik gyöke. Algebrai technikák alkalmazásával meghatározunk egy alaptartományt, és egy izomorf leképezést konstruálunk, amely ezt a tartományt a  $\mathbb{Z}$  feletti pozitív definit szimmetrikus mátrixok esetében egy tetraéderre képezi le. Hasonlóképpen, a  $R$  feletti pozitív definit Hermit-mátrixok alaptartományából egy négy dimenziós konvex poliédere isomorf leképezést hozunk létre. Mindkét típusú pozitív definit mátrix esetében definiálunk egy izomorfizmust, amely minden mátrixot egyedi pontra képez le, ezek a pontok együttesen egy konvex kúpot alkotnak. Térfogati formulák segítségével egy ekvivalens egységpartíciót definiálunk, és alkalmazzuk a ?? tételt az osztályszámok meghatározására. Legyen  $H_D$  a Hurwitz osztályszám, amely az  $SL_2(R)$ -orbitok száma, stabilizátoraikkal súlyozva, és megmutatjuk, hogy

$$H_D = \frac{D^2}{3\pi} \cdot \sum \frac{2a + b_1 + 2d}{d(a+d)(a+b_1+d)(a+b_2+d)(a+b_1-b_2+d)}$$

ahol az összeg  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$  pozitív definit Hermit-mátrixokon megy végbe  $R$  felett, amelyek determinánsa  $D$ .

**Theorem 0.1.** Legyen  $y = \begin{pmatrix} a & b_1+b_2\omega \\ b_1+b_2\bar{\omega} & d \end{pmatrix}$ , ekkor definiáljuk:

$$\rho(y) := \frac{\det(y)^2}{3\pi} \cdot \frac{2a + b_1 + 2d}{d(a+d)(a+b_1+d)(a+b_2+d)(a+b_1-b_2+d)}.$$

Ekkor  $\rho$  ekvivalens egységpartíciót indukál, ahogy az a ??-ban szerepel.

*Proof.* Amint azt láttuk ??-ben:

$$\text{vol}(\mathcal{P} \cap F_y) = \sum_{g \in PSL_2(R)} \text{vol}(\varphi(g)\mathcal{M} \cap F_y).$$

A ?? használatával:

$$\text{vol}(\mathcal{P} \cap F_y) = \sum_{g \in PSL_2(R)} \text{vol}(\mathcal{M} \cap F_{\varphi(g)y}).$$

Mivel 5.11-ből

$$\frac{\pi}{48} \det(y)^2 = \sum_{g \in PSL_2(R)} \text{vol}(\mathcal{M} \cap F_{\varphi(g)y}).$$

A ?? lemma szerint:

$$\text{vol}(\mathcal{M} \cap F_{\varphi(g)y}) = \rho(\varphi(g)y) \cdot \frac{48 \det(\varphi(g)y)^2}{\pi}.$$

Mivel  $\det(y) = \det(\varphi(g)y)$ ,  $\rho$   $PSL_2(R)$ -ekvivalens partíciót indukál. □

**0.1. Összegzés: az osztályszám formula.** Fixáljunk egy  $D = \det(y)$ -t. Ahhoz, hogy alkalmazzunk egy lemmát, meg kell mutatnunk, hogy a  $\mathbb{Q}_D^* = \{y \in \mathbb{Q}^* \mid \det(y) = D\}$  halmaz feletti  $PSL_2(R)$  orbitok száma véges, és hogy minden  $y$ -hoz tartozó stabilizátor véges. Kezdjük az osztályszám véges voltának bizonyításával.

**Theorem 0.2.** Egy fix determináns,  $D$ , esetén az osztályszám véges.

*Proof.* Egy fix determináns esetén bizonyítjuk, hogy az osztályszám véges. Mivel  $\frac{b}{a} \in F$ , ezért:

$$\sqrt{3}|b| \leq a.$$

Ahogy azt korábban állítottuk:

$$a \leq d.$$

Az analógia alapján a valós esetre:

$$a^2 \leq ad = D + |b|^2 \leq D + \frac{a^2}{3}.$$

Következésképpen:

$$\frac{2}{3}a^2 \leq D.$$

Így  $a$ -ra véges sok lehetőség van, és  $b$ -re is véges sok lehetőség adódik, figyelembe véve azt a tényt, hogy az Eisenstein-egészeket reprezentáló pontok halmaza  $\mathbb{C}$ -ban egy sehol sem sűrű halmazt alkot.  $\square$

Most rátérünk a stabilizátor véges voltának bizonyítására.

**Lemma 0.3.**

$$\Gamma_j = a_j U(2) a_j^{-1} \cap PSL_2(R),$$

ahol  $y_j = a_j \overline{a_j}^T$ , és ilyen felbontás létezik egy a dolgozatomban szereplő tétel miatt. Az  $U(2)$  a komplex számok feletti unitér mátrixok csoportját jelöli.

*Proof.*

$$g \in \Gamma_j \Leftrightarrow (ga_j) \overline{(ga_j)}^T = a_j \overline{a_j}^T.$$

Szorunk az  $a_j^{-1}$ -el jobbról és  $(\overline{a_j}^T)^{-1}$ -el balról:

$$(a_j^{-1} ga_j) \overline{(a_j^{-1} ga_j)}^T = I_2.$$

Egyenértékűen:

$$a_j^{-1} ga_j \in U(2).$$

Tehát:

$$g \in a_j U(2) a_j^{-1}.$$

És mivel  $g \in PSL_2(R)$ , ez ekvivalens azzal, hogy:

$$g \in a_j U(2) a_j^{-1} \cap PSL_2(R).$$

$\square$

Mivel  $\Gamma_j$  egy kompakt és egy diszkrét halmaz metszete, ezért  $|\Gamma_j|$  véges.

Amikor a  $PSL_2(R)$  hat a  $\mathcal{P}$ -n, és  $\rho(y) = C \text{vol}(\mathcal{M} \cap F_y)$ , a dolgozatban leírt felbontásból következik, hogy  $\rho$   $PSL_2(R)$ -ekvivalens egységpartíciót indukál.

Használjuk a következő jelöléseket:

$$\mathcal{M}_i^{(D)} = \{y \in \mathcal{M}_i \mid \det(y) = D, z \in \mathcal{Q}^*\}$$

$$\mathcal{M}_D = \{y \in \mathcal{M} \mid \det(y) = D, z \in \mathcal{Q}^*\} = \mathcal{M}_1^{(D)} \cup^* \mathcal{M}_2^{(D)}$$

$$\mathcal{P}_D = \{y \in \mathcal{P} \mid \det(y) = D, z \in \mathcal{Q}^*\}$$

Mivel  $\mathcal{M}_D$  egy alapvető tartomány, ezért felírható:

$$\mathcal{M}_D = \{y_1, y_2, \dots, y_h\}$$

ahol  $\mathcal{M}_1^{(D)} = \{y_1, \dots, y_k\}$

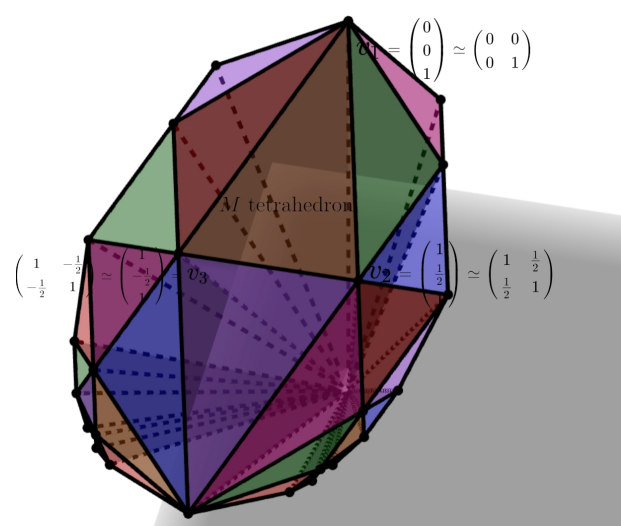


FIGURE 1. Enter Caption

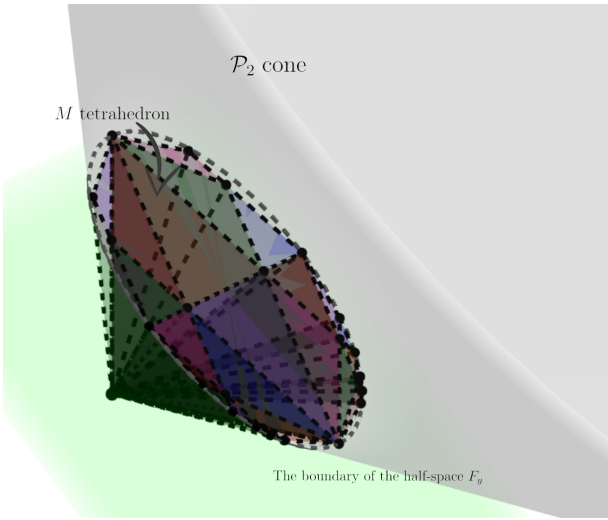


FIGURE 2. Enter Caption