

Polinomiális mozgó pontok és egyenesek a síkon és egy olimpiai geometria feladatmegoldó módszer

A *Method of moving points* vagy magyarul *Fokozás* egy olyan olimpiai geometriai problémamegoldási módszer, amely tapasztalataim szerint a geometriai problémák több mint felére alkalmazható, és gyakran gyorsabban megoldást nyújt, mint az eredeti elemi megoldás. Ezt a módszert több versenyen (beleértve az IMO-t) is használtam másokkal egyetemben, annak ellenére, hogy az ezen a területen található tételek még nincsenek precízen bizonyítva. A dolgozatom célja egy precíz fogalomrendszer megalkotása, az eredeti- és a saját tételek bizonyítása, valamint a „gyökös” típusú módszer kiépítése, amely az eredeti módszernél több probléma megoldására képes.

Ez egy viszonylag friss módszer, 2019-ben mutatták be, ahol csak a tételek gyengébb változatait bizonyították $\mathbb{R}$ felett ($\mathbb{C}$ helyett). Csak a fokok felső korlátját adták meg.[?][?]

A dolgozatban bizonyítottam, hogy a fokok felső korlátjai élesek, így foglalkoztam multiplicitásokkal és végtelen távoli pontokkal. A végtelen távoli pontok lokális koordinátáinak definiálásához $\mathbb{CP}^n$ standard térképeit használtam. A polinomiális mozgó pontokat kétváltozós homogén polinomokkal definiáltam, így minden szebb és szimmetrikusabb lett. Ezzel a definícióval világos és rövid bizonyításokat adtam az eredeti tételekre.

Ha egy geometria probléma egy egyenes és egy kúpszelet metszéspontjait tartalmazza, a két metszéspont koordinátái nem polinomiálisak, hanem egy polinom négyzetgyöke jelenik meg bennük. Mivel számos ilyen problémával találkoztam, létrehoztam a módszer "gyökös" kiterjesztését, amelyet a dolgozat második felében tárgyalok. Egy általánosabb fogalomrendszert építettem fel az ilyen pontok kezelésére, és a legtöbb tételt az első fejezetből általánosítottam ebben a keretben.

Ez a módszer nem nagyon ismert, és úgy tudom, ezek az azóta született új eredmények. Felvettem a kapcsolatot az egyik szerzővel, aki megalkotta a módszert, és ő is gondolkodott még a témakörön, alapvetően ugyanabban az irányban, mint én.

Számos ötlet Frenkel Péter témavezetőmnek köszönhető.

1 Polinomiális mozgó pontok és egyenesek

$\mathbb{C}[t, s]_d$ a d -edfokú homogén kétváltozós polinomokat jelöli.

Egy *polinomiális mozgó pont* egy $P : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^2$

$$P(t : s) = (p_1(t, s) : p_2(t, s) : p_3(t, s))$$

leképezés, ahol $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}[s, t]_d$, és p_1, p_2, p_3 -nak nincs közös gyöke.

Ekkor P *foka* d .

Egyeneseknek pont ugyanígy definiálunk fokot, az egyenes homogén koordinátái segítségével.

2 Multiplicitás

Sokféle multiplicitást definiálunk, általában van egy algebrai alakjuk a benne szereplő pontok/egyenesek polinomiális alakjával, illetve egy geometriai alakjuk, amiben egy geometria mennyiségről nézzük meg, hogy hanyadrendben nulla.

Például a pont-pont multiplicitása az A, B mozgó pontoknak azt méri, hogy hanyadrendben esik egybe A és B . A és B pont-pont multiplicitása a távolságuk nullrendje.

Hasonlóan lehet minden illeszkedési állításhoz multiplicitást rendelni.

3 Állítások foka

Szinte minden geometriai állítás egy bizonyos számszor igaz (multiplicitással együtt), vagy pedig mindig igaz. Ezt a számot az állítás fokának nevezzük. Ha meg tudjuk mutatni, hogy az állítás fok+1 alkalommal teljesül, az azt jelenti, hogy az állítás mindig igaz!

3.1. Theorem. (Pont-egyenes tétel) Legyen P egy polinomiális mozgó pont, és legyen l egy polinomiális mozgó egyenes. Ekkor a „ P rajta van l -en” állítás (multiplicitással) foka pontosan $\deg P + \deg l$.

3.2. Theorem. Legyen A, B, C három polinomiális mozgó pont. Ekkor az „ A, B, C egy egyenesre esik” állítás (multiplicitással) foka pontosan $\deg A + \deg B + \deg C$.

4 Fokok kiszámolása

A következő két tétel két leggyakrabban használt tétel feladatmegoldásnál:

4.1. Theorem. (L-pp tétel) Legyen P és Q két polinomiális mozgó pont. Ekkor az PQ egyenes polinomiális, és fokát a következő kifejezés adja meg:

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) - \#(P = Q)$$

ahol $\#(P = Q)$ annak számát jelöli, amikor $P = Q$ ($t \in \mathbb{CP}^1$) (pont-pont multiplicitással).

4.2. Theorem. (P-ll tétel) Legyen e és f két polinomiális mozgó egyenes. Ekkor az $e \cap f$ metszéspont polinomiális, és fokát a következő képlet adja meg:

$$\deg(e \cap f) = \deg(e) + \deg(f) - \#(e = f)$$

ahol $\#(e = f)$ azt jelöli, hogy hány alkalommal esik egybe e és f (multiplicitással).

5 Feladatmegoldás

Eljutottunk ahhoz a ponthoz, ahol rendelkezünk a szükséges eszközökkel a módszer alkalmazásához. Egy geometriai probléma általában így néz ki: Van néhány kezdő objektum, amelyekből további objektumokat szerkesztünk, majd egy állítást kell bizonyítanunk ezekről az objektumokról. Először választunk egy tetszőleges konfigurációt a kezdő objektumokból, és azt szeretnénk bizonyítani, hogy az állítás igaz erre a konfigurációra. Rögzítünk néhány kezdő objektumot, és a maradék közül egyet mozgatunk, amely a "kezdeti pont" lesz. Választunk egy mértani helyet (egyeneset vagy kúpszeletet) a kezdeti ponthoz,

és mozgassuk úgy, hogy egy elsőfokú polinomiális pontként mozogjon, ha a mértani hely egy egyenes, vagy egy másodfokú polinomiális pontként, ha a mértani hely egy kúpszelet. Ekkor a többi objektum helyzete egyértelmű a kezdő objektumok alapján, tehát azok is mozognak a kezdeti ponttal együtt, és majdnem minden esetben polinomiálisak lesznek. Néhány szabály segítségével kiszámolhatjuk a többi objektum fokát. Ezután kiszámoljuk az állítás fokát az előzőleg ismert fokok alapján, és találunk fok+1 speciális esetet, amikor az állítás igaz. Speciális esetekhez egyszerűbb vagy degenerált konfigurációkat választhatunk. Ezzel beláttuk, hogy az állítás a kezdő pont minden egyes helyzetére igaz, speciálisan azon a helyen, ahonnan a mozgást elindítottuk.

6 Polinomiális pontok mértani helye

6.1. Theorem. (Mértani hely-tétel) H egy n -edfokú polinomiális mozgó pont. Ekkor H mértani helye egy k -edfokú algebrai görbe, ahol $k \mid n$. A görbe minden sima A pontján H $\frac{n}{k}$ alkalommal halad át (pont-pont multiplicitással). Minden d rendű szinguláris B ponton H $\frac{n}{k} \cdot d$ alkalommal halad át (pont-pont multiplicitással).

7 Mászó-tétel

7.1. Theorem. (Mászó-tétel) Legyen $\mathcal{C}$ egy fix kúpszelet, amin két pont A és B mozog pontosan a és b fokkal. Ekkor az AB egyenesnek pontosan $\frac{a+b}{2}$ a foka.

7.2. Theorem. (Mászó-tétel inverze) Legyen $\mathcal{C}$ egy fix kúpszelet, és mozogjon rajta az A pont pontosan a fokkal. Egy rajta mindig átmenő e egyenesnek pontosan $\frac{a+b}{2}$ a foka. Ekkor e és $\mathcal{C}$ A -n kívüli második metszéspontja pontosan b fokú.

8 Gyökös pontok

Amikor egy polynomiális l egyenes egy fix $\mathcal{C}$ kúpszeletet metsz, akkor a két metszéspont nem lesz polinomiális, mert a koordinátaiban megjelenik egy $\sqrt{H}$ tag, ahol H csak l -től és $\mathcal{C}$ -től függ. Innentől minden további ezekből szerkesztett pont is ugyanilyen "gyökös" lesz.

Ezeknek is lehet fokot definiálni, analóg módon a polinomiális fokhoz, amik félegészek lesznek. Szinte minden tétel a polinomiális részből analóg módon átjön gyökös pontokra is, csak meg kell alkotni a fogalmi rendszert hozzá.