

Produktum derivált TDK dolgozat

Volford Levente BSC 2. év
email cím: leventevolford@gmail.com

Témavezető: Izsák Ferenc

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Január 2025

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	3
2	Produktum derivált definíciója	3
3	Ekvivalens definíciók	3
3.1	Definíció átfogalmazása	3
3.2	Függvény viselkedése egy produktum deriválható pontjában . . .	3
3.3	Produktum derivált kapcsolata a deriválással	4
4	Deriválási szabályok	5
5	Felhasználása szélsőérték számításra	7
6	Középérték tételek produktum deriváltra	7
6.1	Rolle tétele produktum deriváltakra	7
6.2	Lagrange középértéktétel produktum deriváltra	8
6.3	Cauchy középértéktétel produktum deriváltra	8
7	Taylor-sora	10
7.1	Definíció	10
7.2	produktum Taylor-sor hibája	10
8	Több dimenziós általánosítás	11
8.1	Egy többdimenzióból egy dimenzióba képző függvény deriváltja .	11
8.2	Egy egydimenzióból többdimenzióba képző függvény produktum deriváltja	12
8.3	Általános több dimenzióból több dimenzióba képző függvény produktum deriváltja	12
9	Irodalomjegyzék	12

1 Bevezetés

Ahogy a deriválás egy pontban a pillanatnyi különbséget definiálja, úgy próbálom meg a produktum deriválással definiálni a pillanatnyi arányt.

2 Produktum derivált definíciója

Definíció: 1 Az f függvény $f(x) \neq 0$ -hoz tartozó x pontban vett produktumderiváltja a

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \left[\frac{f(x_1)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{x_1 - x}}$$

valós határérték, ha ez létezik, ahol $x, x_1 \in D_f$ belső pontjai.

Definíció: 2 Ha ez a produktum derivált létezik az f függvény minden x pontjában akkor f -et produktum deriválhatónak nevezem és f produktum deriváltja az x pontban a fenti határérték.

Jelölés: f^p .

Definíció: 3 Egy függvény n . produktum deriváltja rekurzívan az f $n - 1$. produktum deriváltjának a produktum deriváltja.

Jelölés: $f^{p[n]}$

3 Ekvivalens definíciók

Vizsgálom az ekvivalens definíciókat. Ezek természetesen csak akkor ekvivalensek ha $f^p(x)$ létezik, így ezt a továbbiakban felteszem.

3.1 Definíció átfogalmazása

Tétel: 1 $\lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{d}}$ egy ekvivalens definíció.

Bizonyítás:

$x_1 := x_2 + d$ behelyettesítése a definícióba.

Megjegyzés: Innentől gyakran ezt fogom használni.

3.2 Függvény viselkedése egy produktum deriválható pontjában

Tétel: 2 $f(x+d) = f(x) * g(x)^d * R(d)$, $\lim_{d \rightarrow 0} \left[\sqrt[d]{R(d)} \right] = 1$ Ahol $g(x) = f(x)^p$ produktum deriváltja.

Bizonyítás:

$$f(x+d) = f(x) * g(x)^d * R(d), \lim_{d \rightarrow 0} \left[\sqrt[d]{R(d)} \right] = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+d)}{f(x)} &= g(x)^d * R(d) \\
\lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d)}{f(x)} \right] &= \lim_{d \rightarrow 0} (g(x)^d * R(d)) \\
\lim_{d \rightarrow 0} \sqrt[d]{\frac{f(x+d)}{f(x)}} &= \lim_{d \rightarrow 0} (g(x) * \sqrt[d]{R(d)}) \\
g(x) &= \lim_{d \rightarrow 0} \sqrt[d]{\frac{f(x+d)}{f(x)}}
\end{aligned}$$

Visszafelé, itt csak algebrai trükközések következnek, $f(x)$ sehol sem nulla különben nem lenne értelmezve a produktum derivált.

$$\begin{aligned}
f(x+d) &= \frac{f(x+d)}{f(x)} * f(x) = f(x) * \left[\sqrt[d]{\frac{f(x+d)}{f(x)}} \right]^d = \\
&= f(x) * f^p(x)^d * \left[\frac{\sqrt[d]{\frac{f(x+d)}{f(x)}}}{f^p(x)} \right]^d
\end{aligned}$$

Ahol az utolsó zárójelre teljesül, hogy

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sqrt[d]{\left[\frac{\sqrt[d]{\frac{f(x+d)}{f(x)}}}{f^p(x)} \right]^d} = 1$$

Megjegyzés: Tehát egy f függvény produktum deriváltja x pontban az x pontban a függvényt érintő exponenciális görbe alapja.

3.3 Produktum derivált kapcsolata a deriválással

Tétel: $3 \quad f^p(x) = e^{\left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]} = e^{[\ln(f)']}$

Bizonyítás:

A második egyenlőség elég egyértelmű, csupán $\ln(f)$ -et kell deriválni. Viszont a másikat is le lehet vezetni:

$$f(x)^p = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{d}}$$

Deriválás definícióját felhasználva és beleírva:

$$\lim_{d \rightarrow 0} f(x+d) = f(x) + \lim_{d \rightarrow 0} f'(x) \cdot d$$

Behelyettesítve a produktumderivált definíciójába:

$$f^p(x) = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{d}} = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) + f'(x) \cdot d}{f(x)} \right]^{\frac{1}{d}} = \lim_{d \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f'(x) \cdot d}{f(x)} \right]^{\frac{1}{d}}$$

Felhasználva a következő exponenciális határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k = \lim_{d \rightarrow 0} (1 + dn)^{\frac{1}{d}}$$

Ez behelyettesítve az eredeti egyenlőségbe:

$$f^p(x) = \lim_{d \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f'(x) \cdot d}{f(x)} \right]^{\frac{1}{d}} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy $f^p(x)$ megegyezik az $f(x)$ logaritmus deriváltjának [1] exponenciális értékével! Ezenkívül vegyük észre ha egy függvény deriválható és nemnulla akkor produktum deriválható, és ha egy függvény produktum deriválható, akkor

$$f' = f(x) * \ln(f^p(x))$$

és mivel f^p pozitív ezért $\ln(f^p)$ értelmezett, tehát f' létezik. Tehát egy nemnulla függvénynél ekvivalens a produktum deriválhatóság. Továbbá egy produktum deriválható függvény szigorúan pozitív vagy szigorúan negatív, mert deriválható, tehát folytonos, és nemnulla.

4 Deriválási szabályok

Tétel: 4 $[a^x]^p = a : a \in \mathbb{R}$

Bizonyítás:

Produktum derivált definíciója miatt:

$$[a^x]^p = e^{\frac{[a^x]'}{a^x}} = e^{\frac{a^x * \ln(a)}{a^x}} = e^{\ln(a)} = a$$

Tétel: 5 $[c^{e^x}]^p = c^{e^x}$ ahol $c \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás:

$$[c^{e^x}]^p = e^{\frac{[c^{e^x}]'}{c^{e^x}}} = e^{\frac{c^{e^x} * \ln(c) * e^x}{c^{e^x}}} = [e^{\ln(c)}]^{e^x} = c^{e^x}$$

Tétel: 6 $[k \cdot f(x)]^p = f^p(x)$, $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

Bizonyítás:

Használva az $f^p(x)$ általános exponenciális felírását, valamint az $[f(x) \cdot k]' = k \cdot f'(x)$ összefüggést

$$[k \cdot f(x)]^p = e^{\frac{k \cdot f'(x)}{k \cdot f(x)}} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = f^p(x)$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ez negatív számokkal való szorzásra is működik, tehát ha f mindenhol negatív akkor is lehet produktum deriválni de ugyanaz lesz a produktum deriváltja mintha megszoroznánk -1 -el tehát a továbbiakban minden függvényt az egyszerűség kedvéért pozitívnak tekintek.

Tétel: 7 $[f(x) \cdot g(x)]^p = f^p(x) \cdot g^p(x)$ Ha létezik $f^p(x), g^p(x)$

Bizonyítás:

$f^p(x)$ definíciója miatt:

$$[f(x) \cdot g(x)]^p = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d) \cdot g(x+d)}{f(x) \cdot g(x)} \right]^{\frac{1}{d}} = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{d}} \cdot \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+d)}{g(x)} \right]^{\frac{1}{d}} = f^p(x) \cdot g^p(x)$$

A limeszt szétszedhetem, mert a feltétel miatt léteznek a határértékek.

Tétel: 8 $[f(x)^k]^p = [f^p(x)]^k$ $k \in \mathbb{R}$

Bizonyítás:

$f^p(x)$ definíciója miatt:

$$[f(x)^k]^p = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d)^k}{f(x)^k} \right]^{\frac{1}{d}} = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d)}{f(x)} \right]^{\frac{k}{d}} = \left[\lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{d}} \right]^k = f^p(x)^k$$

Mert a limesz és a hatványozás felcserélhető, ha a sorozatnak a felcserélés után is van határértéke.

Tétel: 9 $[f(x)^{g(x)}]^p = f^p(x)^{g(x)} \cdot f(x)^{g(x)'} \cdot g'(x)$ Ha $f(x)$ mindenhol produktum deriválható, és $g(x)$ deriválható.

Bizonyítás:

$f^p(x)$ definíciójából adódóan:

$$[f(x)^{g(x)}]^p = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d)^{g(x+d)}}{f(x)^{g(x)}} \right]^{\frac{1}{d}}$$

Alkalmazva a derivált definíciójából fakadó összefüggést:

$$\lim_{d \rightarrow 0} f(x+d) = f(x) + \lim_{d \rightarrow 0} f'(x) \cdot d$$

Behelyettesítve:

$$[f(x)^{g(x)}]^p = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d)^{g(x+d)}}{f(x)^{g(x)}} \right]^{\frac{1}{d}} = \lim_{d \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+d)^{g(x)} \cdot f(x+d)^{g'(x) \cdot d}}{f(x)^{g(x)}} \right]^{\frac{1}{d}} =$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0} \left[\left[\frac{f(x+d)}{f(x)} \right]^{g(x)} \cdot f(x+d)^{g'(x) \cdot d} \right]^{\frac{1}{d}} = f^p(x)^{g(x)} \cdot \lim_{d \rightarrow 0} f(x+d)^{g'(x)}$$

A limeszt szorzatokra bonthatom, mert a szorzatok léteznek a feltételből következően. Mivel $d \rightarrow 0$ -hoz, ezért $f(x+d) = f(x)$:

$$\left[f(x)^{g(x)} \right]^p = f^p(x)^{g(x)} \cdot f(x)^{g'(x)}$$

5 Felhasználása szélsőérték számításra

Tétel: 10 *Ha egy f produktum deriválható függvény produktum deriváltja egy c helyen 1, akkor a deriváltja 0.*

Bizonyítás:

A produktum deriválás definíciója miatt:

$$1 = f^p(c) = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

$$0 = \frac{f'(c)}{f(c)}$$

$$f'(c) = 0$$

Megjegyzés: Az összes szélsőértéket tehát innentől kereshetjük deriválás helyett produktum deriválással is, ha az könnyebb. Ilyenre példa függvények szorzata, és a faktoriálisfüggvény produktum deriváltja is jól becsülhető [2].

6 Középtétel tételek produktum deriváltra

6.1 Rolle tétele produktum deriváltakra

Tétel: 11 *Ha egy $f(x)$ függvény folytonosan produktum deriválható egy (a, b) intervallum belső pontjaiban, folytonos az a, b pontjaiban, és $f(a) = f(b)$. Ekkor $\exists c \in (a, b) : f^p(c) = 1$*

Bizonyítás:

Rolle tétele ismert, és a feltételei teljesülnek, tehát tudjuk $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$. Ekkor

$$f^p(c) = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}} = e^{\frac{0}{f(c)}} = e^0 = 1$$

mert $f(x)$ pozitív (a, b) intervallum belsejében, mert f produktum deriválható.

Innentől minden normális deriváltakra már létező tétel produktum deriváltas változatát egy $+$ jellel fogom jelölni.

6.2 Lagrange középértéktétel produktum deriváltra

Tétel: 12 Ha egy $f(x)$ függvény folytonosan produktum deriválható egy (a, b) intervallum belső pontjaiban, és folytonos az a, b pontjaiban akkor $\exists c \in (a, b) : f^p(c) : az a-n és b-n átmenő exponenciális görbe alapja. Ez ugyanúgy $g(x) := \frac{f(a)^{\frac{-b}{a-b}}}{f(b)^{\frac{-a}{a-b}}} * \left[\left[\frac{f(a)}{f(b)} \right]^{\frac{1}{a-b}} \right]^x$. Itt $g(x)$ az $a-n$ és $b-n$ átmenő exponenciális görbe. Ennek alapja $\frac{f(a)^{\frac{1}{a-b}}}{f(b)^{\frac{1}{a-b}}}$.$

Bizonyítás:

Ilyenkor $f(a)$ és $f(b)$ előjele azonos, különben $f(x)$ vagy nem lenne folytonos, vagy metszené a nullát, és ilyenkor nem lehet $f(x)$ produktum deriválható. Ezt sejtettük is, mert ilyenkor nincs $f(a)$ -n és $f(b)$ -n átmenő exponenciális görbe. $h(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ -re teljesülnek a Rolle+ tétel feltételei. Tehát $\exists c \in (a, b) : h^p(c) = 1$.

$$\begin{aligned} h^p(c) &= \left[\frac{f(c)}{g(c)} \right]^p = \frac{f^p(c)}{g^p(c)} = 1 \\ f^p(c) &= g^p(c) = \left[\frac{f(a)^{\frac{-b}{a-b}}}{f(b)^{\frac{-a}{a-b}}} * \left[\frac{f(a)}{f(b)} \right]^{\frac{x}{a-b}} \right]^p = \\ &= \left[\left[\frac{f(a)}{f(b)} \right]^{\frac{x}{a-b}} \right]^p = \left[\left[\frac{f(a)^x}{f(b)^x} \right]^p \right]^{\frac{1}{a-b}} = \\ &= \left[\frac{[f(a)^x]^p}{[f(b)^x]^p} \right]^{\frac{1}{a-b}} = \left[\frac{f(a)}{f(b)} \right]^{\frac{1}{a-b}} \end{aligned}$$

Ez pedig pont a kívánt eredmény.

6.3 Cauchy középértéktétel produktum deriváltra

Tétel: 13 Ha f, g folytonos $[a, b]$ -n, produktum deriválható (a, b) -n, $g^p(x) \neq 0$ mindenhol, és $f(a), g(a), f(b), g(b) \neq 0$ akkor $\exists c : \frac{\ln(f^p(c))}{\ln(g^p(c))} = \frac{\ln\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]}{\ln\left[\frac{g(b)}{g(a)}\right]}$

Bizonyítás:

Először is látjuk, hogy $\ln\left[\frac{g(b)}{g(a)}\right] \neq 0$, mert ha $g(b) = g(a)$, akkor Rolle+ miatt $\exists d \in (a, b) : g^p(d) = 0$ ami tudjuk, hogy nem teljesül. Másrészt látjuk, hogy ugyanemiat $\ln(g^p(c)) \neq 0$. ezenkívül mivel f, g produktum deriválhatóak, ezért $f(a), f(b)$ előjele azonos, ugyanígy g -re is.

$$h(x) := \frac{f(x)}{f(a) * \left[\frac{g(x)}{g(a)} \right]^{\frac{\ln\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]}{\ln\left[\frac{g(b)}{g(a)}\right]}}}$$

Ez a függvény jóldefiniált, mert $f(a), g(a), f(b), g(b), f(x), g(x) \neq 0$ Határozzuk meg $h^p(x)$ -et. Látjuk, hogy habár csúnya, nagy része konstans, és a deriválási szabályok alkalmazásával kijön:

$$\begin{aligned} h^p(x) &= \left[\frac{f(x)}{f(a) * \left[\frac{g(x)}{g(a)} \right]^{\frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}}} \right]^p = \frac{f(x)^p}{\left[f(a) * \left[\frac{g(x)}{g(a)} \right]^{\frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}} \right]^p} = \\ &= \frac{f^p(x)}{g^p(x)^{\frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}}} \end{aligned}$$

Tehát ha ez a $\frac{f^p(x)}{g^p(x)^{\frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}}}$ létezik akkor g produktum deriválható, és ez a pro-

duktum deriváltja. $f^p(x), g^p(x)$ létezik, és $\frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}$ egy konstans tehát ez létezik.

Vegyük észre, hogy

$$h(a) = \frac{f(a)}{f(a) * \left[\frac{g(a)}{g(a)} \right]^{\frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}}} = \frac{f(a)}{f(a) * 1^{\frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}}} = 1$$

Továbbá, hogy

$$\begin{aligned} h(b) &= \frac{f(b)}{f(a) * \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]^{\frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}}} = \frac{f(b)}{f(a) * \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]^{\log_{\frac{g(b)}{g(a)}} \frac{f(b)}{f(a)}}} = \\ &= \frac{f(b)}{f(a) * \frac{f(b)}{f(a)}} = 1 \end{aligned}$$

Tehát teljesülnek $h(x)$ -re a Cauchy+ feltételei. Tehát $\exists c \in (a, b) : h^p(c) = 1$ De ekkor tudjuk:

$$\begin{aligned} h^p(c) &= \frac{f^p(x)}{g^p(x)^{\frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}}} = 1 \\ f^p(x) &= g^p(x)^{\frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}} \end{aligned}$$

Vehetem a logaritmusukat mert mindkettő pozitív.

$$\ln(f^p(x)) = \ln \left[g^p(x)^{\frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}} \right] = \frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]} * \ln(g^p(x))$$

$$\frac{\ln(f^p(x))}{\ln(g^p(x))} = \frac{\ln \left[\frac{f(b)}{f(a)} \right]}{\ln \left[\frac{g(b)}{g(a)} \right]}$$

7 Taylor-sora

7.1 Definíció

Definíció: 4 Egy függvény Taylor sorának célja, hogy egy függvényt felírjuk exponenciális függvények szorzataként. Egy a pontban n -szer produktum deriválható függvény n . produktum Taylor-sora az a pontban sorba fejtve a következő:

$$T_{n,a}(x) = f(a) * f^p(a)^{x-a} * \dots * f^p(a)^{\frac{(x-a)^n}{n!}}$$

7.2 produktum Taylor-sor hibája

Tétel: 14 $f(x) = T_{n,a}(x) * R_{n,a}(x)$, $R_{n,a}(x) = (f^{p[n+1]}(s_{n+1}))^{\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}}$

Bizonyítás:

Legyen

$$R_{n,a}(x) := \frac{f(x)}{T_{n,a}(x)}$$

Vegyük észre, hogy

$$R_{n,a}(0) = 1$$

$$\frac{\ln(R_{n,a}(x))}{\ln(e^{(x-a)^{n+1}})} = \frac{\ln\left(\frac{R_{n,a}(x)}{R_{n,a}(0)}\right)}{\ln\left(\frac{e^{(x-a)^{n+1}}}{e^{(a-a)^{n+1}}}\right)}$$

Igazából nem csináltam semmit, mert amivel osztottam az 1. Ezekután alkalmazom a Cauchy+-t:

$$\frac{\ln\left(\frac{R_{n,a}(x)}{R_{n,a}(0)}\right)}{\ln\left(\frac{e^{(x-a)^{n+1}}}{e^{(a-a)^{n+1}}}\right)} = \frac{\ln[R_{n,a}(s_1)^p]}{\ln[e^{(n+1)(x-a)^n}]}$$

$s_1 \in (a, x)$

$$\frac{\ln[R_{n,a}(s_1)^p]}{\ln[e^{(n+1)(x-a)^n}]} = \frac{\ln\left[\frac{R_{n,a}(s_1)^p}{R_{n,a}(a)}\right]}{\ln\left[\frac{e^{(n+1)(x-a)^n}}{e^{(n+1)(a-a)^n}}\right]} = \dots$$

Ismét a második egyenlőségénél csak mindkét számot elosztottam egyel. Erre ismét lehet alkalmazni a Cauchy+-t, ezt iterálva n -szer a következőt kapjuk:

$$= \frac{R_{n,a}^{p[n+1]}(s_{n+1})}{\ln(e^{n!})} = \frac{R_{n,a}^{p[n+1]}(s_{n+1})}{n!}$$

$s_{n+1} \in (a, x)$ Ennek az egyenlőségnek az elejét és végét nézve kapjuk a következő egyenlőséget:

$$\frac{\ln(R_{n,a})}{\ln(e^{(x-a)^{n+1}})} = \frac{\ln(R_{n,a}^{p[n+1]}(s_{n+1}))}{n!}$$

Nézzük $R_{n,a}^{p[n+1]}$ -t. Ebbe $R_{n,a}$ definícióját visszaírva azt kapjuk:

$$\left[\frac{f(x)}{T_{n,a}(x)} \right]^{p[n+1]} = \frac{f^{p[n+1]}(x)}{T_{n,a}^{p[n+1]}(x)}$$

Namármost $T_{n,a}^{p[n+1]}(x) = 1$. Ebből látszik, hogy: $R_{n,a}^{p[n+1]} = f^{p[n+1]}(x)$. Tehát

$$\frac{\ln(R_{n,a}(x))}{\ln(e^{(x-a)^{n+1}})} = \frac{\ln(R_{n,a}^{p[n+1]}(s_{n+1}))}{n!}$$

$$\frac{\ln(R_{n,a}(x))}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{p[n+1]}(s_{n+1})}{n!}$$

$$R_{n,a}(x) = (f^{p[n+1]}(s_{n+1}))^{\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}}$$

8 Több dimenziós általánosítás

Egy deriválttal kapcsolatban alapvető gondolat, hogy terjesszük ki több dimenzióra. Ezt egy a normális deriválás több dimenzióra való kiterjesztéséhez hasonló módszerrel fogjuk megcsinálni.

8.1 Egy többdimenzióból egy dimenzióba képző függvény deriváltja

Definíció: 5 *exponenciális síknak hívom az olyan $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények értékkészletét amire teljesül, hogy $\forall x, v \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} : f(x + \lambda * v)$ egy exponenciális függvény.*

Tétel: 15 *Léteznek exponenciális síkok, és egyértelműen paraméterezhetők egy $f(0)$ koordinátával, és $f(\lambda * e_i)$ exponenciális függvényekkel.*

Bizonyítás:

Teljes indukció: $n = 1$ triviális, az az exponenciális görbe. Tegyük fel, hogy $n - 1$ -re már létezik, és adott egy $q(e_n)$ exponenciális függvény. Ekkor vegyük az e_n bázisvektort. Ementén határozzuk meg az értékeket, és ezen értékek alapján minden $(a_1, \dots, a_n)$ pontban az érték legyen az $(a_1, \dots, a_n - 1)$ -en egyértelműen létező exponenciális sík, $q(a_n)$ legyen a $(0, \dots, 0)$ $n - 1$ dimenziós exponenciális sík $f(0)$ -ja. Ez egy n dimenziós exponenciális sík lesz, mert $\forall a, v \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} : v = v^* + v_n : \text{ ahol } v_n : v \text{ } e_n \text{ irányú komponense. } f(x + \lambda * v) = f(x + \lambda * v^* + \lambda * v_n)$, és mivel $f(x + \lambda * v^*)$ és $f(x + \lambda * v_0)$ is exponenciális, és lineárisan független v_0, v^* ezért $f(x + \lambda * v)$ is exponenciális.

Definíció: 6 Egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *produktum deriváltja* az x pontban az érintő exponenciális sík e_i -hez tartozó exponenciális görbék alapjaiból képzett vektor.

Definíció: 7 Egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény k . változó szerinti *parciális produktum deriváltja* annak az exponenciális görbének az alapja amelyik érinti $f(x + \lambda * e_k)$ mint λ függvényét.

Tétel: 16 Ha egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény deriválható, akkor parciálisan is deriválható, és a k . parciális deriváltja a deriváltjának k -adik koordinátája.

Bizonyítás:

f deriválható, akkor nézem az érintő exponenciális síkot. Ennek a e_k -ra nézett vetülete a f^p k . koordinátája a definíció szerint. És ez egy érintő exponenciális görbe lesz mert az exponenciális sík az volt.

8.2 Egy egydimenzióból többdimenzióba képző függvény produktum deriváltja

Definíció: 8 Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény *produktum deriváltja* $v \in \mathbb{R}^n$, ha $\forall i \in 1, \dots, n : \exists R_i(d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : \lim_{d \rightarrow 0} \sqrt[n]{R_i(d)} = 1 \ f(x + d) = \sum_{i=1}^n f(x)_i * v_i^d * R_i(d)$.

Megjegyzés: Ez pont azt írja le, hogy melyik koordinátában melyik exponenciális görbe az érintője.

8.3 Általános több dimenzióból több dimenzióba képző függvény produktum deriváltja

Definíció: 9 Egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvény *produktum deriválható*, és a *produktum deriváltja* az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, ha $f(x + \frac{d * A}{|d|})$ mint d függvénye *produktum deriválható* minden $d \in \mathbb{R}^n$ -re, és a deriváltja $A * \frac{d}{|d|}$.

9 Irodalomjegyzék

References

- [1] *Champan: Encyclopedia of Mathematics* 2002, p. 1726.
- [2] *Hegedűs Boldozsár: Produktumderivált és a faktoriális függvény paraméteres közelítése* TDK dolgozat, 2024.