

Szegedi Tudományegyetem, TTIK Fizika Intézet, Kísérleti Fizika Tanszék

Egy hármas rendszer szoros kettősének fotometriai analízise és modellezése

OTDK dolgozat



Készítette:

Oltvári Zsófia,

csillagász mesterszakos hallgató

Témavezető:

Dr. Bíró Imre Barna,

tudományos kutató, SZTE Bajai Obszervatóriuma

Konzulens:

Bókon András,

tudományos segédmunkatárs, ELTE Gothard Asztrofizikai Obszervatórium és
Multidiszciplináris Kutatóközpont

Szeged, 2025. január 7.

Tartalomjegyzék

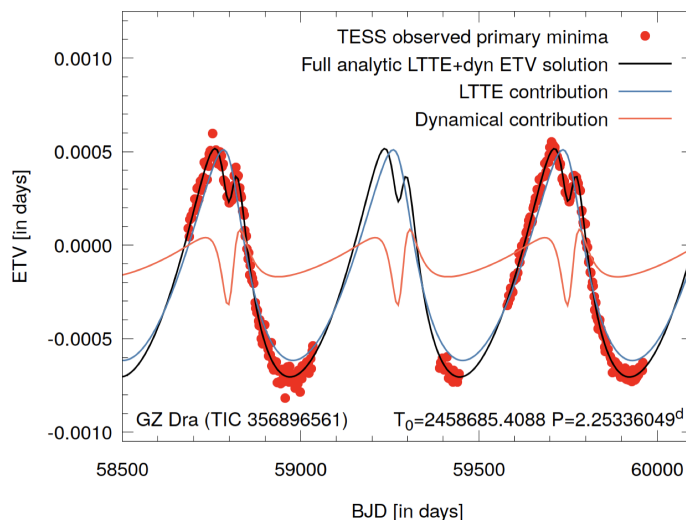
BEVEZETÉS	3
1. Elméleti háttér	5
1.1. Kettőscsillagok általános jellemzői	5
1.2. Fénygörbe-analízis	7
1.2.1. Fedés feltétele	7
1.2.2. Fénygörbe időtengelyének vizsgálata, avagy a csillagsugarak meghatározása	8
1.2.3. Csillagfényességek meghatározása a fénygörbéből	9
1.3. Valódi fénygörbék és osztályozások	11
1.4. Csillagok alakja kettős rendszerekben: a Roche-modell	12
1.5. Spektroszkópia	13
2. Fotometriai mérések a Bajai Obszervatóriumban	16
2.1. A GZ Draconis	16
2.2. BRC80 teleszkóp	18
2.3. Mérés vezérlése	20
3. Nyers képek kalibrációja	21
3.1. <code>imgproc mode=h</code>	21
3.2. <code>wcssolve</code>	23
4. Fotometria	24
4.1. Apertúra-fotometria	24
4.2. Differenciális fotometria	25
4.3. Standard magnitúdók	27
5. Fedési kettős modellezése	28
5.1. A Phoebe 2 rövid bemutatása	28
5.2. Kiinduló paraméterek, egyszerűsítések és eredetük	30
5.3. Optimalizálás a Phoebe 2.4-ben	32
5.3.1. Optimalizációs metódusok és a Merit-függvény	32
5.3.2. Inicializálás	33
5.3.3. Illesztések sematikus menete	34
5.3.4. Nyári méréssorozat optimalizálása	34

5.4. A paraméterter mintavételezése MCMC módszerrel	43
5.4.1. A paraméterter és eloszlásának definiálása az MCMC-hez	44
5.4.2. Az MCMC futtatása	45
6. Az MCMC-mintavételezés eredményei	47
szójegyzék	53
hivatkozások	55
A. MELLÉKLET	58
A.1. g szűrő illesztéséből kapott modell az r szűrőben	58
A.2. r szűrő illesztéséből kapott modell az i szűrőben	58

BEVEZETÉS

TDK dolgozatomban a Sárkány csillagképben található GZ Draconis fedési rendszerrel foglalkoztam. Az objektumot már jó ideje ismerik és vizsgálják viszont még nem született róla, olyan publikáció, ami részletesen tárgyalná a rendszer geometriáját és a komponensek fizikai jellemzőit. Noha a TESS is két évente folyamatosan méri a fénygörbét, hiszen az északi látómezőjének állandó tartományában található.

A TESS sűrű és hosszú időbeli lefedettségű adatsorából Mitnyan és társai [7] meghatározták a fedési időpontváltozásokat (ETV, angolul *eclipse timing variations*), amelyek az 1. ábrán piros körökként láthatóak. Szembetűnő, hogy a fényidő-effektus okozta közel szinuszos görbére egy stabil zavar, „hupli” van ráakódva, ami két év elteltével sem változott,



1. ábra. ETV görbe a GZ Draconisról, forrás: [7]

tehát valós jelenség. Maga a fényidő-effektus arra enged következtetni, hogy egy harmadik komponens kering a kettős körül, a járulékos zavar annak a két fő csillag pályamozgásában okozott perturbációs hatása. Az égi mechanikából ismert módszerekkel sikerült lemodellezni (folytonos fekete vonal az ábrán), és becslést tenniük a harmadik komponens néhány paraméterére. A harmadik komponens kisebb mint a társai, tömegét 0.27 naptömegnek becsülték. Nagyon halvány, a fedésekben nem vesz részt és tágabb rendszerben kering a társaitól. Az új objektum pálya elhajlása $58^\circ \pm 7^\circ$ a szoros kettőshöz képest. Ezzel ez az egyik legnagyobb köztes pályahajlású hierarchikus hármas rendszer, amelyben ennek következtében jelentős hosszú távú perturbációk várhatóak, mint például a kettős pályasíkjának precessziója, ami a fedési mélység változásait vonja maga után [7]. A HUN-REN Kutatócsoport célja lett a harmadik komponens pontosabb megismerése, viszont a jelenleg rendelkezésünkre álló eszközeink tudatában ahhoz szükségünk van a szoros kettős fizikai jellemzőinek pontos leírására, hogy utána az égi mechanikában taglalt módszereket alkalmazhassuk.

A kutatócsoport kifejezetten olyan rendszereket keres, ahol a harmadik komponens *pályája jelentősen elhajlik a szoros kettős pályasíkjától*. Ezeknek a rendszereknek a kialakulását még nem ismerjük pontosan, viszont a csillagok és bolygórendszerek kialakulásának megismerésé-

ben kulcsinformációkat tartalmazhatnak. Fontos megismerni, ugyanis gyakran találunk ilyen rendszereket az égen és közülük csak kevés rendszert lehet precízen megismerni.

Az GZ Draconis ¹ habár ismert, nem született még olyan publikáció, ami ismertetné a szükséges paramétereket. Viszont a körülmények megengedik, hogy fizikailag pontos leírást kapassunk. A legjobb módszer, ha a rendszer többszin-fotometriai és spektroszkópai méréseit összevetve *fizikai kettős*-modellt illesztünk. A spektroszkópai mérést Dr. Mitnyan Tibor elkészítette és kiértékelte. A kapott radiális sebesség-görbéket volt szíves átadni nekem a modellezéshez. A projekt részfeladataként én készítettem el a fotometriai méréseket az SZTE Bajai Obszervatóriumban, és modelleztem a GZ Draconist.

A BSc szakdolgozatom témájaként készítettem egy őszi fotometriai mérést a rendszerről. Az adatokat kiértékeltem és a Phoebe Legacy programban a két módszer ötvözve egy közelítő becslést tettem a GZ Draconisra. Részletes leírása megtalálható a szakdolgozatomban [6]. Viszont a mérési éjszakák minősége olyan torzulásokat okozott az adatsorban, hogy pontosabb modellezés nem érhető el vele.

Ezért 2023 nyarán új fotometriai mérések készültek a GZ Draconisról. A nyári mérésről részletes leírás található ebben a dolgozatban. A korrigált és kalibrált adatok most már kellően jó minőségűek lettek, hogy a Phoebe újabb verziójával, a Phoebe 2.4 programmal kellően pontos fizikai jellemzést adjak a szoros kettősről. Ehhez a paraméterek becslésén túl Markov-láncos Monte Carlo (MCMC, angolul Markov Chain Monte Carlo) statisztikai módszerrel határoztam meg azok pontossági határait és korrelációit.

¹GZ Draconis neve a TESS adatbázisban: TIC 0356896561

1. Elméleti háttér

A Tejútrendszer csillagainak jelentős része nem magányos, legalább kétharmaduk kettős rendszerben éli le életét. Ugyanakkor az űrtávcsöves fotometriai küldetések (Kepler, TESS) segítségével egyre több hármas, négyes, vagy még annál is több tagból álló csillagrendszert sikerült felfedezni. Ezekben a csillagrendszerekben a tagok pályáját a közöttük ható gravitációs erők összjátéka határozza meg, és a közös tömegközéppontjuk (TKP) körül keringenek.

A kettős rendszerek igen megbízható forrásaink a csillagok tömegének meghatározására, hiszen rendszer geometriáját felhasználva kéttest-probléma alapján becsléseket tehetünk rá.

A *fedési kettősök* jelentősége, hogy részletes vizsgálatuk a csillagok fizikai jellemzőinek egyik legmegbízhatóbb forrása. Viszonylag pontos értékeket kaphatunk a csillagok sugaráról, tömegéről, felszíni hőmérsékletükről, abszolút, azaz fizikai egységekben. Ehhez többféle módszerrel szükséges vizsgálnunk a rendszert. Ez pedig azért fontos, mert segítségükkel pontosíthatjuk a jelenlegi csillagmodelleket, osztályozhatjuk a csillagokat (Hertzsprung-Russell diagram) és csillagfejlődési szakaszokat térképezhetünk fel.

A szórósabb kettős rendszerek fedésénél az ár-apály jelenség és a tömegátadás vizsgálata is megbízható forrásunk, akárcsak a dolgozatban részletezett problémában is megbízható forrásunk.

1.1. Kettőscsillagok általános jellemzői

A kettős rendszer komponenseinek egymástól függő pályáját hat mennyiséggel lehet jellemezni. Ezek közül kettő, a *fél-nagy tengely* (a) és az *excentricitás* (e) a pálya alakját írja le. További három szög határozza meg a pályának a megfigyelőhöz viszonyított térbeli elhelyezkedését: az *inklináció* (i), a *felszálló csomó hossza* (Ω), és a *periasztron argumentuma* (ω). Végül a periasztronon való áthaladás egy időpontja, az *epocha* (T_0) megadásával időben is elhelyezzük a mozgást. A paramétereknek a fedési kettősökre szabott definícióit a szövszedetben részletezem. Forrás: [5]. A komponensek fizikai tulajdonságait az alábbi mennyiségekkel jellemzem a dolgozatban:

- $M_{1,2} \rightarrow$ a komponensek tömegei.
- $R_{1,2} \rightarrow$ a komponensek sugarai.
- $T_{1,2} \rightarrow$ a komponensek effektív felszíni hőmérsékletei.

A tömegek összegei és a pálya fél-nagy tengelye Kepler III. törvénye alapján a keringés periódusát határozzák meg. A tömegek arányai az egyedi pályák méreteit és ezáltal a csillagok elmoz-

dulásának és keringési sebességének arányát határozzák meg. A nagyobb tömegű csillag kisebb pályán és kisebb sebességgel kering a közös tömegközéppont (TKP) körül. Ezek a mozgások spektroszkópiával deríthetők fel, a komponensek színekvonalainak Doppler-eltolódásából (lásd.: Spektroszkópiáról szóló fejezet).

A csillagok sugarairól akkor lehet információt nyerni, ha a komponensek periodikusan elfedik egymást. A sugarak és a fél-nagy tengely aránya a fényváltozási görbén a fedések szélességeit és jellegzetes kontaktus-pontjait határozzák meg és a fénygörbe alkalmas elemzésével kiszámíthatók (lásd: 3. ábra).

A csillagok felszíni hőmérsékletei a sugárzási tulajdonságaikat, fényességeiket határozzák meg. Fedések esetén a fedésmélységek elsősorban a hőmérsékletektől függnének. Ha a fényváltozást egyszerre több színszűrőben (sávban) mérjük, akkor abból az egyedi hőmérsékleteket is meg tudjuk határozni. Ahhoz tehát, hogy egy kettős rendszer csillagainak abszolút paramétereit meghatározzuk, az az ideális, ha a rendszer egyszerre fedési kettős és kétvonalas spektroszkópiai kettős is, azaz a színekben mindkét csillag vonalainak Doppler-eltolódását mérhetjük. Szerencsére a GZ Draconis is egy ilyen objektum. Ezért a paraméterek pontos modellezésére alkalmas.

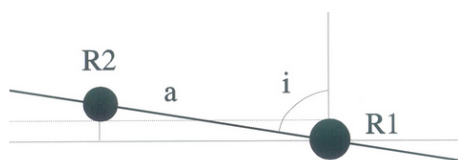
Amennyiben a rendszer annyira szórós, hogy a csillagok alakja jelentősen eltér a gömb alaktól, akkor a csillagok méretét az úgynevezett *térfogati sugárral* lehet jellemezni, ami a csillagával megegyező térfogatú gömbnek a sugara. Hasonlóan, ebben az esetben a felszíni hőmérséklet sem lesz egyenletes eloszlású a csillagok felszínén, hanem annak értéke a lokális effektív potenciáltól függően változhat, olyankor a csillag forgástengelye által meghatározott északi pólusán érvényes *poláris hőmérséklettel* dolgozunk. Ugyanakkor megjegyzem, hogy a GZ Draconis esetén ezek a hatások elhanyagolhatóan kicsiknek bizonyultak, a csillagok lényegében gömb alakúak, és felszíni hőmérsékletük is konstans eloszlású (az esetleges foltokat leszámítva).

A továbbiakban a kettősök összefüggéseinél körpályát feltételezek, mert a paramétereknek a megfigyelésekből való meghatározását abban lehet a legjobban szemléltetni, illetve az előzetesen meghatározott radiális sebességgörbe alapján ez jó közelítésnek számít a GZ Draconis esetén. Ennek következtében az excentricitás lényegében nulla, a csomóvonal hossza és a periasztron argumentuma pedig nem játszanak további szerepet a kettősünk analízisében.

1.2. Fénygörbe-analízis

1.2.1. Fedés feltétele

A két csillag egymás körül periodikusan kering. Attól függően, hogy a pályájukra milyen szögben látunk rá, az egyik csillag keringése során időnként a másik elé kerülhet és részben vagy teljesen kitakarhatja azt. Ha a rendszert lapjára látjuk ($i = 0^\circ$), akkor nincs fedés, sőt még olyan radiális elmozdulást sem tapasztalunk, amit a keringések okoznának. Ha éléről látjuk a rendszert ($i = 90^\circ$), akkor *centrálisan* teljes fedésbe kerülnek a komponensek. Köztes inklináció esetén a fedés megléte vagy hiánya, valamint típusa (hogy teljes vagy részleges) a komponensek R_1, R_2 sugaraitól és a köztük levő a távolságtól függ. Ennek geometriáját a 2. ábra szemlélteti.



A fedéshez szükséges geometriai feltétel, hogy a két csillag közötti, az égbolt síkjára vetített távolság legkisebb értéke kisebb legyen, mint a két csillag sugarának összege: (teljes fedés feltétele a szöszedetben megtalálható)

2. ábra. Fedés geometriai feltétele.

$$a \cdot \cos i \leq R_1 + R_2. \quad (1)$$

Forrás:[10].41.ábra

A mérési eredmények alapján a GZ Dra is csak részlegesen fed (lásd.: "Fotometriai kiértékelés" fejezet).

A kisebb csillag nagyobbik előtt történő elvonulását *tranzitnak*, a nagyobb csillag kisebbik előtt történő elvonulását pedig *okkultációnak* nevezik. A második esetben a kisebbik csillag teljesen eltűnik a nagyobbik mögött teljes fedésnél, csak a nagyobbik csillag fényét látjuk. Részleges fedésnél az inklináció határozza meg, hogy a csillagoknak mekkora felülete fedődik el.

Amikor a kisebb és *általában* halványabb csillag kerül a nagyobbik elé, akkor nagyobb a fényességsökkenés. Ez az *elsődleges fedés*. Ennek legkisebb fényességű pontja a *főminimum*. A fordított eset, amikor a nagyobbik csillag kerül a kisebbik elé, a *másodlagos fedés*, legkisebb fényességű pontja a *mellékminimum*.² Fedési kettős rendszereknél egy ilyen elsődleges fedés közepének ún. *minimum-időpontját* szokták epochának választani, mivel ez közvetlenül mérhető, míg a periasztron-átmenet időpontja csak számítható, és körpálya esetén utóbbi nem is értelmezett.

Teljes fedés esetén a két csillag külső és belső érintkezési pontjai jól meghatározhatók a

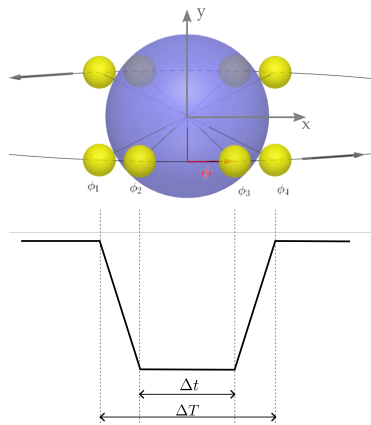
²Azonban nem minden esetben a nagyobbik csillag a fényesebb. Fősorozati csillagokra ugyan ez igaz, de a kettős rendszerekben más, elfejlődött csillagok is lehetnek. Általánosan viszont az a szokás, hogy a mélyebb fedést tekintik elsődlegesnek, függetlenül attól, melyik csillag a kisebb vagy nagyobb.

fénygörbéből, azok alapján pedig a csillagok sugarait ismerjük. Hasonlóan, a fedések mélységeinek viszonyából a felületi fényességek viszonyai, többsávos fotometriából pedig az egyes hőmérsékletek határozhatók meg. Ezeket a következő alfejezetekben mutatom be.

Részleges fedések esetén a teljes fedés esetéhez hasonló, ám bonyolultabb összefüggések érvényesek, amelyek analitikusan nem írhatóak le zárt alakban, numerikusan azonban számíthatók. Ezért én most csak az egyszerűsített modellt fogom részletezni.

A fotometriai mérések során a kettős rendszer összfényességét mérjük az idő függvényében, mégpedig egy inerciarendszerbe átszámított időegységben (HJD/BJD), amely már mentes a Föld Nap körüli keringéséből adódó fényidő-effektustól. Ezt az adatsort szokás **fénygörbének** nevezni. A kettős rendszerek geometriájából kifolyólag a fedések periodikusan történnek. Ezért a GZ Dra fedési kettősének vizsgálatához a fénygörbét egy keringési periódusra viszonyítva határoztam meg úgy, hogy az idősort keringési fázis szerint feltekertem és átlagoltam. Ez természetesen akkor érvényes, ha a fényváltozás minden egyes pályaciklusban ugyanaz, vagyis ha nincsenek egyéb, a keringéstől független változások – mint például foltok az egyik valamelyik tagsillagon, vagy annak pulzációi.

1.2.2. Fénygörbe időtengelyének vizsgálata, avagy a csillagsugarak meghatározása



3. ábra. A fedési geometria és fénygörbe kapcsolata.

Tegyük fel, hogy a komponensek gömb alakúak és közel körpályán keringenek. Feltétel még az is, hogy a csillagok R_1 és R_2 sugarai ne legyenek sokkal nagyobbak, mint kb. a fél-nagytengely 1/10-e. Ellenkező esetben a kölcsönös gravitációs vonzásuk révén eltorzítják egymást alakját és már nem tekinthetők gömbnek.

Az egyik csillag másik körül történő keringését a megfigyelő szempontjából a *keringési fázisszög* írja le a legjobban. Ez a két csillagot összekötő egyenes pozíciószöge az elsődleges fedés pillanatához képes. Körpálya esetén ez egyenletesen változik az idő függvényében az alábbi képlet szerint:

$$\phi = 2\pi \cdot \left\{ \frac{t - T_0}{P} \right\}, \quad (2)$$

ahol a kapcsos zárójel a törtrészt jelenti a szög 0 és 2π közötti periodikussága érdekében. Teljes, de nem centrális fedés esetén a fedő csillag vetített koordinátái a másikhöz képest

$$x(\phi) = a \cdot \sin \phi, \quad y(\phi) = -a \cdot \cos \phi \cdot \cos i,$$

ahonnan a vetített szeparáció

$$d(\phi) = a\sqrt{1 - \cos^2 i \sin^2 \phi}. \quad (3)$$

A kontaktusok időpontjaiban

$$\begin{aligned} d(\phi_{1,4}) &= R_1 + R_2 \quad \text{a külső,} \\ d(\phi_{2,3}) &= R_1 - R_2 \quad \text{a belső kontakt-pontokra.} \end{aligned}$$

A fénygörbéből a kontaktusok közötti időtartamok határozhatók meg:

$$\phi_4 - \phi_1 = 2\phi_4 = \frac{2\pi}{P}\Delta T, \quad \phi_3 - \phi_2 = 2\phi_3 = \frac{2\pi}{P}\Delta t, \quad (4)$$

ahol ΔT a fedés szélessége, Δt pedig a totalitás (azaz teljes fedés) szélessége. Bevezetve még az $r_i = R_i/a$ *relatív* vagy *fajlagos csillagsugarakat*, azokra az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$r_1 + r_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2 \left(\frac{\pi \Delta T}{P} \right)}, \quad r_1 - r_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2 \left(\frac{\pi \Delta t}{P} \right)}. \quad (5)$$

Ez a két egyenlet a sugarak fedésekből való meghatározásának alapja. Az abszolút egységekben való kifejezéshez az a fél-nagy tengely abszolút értékére van szükség, amelyet például a radiális sebességmérésekből tudunk meghatározni.

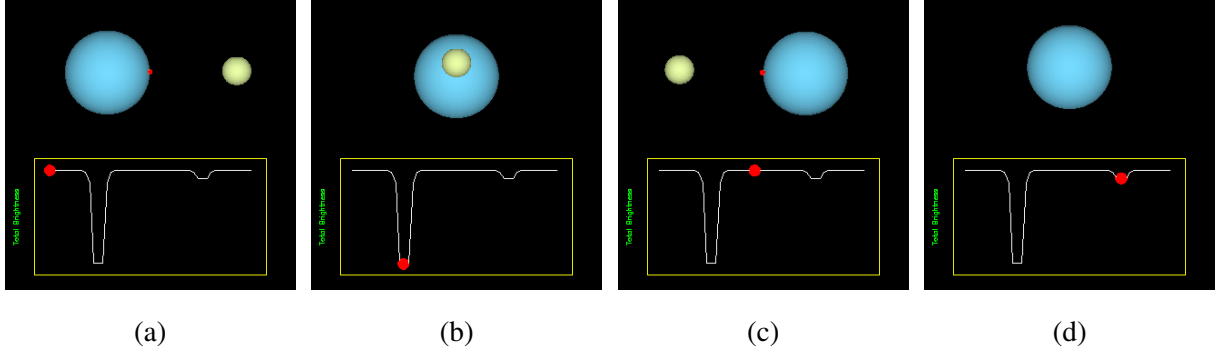
1.2.3. Csillagfényességek meghatározása a fénygörbéből

Ezt szintén teljes fedésre illusztrálom, továbbá a csillagok *szélsötétedését* is elhanyagolom, viszont a modellezésnél figyelembe fogom venni az ott részletezett módon. Ha nincs szélsötétedés, akkor a csillag felülete izotrop módon sugároz, az intenzitás minden irányban azonos, az égboltra vetített csillagkorongok egyenletes *felületi fényességekkel* rendelkeznek.

A csillagra a detektor érzékenységi tartományára számított L_i luminozitás az ugyanazon szűrőre eső f_i felületi fényesség és a csillagkorong területének szorzata. Az egyes csillagokra $L_i = f_i \cdot \pi R_i^2$ ($i = 1, 2$) A csillagról a megfigyelő detektorára jutó teljesítményt úgy kapjuk, hogy a felületi fényességet megszorozzuk a csillagkorongnak a felénk mutatott területével, valamint azzal a térszöggel, amely alatt a csillag bármely pontjáról a detektor látszik (F_i):

$$F_i = f_i \cdot \pi R_i^2 \cdot \frac{A_{\text{det.}}}{D^2}, \quad \text{Fluxus} = \frac{F_i}{A_{\text{det}}} = \frac{1}{D^2} \pi R_i^2 \cdot f_i = \frac{1}{D^2} \cdot L_i. \quad (6)$$

ahol f_i a felületi fényesség, A_{det} a detektor felülete, D pedig a csillag távolsága. Ezt elosztva a detektor felületével kapjuk a detektor által mért *Fluxust*, W/m^2 mértékegységben. Tehát az általunk mért Fluxus (6.egy.) a csillagokról érkező teljes luminozitás osztva a tőlünk mért távolság négyzetével. Mivel utóbbi egy közös skálafaktor, a további tárgyalásban elhagyhatjuk.



4. ábra. Geometria és fénygörbe összehasonlítása, ami a szélsötétedés is bemutatja. Forrás: [10] 3.44. ábra

A 4. ábra a komponensek egymás körüli keringését veti össze a fényesség megváltozásával. A kék csillagnak nagyobb a hőmérséklete, mint a kisebb sárga csillagnak. Ha a két komponens nem fedí egymást, akkor a fényességük összeadódik (4a és 4c. ábrák). Ugyanakkor figyelembe kell még venni egy fedésen kívüli, úgynevezett *harmadik fény* (ℓ_3) esetleges jelenlétét is, amely nem a tagcsillagokról származik, hanem például egy felbontatlan háttércsillagról, vagy – különösen a GZ Draconis esetében – harmadik tagcsillagról származik, amely nem vesz részt a fedési eseményekben, ezért konstans többletfényességet ad minden fázisban. Ennek elhanyagolása ugyanis eltorzíthatja a fizikai mennyiségek illesztését.

$$L_{\max} = \pi R_{\text{kék}}^2 \cdot f_{\text{kék}} + \pi R_{\text{sárga}}^2 \cdot f_{\text{sárga}} + L_3, \quad (7)$$

Ha a nagyobb felületi fényességű csillag van fedésben, akkor a görbén a luminozitás főminimuma van (4b. ábra):

$$L_{\text{fő}} = \pi \left[(R_{\text{kék}}^2 - R_{\text{sárga}}^2) \cdot f_{\text{kék}} + R_{\text{sárga}}^2 \cdot f_{\text{sárga}} \right] + L_3 = L_{\max} - R_{\text{sárga}}^2 \cdot f_{\text{kék}}. \quad (8)$$

Ha a kisebb felületi fényességű csillag van fedésben, akkor a mellékminimum luminozitását látjuk (4d. ábra):

$$L_{\text{mellék}} = \pi R_{\text{kék}}^2 \cdot f_{\text{kék}} + L_3 = L_{\max} - R_{\text{sárga}}^2 \cdot f_{\text{sárga}} \quad (9)$$

A fedésmélységekkel kifejezhetjük, hogy a fedések mekkora fényességeséssel járnak. A fő- és mellékminimum fedési mélységének arányából a következő összefüggés látható be:

$$\frac{D_{\text{fő}}}{D_{\text{mellék}}} = \frac{L_{\max} - L_{\text{fő}}}{L_{\max} - L_{\text{mellék}}} = \frac{R_{\text{sárga}}^2 \cdot f_{\text{kék}}}{R_{\text{sárga}}^2 \cdot f_{\text{sárga}}} = \frac{f_{\text{kék}}}{f_{\text{sárga}}}.$$

A fedési mélységek aránya tehát megadja a felületi fényességek arányát. Ebből a hőmérsékletek arányát is megkapjuk, ha ismerjük a felületi fényességek hőmérséklettől való függését. Ez

első közelítésben lehet a feketetest-sugárzás Planck-függvényének az aktuális szűrőre történő integrálja:

$$f(T) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_{\lambda}(T) d\lambda.$$

Valódi esetekben inkább valamilyen pontosabb légkörmodellt használnak (pl. Kurucz-modell), amit numerikusan számolnak és a T hőmérséklet, a $\log g$ felszíni gravitáció és a Z fémtartalom szerint rendezett táblázatokból interpolálnak:

$$f(T) \equiv f(T, \log g, Z). \quad (10)$$

Mindkét esetben a fenti arányokból a hőmérsékletek aránya számítható, mégpedig a harmadik fénytől függetlenül. Többszin-fotometria esetén a fedésmélységek együttes feldolgozása nemcsak a hőmérsékletek arányát, hanem magukat a hőmérsékleteket is meg tudja adni.

Ha kiszámítjuk a fedéseknek a harmadik fénytől megszabadított minimumainak arányát:

$$\frac{L_{f\ddot{o}} - L_3}{L_{mell\acute{e}k} - L_3} = \frac{(R_{k\acute{e}k}^2 - R_{s\acute{a}rga}^2) \cdot f_{k\acute{e}k} + R_{s\acute{a}rga}^2 \cdot f_{s\acute{a}rga}}{R_{k\acute{e}k}^2 \cdot f_{k\acute{e}k}} = 1 - \left(\frac{R_{k\acute{e}k}}{R_{s\acute{a}rga}} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{f_{s\acute{a}rga}}{f_{k\acute{e}k}} \right),$$

amiből a csillagsugarak arányára lehet következtetni.

A felületi fényességek aránya akkor is következik a fedések mélységeinek arányából, ha a fedések részlegesek. Ugyanis az egyik csillag által a másiktól kitakart legnagyobb terület mindkét fedésnél ugyanakkora. Legyen ez A . Akkor a fedések mélységeinek aránya

$$\frac{L_{\max} - L_{f\ddot{o}}}{L_{\max} - L_{mell\acute{e}k}} = \frac{A \cdot f_{k\acute{e}k}}{A \cdot f_{s\acute{a}rga}} = \frac{f_{k\acute{e}k}}{f_{s\acute{a}rga}}.$$

A csillagsugarak arányát viszont ebben az esetben nem lehet analitikus módon kiszámolni. Maguk a csillagsugarak ugyan függenek a fedések profiljától, de csak numerikus módszerekkel határozhatók meg, ráadásul a harmadik fény is további nélkülözhetetlen mennyiséggé válik, akár független módon meghatározva, akár a többi paraméterrel együtt optimalizálva, de figyelembe kell venni.

1.3. Valódi fénygörbék és osztályozások

Valós fedési kettősök esetén az alábbi bonyolító tényezők nehezítik a paraméterek egyszerű meghatározását. A torzító tényezőket az alábbi felsorolásban összeszedtem. A szójegyzékben megtalálható a leírásuk.

→ Szélsőtétedés, Tengely körüli forgás, Excentrikus pálya,

→ Szórós rendszerek, Reflexiós hatás, Anyagátadás

Tág rendszerekben a fedésen kívül fényváltozás nem történik, a komponensek közel gömb alakúak. Éppen ezért, a GZ Draconis fénygörbe alakja ³ szerint EA típusúnak tekinthető. A csillagok fizikai paramétereit az ilyen jól különálló rendszerekben lehet a legpontosabban meghatározni. De ezekben a rendszerekben gyakran excentrikus a pálya, viszont ez elhanyagolható a GZ Draconisnál. Jelenleg a legnagyobb nehézséget a részleges fedés okozta ismeretlen inklináció okozza. Általában a szórós rendszerekben a csillagok alakja torzul és a fent felsorolt effektusok együttesen fordulnak elő, ami jelentős fedésen kívüli fényváltozásokat okoz a fénygörbében, viszont ilyen fajta torzulások, mint ahogy azt majd látni fogjuk, nagyon kis százalékban figyelhetők meg a mért fénygörbén, ezért a szélsőtételen kívül a többi torzulást nem volt szükséges figyelembe vennem a modellezés során.

1.4. Csillagok alakja kettős rendszerekben: a Roche-modell

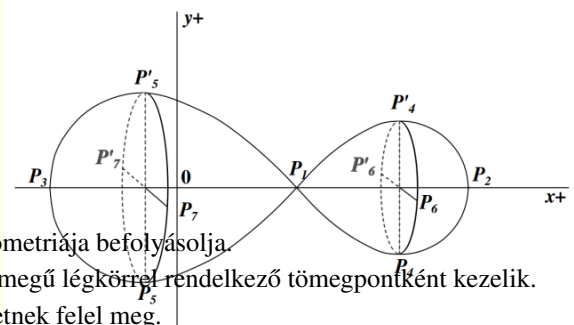
Szórósabb kettős rendszerek esetén az egyes csillagok alakját a másik komponens gravitációs vonzása eltorzíttja a gömb alaktól. Ennek leírására szolgál az úgynevezett *Roche-modell*, amely a kérdést a korlátozott háromtest-probléma egyszerűsítésében tárgyalja.⁴ A felszín egy tetszőleges pontjára ható erő a két csillag mint tömegpont gravitációs vonzásából, valamint az együttforgó koordináta-rendszerből következő centrifugális erőből tevődik össze. Potenciálja:

$$\Phi(r) = \frac{GM_1}{r} + \frac{GqM_1}{\sqrt{(1-\lambda r)^2 + (\mu r)^2 + (vr)^2}} + \frac{(1+q)GM_1}{2a^3} \left[\left(\lambda r - \frac{qa}{1+q} \right)^2 + (\mu r)^2 \right] \quad (11)$$

Az egyenlet polárkoordinátákban van megadva, q – tömegarány, r – sugár, a $\lambda = \cos \phi \sin \theta$ és $v = \cos \theta$ és $\mu = \sin \phi \sin \theta$ – az iránykoszinuszok, G – gravitációs állandó, a – fél-nagytengely.

Hidrosztatikus egyensúly esetén a csillag felszínén a tömegpontra ható erő merőleges kell hogy legyen a felületre.⁵ A potenciál speciális egyensúlyi megoldásai a Lagrange-pontok. A *Lagrange-pontokban* az erőhatás az egyik síkban zérus. Az L_1 , L_2 , L_3 pontok instabilak, avagy hosszútávon nem képes egy test ott nyugalomban maradni, ellentétben az L_4 és L_5 pontokkal, amik stabilak. Az számunkra az L_1 pont a legfontosabb.

A Roche-lebenyt az az ekvipotenciális felület határozza meg, amely áthalad az L_1 ponton és mindkét komponenst körülöleli. A csillagok méretét a felületi potenciál ismeretében is meg lehet határozni ($r =$



³A fényesség változásának alakját a kettős rendszer geometriája befolyásolja.

⁴Ebben a közelítésben a két csillagot elhanyagolható tömegű légkörrel rendelkező tömegpontként kezelik.

⁵Más szóval a csillag felszíne egy ekvipotenciális felületnek felel meg.

$r(\Phi, \lambda, v, \mu)$). A különféle modellező programokban is egy-egy potenciálérték vagy a neki megfelelő *térfogati sugár* jellemzi a csillagok alakját és szerepel illesztési paraméterként. A szórós rendszerekben gyakori jelenség, hogy a komponens térfogata meghaladja a csillag körüli Roche-lebeny méretét. Ebben az esetben a csillag az L1 ponton át anyagot ad át a társ csillagnak. A kettős rendszereket szokás osztályozni anyagáramlás szerint is. A GZ Draconis szórós kettőseben mindkét komponens a saját Roche-lebenyén belül van, így anyagátadás nem történik közöttük.

1.5. Spektroszkópia

A kettős rendszerekben a komponensek egymás körül keringése eredményezi, hogy a csillagok hozzánk képest változó *radiális sebességgel* mozognak, amennyiben a rendszer pályasíkja nem az égbolt síkjában van, vagyis ha az inklináció jelentősen nagy.

A radiális elmozdulás (v_{RAD}) miatt a rendszer színeképében a komponenseknek megfelelő abszorpciós vonalak eltolódnak. Ezt a jelenséget a *Doppler-eltolódásnak* nevezzük. A vonalak eltolódása időben periodikus és a két komponensre ellentétes fázisban történik. Ezt a periodikus változást mérhetjük a spektroszkópiában.

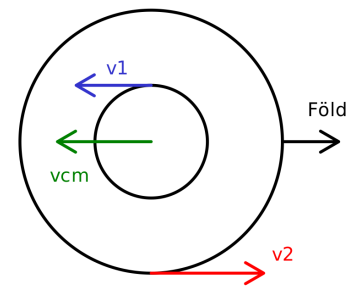
Ideális esetben mindkét csillag vonalainak eltolódása kimutatható a színeképben. Ilyenkor *kétvonalas spektroszkópiai kettősről* beszélhetünk. Ha azonban az egyik csillag jóval halványabb, mint a másik, akkor csak a fényesebb csillag vonalait látszódnak. Ezek az *egyvonalas spektroszkópiai kettősök*.

A *Doppler-eltolódás* képlete klasszikus határesetben, amikor a radiális sebesség sokkal kisebb, mint a fénysebesség,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_{\text{RAD}}}{c}, \quad (12)$$

ahol λ és λ_0 a színeképvonal mért illetve földi laboratóriumi hullámhosszai, $\Delta\lambda$ a különbségük, c pedig a fénysebesség. Kettőscsillagok esetén a legnagyobb keringési sebességek nagyságrendje 100 km/s, ami jóval kisebb, mint a fénysebesség, és a klasszikus képlet biztonsággal alkalmazható rájuk.

A színeképen mért hullámhossz-változásokból számolt radiális sebességek időbeli változását ábrázolva kapjuk a radiális sebességgörbéket. Ezek alakjából és amplitúdóiból szintén a mozgás természetére következtethetünk.



6. ábra. Kettős rendszer radiális elmozdulása

Tegyük fel, hogy a rendszerünkben két eltérő nagyságú és tömegű csillag kering, körpályán. Ekkor a sebességek változása szinuszos. Megállapodás szerint ha a v_1 csillag távolodik, azt pozitív előjelű sebességgel jellemezzük, ennek a tagnak nagyobb a tömege mint a másik tagnak, ellenben olyankor a v_2 csillag közeledik, az negatív előjelet kap (7. ábra). A komponensek szinuszosan változó sebességeire a következő egyenlet írható fel.

$$v_{\text{RAD}1,2}(t) = v_{\text{TKP}} \pm K_{1,2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{P}(t - t_{\min})\right), \quad (13)$$

ahol $K_{1,2}$ a radiális sebességamplitúdók, v_{TKP} a közös TKP radiális sebessége vagy *rendszer-sebesség* (ami időben állandó) és a második tag pozitív előjele az első, míg a negatív előjele a második csillagra érvényes.

Körmozgás esetén a sebességamplitúdók a csillagoknak a közös TKP körüli keringési sebességeinek a látóirányukra eső vetületei:

$$K_{1,2} = v_{1,2} \cdot \sin i = \frac{2\pi a_{1,2}}{P} \cdot \sin i, \quad (14)$$

ahol $a_{1,2}$ – a rendszer komponenseinek a TKP-tól mért távolságai. Ezekre a következő összefüggések állnak fent:

$$a_1 = a \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad a_2 = a \frac{M_1}{M_1 + M_2} \quad (15)$$

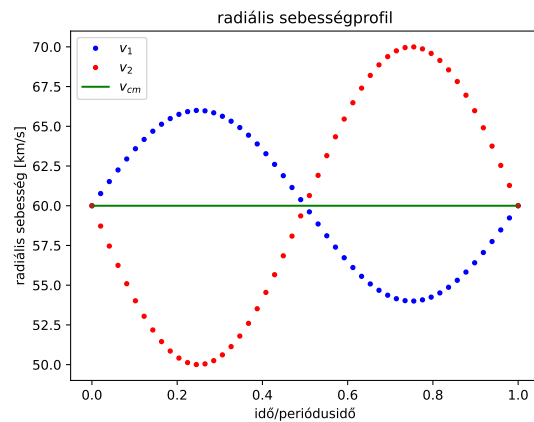
ahol M_1, M_2 – a komponensek tömegei, a pedig a fél-nagy tengely. Ha az 15. egyenletet kifejezzük a 14. képlettel, majd átrendezve behelyettesítjük a tömegarányba, akkor:

$$q = \frac{M_2}{M_1} = \frac{K_1}{K_2} \quad (16)$$

A radiális sebesség-amplitúdók aránya tehát a tömegek arányát adja meg, míg a 14. egyenletek alapján, ha ismert az inklináció és a periódus, a fél-nagy tengelyek határozhatók meg, mégpedig abszolút fizikai egységben (méter, kilométer). Az összegük a teljes fél-nagy tengely, amelyet Kepler III. törvényének képletébe behelyettesítve a tömegek összegét kapjuk:

$$\frac{(a_1 + a_2)^2}{P^3} = \frac{a^2}{P^3} = \frac{G}{4\pi^2} (M_1 + M_2) \quad (17)$$

Ha ismert a tömegek összege és aránya, akkor az egyes tömegek is kiszámíthatóak. Ebben a legnagyobb bizonytalansági tényező az inklináció. Ha azt nem ismerjük, akkor a tömegekre csak egy alsó határ mondható ($i = 90^\circ$ -ot feltételezve), amelynél a valódi tömegek nagyobbak



7. ábra. Radiális sebességgörbe

vagy egyenlőek. Ezért jó, ha fedési kettőssel van dolgunk, mert ott a fénygörbéből az inklináció is meghatározható.

Megjegyzem, hogy nem minden spektroszkópai kettős fedési, ellenben minden fedési kettős legalább egyvonalas spektroszkópai kettős is.

Amennyiben a pálya excentrikus, a sebességek változása nem szinuszos lesz, és a sebességamplitúdók kifejezésébe egy $(1 - e^2)^{1/2}$ tag is belekerül. De az alapelvet nem változtatja: a radiális sebességekből a csillagok tömegeire tudunk következtetni.

2. Fotometriai mérések a Bajai Observatóriumban

A méréseket főként asszisztált távészlelésekkel végeztem el az SZTE Bajai Observatóriumban, témavezetőm felügyelete alatt. A megfigyelésekre a kutatóhely ASA AZ800-as típusú távcsövét használtam, ami teljes mértékben távvezérelhető. A célpontról két időszakban is készültek mérési sorozatok. Az első, 2022 október és december között készült adatsort a BSc szakdolgozatomban használtam fel, hogy egy nagyságrendi becslést tegyek a szoros kettős fizikai jellemzőire. A mérést ennél többre nemigen lehetett használni, mert a késő őszi illetve korai téli éjszakák minősége sem időjárási, sem csillagászati szempontból nem volt éppen ideális. (Lásd.: a 14a. ábra mutatja a standardizálatlan fénygörbét.) Részletesebb leírás található a szakdolgozatomban az őszi/első mérés részleteiről, eredményeiről [6].

A továbblépéshez tehát a második mérés elvégzése lényegében szükségszerű volt. Ezeket a megfigyelések 2023 júniusa és augusztusa között történtek, ideális égpozíciók és kedvező időjárási feltételek mellett.

A méréseket egy véges optikai hullámhossz-tartományon végezzük, amit leginkább az alkalmazott szűrő áteresztési függvénye határoz meg, kisebb mértékben pedig a távcsőoptika és a detektor. A fényességet általában magnitúdóban vagy fluxusban határozzuk meg.

2.1. A GZ Draconis

Noha a TESS méréseit leszámítva még nem volt alaposan vizsgálva, már régóta ismerjük az objektumot, ezért néhány adat fellelhető róla a szakirodalomban. Az adatokat a *Simbad* [9] online csillagászati adatbázist különböző platformjain kérdeztem le. Ezek alapján terveztem meg a mérési beállításokat.

- RA (J2000.0): 18h 12m 40,99s DEC (J2000.0): $+54^{\circ} 46' 6''$
- Parallaxis: $4,84 \pm 1,21$ mas (*Hipparchos* adatbázis alapján; a *Gaia* nem tartalmaz róla mérést)
- Ez alapján a távolsága: $206,17 \pm 41,34$ pc
- Színképe szerint F0 típusú csillag.
- Magnitúdók szűrőnként [3]: $g = 9,95 \pm 0,01$ mag, $r = 9,40 \pm 0,01$ mag, $i = 9,42 \pm 0,03$ mag.

A Sárkány egy nyári csillagkép. A napi delelése nyaranta az éjszakai időpontokban van. Így jól megfigyelhető. Viszont a télbe átfordulva a delelésének időpontja eltolódik a nappal-

ba. (Lásd.: 8 és 9.ábra) A teleszkóp csak $30^\circ - 85^\circ$ magasság között képes pontos méréseket végezni. Ennek egyik fő indoka hogy, a légkör hatása a horizonthoz közel már nagyon erősen torzítja a csillag fényességét. A 85° felső határ a távcső azimutális szerelése miatti korlát. Az ilyen távcsöveknél mindkét tengelyt változó sebességgel kell forgatni, és a zenit közelében a függőleges tengelyre megkívánt sebesség túl nagy, meghaladja a motorok képességeit.

A nyári méréseket ez a jelenség nem befolyásolta hiszen a csillagkép egész éjszaka megfigyelhető volt az említett fokintervallumban.

Mivel a GZ Dra periódusideje közel két és negyed nap, ezért egy teljes keringést nem lehet folyamatosan lemérni, hanem éjszakánkénti szakaszokból kellett összerakni. Ezért a vizsgálat során nagyon fontos volt ismernem a rendszerem periódusidejét (P) és egy főminimum-időpontot, *epocha* (τ), hogy tudjam, mikor milyen orbitális fázisstartományt mérek le. Ezek ismeretében az orbitális fázis

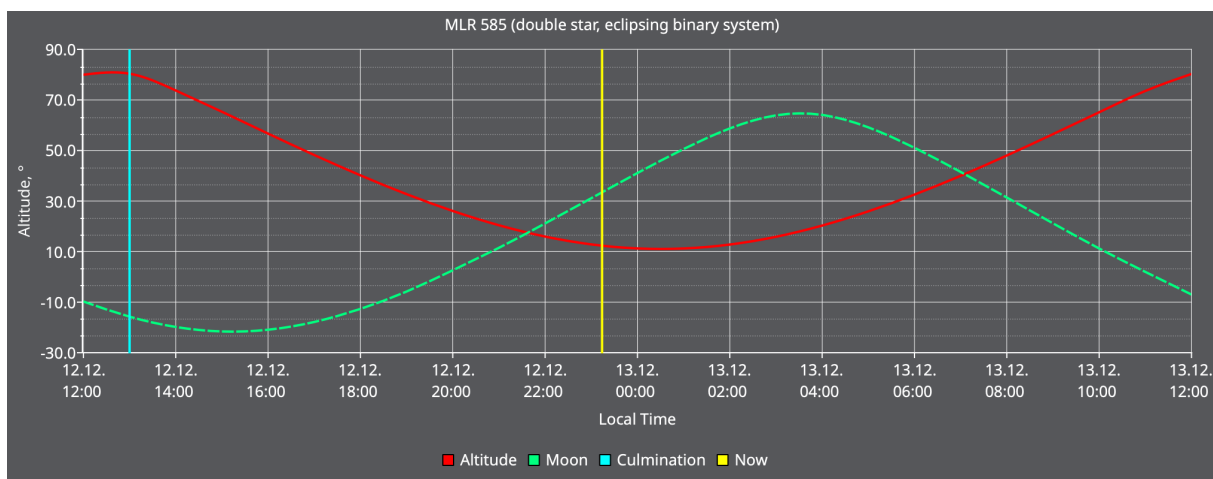
$$\phi_{\text{orb}} = \left\{ \frac{t - \tau}{P} \right\}, \quad (18)$$

ahol t és τ baricentrikus Julián-dátumban, P pedig napokban van megadva, és a kapcsos zárójel törtrészt jelent. ⁶

A csillagot a TESS űrteleszkóp is követi. Az általa mért fedési kettősökről egy online, bárkinek elérhető adatbázist hoztak létre [19]. Itt megtalálható a periódusidő és a minimum-időpont is. A csillagom *TIC 0356896561* név alatt található a katalógusban[12].

$$P = 2,243\,3509 \text{ nap} \quad \tau = 2\,451\,685,409\,425\,3 \text{ BJD}$$

A mérések tervezéséhez én is ezeket az adatokat használtam.



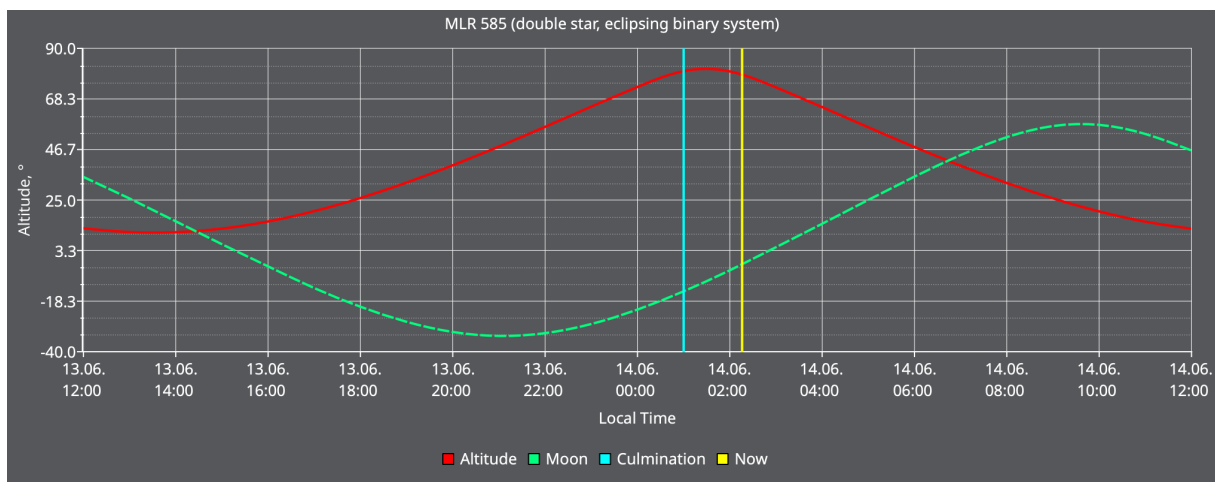
8. ábra. GZ Dra(MLR 585) magasságának változása az égbolton, az utolsó őszi mérési éjszakán.

Forrás: Stellarium program > Astronomical calculations > Graphs

⁶Az orbitális fázis definíció szerint 0 és 1 közötti mennyiség, egy periódusidő alatt ennyit változik.

Az **első mérésorozatot** (ősszel), a csillagképet már csak a lenyugvó fázisában tudtuk megfigyelni, a kora esti órákban. A mérésési adatok sok légköri hibával is terheltek, hiszen az őszi időszakban sokszor volt felhős, ködös az időjárás. Volt, amikor 20° -ig mértem a csillagot, hogy egy teljes elsődleges fedést sikerüljön lefedni. Szerencsére a fedések éjszakáin tiszta volt az égbolt.

A **második mérésorozatot** már lehetett úgy időzíteni a tágas határidők miatt, hogy nyáron mérjünk, amikor is a legalkalmasabb az égipozíció. A mérést az is segítette, hogy száraz és derült éjszakákban gazdag időszámban mértük az objektumot, így az új mérések sokkal egységesebbek lettek, és a fénygörbe is kevesebb légköri zajjal terhelt. A differenciális fotometriából kapott fénygörbét a (14b). ábra mutatja.



9. ábra. GZ Dra(MLR 585) magasságának változása az égbolton, az első nyári mérési éjszakán.

Forrás: Stellarium program > Astronomical calculations > Graphs

2.2. BRC80 teleszkóp

A Ritchey-Chrétien elrendezésben mind a két tükör forgási hiperboloid. Az elrendezéssel a szferikus aberrációt és kómahibát is ki lehet küszöbölni.

A Nasmyth egy olyan elrendezés, ahol az optikai rendszerbe beépített harmadik síktükör a fényt oldalra kivetíti, a vízszintes tengely közepében, az ott elhelyezett optikai detektorba. Ennek előnye,



10. ábra. A bajai BRC80-as távcső. Forrás: SZTE fizika BSc, Csillagászati Megfigyelések kurzus jegyzete

hogy így a főtükröt nem kell átfúrni, továbbá hogy egyből két Nasmyth-fókusz is van a tengely két vége felé, amelyeket a síktükör elforgatásával lehet kiválasztani. Két végen általában egy fotometriai szűrővel ellátott CCD kamera és egy spektrográf kap helyet.

Mechanika	
Szerelés	Azimutális szerelés
Vezérlés	Linux alapú terminálból nyitott CCDSH program [2]
Optikai felszerelés	
Optikai elrendezés	Ritchey-Chrétien-Nasmyth (10. ábra)
Főtükör átmérője (d)	800 mm
Fókuszhossz (f)	5600 mm
Fényerő	f/7
Detektor, szűrők	
Kamera típusa	E2V CCD230-42, hátsó megvilágítású
Pixelszám	2048x2048, 15x15 μ pixelméret
Termoelektromos hűtés	folyadékűtéssel, -40°C hőmérsékleten
Látómező	18,8' x 18,8'
Szűrők	Sloan u,g,r,i,z + Bessel B,V

1. táblázat. A BRC80 távcső paraméterei.

A távcső nem tubusos, hanem nyitott vázszerkezet rögzíti a tükröket, így a város közelsége miatt sok a szórt fény. Ezért kapott egy "takarót", ami kiszűri az oldalról besugárzó fény-szennyeződést.(lásd.: 10.kép)

Az azimutális szerelés előnye, hogy a nehéz szerkezeteket sokkal jobban elbírják a vízszintes és függőleges tengelyek. Hátránya, hogy mivel egyik tengely sem az égi pólusra mutat, azért a csillag követése közben a látómező elfordul. Ezt egy *derotátor* nevű szerkezet oldja meg, ami mindig úgy forog a két tengellyel összhangban, hogy a látómezőt egyenesben tartja. A zenit környékén ezt is végtelen sebességgel kellene forgatni, ezért az a kis tartomány emiatt sem mérhető. A szűrők az optikai tartományt teljesen lefedik. Az általam használt Sloan/SDSS szűrők hullámhossz-tartományai a következők: $400\text{ nm} \leq g \leq 540\text{ nm}$, $540\text{ nm} \leq r \leq 700\text{ nm}$, $700\text{ nm} \leq i \leq 810\text{ nm}$.

A távcső leírását a Csillagászati Megfigyeléseken kiadott anyagból olvastam ki [4]. A vezérlésről Pál András egy dokumentumot is készített [2].

2.3. Mérés vezérlése

A Bajai Obszervatórium [8] összeállított egy olyan online felületet[14], amivel a távcső mozgását, az időjárás állapotát, illetve a bajai égbolt állapotát tudtam kémlelni a mérés közben. Ez nagyon előnyös volt, ugyanis így meg tudtam határozni, hogy mikor van olyan felhőmenetiség az égen, amitől még tudok érdemleges méréseket végezni. Szerencsére a nyári mérések idején nem voltak komolyabb problémák.

Fontos, hogy a képeket olyan beállítás mellett kellett felvenni, hogy szűrőnkénti pixel beégés/túlfolyásést korrigáljuk. Az általam használt CCD-kamera maximális beütésszáma/elektron száma 60000 analóg-digitál egység (ADU), de 40000 fölött már kezd nemlineárisra válni. Optimális beütésszáma 25000 – 30000 között mozog. Az expozíciós időt és a fókusztávolságot változtatva állítottam be az optimális beütésszám-tartományra a mérést. Lényeges szempont az is hogy, a csillagok ne legyenek túl halványak sem a képeken. Ez főleg a háttérben levő standard csillagok szempontjából lényeges.

A GZ Dra annyira fényes, hogy teljes fókusztávolság mellett már 2 másodperc expozíciós idővel is beégett a felvételeken. Ezért erősen defókuszálni kellett, hogy elég hosszú expozíciós idő mellett se égjen be. A túl rövid expozíciók nem jók, mert azokban a légkör szcintillációja határozza meg a pontosságot, és nem a csillag fényessége. Úgy defókuszáltam, hogy az expozíciós idő legalább 15 másodperc legyen. Szerencsére a célpont közelében három hasonló fényességű, összehasonlíthatóan alkalmas csillag is található a látómezőben, így a defókuszálás azokat sem tette túl halvánnyá.

A GZ Dra rendszert nem helyeztük a kép középpontjába, mert akkor két összehasonlíthatóan a kép szélére szorult volna. Egy köztes pozíciót választottunk, amelyben minden számunkra érdekes csillag közel azonos távolságra volt a kép középpontjától.

A mérések vezérlését főként a saját laptopomról irányítottam, ahol kihasználtam a bajai szerver Linux alapú SHELL-kapcsolatát.

3. Nyers képek kalibrációja

A mért képekből még nem lehet direktben kinyerni a csillagok magnitúdónitúdóját. Ugyanis a csillagról érkező fény keresztül megy a légkörön is, ami erősen torzítja a CCD kamerába beérkező fény intenzitását és spektrumát is. A kamerának is van egy elektronikai zaja, ami befolyásolja a képek tudományos felhasználását. A nyers képekből ki kell küszöbölni ezeket a hatásokat. Korrigálni kell a pixelek eltérő fényérzékenységeire illetve a porszemcsék jelenlétére az optikai elemeken.

A mérőrendszer saját torzításait háromféle kalibrációs kép levonásával korrigáltam. A légkör torzító hatását pedig a differenciális fotometriával küszöböltem ki.

A kiértékeléshez az IRAF ⁷ programcsomagot, valamint a témavezetőm által kidolgozott photutils csomagokat használtam. Az utóbbit lpython környezetben kell futtatni. Minden programot a Bajai Observatórium [8] szerverén futtattam, a SHELL kapcsolaton keresztül a *screenie* program segítségével. Mindkét sorozatot ezzel a módszerrel korrigáltam. Ebben a fejezetben röviden részletezem, hogy a második mérés sorozatban, hogyan korrigáltam a képeket.

3.1. `imgproc mode=h`

A task levonja a távcső által okozott elektrontöbbleteket illetve, egyenetlenségeket a nyers képekről. Három korrekciós képpel dolgozik – bias, dark és flat képek –, amiket a mérések éjszakáján az objektum képekkel együtt készültek. Mindegyik kép levonására található külön task a *noao>imred>ccdred* könyvtárban viszont, ezt manuálisan lassú lenne végig futtatni mindegyik éjszakára, ezért a témavezetőm a folyamat felgyorsítása érdekében automatizálta a korrigálást az *imgproc* task-ban. Elérési útvonal:

```
cl > ujbajaccd > bajared (taskcsomag)
```

A task megkeresi a megfelelő objektum típusokhoz tartozó képeket és miután mester-képet készít a bemenő fájlokból, azt levonja az fejezet második részében taglalt módszerek szerint. A szűrőket és az expozíciós időket is figyelembe veszi.

⁷IRAF programot (Image Reduction and Analysis Facility)[13] a DS9 grafikus felülettel együtt futattam.



11. ábra. gzdra-20230808-0232-g.fits | Egy példa korrigált képre a g szűrőre, a zöld karika mutatja a GZ Draconist.

1. lépés: Bias korrekció

Legalább három 0 s idővel úgynevezett *bias korrekció*-képeket készítettem, minden éjszaka során 7 db-tól 22 db-ig változatos számmal. Az IRAF-ben az első lépés, hogy ezeket a képeket átlagoltam, amiből egy *biasmester* képet kaptam. Ezt azután levontam a *dark*, *flat* és *objektum* képekből.

2. lépés: Dark korrekció korrekció

A sötét áramra is korrigálni kell úgy, hogy lecsukott fényzárral *Dark korrekció*-képeket készültek. A Dark korrekció képek expozíciós ideje az *objektum* képek expozíciós idejével egyezik meg. A *Dark korrekció* képeket átlagoltam egy-egy *darkmester* képpé, amit kivontam a *flat* és az *objektum* képekből.

3. lépés: Flat korrekció korrekció

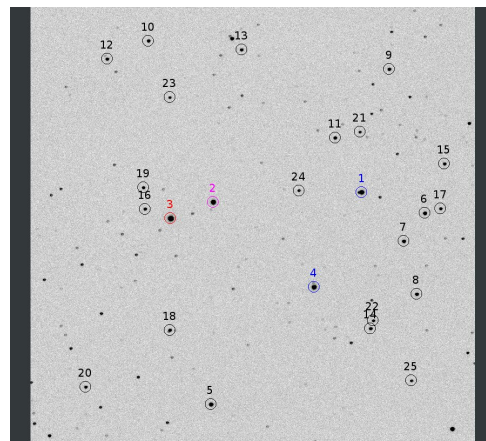
Egyenletesen kivilágított területről készültek képeket (a mérések éjszakáján naplemente után vagy napfelkelte előtt a zenitet használtuk). Ezeket minden szűrőre külön kell készíteni. A képek azonos szűrőkénti expozíciós idővel készültek mint az objektum képek. A *flatmester* képet a *flat korrekció* képek mediánátalaga adja meg, szintén szűrőnként. A mester képpel leosztottam az objektumképeket, hogy a különböző pixelek érzékenységét egyenletesre hozam.

3.2. wcssolve

A korábbi évtizedek során rengeteg standard magnitúdójú csillagot kimértek és mindenki számára elérhető adatbázisokba foglalták. Az égbolt legtöbb részét ráadásul lefedték a mérések. A *.fits* képeken legalább 25 standard csillag található, amik alkalmasak összehasonlításnak.

A program megkeresi a standardok égi koordinátájához ⁸ megfelelő xy pixelkoordinátákat a *.fits* képeken. A standardok magnitúdóját felhasználva meghatározható a változóm magnitúdója abszolút egységekben.

```
cd képek mappája -> bajared> \\  
wcssolve *.fits
```



12. ábra. A GZ Draconis látómezeje a készített felvételeken. A változó a 2-essel jelölt csillag; 1 és 4 a használt összehasonlító csillagok.

Ez a task az *astrometry.net* csomagot használja az égterület hatékony beazonosítására. A szkript szerencsére a defókuszált csillagokkal is működött, amilyenek az én méréseimben voltak. A program minden *.fits* fájl mellé készített egy *.coo* fájlt, ami tartalmazza az azonosított csillagok képkoordinátáit (x,y). Ha egy *.fits* fájlhoz egy *.nowcs* fájl tartozik, akkor arra nem sikerült az asztrometria. Ez a felhős képek esetében volt hatékony, amelyeken túl kevés vagy semennyi csillag nem volt látható. Ezeket a képeket töröltem a további elemzésből. A nyári mérésakor nem volt olyan mennyiségben felhős kép, hogy az számottevő legyen.

RA	DE	NUM	TYC
-----	-----	---	-----
18:11:45.264	+54:47:37.22	1	TYC 3907-1947-1
18:12:28.730	+54:46:53.89	2	TYC 3907-1796-1
18:12:40.964	+54:46:07.08	3	TYC 3907-1832-1
18:11:57.951	+54:43:30.63	4	TYC 3907-1862-1

13. ábra. A változóm ('var') és az összehasonlító ('comp') valamint ellenőrző ('check') csillagok égikoordinátáját, *Tycho Input Catalog*-számai, a harmadik koordináta tartozik a GZ Draconishoz.

⁸I. ekvatoriális rendszerben a rektaszczenzió [RA] és a deklináció [DEC]

4. Fotometria

Az IRAF program fotometriai rutinjai nincsenek felkészítve idősorok fotometriájára, azokkal sok idő és pepecselős munka. Ennek kiváltására lett megalkotva a *photutils* Python-csomag a Bajai Csillagvizsgálóban, amely az IRAF fotometriai rutinjait hívja meg a PyRAF modul segítségével, de a csillagok azonosítását és az idősorok összeállítását maga végzi el. A Bajai Obszervatórium munkatársai már összeállítottak egy olyan IPython környezetet, ami a fotometriához szükséges modulokat és taskokat tartalmazza, így nekem ezek betöltésével nem kellett foglalkoznom. Három lépésben végeztem el a fotometriát.

4.1. Apertúra-fotometria

A GZ Draconis környezetében egymástól jól elkülönülő csillagok található, ezért apertúra fotometriára teljesen alkalmas. Ennek során a csillag képét egy kör alakú képzeletbeli apertúrával vesszük körbe, és az azon belüli pixelek intenzitását összeadva kapjuk a fluxust. Majd egy nagyobb, koncentrikus körgyűrűben található pixelek intenzitásának átlagából megállapítjuk az egy pixelre eső I_h háttérintenzitást, amivel az összfluxust alkalmas módon korrigáljuk. Ez a Pogson-formulával alakíthatjuk magnitúdóra:

$$I_* = \sum_{k=0}^N I_k - N \cdot I_h \rightarrow m = -2,5 \cdot \lg(I_*) + m_0 \quad (19)$$

ahol, m_0 az úgynevezett *műszerkonstans*, amely a fotometriai kalibráció során állapítható meg. Az IRAF-ben három paraméterrel lehet a vizsgált területeket kiválasztani. Az *aperture* az apertúrayílás sugarát adja meg, *annulus* a körgyűrű belső sugarát, *dannulus* pedig annak vastagságát adja meg.

A fotometria elvégzéséhez ismerni kell a csillagok koordinátáit. A *photutils* ekvatoriális koordinátákkal dolgozik, azokat alakítja minden egyes képhez derékszögű pixel-koordinátákba a benne levő World Coordinate System (WCS) információ segítségével. Ezeket az *astrometry.net* rutinjai írták be a kalibráláskor a képek fejlécébe. Én az őszi, a 2022.10.07.-i mérésnél kapott égi koordinátákat átlagoltam (lásd.: 13.bekezdésben).

A *photutils* az apertúra-fotometriát egyetlen parancsban összesíti, amit a fájlokat tartalmazó könyvtárból kell futtatni. –a differenciális fotometriához hasonlóan – A paramétereket argumentumával kell kalibrálni. Többek között a *annulus*, *dannulus*, egy vagy több apertúrát és az égi koordinátákat kell megadni.

Az apertúra sugarára ökölszabály, hogy a csillagok átlagos félértékszélességének 3–4-szerese legyen, a háttérgyűrű pedig ne pontosan az apertúrától kezdődjön, hanem attól néhány pixelnyi

távolságra. A félérték-szélesség könnyen kiolvasható az `imexam` segítségével a radiális profilból. Az általam mért defókuszált csillagokra viszont egyrészt elég nehéz volt átlagos félérték-szélességeket mondani, másrészt a fotometriai középpontot sem lehetett pontosan megállapítani, hiszen egyes képeket a csillagok közepén "lyukasak" voltak. Ezért több apertúrán keresztül is elvégeztem a fotometriát, és az optimális értéket a differenciális magnitúdók előállításakor választottam ki azt, amelyik az összehasonlító és ellenőrző-csillag magnitúdóinak különbségében a legkisebb szórást adta. A háttérgyűrűt a legnagyobb sugarú apertúrán is kívülre tettem.

4.2. Differenciális fotometria

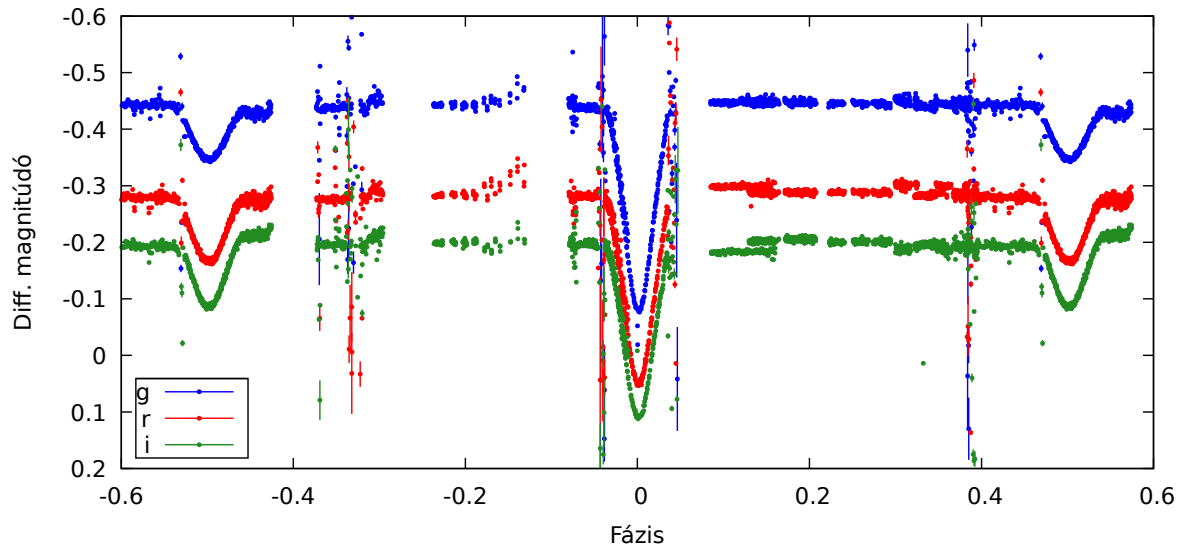
Az előző részben az egyedi csillagokra kapott magnitúdók *kalibrálatlan műszermagnitúdók*, amelyek nemcsak a csillag fényességét, hanem a légkör elnyelő hatását és a kamera úgynevezett munkapontjának a külső hőmérséklettől való változását is tartalmazzák. Azokat a jeleket, amelyeknek a csillaghoz nincs közük, *differenciális magnitúdók* segítségével szűrjük ki. A légkör ugyanis egy olyan kis látómezőben, mint ami a csillagászati felvételekre jellemző, a képen levő összes csillag fényét időben változó, de egy felvételen belül azonos mértékben befolyásolja. Ezért ha két csillag magnitúdóit kivonjuk egymásból, akkor csak a csillagok egymáshoz viszonyított fényességét kapjuk, a légkört és műszer hatását kiküszöböljük. Ha az egyik csillag a változó, a másik pedig egy olyan referenciacsillag, amelyről tudjuk, hogy állandó fényességű, akkor a fényesség változása a változócsillag miatt történik. A referencia-csillag fényességét egy katalógusból ki tudjuk nézni.

A referencia- vagy összehasonlító csillag állandóságát érdemes leellenőrizni úgy, hogy kiválasztunk egy másik referencia csillagot (ellenőrző, avagy *check* csillag). A két referenciafényességét is összehasonlítjuk, szintén úgy, hogy kivonjuk őket egymásból. Akkor jók a referenciacsillagok, ha a fényesség különbségük időben alig vagy elhanyagolhatóan változik. A program apertúránként kiszámolja a `comps-checks` és `var-comps` differenciális magnitúdó-idősorokat. A `comps-checks` a `comps-checks` idősorból ⁹ bar-plotot generál, hogy abból megállapíthassuk, melyik apertúrában a legkisebb a szórás.

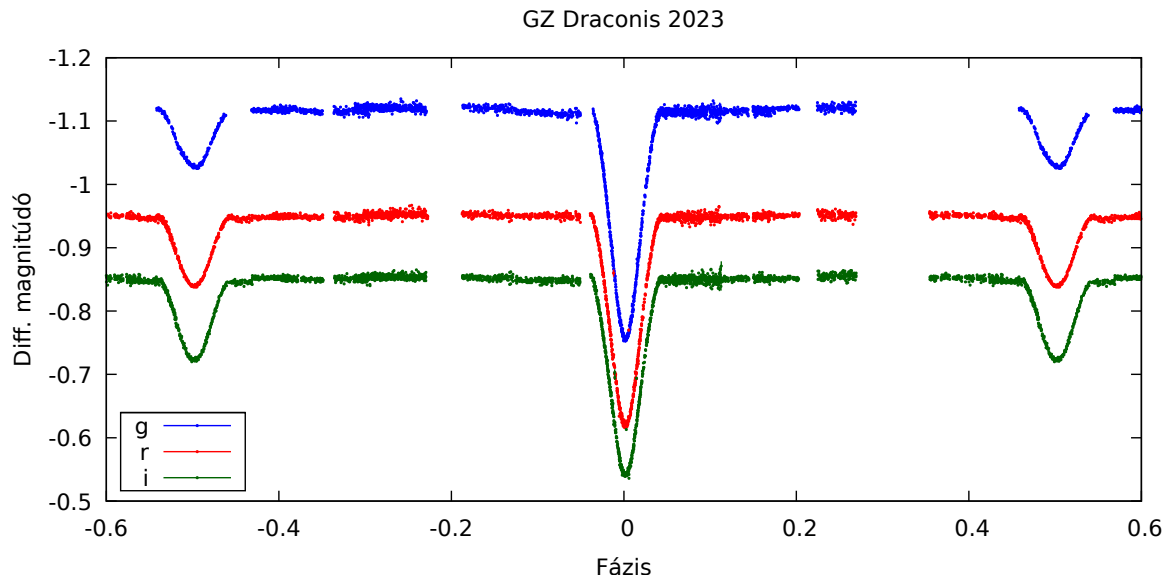
A tapasztalataim szerint a 15-20 pixel sugarú apertúrák bizonyultak optimálisnak, mind egyik éjszakára és mivel az 1-es és 4-es csillagok differenciális magnitúdói időben nagyon stabilnak bizonyultak, ezért mindkettőt összehasonlító csillagként használtam.

A teljes fénygörbe összeállítását az egyes éjszakák magnitúdóinak összefűzéséből határoztam meg a témavezetőm segítségével. Az éjszakák általában jó minőségűek voltak, így ennek alapján az éjszakák összezsírozása egy standard fotometriai kalibráció során egyszerűbb

⁹egy 10-ed rendű spline-t illeszt, azt levonja, és a maradványok összegét kiszámolja



(a) 2022 őszi mérés



(b) 2023 nyári mérés

14. ábra. A kettő mérés differenciális fénygörbéjének összehasonlítása.

egyenletrendszerrel megoldható. Viszont, a csillag környezetében nincsenek, hasonlóan "kék" csillagok, így az úgynevezett másodlagos színi tagok sem elhanyagolhatóak, azokra is korrigálni kellett.

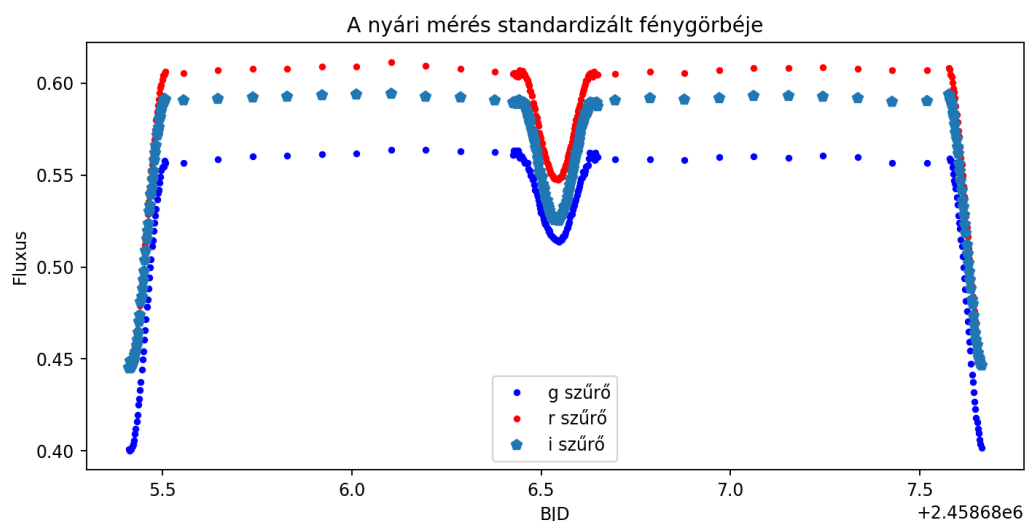
4.3. Standard magnitúdók

Végül a differenciális magnitúdók a műszerkonstansok segítségével standard, légkörön kívüli magnitúdókra lettek transzformálva. Ehhez megint csak a photutils rutinjait használtam. A rutinok az adatsorokat szűrőcsoportokba rendezik (egy-egy képhármasba), az azokon levő, PS1 DR2¹⁰ fotometriai standardok magnitúdóira lineáris modellt illesztenek, majd a modell segítségével a nem-standard csillagokra is standard magnitúdókat számolnak. A 12. ábrán feltüntetett 3. csillag a GZ Draconis és a kék színnel jelölt 1. és 4. csillagok a referencia csillagok és 5-25. csillagok a standardizáláshoz szükséges standard magnitúdókat adják. Megjegyzem, hogy ugyan a referencia-csillagoknak szintén vannak standard magnitúdói a PS1 DR2 adatbázisban, de azok teljesen megbízhatatlannak bizonyultak, mint általában a hasonlóan fényes csillagok, mert ezt az adatbázist elsősorban a halvány objektumokra optimalizálták, a fényesebb objektumok valószínűleg telítődtek a felvételeken és ezért lehetnek hibásak a magnitúdóik. Ezért a standard kalibráció során azokra is új magnitúdókat kellett számolni.

Az így kapott SDSS-magnitúdókat közvetlenül spektrális fluxusra lehet transzformálni, mivel ebben a rendszerben minden szűrőnek azonos a zéruspontja:

$$f_{g,r,i} = 3631 \cdot 10^{-0.4 \cdot (g,r,i)} \quad [\text{Jy}].$$

A modellillesztéshez ezeket a kalibrált fluxusokat használtuk. A végleges fénygörbe a 15. ábrán látható. A fedéseken kívüli szakaszokat nagyobb időközű pontokra „binneltük”.



15. ábra. A GZ Draconis kalibrált fénygörbéje.

¹⁰Pan-STARRS first survey, data release 2, ez tartalmaz SDSS szűrős standard magnitúdókat az égbolt csillagairól.

5. Fedési kettős modellezése

A különböző torzító hatásokra korrigált és standardizált fénygörbe alkalmas az objektum modellezésére, a fizikai paramétereinek felderítésére.

A dolgozatban bemutatott modellezés a szakdolgozat [6] folytatásaként tekinthető. Az ott részletesen ismertetett Phoebe Legacy segítségével értem el az első eredményt még az első mérési sorozatból, amelyet itt kiinduló paraméternek használtam fel, az eredményből kiindulva folytattam az optimalizálással. Ezt a Phoebe második generációs programjával végeztem el. Az áttérés azért is volt szükséges, mert a Legacy verzió nem használta fel optimálisan a többszínfotometria biztosította többlet-információt. Ezt követően Markov Chain Monte Carlo (MCMC) módszerrel feltérképeztem a paraméterteret a kapott paraméterek bizonytalanságai meghatározásához. Viszont az eljárás akár heteken-hónapokon át tartó futtatásokat igényel, ha a szükségesnél túlságosan nagyobb paramétertérben történik a mintavételezés. Ezért az MCMC előtt különösen fontos az adatokra minél pontosabban illeszkedő modell megléte, hogy a kérdéses feltérképezendő paramétertér redukálva legyen a lehetőségekhez mérten.

A modellezéshez egy Apple Macbook Air – 16GB, M3 – 2024-et használtam. A futtatások a Jupyter Notebook környezetében történtek.

5.1. A Phoebe 2 rövid bemutatása

A Phoebe (Physics of Eclipsing Binaries) egy nyílt forráskódú, szabadon használható program a fedési kettős rendszerek fizikai modellezésére használatos módszerek válfajába tartozik, az első ilyen megközelítést használó, Wilson-Devinney (WD, [1]) által kifejlesztett kódon alapul. Ennek első változata még 2005-ben készült, amikor elsősorban földfelszíni mérések születtek kettős rendszerekről ([16]). Az elmúlt évtizedek technikai fejlődésének köszönhetően olyan pontosságú űrfotometriai adatsorok állnak rendelkezésre, amelyek illesztését lehetővé tevő új fizikát abba a most már csak 'Legacy'-ként hivatkozott verzióba már nem lehetett beépíteni a fejlesztésekkel. A program második generációjának létrehozásának a célja az volt, hogy az új alapok lefektetésével jobban megfeleljen a kor adta kihívásoknak, és felhasználóbarát környezetet biztosítson a mai kutatók számára. Ennek következtében a két programverzió alapjaiban teljesen más, ugyanakkor az átjárhatóságot megkönnyíti, hogy a Legacy verzióval kompatibilis paraméterfájlt képes importálni-exportálni az új generációs verzió, valamint képes használni a Legacy-t modellező háttérprogramként. A programot specifikusan a kettős csillagok modellezésére fejlesztette ki Andrej Prša a fejlesztőcsapatával, és távlati tervben van a hármas vagy többes rendszerekre való kiterjesztése is. A radiális sebességgörbék és fénygörbék mellett ké-

pes a színeképvonal-profilok és asztrometriai pályák szintetikus számolására is, de jelenleg csak az előbbi kettő illesztésére van lehetőség. Nem utolsósorban az is fontos különbség, hogy amíg a Legacy verzió grafikus kezelő felülettel rendelkezik – ahogy a BSc dolgozatomban is bemutattam –, addig a Phoebe 2 teljes mértékben Python terminálból, szerencsésebb esetben Jupyter Notebookból vezérelhető. Ez lehetővé teszi a szkriptelhetőséget is, ami ugyanakkor sok tapasztalatot követel meg.

A Phoebe 2-höz elérhető egy nyilvános weboldal [15], ahol többek között az egyes beépített képességek részletes leírása, Python-szkriptek írásánál hasznos API (alkalmazási illesztőfelület, *Application Interface*) dokumentációja található meg. A programcsomag gyakorlati használatánál van egy tanulási görbe, amiben a weboldalon szintén elérhető oktatóanyagok [17], illetve előző évi workshopok nyilvánosan elérhető tananyaga igyekszik segíteni. Az alábbiakban röviden bemutatom ennek használati módját.

A program első lépése egy teljesen új munkaprojekt esetén, hogy egy kettős rendszerről létrehozunk egy alapértelmezett kettősmodellt,

```
> b = phoebe.default_binary()
```

ami egy `b` néven tárolt „bundle”-t, adatköteget hoz létre. Ez két, $1 M_{\odot}$ tömegű, $1 R_{\odot}$ sugarú, Naphoz hasonló effektív hőmérsékletű csillagot tartalmazó, 1 napos P keringési idejű, körpályás rendszert hoz létre, amelyben a tagok centrális fedést mutatnak. A kötegben a paraméterek laza megkötések szerint hierarchikus ágakban, ún. twig-ekben vannak rendeződve. Ráadásul nemcsak a csillagkomponensek és a pálya tulajdonságai találhatóak meg ebben a kötegben, hanem többek között egy alapértelmezett (és minden később hozzáadott) beállítás-szett a modellezéshez is. Ezek módosítását többféle úton-módon lehet elvégezni, amelyeket alább szemléltetek. Például, hogyha az elsődleges csillag torzultságára Roche-modellt kívánjuk alkalmazni, akkor az egyik lehetőség

```
> b.filter(context='compute', component='primary',
           qualifier='distortion_method').set_value('roche')
```

A másik lehetőség a közvetlen twig-ek megnevezése, ami a fent bemutatott kód függvényének argumentumában lévő értékek '@' szimbólummal való összekapcsolása. Ezzel sokkal rövidebben és egyszerűbben érhetőek el és módosíthatóak az értékek – az előző példánál maradva az alábbi módon:

```
> b['distortion_method@primary@compute'] = 'roche'
```

A teljesség kedvéért megjegyzem, hogy amennyiben a két csillag távolsága olyan nagy, hogy gömbbel közelíthető a csillag alakja, akkor a 'sphere' választásával jelentősen lerövidül a modellezés, ennek következtében a későbbi optimalizáció idő- és erőforrásigénye is.

A rendszer szintetikus és adatmodellezéséhez szükséges összes rutin a köteghez kapcsolódó

`b.parancs(argumentum)`

alakban hívható meg, mint például a `run_compute`, `run_solver` vagy `save`, amelyekkel rendre modellezést, optimalizációt vagy mintavételezést, illetve a kérdéses `bundle` egy megadott fájlba való mentését lehet elvégezni. Utóbbival a fejlesztőcsapat egyik legfontosabb célkitűzése érhető el: az elért eredmények reprodukálhatósága, ami a Legacy verzióban jóval korlátozottabban volt elérhető.

5.2. Kiinduló paraméterek, egyszerűsítések és eredetük

A fejezet felvezető részében említettem, hogy a jelen munkámat megelőzően a Phoebe Legacy verzióját használtam fel a GZ Draconis modellezéséhez. Hogy hogyan becsültem az első mérésekre paramétereket, ennek pontos leírása található a BSc szakdolgozatomban [6]. Ugyan a később ismertetett illesztéseket a legújabb mérési adatsoron, a 15. ábrán bemutatott végső adatsoron végeztem el, a régebbi, gyengébb minőségű adatsor analíziséből kapott fizikai paramétereket használtam fel kiindulási pontként (lásd 2. táblázat). Ez azért fontos, mert a fedési kettősök modellezése nemlineáris optimalizálás, így fontos, hogy olyan modellből induljunk ki, ami nem áll messze a valótól, ellenkező esetben esetleg egy hamis, lokálisan optimális megoldást találunk.

$a[R_{\odot}]$	$10,071 \pm 0,076$	$\ell_3(r)[Jy]$	$0,014 \pm 0,0002$
$i[^\circ]$	$84,56 \pm 0,01$	$\ell_3(g)[Jy]$	$0 \pm 0,001$
$T_1[K]$	7040 ± 10	$\ell_3(i)[Jy]$	$0,0316 \pm 0,0002$
$T_2[K]$	5670 ± 10		
$M_1[M_{\odot}]$	$1,654 \pm 0,01$	$R_1[R_{\odot}]$	$1,694 \pm 0,005$
$M_2[M_{\odot}]$	$1,048 \pm 0,04$	$R_2[R_{\odot}]$	$0,934 \pm 0,005$

2. táblázat. Kiinduló paraméterek, amelyeket a szakdolgozatban ismertetett módon kaptam a Phoebe Legacy program segítségével.

Ahogy az előző alfejezetben írtam, az új Phoebe verzió lehetővé teszi, hogy a régebbi verzióknak, azaz a Legacynak paraméterfájlját felhasználva hozzon létre egy `bundle`-t. A pythonos környezetben az alábbi parancssor segítségével lehet elvégezni.

```
> b = phoebe.from_legacy('fájlnév')
```

Mivel a kettő program teljesen eltérő alapokra építkezik, sajnos előfordulnak olyan paraméterek, amik vagy nem, vagy nem abban formában léteznek az új verzióban. Előbbire példa a `pshift` paraméter, ami egy fázistolást jelent a fotometriai fázisok esetén. Ennek kellemetlen eredménye az lehet, hogy a programban használt referencia időpontot újra kell illeszteni. Utóbbira egy példa az Φ ekvipotenciális felület, amit az úgynevezett ekvivalens sugár vált fel – annak a hipotetikus gömbnek a sugara, amelynek térfogata megegyezik a modell csillag térfogatával.

A kiindulási paraméterek közül ki kell emelnem a T_1 , T_2 hőmérsékleteket. Habár a Legacy kézikönyve az ellenkezőjét állítja, tapasztalataink szerint nem képes a hőmérsékleteket illeszteni több színszűrőben mért adatsor felhasználásával, hanem a különböző szűrőkben mért adatokat egymástól függetlenül skálázva illeszti. Ugyanakkor a Phoebe 2 esetén már közölt új tudományos eredmények is találhatók, ami újabb okot és motivációt adott a programváltáshoz. Annak ellenére, hogy a rá vonatkozó eredmény eltérhet a valóságtól, nem képezhet egy sokkal rosszabb kiindulási alapot az alapértelmezett 6000 K-hez képest.

A hőmérséklet fontos tényezőt jelenthet a peremsötétedési értékek meghatározásához, ahogy a $\log g$ -n keresztül a csillagsugarak. Mivel az utóbbiak is új illesztésre szorulnak, a szélsötétedés-kezelési módot „kézi” módba kapcsoltam az alapértelmezett 0,5 és 0,5 lineáris és nemlineáris együttthatójú logaritmikus törvény feltételezésével. Az adatsorokkal kapcsolatban a meghatározott ℓ_3 harmadik fény nagyságát egységesen nullára állítottam.

Továbbá az optimalizáció során törekedtem az egyszerűsítésekre a számításigény csökkentése érdekében, így az alábbi közelítésekkel éltem:

- Az alapértelmezett Roche-modell helyett gömbbel közelítettem a csillagok alakját.
- Mivel a kettő csillag hőmérsékletaránya 0,8 körül alakul, elhanyagolható a besugárzási effektus, így azt kikapcsoltam.

A fenti közelítéseket a későbbi munkafázisban időközönként mérlegeltem, hogy az illesztés jósága és az adatok minősége megengedi-e az egyes közelítések elvetését, a modell általánosítását. Ezekkel a kezdeti feltételekkel, közelítésekkel végeztem el az első mérés adataira az illesztéseket. A beolvasott adatsor ugyanakkor viszonylag nagy zajjal volt terhelt. Az őszi mérések fénygörbéjében hullámváltozás volt megfigyelhető az alapszinteken, amiről akkor azt tételeztük fel, hogy a földfelszíni mérések hibáiból származhat. Ugyanakkor ez a hullámváltozás a TESS és a második mérés görbéjén is tetten érhető volt, ami a csillagrendszer valamelyik tagjának forgási változásából, nevezetesen foltból is eredhet. Ezt az eshetőséget szem előtt tartva végeztem el azokat az illesztéseket, modellezéseket, amelyeket a következőkben ismertetek.

5.3. Optimalizálás a Phoebe 2.4-ben

5.3.1. Optimalizációs metódusok és a Merit-függvény

Az optimalizáció alatt általános cél, hogy a paraméterek által meghatározott modell minél jobban leírja a rendelkezésre álló megfigyelt adatokat. Ehhez a Phoebe második verziójában több beépített algoritmus közül választhatunk, mindkettőben az a közös, hogy egy úgynevezett érdemfüggvény (*merit function*) minimalizálásán vagy maximalizálásán alapul. Alapértelmezett módon az adatsor és modell viszonyával összefüggő valószínűség logaritmus (logprobability) írja le, amit az alábbi összefüggés definiál.

$$\begin{aligned}\text{lnprobability} &= \text{lnpriors} + \text{lnlikelihood} \\ &= \sum_{\text{mérés}} \ln(P(p|\Pi)) - 0.5\chi^2\end{aligned}$$

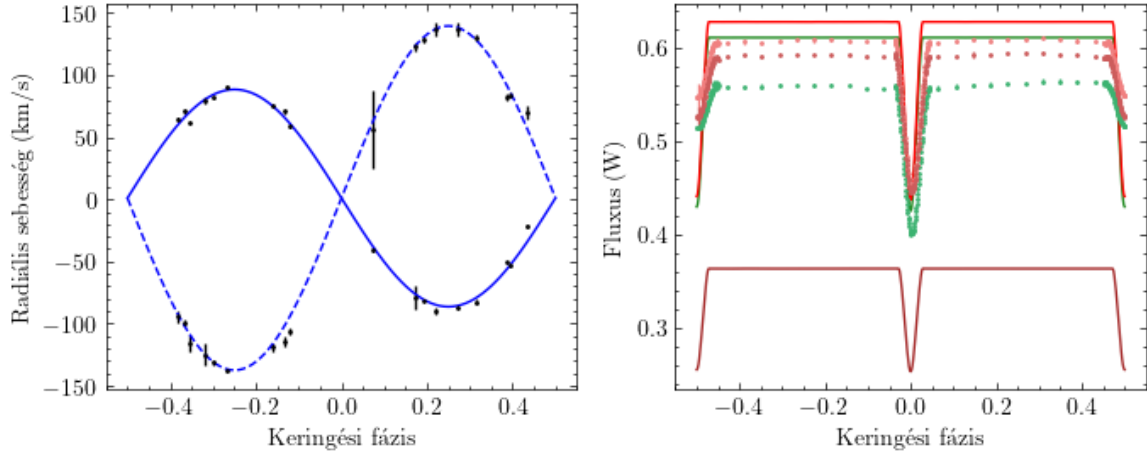
Az első tag – ami az előzetes, *a priori* információkat kódolja – esetemben zérus, mert nem tételeztem fel semmit a rendszerről. A második tag pedig a likelihood logaritmusa, ami lényegében a maradványösszeg-négyzetek súlyozott átlagával, a klasszikusan ismert χ^2 -tel áll kapcsolatban.

Az elvégzett munkám során kettő módszert használtam az illesztésre. A leggyakrabban használt a **Nelder & Mead szimplex módszer** volt, amely lokális minimumkeresésre alkalmas algoritmus. Itt az illesztendő paraméterek megadásán kívül a klasszikus maximális iterációs számot szükséges megadni. A másik pedig a **differenciális evolúció** (*differential evolution*), ami az előzővel ellentétben globális minimum keresésre használható. Ebben az esetben az előzőnél ismertetett beállítási paramétereken felül a paraméterek illesztési határait adhatjuk meg, illetve egy úgynevezett populációs méretet, hogy a tartományon belül mekkora számosságú keresést indítson el. Éppen emiatt ez az optimalizációs módszer alkalmas többmagos futtatásra is, ugyanakkor célszerű a célnak megfelelő méretűre csökkenteni a határokat.

Ami külön előnyt jelentett a Legacy verzióhoz képest, hogy külön-külön „solver”-eket lehetett definiálni az alább ismertetett munkamenet során, majd azokat lefuttatva egy megoldás („solution”) jött létre, amelynek realitását ellenőrizve elfogadhattam vagy elutasíthattam a felajánlott megoldását. A Phoebe ugyanis automatikusan nem módosítja a bundle-ben rögzített paraméter-értékeket, ezt a felhasználó döntésére bízta.

5.3.2. Inicializálás

Az optimalizálást már az új, nyári adatsorra végeztem el, amihez első lépésben szemügyre vettem a modell aktuális állapotát, így ábrázoltam (16. ábra) a kezdeti modellt mind a radiális sebességekre, mind a nyári modellekre.



16. ábra. Az ábrán a nyári mérési sorozatra illesztett Legacy modell látható az importálást követő finomhangolás után. Balra: radiális sebességgörbe, az adatsor fekete ponttal, kezdeti modell pedig a kék színnel – főkomponens folytonos, mellékkomponens szaggatott vonallal. Jobbra: fénygörbe három színszűrőre, melynek színei a színszűrők középponti hullámhossza szerint lett kiválasztva, i színszűrő esetén jobb híján barnával. A grafikonok jól mutatják, hogy a korábban részletezett módosítások mellett, milyen nagy a kezdeti illesztési hiba a fénygörbére.

Az adatsorokban a legnagyobb fluxusértéktől a kisebbek felé haladva a színszűrők az r , i és g sorrendjében alakulnak, ami láthatóan eltér a modellgörbénél látható r , g és i sorrendjétől. Ez a T_1 , T_2 hőmérsékletek, ℓ_3 harmadik fény szükséges illesztését vetíti előre mindenképpen. Szintén nagyobb probléma a fedések profilja (R_1 és R_2 sugár paraméterek, i inklináció, T_2/T_1 hőmérsékletarány), valamint a kezdeti időpont sem pontos. Természetesen nem szabad megfeledkezni a modell-egyszerűsítésekről sem, amelyekkel az előzőekben leírtak szerint éltem.

Az egyes elvégzett optimalizációk után először az illesztett paraméterek változásait ellenőriztem, azután az új értékekkel nyert modellt ábrázoltam, és a maradványok alakulása, jellege alapján határoztam meg a következő körben történő optimalizálandó paramétereket. A Phoebe beépített ábrázoló metódusa a többihez képest jóval bonyolultabb és dokumentációja nem túl kielégítő. Annak érdekében, hogy a fénygörbe-modellek alakulását minél automatikusabban lehessen látni, a konzulensem útmutatása segítségével új függvényeket definiáltam. Hasonló módon a paraméterek leendő új értéke (a `bundle`-ben aktuális elfogadott értékével együtt történő) kiírásaihoz szintén új függvényt hoztam létre.

5.3.3. Illesztések sematikus menete

Ebben az alfejezetben a Phoebe 2-vel elvégzett modellezések és illesztések mintamenetét vázolom fel, ami a későbbiekben minden egyes lépésnél alkalmazásra került.

Mint korábban említettem, a Phoebe 2-ben az illesztés során kapott új paramétereket nem érvényesíti automatikusan, hanem a felhasználónak kell manuálisan elfogadnia, ezzel módosítva a *bundle*-ben lévő értéket, ha azt az ellenőrzések során megfelelőnek tartja.

Az illesztés menete:

0. `> b.add_compute()` **vagy** beállítás-szett módosítás $\rightarrow$ A lépés amolyan nulladik lépésnek tekinthető, amit csak egyszer kell elvégezni abban az esetben, hogyha mérföldkőhöz értünk az illesztések során. Ilyen például egy új szűrő hozzátétele, amit a `b['enabled@[filter_nev]@[compute_nev]'] = True` utasítással lehet végrehajtani. Mindenesetre ezeket a változásokat a következő fejezetben, a optimalizációban ténylegesen jelezni fogom a reprodukálhatóság érdekében.
1. `b.add_solver()` $\rightarrow$ Létrehoz egy olyan beállítás-szettet, ami a kívánt optimalizáló módszerrel az óhajtott illesztendő paramétereket lehet megadni. Fontos, hogy ez a beállítás-halmaz elkülönül a modellezőétől (`compute`), ami utóbbinak neve szintén egy megadandó paraméter ebben a lépésben.
2. `b.run_solver()` $\rightarrow$ Itt adjuk ki a végrehajtási utasítást az optimalizációhoz. Meg kell adni a futtatni kívánt beállítás-szethnek és a megoldásnak (`solution`)– külön paraméterként – a nevét. Amennyiben a későbbiekben hasonló paraméterekkel végeznénk illesztést, az 1.-es lépésben szereplő hozzáadás kihagyható.
3. Ellenőrzés $\rightarrow$ Az elfogadás előtt ellenőriztem az eredményt minden esetben.
4. `b.adopt_solution()` $\rightarrow$ Ezzel az utasítással lehet elfogadni a felajánlott új paraméter-értékeket.
5. `b.run_compute()` $\rightarrow$ Létrehozzuk az új modellt.

5.3.4. Nyári mérésorozat optimalizálása

1. lépés -> Radiális sebesség-görbe illesztés

A kettős rendszerek modellezésénél, ha lehet, mindig a radiális sebességek illesztésével kell kezdeni, hogy a paraméter becsléshez hasonlóan (lásd: [6]) leszűkítse a paraméterteret. A sebességek időbeli modellezésével az elméleti részben már tárgyalt paramétereket lehetett

meghatározni. Mint már korábban írtam, a 16. ábrán az alapmodell optimális illeszkedése látható, ezért azt nem kellett tovább optimalizálni a fentebb vázolt séma szerint.

Összefoglalóan a 3. táblázat írja le a radiális sebességekből meghatározható paramétereket.

paraméter	neve a Phoebe-ben	értéke
q	q@binary	0.631
v_γ (km/s)	vgamma@system	0.990
$a_1 \cdot \sin(i)$ ($R_\odot$)	asini@primary	3.892
$a_2 \cdot \sin(i)$ ($R_\odot$)	asini@secondary	6.167
$a \cdot \sin(i)$ ($R_\odot$)	asini@binary	10.059
i ($^\circ$)	incl@binary	87.44
a ($R_\odot$)	sma@binary	10.069
a_1 ($R_\odot$)	sma@primary	3.896
a_2 ($R_\odot$)	sma@secondary	6.174

3. táblázat. A radiális sebességillesztésből kapott paraméterek. Félkövér betűtípussal jelölt paramétereket a fénygörbe-illesztésnél kerülnek további optimalizációra.

Ezzel a spektroszkópia nyújtotta lehetőségeket kiaknáztam. Az elkövetkező lépésekben a szűrőnkénti fénygörbék illesztéseinek menetét ismertetem.

Mivel a fénygörbékre vonatkozóan színszűrőnként különböző mértékű az eltérés, a három színszűrő egyszerre történő illesztésével, nagyobb az esély, hogy egy téves lokális minimumot talál a modell, ami nem egyezik meg a rendszer tényleges tulajdonságaival. Ráadásul kevésbé átlátható az illesztési folyamat, ezért a fénygörbe optimalizációjánál a következő menetrend szerint haladtam.

A 16. ábrán látható, hogy a legnagyobb eltérés az illesztett és valódi pontok között az i szűrőben van és a g szűrőben a legkisebb. Mivel a fedések modellje sem egyezik meg az adat-sorokban tapasztalhatóval, ezért első lépésben egyedül a g szűrővel kezdtem az illesztést, majd fokozatosan foglaltam bele az illesztésbe a további szűrőket. Előbb az r -t, majd az i -t. Már a szakdolgozatomban [6] megjegyeztem, hogy az [11] Caltech adatbázisa szerint az objektum pont egy intersztelláris felhő szélén található, így az A_V extinkciót az adatbázisban feltüntetett 0,0089 magnitúdó értékére rögzítettem.

2. lépés -> g szűrő fénygörbéjének illesztése

Az 16. ábrára tekintve g szűrő illesztése, ami ugyan a legjobb a háromból, még közel sem optimális. Az elvégzett illesztések és megfontolásuk az alábbiak szerint történt.

Kevésbé feltűnő, de mégis látható, hogy a számolt és mért alapjelszintek sem egyeznek.

Viszont, amikor már közelít az illesztés a jó megoldáshoz, akkor az összes paramétert egyszerre illesztettem, mivel ilyenkor már kis valószínűséggel ragad a modell egy hamis lokális minimumban. Ezt és a korábbi részletezett problémákat részletezve, az alábbi módszerrel optimalizáltam a g szűrő fénygörbéjét.

Mindegyik lépésben illesztettem a *szűrőnkénti luminozitást* (a Phoebe terminológiájában *passband luminosity*). Igazából mindhárom szűrő közül a g modellezése adja a legmegbízhatóbb illesztést, ezért célszerű volt hozzá viszonyítani a többi szűrőbeli luminozitást. Így minden szűrő minden modellezésénél illesztettem ezt a paramétert.

A fedésen kívüli jelszint kismértékben, kb. 0,015 magnitúdónyt hullámszik, feltehetően egyik vagy mindkét csillag foltossága miatt. Ennek vizsgálata külön tanulmányt érdemelne, ám azt jobb a sokkal pontosabb és folytonosabb TESS-mérések alapján elvégezni. Az általam itt elemzett földi mérések pontossága ugyanis kb. 0,01 magnitúdó, hasonló nagyságrendű, mint a fedésen kívüli változások. Jelen tanulmányban ezért azzal nem foglalkoztam.

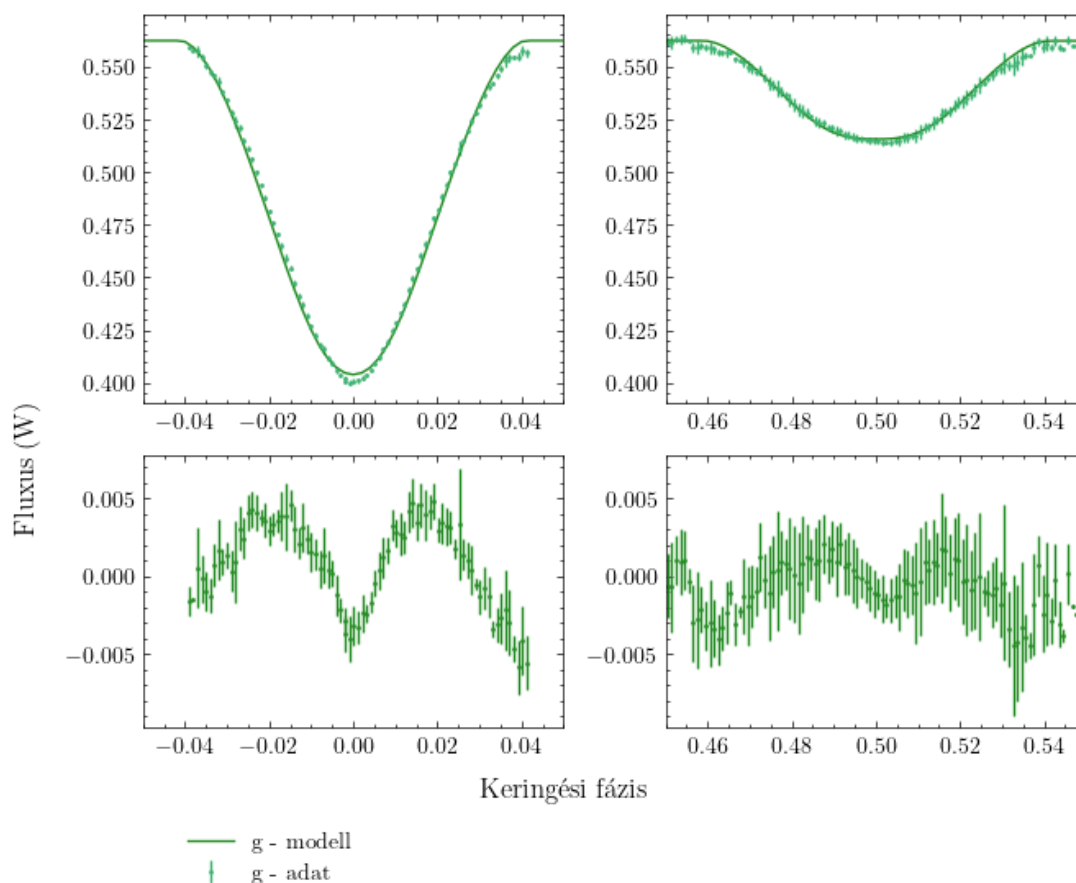
A következőkben a paraméterek illesztését mutatom be sorrendben.

1. Az egyik leghangsúlyosabb eltérés a fedések mélységében volt: a két fedésre azonos lett. Egyszerű oka volt: a hőmérsékleteket első körben az új verzió nem tudta beimportálni (paraméterváltozás miatt: a Legacyban poláris, az új verzióban átlaghőmérsékletek szerepelnek), ezért mindkettő az alapértelmezett 6000 K értéket kapta (a csillagok sugarai pedig nagyon hasonlóak). Emiatt a T_2/T_1 **hőmérséklet-arányt** kétszer illesztettem egymás után.
2. Ezt követően a fedések határai és szélessége igényelte a legnagyobb korrekciót, amit a sugarakkal, vagy azzal ekvivalens $(R_1 + R_2)/a$ relatív sugárösszeggel és R_1/R_2 sugárarányal lehet kezelni. A paraméterek illesztésénél fő szempontom volt, hogy az egymással korreláló paramétereket együtt ne illesszem kezdetben, amikor a modell még közel sem illeszkedik a mérésekre. Emiatt ebben a lépésben előbb **a $(R_1 + R_2)/a$ relatív sugárösszegét optimalizáltam,**
3. végül **a R_1/R_2 sugárarányt.**

4. Ennek hatására javult ugyan a fedések időbeli illeszkedése, így a következő lépésben a profilt és mélységet meghatározó **i inklináció** került illesztésre,
5. ezt követően a 2-3. lépésben illesztett paraméterek, **a $(R_1 + R_2)/a$ és R_2/R_1 relatív sugárösszeg és sugárarány együttesen.**
6. A fent elvégzett optimalizáció után jutottam el ahhoz a lépéshez, hogy a modell viszonylagos jó illeszkedése megengedje **a t_0 felső együttállás időpontjának**, mint használt referencia-időpontjának pontosítását. Mint korábban említettem, ez a régi és új Phoebe közötti inkompatibilitás következménye volt (a 'phase shift' paraméter az újban nem létezik), tehát nincs ok-okozati összefüggés az ETV görbénél tapasztalt eltérésekkel. Itt azt tapasztaltam, hogy az alapértelmezettnek tekintett Nelder & Mead algoritmus nem volt képes leilleszteni azt, emiatt ennek a paraméternek az optimalizációnál használtam egyedül a differenciális evolúciót. Erre az esetre olyan nagynak választottam meg a határokat, hogy a keresett időpont biztosan beleessen.

Itt jutottam el arra a pontra, hogy a szélsőtétedés kezelési módját átkapcsoljam manuálisról 'lookup' módra, amikor az együtthatókat egy táblázatból keresi ki a csillag minden pontjára az aktuális hőmérséklet, $\log g$ és a beállított fémesség (abundancia) alapján, azaz a 10 egyenletnek megfelelően.

7. Ebben a módban először külön-külön végeztem el az egyes paraméterekre vagy paraméterpárookra az optimalizációt, így előbb **T_2/T_1 hőmérséklet-arányt**,
8. az **i inklinációt**,
9. majd végül **a relatív sugárarányt és -összeget** (R_2/R_1 , $(R_1 + R_2)/a$) illesztettem.
10. Ezután az előző három pontban optimalizált paraméterek – azaz a **T_2/T_1 hőmérséklet-arány**, az **i inklináció**, az **R_2/R_1 sugárarány** és az **$(R_1 + R_2)$ sugárösszeg** – szimultán illesztése történt meg, kétszeri alkalommal.
11. Utolsó előtti lépésként ennél a szűrőnél megtörtént egy végsőnek szánt t_0 felső együttállási időpont illesztése,
12. végül zárásképpen a 10. pontban illesztett paraméterek ismételt optimalizálását végeztem el újra. Magát a T_1 hőmérsékletet rögzített értéken tartottam, hiszen egyetlen szűrőből nem lehet azt megmondani.



17. ábra. A g színszűrő adatsora és illesztett modellje a fő- (bal felső panel) és mellékminimum (jobb felső panel) idején. Az alsó paneleken a kettő közötti különbség, a maradvány látható.

i	85,078°	pblum	6,493 W
t_0	2458685,414628686	T_2/T_1	0,840
reqsumfrac	0,268	R_2/R_1	0,530

4. táblázat. A 'g' szűrős adatsorral optimalizált paraméterek.

A végső illesztés után modellezett fénygörbe és annak az adatokra való illeszkedése látható a 17. ábrán. A kapott paramétereket a 4. táblázatban soroltam fel.

A szűrőnkénti ábrákat összevetve, a várt feltételezést igazolja, hogy modell a g szűrőben a legoptimálisabb. A maradványok jó része onnan ered, hogy a fedésen kívüli változások miatt a fedések előtti és utáni szintek sincsenek teljesen szinkronban, különösen az elsődleges fedésnél. A másodlagos fedés maradványában jelentős kiugrás nincsen. Viszont mivel a modellt további szűrők adatainak bevonásával amúgy is tovább szándékoztam finomítani, a g-szűrős illesztést ezen a ponton befejeztem.

3. lépés -> g és r szűrő fénygörbéjének illesztése

Mivel a g szűrő illesztése során a fedés profilja, a referencia időpont pontosításra került, a g és r szűrő együttes optimalizációja gördülékenyebbnek bizonyult. Csupán a A.1. ábrára rátekintve látható, hogy fluxusbeli eltérés eltérés van jelen, ami főképpen a még nem illesztett hőmérsékletekkel állhat elsősorban összefüggésben. Ez magyarázhatja a fedési profilok illeszkedésbeli eltérését is.

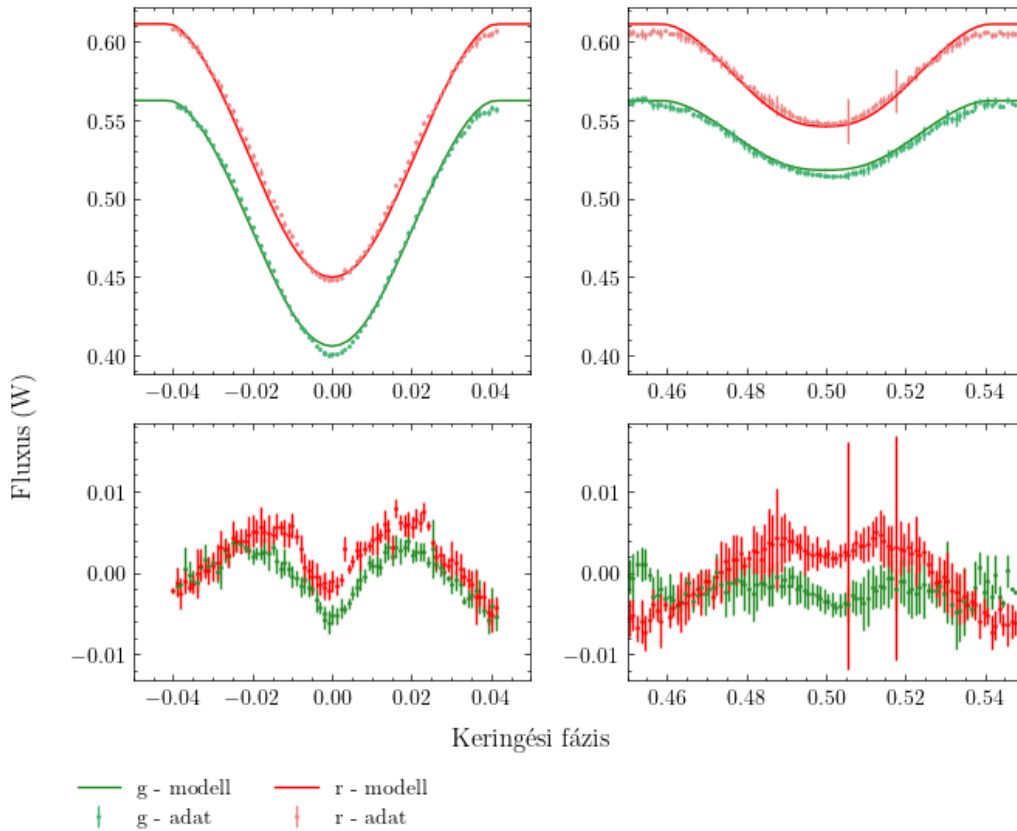
A kétszűrős adatsorra történő optimalizálást az alábbiak szerint végeztem el. Ahogy a 2. lépésnél is, itt is minden esetben illesztettem a szűrőbeli luminozitást – pontosabban csak a főkomponens g szűrős luminozitását: a másodkomponens g -beli, valamint mindkét csillag r -beli luminozitásai a sugarak és hőmérsékletek révén már abból számíthatóak. (Pont ez a kapcsolat nem volt érvényesíthető a Phoebe Legacyban.)

1. Először az egyes szűrőkbeli szinteket kívántam közelebbi egyezésbe hozni, amihez a főkomponens T_1 hőmérsékletét, illetve a T_2/T_1 hőmérsékletarányt optimalizáltam.
2. Ezt követően a hőmérsékleteket (azaz T_2/T_1 hőmérsékletarány és főcsillag T_1 hőmérséklete), valamint a fedés geometriai paramétereit (azaz i inklináció, R_2/R_1 sugárarány és $(R_1 + R_2)/a$ relatív sugárösszeg) illesztettem egyszerre, mivel közel jó a modellillesztés.
3. Mivel hőmérsékleti információkkal rendelkezem és volt egy kevés szisztematikus eltérés az egyes fénygörbék reziduáljainál, próbaképpen illesztettem a két szűrő harmadik fényét ($\ell_{3,g}$, $\ell_{3,r}$), mindemellett pedig még a T_2/T_1 hőmérsékletarányt, i inklinációt és főcsillag T_1 hőmérsékletét is.
4. Utolsóként ebben a konstrukcióban minden felsorolt paraméter együttes optimalizációja történt meg.

Az így kapott paramétereket a 5. táblázat foglalja össze, a hozzátartozó illesztéseket és maradványokat a 18. ábra szemlélteti.

i	84,863°	$L_{1,g}^{(pb)}$	6,518 W
T_1	6148,372 K	T_2/T_1	0,821
reqsumfrac	0,269	R_2/R_1	0,533
$\ell_{3,g}$	$7,687 \cdot 10^{-11}$	$\ell_{3,r}$	$1,269e \cdot 10^{-6}$

5. táblázat. g és r szűrő optimalizált paraméterei



18. ábra. A g és r színszűrő adatsora és illesztett modellje a fő- (bal felső panel) és mellékminimum (jobb felső panel) idején. Az alsó paneleken a kettő közötti különbség, a maradvány látható.

Nem olyan jól illeszkedik mint a *g* szűrőben, viszont a *g* esetén már taglalt profil hibák szintén megjelennek, csak látványosabb hatással. A főminimum szépen illeszkedik, viszont a modell felülilleszti az alapjelszintet.

4. lépés -> mindhárom szűrő fénygörbéjének illesztése

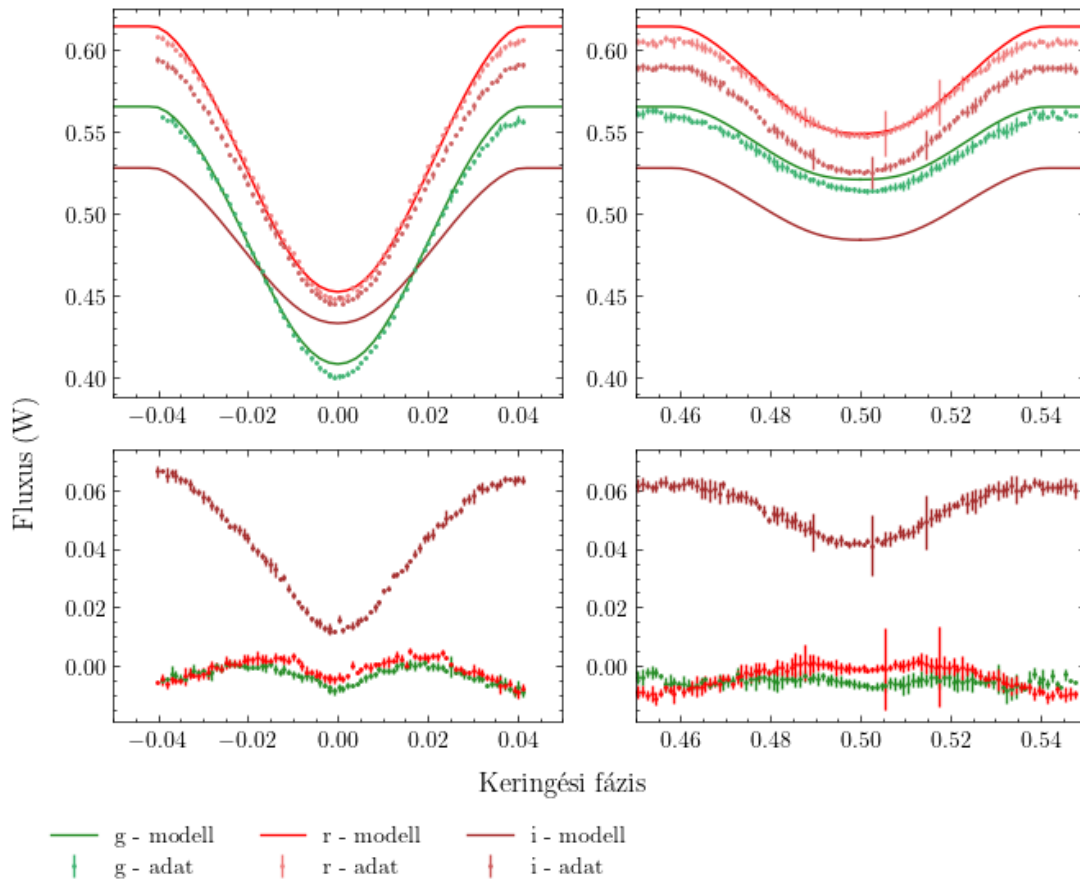
Ugyan az eddig elvégzett illesztések biztató eredményekre vezettek a maradványok javulása szempontjából, az *i* színszűrőbeli jelentős eltérés csak minimálisan javult az eredmények dacára (A.2. ábra). Ez három dolog valamelyikére vagy rosszabb esetben együttes jelenlétére utalhat. Egyik lehetőség az, hogy a csillagtagok hőmérsékletének illesztése során egy nagyobb mértékű minimumot találtam az eddigi illesztések során. A másik lehetőség az, hogy jelentős mértékű harmadik fény van jelen a rendszerben. A harmadik eshetőség pedig arra inthet engem, hogy az A_V extinkciós együttható értéke alul van becsülve.

A második esethez kapcsolódva, a harmadik fénynek külön fizikai jelentése van közvetett módon. A modellezés során csupán a szoros kettős fényessége kerül modellezésre, pedig nagy

valószínűséggel a harmadik komponens fényessége is mérésre kerül.

A modellillesztést a következő gondolatmenet és feltevés alapján végeztem. Feltételeztem, hogy az eddig elvégzett illesztések segítségével a két csillag hőmérsékletét és többi fizikai tulajdonságát helyesen kaptam meg. A fellépő eltérésekre vonatkozóan valószínűsítettem, hogy a harmadik színszűrőben eddig nem kezelt harmadik fényből ered. Emiatt ebben az optimalizálási körben csak az i szűrő harmadik fényét illesztettem.

Az elvégzett illesztés után kapott fénygörbe-modelleket a 19. ábra mutatja. Összevetve a 18. ábrával szembeötlő, hogy a g és r szűrőben az i szűrőt is optimalizálva kicsit eltorzított az illesztés. A maradványokat vizsgálva viszont még mindig olyan minimálisak az eltérések, hogy az i szűrőben tapasztalt értékekhez képes szinte elhanyagolható. Utóbbiban a harmadik fény figyelembevétele lényegesen lecsökkentette a maradványokat a kezdeti esethez képest (lásd a 16. ábrát), de továbbra is gondot jelent, hogy a mért fedések még mindig sokkal elnyúltabbak, mint a modellezettek – főleg az elsődleges fedésnél.



19. ábra. Mindhárom szűrő adatsora és illesztett modellje a fő- (bal felső panel) és mellékminimum (jobb felső panel) idején. Az alsó paneleken a kettő közötti különbség, a maradvány látható.

A fizikai jellemzőket vizsgálva még mindig jónak tűnnek a korábbi feltételezések, misze-

rint tág rendszerről van szó, ahol a komponensek egymáshoz és a naphoz hasonló, fősorozati csillagok. Az optimalizálás a háromszűrős adatokból a legjobb illesztést kihozta, amit a jelen dolgozat engedett. A további pontosítás érdekében az eddig kapott megoldás körüli paraméterteret a már emlegetett MCMC módszer segítségével térképezem fel, amellyel nemcsak a legjobb megoldás, hanem a paraméterek konfidencia- vagy megbízhatósági intervallumai is meghatározhatóak. Ennek menetét a következő alfejezetben ismertetem.

paraméter	kód	érték
$L_{1,g}^{(pb)}$	pblum@primary	6,555 W
T_2/T_1	teffratio@binary	0,822
T_1	teff@primary	6148,372 K
T_2	teff@secondary	5048,929 K
ℓ_3	l3_frac@lc_r	1,268e-06
	l3_frac@lc_g	7,687e-11
	l3_frac@lc_i	0,301
M_1	mass@primary	1,654 ($M_\odot$)
M_1	mass@secondary	1,044 ($M_\odot$)
q	q@binary	0,631
R_1	requiv@primary	1,767 ($R_\odot$)
R_2	requiv@secondary	0,942 ($R_\odot$)
R_2/R_1	requivratio@binary	0,533
$R_1 + R_2$	requivsumfrac@binary	0,269
a	sma@binary	10,069 ($R_\odot$)
a_1	sma@primary	3,896 ($R_\odot$)
a_2	sma@secondary	6,174 ($R_\odot$)
i	incl@binary	84,863 °
t_0	t0_supconj@binary	2458685,414628686 nap

6. táblázat. A három szűrős adatsorra végzett illesztés eredménye.

5.4. A paraméterter mintavételezése MCMC módszerrel

Az előző lépésben kapott paraméterek, habár optimálisnak tűnnek, több okból sem képviselhetik a végeredményt: egyrészt a maradványok még túl nagyok, főleg az i szűrőre, másrészt az értékek ún. *standard hibái*, vagyis azon intervallumok, amelyeken belül egy-egy paraméter bizonyos százaléknyi (pl. 67% vagy 95%) valószínűséggel helyezkedik, szintén nem ismertek. Az ilyen esetekre léteznek úgynevezett *brute force* (kb. nyers erővel operáló) módszerek, amelyek az optimalizáció helyett inkább feltérképezik a paraméterter egy tartományát. Ezek közül kiemelkedik a Markov-láncos Monte Carlo módszer (Markov Chain Monte Carlo, rövidítve MCMC), egy széles körben elterjedt statisztikai módszer, amely ezt a feltérképezést a lehető legkisebb erőfeszítéssel (mintavételi ponttal) éri el.

A módszer alapjául a paramétereknek valószínűségi változóként való kezelése szolgál, a valószínűség elmélet Bayes-féle megközelítésének keretében. Eszerint egy-egy fizikai paraméter nem egy konkrét értékkel rendelkezik, hanem igazából valószínűségi változó, amelynek van egy középértéke, valamint megbízhatósági intervalluma, amely az eloszlásának a szélességével arányos. A mérésekben levő információ segítségével a paraméterek kezdeti, „a priori” eloszlása utólagos, „a posteriori” eloszlássá alakítható. Ha ennek során egy paraméter eloszlása szűkebbé válik, akkor sikeres adatillesztésről beszélhetünk.

Mindezt a valószínűség elmélet Bayes-tételével lehet matematikailag is leírni. Ha $p(\mathbf{r})$ az $\mathbf{r}$ paraméterek együttes *a priori* eloszlása, $p(D|\mathbf{r})$ pedig a D adatoknak a paraméterek szerinti feltételes eloszlásával arányos, úgynevezett *likelihood*, akkor a paraméterek *a posteriori* eloszlása:

$$p(\mathbf{r}|D) = \frac{1}{p(D)} p(D|\mathbf{r}) p(\mathbf{r}), \quad (20)$$

ahol $p(D)$ jelen esetben egy egyszerű normálási tényező. A paraméterek legvalószínűbb értéke ennek az együttes a posteriori eloszlásnak vagy a maximuma, vagy az abból kapható közepes érték vagy medián; szórásukat pedig az eloszlás „szélessége” határozhatja meg.

Az optimalizációs módszerek ennek az eloszlásnak a maximumát határozzák meg, de többnyire oly módon, hogy a paraméterekre „lapos”, nem informatív priori eloszlást feltételezünk (azaz előzetesen nem tudunk róluk semmit). Olyankor a posterior a likelihood-dal arányos, az pedig a legtöbb esetben egyszerűen $\exp -\frac{1}{2}\chi^2$, ahol χ^2 a maradványok négyzetösszege. Vagyis az optimalizáció a szokásos χ^2 minimumának helyét határozza meg. (Bár a Phoebe csomag az optimalizációnál is lehetővé teszi a lapostól eltérő kezdeti valószínűség-eloszlások figyelembe vételét.) Ezzel szemben ha rendelkezünk előzetes információval, azt a fenti módon figyelembe lehet venni, és egy valószínűbb a posteriori eloszlást nyerhetünk a paraméterekre vonatkozóan. Ha ezt az együttes eloszlást MCMC-vel mintavételezzük, akkor nemcsak az optimális paraméterértékeket, hanem azok hibabecslését is megkaphatjuk.

Az MCMC a kívánt mintavételezést oly módon valósítja meg, hogy az egyes térrészeket a posterior valószínűség értékével arányos módon „látogatja meg”: a nagy valószínűségű részekre több pontot szán, és kevesebb pontot pazarol azokra a kis valószínűségű részekre, amelyek kisebb súllyal esnek a végső számolásba. A Markov-láncos megvalósítás olyan, hogy a következő mintavételi pont mindig csak az előzőt mintavételi ponttól függ (1 memóriahosszú lánc). Az eredmény egy pontokból álló lánc a hozzájuk tartozó a posteriori valószínűség-értékekkel. Egy ilyen láncból az egyes paraméterek ún. *marginalizált* eloszlásai egyszerű súlyozott szummázással számolhatók.

A gyakorlatban a paraméterteret egyszerre több láncsal, úgynevezett „walkerek”-kel térképezik fel, amik iterációról iterációra látszólag random, de valójában a posterior eloszlásból származtatható módon lépegetnek. Az iterációk tehát nem a legjobb illesztést keresik, bár annak környékét látogatják meg a legsűrűbben. A módszer célja, hogy minél homogénabban mintavételezzon, még ha ez azzal is jár, hogy egy jobban illeszkedő pontból egy rosszabb illeszkedő pontba ugrik. A módszer a hatékonysága az *lnprobability* ($\ln(p)$; a valószínűség logaritmus) mennyiséggel ellenőrizhető.

5.4.1. A paramétertér és eloszlásának definiálása az MCMC-hez

Az MCMC futtatásához szükséges paraméterenkénti *kiindulási* eloszlásfüggvényeket a Phoebe 2.4 manuálisan kéri be a felhasználótól. Ez határozza meg, hogy az egyes walkerek milyen kiindulási értékekkel induljanak. Ezekből a pontokból kiindulva térképezik fel a paraméterteret, ami jó esetben egy közönsnek tekinthető, szűkebb paramétertérben „bolyonganak” egymástól függetlenül. A célra egy beépített parancsot definiáltak a készítő: `b.add_distribution()`. Ennek a függvénynek az argumentumában definiálom azokat a paramétereket, amiket korábban optimalizáltam. A paramétereknek kétféle eloszlás-profil adtam meg: minden a rendszert jellemző paraméter a klasszikus Gauss-eloszlást, a harmadik fény pedig egy uniform-eloszlást követ a mintavételezés során.

```
b.add_distribution({'l3_frac@lc_r': phoebe.uniform(0, 0.005),
                  'l3_frac@lc_i': phoebe.uniform(0, 0.4),
                  'l3_frac@lc_g': phoebe.uniform(0, 0.018),
                  'pblum@primary@lc_g': phoebe.gaussian_around(0.05),
                  'teff@primary': phoebe.gaussian_around(500),
                  'teffratio@binary': phoebe.gaussian_around( 0.1),
                  'incl@binary': phoebe.gaussian_around( 1),
                  'equivsumfrac@binary': phoebe.gaussian_around( 0.02),
```

```
'requivratio@binary': phoebe.gaussian_around( 0.05)},
distribution = 'dis_lc_3', overwrite_all = True)
```

A fenti parancs mutatja a szintaxist az eloszlások definiálásához. Mint látható a Gauss-eloszlás esetében az optimalizálásból kapott paraméterértéket – mint, várható értéket – és szórást kell meghatározni, a uniform-eloszlás esetében pedig egy intervallumot kell kijelölni. A parancs-sorból pontosan leolvasható, hogy milyen szórásokkal dolgoztam. Ezeket úgy választottam meg, hogy a valószínűség-eloszlások a paraméterek várható értelmezési tartományát magukba foglalják.

A definiált eloszlásból kapható lehetséges fénygörbéket a `run_compute`-tal számoltam ki a mérési adasorra, és grafikusan ellenőriztem azok egymásra való illeszkedését. A problémát ismét az *i* szűrő jelentette. Újabb módosításként az összes mért szűrőben megadott eloszlás-szélességet mesterségesen átállítottam 0.4-re. Ennek egyik oka az volt, hogy a *i* szűrőben mért adatsor nem foglalta magába a lehetséges modelleket. Másrészt az egyes teszt futtatásoknál a láncok konvergenciája nem volt kielégítő, hiszen a sarok-ábrák alapján a középértéket a mintavételezési tér szélén találta meg. Az egyenletben a már korrigált intervallumok találhatók a harmadik fényekre.

5.4.2. Az MCMC futtatása

Az MCMC futtatásának szintaxisa ugyanaz, mint az optimalizációé. Az a priori eloszlások megadása után ismét az `add_solver` segítségével adtam hozzá a bundle-hoz egy MCMC „sampler”-t. A mintavételezéshez a Phoebe az MCMC-nek egy speciális fajtáját használja, aminek a neve EMCEE. Ez a változat az MCMC kezdeti behangolását automatikusan oldja meg. Az MCMC sikere ugyanis nagyban függ attól, mekkora lépéshosszat engedélyezünk a paramétertérben. Ha ez túl kicsi, a módszer nagyon lassan járja be a paraméterteret, nem lesz elég *ergodikus*. Ha túl nagy, akkor pedig túl sokszor fogja meglátogatni a kis valószínűségű helyeket. A behangolás ennek a lépéshossznak az optimális beállítását jelenti.

A radiális sebességgörbe-illesztés megadta azt a keretet, amire szükségem volt, hogy a modellt pontosan meg tudjam határozni, így az MCMC során annak paramétereit nem mintavételeztem. Tehát az eloszlásfüggvényhez kapcsolt 9 paraméter mintavételezésekor csak a három szűrőben mért fénygörbét használtam.

A mintavételezett paraméterek az alábbiak voltak:

- a csillagok sugarai – $(R_1 + R_2)/a$ és R_2/R_1 ;
- az inklináció – i ;

- a csillagok hőmérsékletei – T_1 és T_2/T_1 ;
- a főkomponens luminozitása a g szűrőben – $L_{1,g}^{(pb)}$;
- valamint a három szűrőbeli harmadik fény luminozitásai – $\ell_{3,g}$, $\ell_{3,r}$, $\ell_{3,i}$.

Ökölszabály, hogy az illesztett paraméterek számának legalább kétszeresét adjuk meg *walker* számnak. Ennek megfelelően én is 18 *walkerrel* dolgoztam. A tényleges futtatásokat nem a Jupyter-ben, hanem egy terminálból meghívott Python3 környezetben végeztem. Ehhez a Jupyter Notebook-ban használni kívánt solver-t a `b.export_solver` parancs segítségével exportáltam egy `.py` kiterjesztésű fájlba, és azt futattam.

Ilyen sok paraméterrel viszont ez egy hosszú futtatás, ami a legtöbb gép kapacitását teljesen kihasználja. Legtöbb esetben a gépet a futtatások alatt nemigen lehet másra használni. Ezért a kevés iterációs kalibrációs futtatásokat éjszaka futtattam a saját gépemen. Ennek során minden 50-edik iterációt a program kimentti megoldás/*solution* formájában egy mellékfájlba. Ezt a fájlt felhasználva grafikusan ellenőriztem a mintavételezést.

Bonyodalmak és kijavításuk

Az első teszt-futtatások során kiderült, hogy az EMCEE sem volt képes behangolni az MCMC-t: a lépések annyira kicsik voltak, hogy több száz pont után is még csak az úgynevezett „burn-in”, bemelegítési szakaszban volt az algoritmus. Többféle próbálkozás után kiderült ennek az oka: az egyes mért pontok becsült szórásai túl kicsik a fedésen kívüli változásokhoz képest, így az azokból kikövetkeztetett lépések is már túl nagy változást eredményeztek a χ^2 és így a posterior valószínűség értékeiben, ennek megfelelően pedig az EMCEE visszavágta a lépéshosszat. Áthidaló megoldásként ezért a fényességmérések standard szórásait mesterségesen megnöveltem, ami megoldotta a problémát, a burn-in lerövidült, a mintavételezés ergodikussá vált.

A fenti módosítások után is, az első 1500 futtatásnál gyanút fogtam, hogy a harmadik fény valószínűsíthető értéke még mindig nincs benne az egyenletes eloszlása által definiált paramétertartományban. Ez a végeredményben is látható, úgynevezett „sarok-ábrán” (angolul *corner plot*) tűnt fel, ugyanis azon mindhárom szűrőben a harmadik fényre vagy két darab, vagy az ábráról teljesen lecsúszó csúcsokat talált a mintavételezés. Ezért a harmadik fények szórásának 0.0045-szeresét vettem. A korrigálás jónak bizonyult. A végső sarok-ábra a paramétereknek 3000 ponttal mintavételezett együttes eloszlásának szeleteit mutatja.

A kalibrálás után az MCMC-t a bajai intézet BRC80 nevű szerverén futtattam. Hogy a többi felhasználó is tudja használni a szervert, a programhoz a processzornak csak 9 magját

rendeltem a rendelkezésre álló 16-ból. Összességében elmondható, hogy egy-egy mintavételi pont létrehozása 60–75 másodpercet vett igénybe; a végleges 26000 iteráció nagyjából egy hónap alatt futott le iterációs sebesség és az egyéb emberi tényezők miatt. A korábban ecsetelt okok miatt nagy a paramétertér, és alapvetően 3000 iterációnak kellett lefutnia, hogy egyáltalán a program megtalálja az keresett optimumpontot, és elkezdjen konvergálni körülötte. Ezért a TDK-dolgozat elkészítésének idejében a teljes MCMC futtatása még mindig folyamatban volt.

6. Az MCMC-mintavételezés eredményei

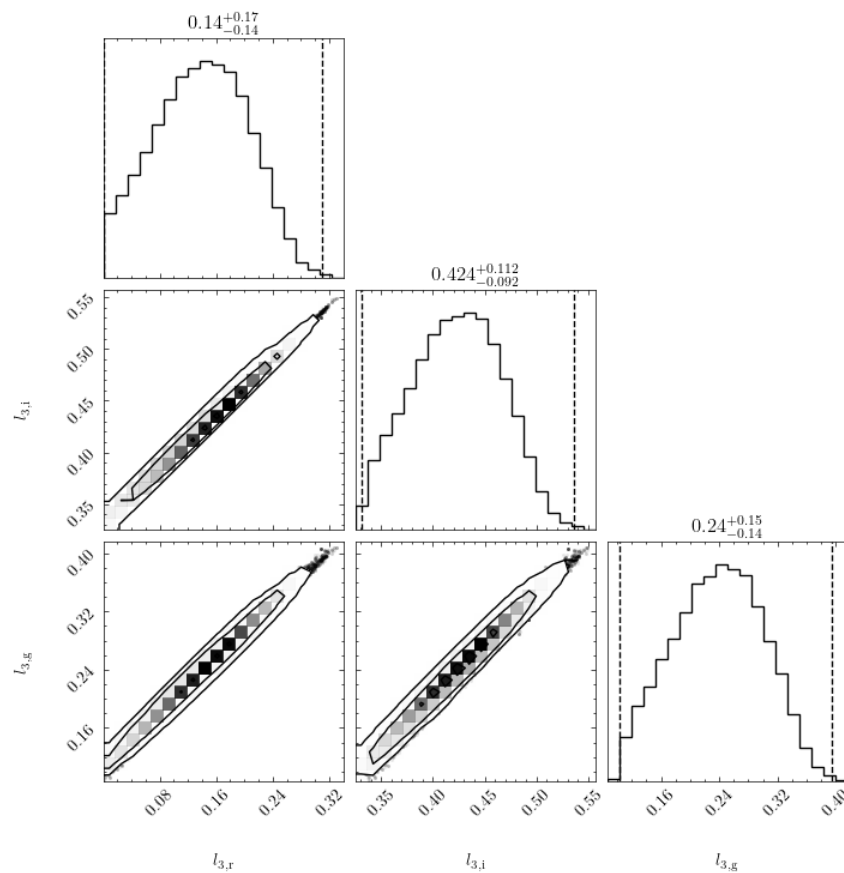
A 9 dimenziós paramétertér illusztrációját, egy- és kétdimenziós szeletek formájában, a 21. és 20. ábra tartalmazza. A kétdimenziós kontúrrajzok az eloszlás egy-egy paraméterpárra marginalizált változatát illusztrálják. A paraméterek közötti korrelációk ezek segítségével deríthetők fel. Jelen esetben például a három harmadik fény mutat erős korrelációt egymással. Ezek a modell jellemzőiből fakadnak, és nem lehet kiküszöbölni őket. Az átlóban levő egydimenziós eloszlások pedig az egyes paraméterek marginális eloszlásait mutatják. Ezen eloszlások középértéke és szélessége az adott paraméter legjobb értékét és szórását jellemzi. Ezeket a 7. táblázatban soroltam fel.

paraméter	érték
$\ell_{3,g}$	$0,24^{+0,15}_{-0,14}$
$\ell_{3,r}$	$0,14^{+0,17}_{-0,14}$
$\ell_{3,i}$	$0,42^{+0,11}_{-0,09}$
$L_{1,g}^{(pb)}$	$4,78^{+0,95}_{-1,04} \text{ W}$
T_1	$5690^{+97}_{-95} \text{ K}$
T_2/T_1	$0,83^{+0,01}_{-0,01}$
$(R_1 + R_2)/a$	$0,26^{+0,01}_{-0,01}$
R_2/R_1	$0,64^{+0,13}_{-0,07}$
i	$85,30^{+1,80}_{-1,40}^\circ$

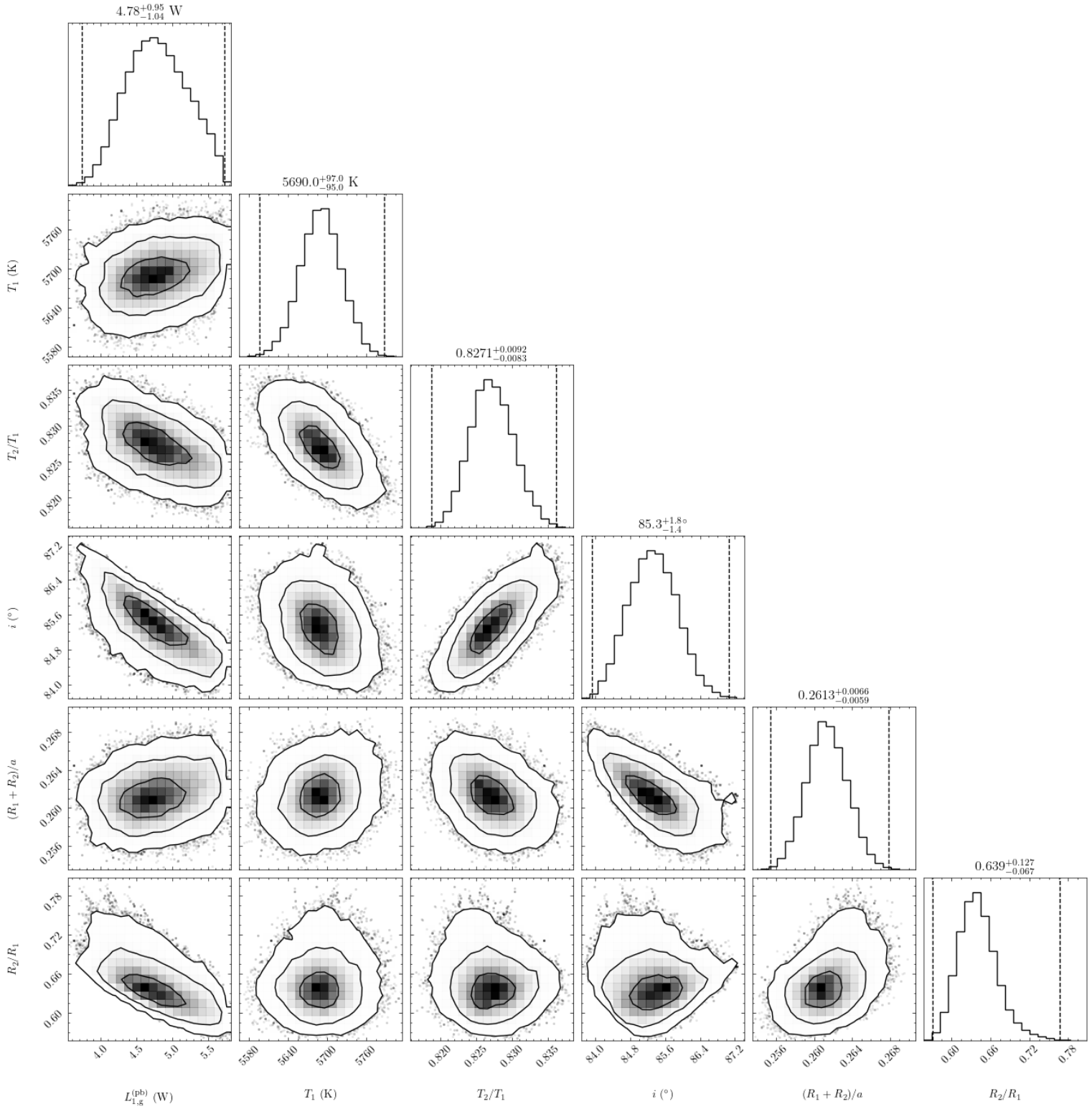
7. táblázat. Az MCMC-térképezés által megállapított átlagos paraméterértékek és szórásaik.

Az eredmények alapján a harmadik fények még mindig bizonytalanok. A rendszer stabilan beállt egy paraméterérték-halmaz köré, de még túlságosan szélesek a hibák. A kapott átlagértékek sem a vártak megfelelőek: r -ben sokkal kisebb a harmadik fény, mint akár g vagy i -ben; utóbbiban pedig sokkal nagyobb, mint a másik kettőben. Az egyik lehetséges ok, hogy

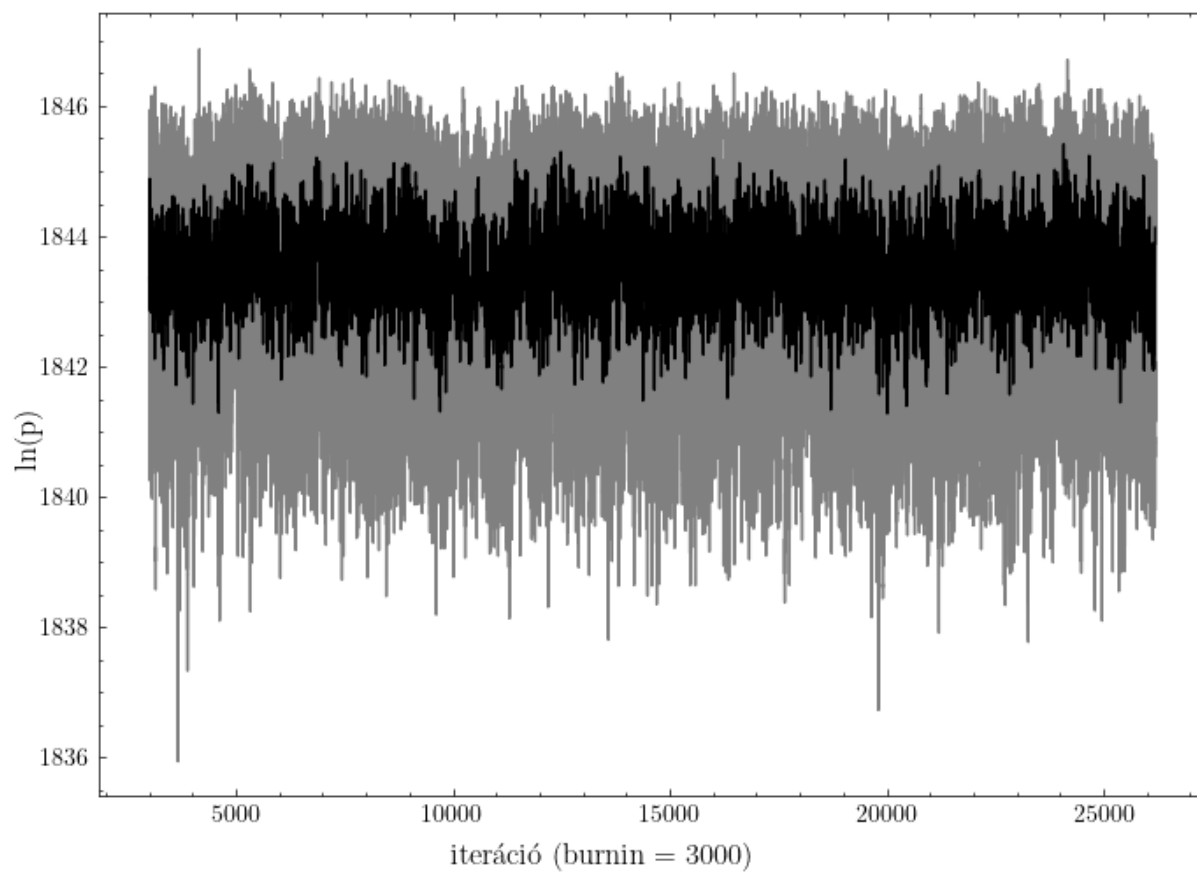
az interstelláris extinkció fénygörbékre alkalmazott korrekciója esetleg nem jó értékkel történt, vagyis vagy az A_V és R_V extinkciós és vörösödési együtthatók térképekről becsült értékei nem felelnek meg a valóságnak. Az extinkció különböző mértékben csökkenti a különböző szűrős fluxusokat, ezért az is okozhatja a három szűrő adatsora közötti diszkrepanciát. A NASA/IPAC galaktikus por- és vörösödési térképei szerint a változó valóban egy porfelhő határán látszik. Ezért érdemes lehet ezen együtthatók közül legalább az A_V extinkciós együtthatót is bevenni egy elkövetkező mintavételezésbe.



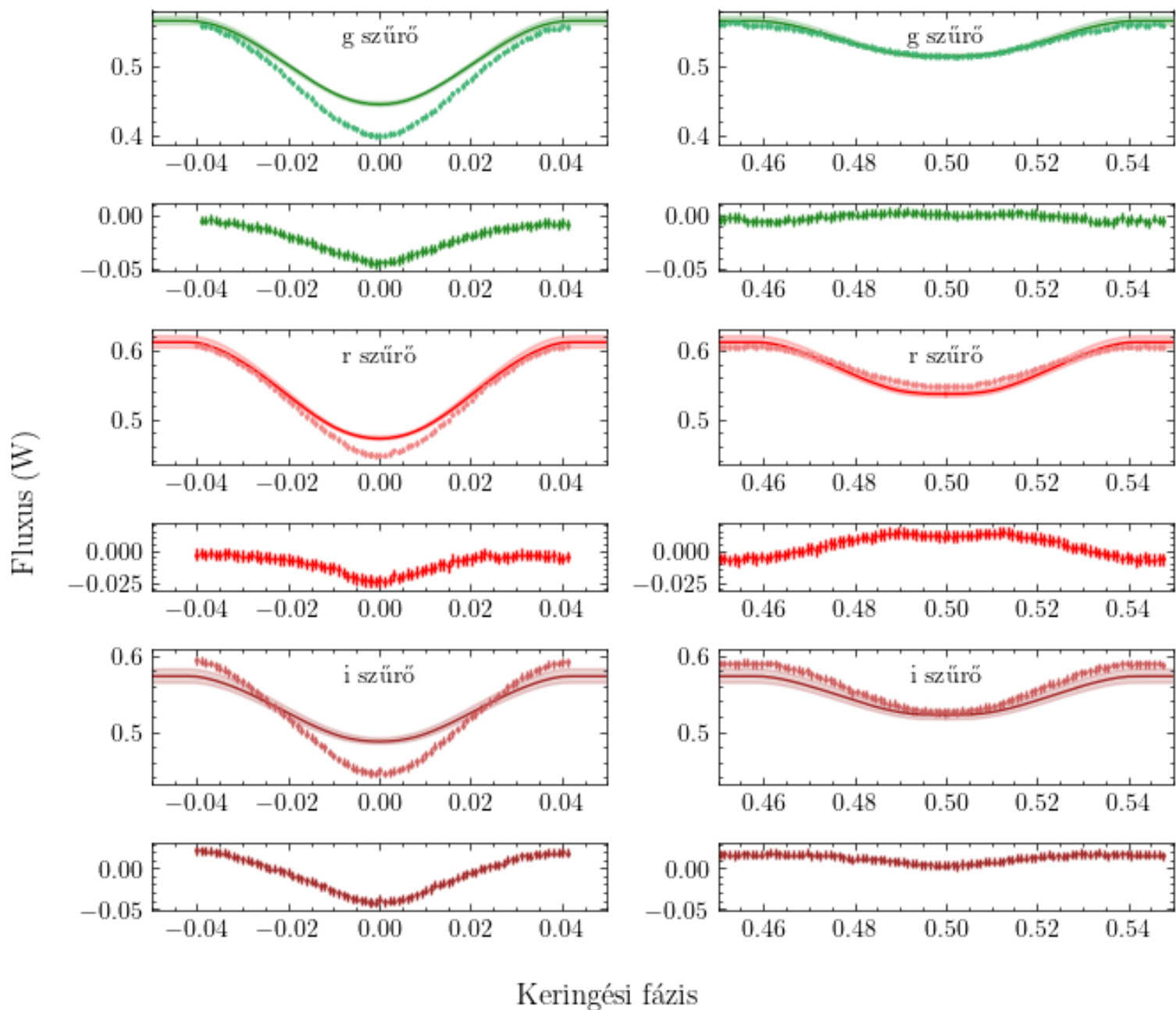
20. ábra. A walkerek paraméterterben felvett értékei az iterációk során, csak a harmadik fényekre nézve. A középértékek most már bőven a mintavételezési tartományon belül vannak.



21. ábra. A mintavételezett paraméterek posterior eloszlásának sarok-ábrája.



22. ábra. Az $\ln(p)$ függvény értékének alakulása az MCMC-futtatás során. A fekete görbe a walkerek mediánját adja meg. A lánc első 3000 eleme le lett vágva, mert az ún. „burn-in” része.



23. ábra. Az MCMC végleges eredményének illeszkedése az adatokra 26000 iteráció után. A 19. ábrával összevetve szignifikánsan látszik, hogy habár az i szűrőben jobb illesztést érttem el, a g és r szűrő modellillesztése romlott a korábbi helyzethez képest.

KONKLÚZIÓ

A kutatás elért egy olyan pontra, hogy az MCMC-futtatás megtalálta azokat az paraméter értékeket, amelyekhez konvergálva a további iterációk során megkapjuk a szórós kettős fizikai jellemzőit abszolút egységekben.

A jelenlegi dolgozatban az MCMC első eredményeit olvashatja a kedves érdeklődő az egyébként felettébb nem szokványos GZ Draconis fedési kettősről.

A 23. ábrán látható, hogy az MCMC-ből kapott modell fedésszélessége mindhárom szűrőben jól illeszkedik a mérési adatokra. Tehát, a komponensek sugaraira megbízható értékeket kaptunk. Ellenben a fedésmélységek tekintetében azt látni, hogy az MCMC rosszabb illesztést adott vissza az első optimalizált fénygörbéhez képest (19.ábra) a g és r szűrőben, noha az i szűrőben jobb az illeszkedés. Ezt legjobban az reziduumok adják vissza. Ennek oka főként az extinkció és a harmadik fény bizonytalansága lehet, illetve még kis mértékben okozhatja az inklináció bizonytalansága is, ami a harmadik fénnel együtt a fedésmélység alakításában szerepet játszik. További utalás a modell további javításának szükségességére, hogy a GZ Draconis katalógusokból elérhető spektrális energiaeioszlása (SED) alapján becsült együttes hőmérséklet mintegy 7000 K, amelynél legalább az egyik komponensnek nagyobb hőmérsékletűnek illene lennie. A lényeges eltérések mindegyik szűrőben a főminimum esetében vannak.

A következő lépésben érdemes lehet az A_V extinkciós együtthatót is bevenni a mintavételezésbe. Távlati terveim között ez a fő megoldandó probléma, hogy a rendszer fizikai tulajdonságait teljes bizonyossággal meg lehessen állapítani.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Szeretném megköszönni a témavezetőmnek és a konzulensemnek, hogy az immáron több éves kutatómunkámat töretlenül segítik és egyengetik. Témavezetőmnek külön köszönöm a lehetőséget, hogy megtanulhattam egy komoly távcsövön mérni és kiértékelni. Konzulensemnek pedig köszönöm, hogy általa a modellezésnek egy igen magas szintjén tanulmányozhattam a GZ Draconis-t. Köszönettel tartozom továbbá az HUN-REN SZTE Asztrofizikai kutatócsoport tagjainak is, hogy a rendszerről készült spektroszkópai méréseket eredményeit szíveskedtek rendelkezésemre bocsájtani.

Szójegyzék

anyagátadás ez a csillagok későbbi fejlődési állapotában történhet meg, amikor az egyik csillag annyira kitágul, hogy arról anyag áramlik a másik csillag közelébe és vagy közvetlenül, vagy egy akkréciós korong révén kerül a másik csillagra.. 11

bias korrekció A CCD chippekben eleve van valamennyi elektron, noha nem érte foton őket. Habár az az alapjelszint (pozitív) megakadályozza az alul-csordulást, minden objektum kép készületekor elektrontöbblet jelet. A többlet mellett a bias korrigál a képek kioldási zajára is.. 22

dark korrekció A CCD chippek félvezető anyagában a fotoelektronok mellett termikus elektronok is felgyűlnek, szintén elektrontöbbletet okozva a pixelekben. Ezeknek a jelét *termális- vagy sötét áramnak* hívják, hiszen ha nem éri fény a pixel akkor csak a termális elektronok vannak jelen. A sötét áram annál kisebb, minél hidegebben tartják a detektort, a hőmérséklet csökkenésével exponenciálisan csökken. Ezért az összes tudományos célú kamerát valamilyen módon hűtik. A BRC80-as kamerájának folyadékűtéssel rásegített termoelektromos-hűtése van, amellyel -40°C -ra hűthető. Ezzel jelentősen csökkenthető a sötét áram, de el nem tüntethető. Folyékony nitrogénes hűtéssel már jelentéktelenné válna, de azt csak a nagyon nagy távcsöveknél alkalmazzák.. 22

epocha Az a kezdeti időpont, amivel a rendszer mozgását időben lefixáljuk. A fedési kettőscsillagoknál általában az egyik fotometriai fedés közepének időpontja – főminimum –, (HJD/BJD) helio- vagy inkább baricentrikus Julián-dátumban.. 5, 17

excentricitás a pálya lapultságát adja meg ($e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, ahol b a fél-kistengely). ($e = 0 \rightarrow$ körpálya, $0 < e < 1 \rightarrow$ ellipszis, $e = 1 \rightarrow$ parabola). 5

excentrikus pálya amikor a két csillag közötti távolság nem állandó és a pályáik sem kör alakúak, hanem elliptikusak. Ilyenkor a fedések helyzetei, szélességei, mélységei bonyolult módon függenek a pálya alakjától és irányától.. 11

felszálló csomó hossza az a szög az égbolt síkjában mérve, amelyet a pálya felszálló csomója alkot az északi iránnyal. A felszálló csomó a pálya és az égbolt sík azon metszéspontja, amelyen áthaladva a kérdéses tagcsillag éppen távolodik tőlünk.. 5

felületi fényesség a csillag egységnyi (1 m^2 területű) felszínéről, egységnyi térszögbe kibocsátott sugárzási teljesítmény, $\text{W}/\text{m}^2/\text{sr}$ egységekben. Minden szűrőben egy-egy külön felületi fényességet kell számolni.. 9

flat korrekció Gyakorlatban a pixelek fénygyűjtő-képessége nem egyenletes. Az egyenetlenséget tetézi, hogy a CCD chip megvilágítása sem, egyenletes a rendszerbe ragadt kosz és por miatt. Ennek korrekciója *flat*-képekkel történik.. 22

fluxus Egységnyi felületen áthaladó, egységnyi frekvencia- vagy hullámhossztartományra vonatkoztatott sugárzási teljesítmény. Mértékegysége $\text{W/m}^2/\text{Hz}$. Csillagászatban nagyon kis fluxusok vannak, azokat *Jansky*-ben is szokás megadni ($1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W/m}^2/\text{Hz}$). 16

fél-nagy tengely az ellipszispálya nagyobbik tengelyének fele.. 5

Gauss-eloszlás

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

, eloszlás ami, a fenti egyenletet követi ahol, a σ – szórás, μ – várható érték. Az alakja egy szimmetrikus harangra hasonlít egy valószínűségi ábrán. A mi szempontunkból a várható értéke a fontos amit, az eloszlás csúcsa ad meg, ahol a legnagyobb a valószínűség.. 44, 45

HJD/BJD a heliocentrikus Julián-dátum (HJD) a Nap tömegközéppontjára, a baricentrikus Julián dátum a Naprendszer tömegközéppontjára korrigált időpont, figyelembe véve a fény véges sebességét.. 8, 53

inklináció (pályahajlás), a látóirány és a pálya normálvektora közötti szög, szemléletesebben: az égbolt látóirány mentén vetített síkja és a rendszer pályasíkja által bezárt szög.. 5

IRAF A programot a csillagászati mérések, *.fits* kiterjesztésű képfájlok feldolgozására a *National Optical Astronomy Observatory (NOAO)* fejlesztette ki UNIX-környezetben. Egy *xgterm* terminálból lehet futtatni. A műveletek avagy *task*-ok csomagokba vannak rendezve. A csomagokba belépve – amiket a program ponttal jelöl a listában – érjük el a *task*-okat. A *task*-ok futtatás előtti paraméterezése az *epar task* paranccsal történik. Az IRAF-en keresztül megnyithatjuk a *DS9* [18] grafikus felületet (!*ds9 &*), ami átkonvertálja a *.fits* kiterjesztésű fájlok adatsorát képpé, így leellenőrizhetem, hogy milyen folyamatokat végeztem el a képen.. 21, 24

luminozitás Egy égitest által egységnyi idő alatt kisugárzott teljes energiamennyiség. [5] A tagok saját luminozitása: $L_i = 4\pi R_i^2 \cdot f_i$ ahol, $i = 1, 2$, $f_i = T_4\sigma$ – felületi fényesség (σ – Stephan-Boltzmann állandó). 9

magnitúdó Az égitestek fényességének logaritmikus skálán vett kifejezése. Beszélhetünk *lát-szólagos magnitúdóról*, amikor a Föld távolságában vizsgáljuk a fényességet, és *abszolút magnitúdóról* amikor 10 pc távolságra számoljuk át a fényességet. 16, 21

periasztron argumentuma a periasztron és a felszálló csomó közötti szög, a keringés pályasíkjában mérve.. 5

pixel beégés/túlfolyás Ha túl sok fény éri a pixelt, akkor túl sok elektron szabadul fel, és a pixel "túlfolyhat", az elektronok egy része kifolyik belőle a szomszédos pixelekre. A kép ilyenkor "beég".. 20

reflexiós hatás amikor a két csillag annyira közel van egymáshoz, hogy kölcsönösen besugározzák egymást, ami további plusz fényváltozást jelent.. 11

szélsötétedés a felületi fényességek nem egyenletesek, hanem a csillagok széle felé csökkennek. Ilyenkor a fedési mélységekből az átlagos felületi fényességek és azokból a hőmérsékletek csak numerikus közelítésekkel számolhatóak.. 11, 37

szórós rendszerek amikor a két csillag alakja torzul, mert egymásra gravitációsan hatnak, ami ellipszoidális fényváltozást okoz a fénygörbében és a fedések is csak numerikusan számolhatóak.. 11

teljes fedés feltétele a legkisebb érték a két csillag sugarának különbségénél is kisebb legyen, mert ilyenkor tud az egyik csillag teljesen a másik elé illetve mögé kerülni:

$$a \cdot \cos i \leq |R_1 - R_2|. \quad (21)$$

. 7

tengely körüli forgás aminek hatására a csillagok alakja kissé lapult és a felszíni hőmérsékletük is változik attól függően, hogy mekkora a felszíni gravitáció azon a ponton. Ahol nagyobb a gravitáció (a pólusokon), ott a hőmérséklet is nagyobb. Ez *gravitációs sötétedésnek* vagy *fényesedésnek* nevezik.. 11

TKP Tömegközéppont. 5, 6, 14

uniform-eloszlás az egyik legegyszerűbb eloszlás, aminek definíciója hogy, minden kimenő érték egyenlő valószínűséggel fordulhat elő. A mi esetünkben a folytonos uniform eloszlás van.. 44, 45

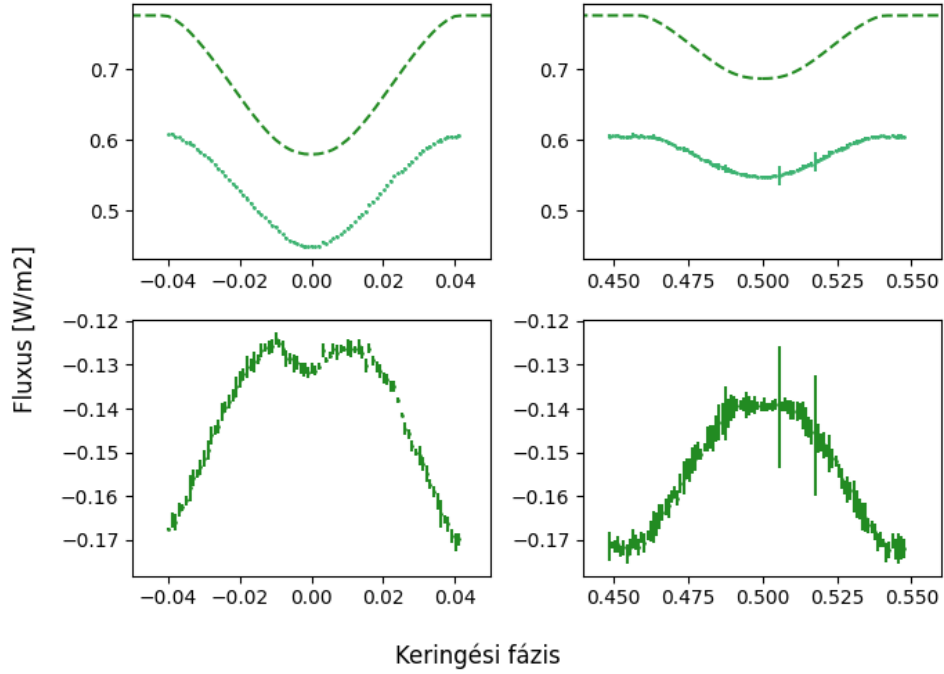
Hivatkozások

- [1] Robert E. Wilson és Edward J. Deviney. „Realization of Accurate Close-Binary Light Curves: Application to MR Cygni”. *ApJ* 166 (1971. jún.), 605. old. DOI: 10.1086/150986.
- [2] András Pál. „CCDSH wiki”. *HUN-REN CSFK* (2011). URL: https://ccdsh.konkoly.hu/wiki/Main_Page.
- [3] N. Zacharias és tsai. „VizieR Online Data Catalog: UCAC4 Catalogue (Zacharias+, 2012)”. *VizieR Online Data Catalog*, I/322A (2012. júl.), I/322A.
- [4] Dr. Czavalinga Donát. „Bajai 80 cm-es távcső”. *Csillagászati Megfigyelések SZTE-s kurzus* (2022).
- [5] Dr. Szalai Tamás. „SZTE fizika BSc”. *Bevezetés a csillagászatba III.* (2022).
- [6] Oltvári Zsófia. „A GZ Draconis fedési kettős fotometriai vizsgálata”. *SZTE Klebansberg Könyvtár/Contenta* (2023). URL: <https://www.contentas.ek.szte.hu/Record/dipl1141087>.
- [7] T. Mitnyan és tsai. „Eclipse-timing study of new hierarchical triple star candidates in the northern continuous viewing zone of TESS”. *Astronomy & Astrophysics* 685, A43 (2024. máj.), A43. DOI: 10.1051/0004-6361/202348909. arXiv: 2402.01486 [astro-ph.SR].
- [8] *Bajai Obszervatorium*. URL: http://www.bajaobs.hu/bajaobs_start/index.php?uid=92181&cid=29¶ncs=item_lst_win&sel=1.
- [9] *CDS Portal: GZ Draconis*. URL: <http://cdsportal.u-strasbg.fr/?target=GZ%20Dra>.
- [10] *Fedési kettőscsillagok*. URL: <http://astro.u-szeged.hu/oktatas/asztrofizika/html/node75.html>.
- [11] *Galactic Dust Reddening & Extinction*. URL: <https://irsa.ipac.caltech.edu/applications/DUST/>.
- [12] „GZ Draconis mérési eredményei a TESS-vel.” *TESS, GZ Dra* (). URL: <http://tessebs.villanova.edu>.
- [13] *IRAF program weboldala*. URL: <https://iraf-community.github.io/>.
- [14] *Megfigyelő montázs*. URL: https://archive.konkoly.hu/tao/Baja_RC80_monitoring.html.

- [15] *PHOEBE – PHysics Of Eclipsing BinariEs Eclipsing Binary Modeling Software*. URL: <https://phoebe-project.org>.
- [16] *Phoebe 1.0 Legacy (PHysics Of Eclipsing BinariEs)*. URL: <http://phoebe-project.org/1.0>.
- [17] *PHOEBE 2.4 Tutorial*. URL: <https://phoebe-project.org/docs/2.4/tutorials>.
- [18] *SAOImage Ds9*. URL: <https://sites.google.com/cfa.harvard.edu/saoimageds9>.
- [19] „TESS űrteleszkóp adatbázisa”. *TESS adatok* (). URL: <http://tessebs.villanova.edu>.

A. MELLÉKLET

A.1. g szűrő illesztéséből kapott modell az r szűrőben



A.2. r szűrő illesztéséből kapott modell az i szűrőben

