

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi és Informatikai Kar

Bolyai Intézet

Matematika BSc

OTDK DOLGOZAT

Irányított gráfok kompatibilis előrendezései

Készítette: Galántai-Fekete Csenge Lilla (BJ3G0E)

Témavezető: Dr. Maróti Miklós

2024

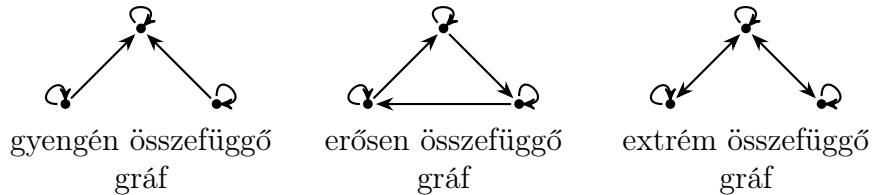
Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Introduction	3
3. Relációs struktúrák	4
4. Irányított gráfok relációi	8
5. Kompatibilis műveletek és relációk	11
6. Klón és kapcsolata a polimorfizmusokkal	14
7. St-gráfok által definiált relációk	17
Hivatkozások	26

1. Bevezetés

A dolgozat központi témája a reflexív irányított gráfok, mint relációs struktúrák vizsgálata a kompatibilis műveletek és előrendezések (kvázirendezések) szempontjából.

A célunk egyrészt, hogy tetszőleges reflexív irányított gráf esetén általánosítsuk a gráfok összefüggőségi tulajdonságait. Erre példaként tekintsük a következő gráfokat:



Az első gráf gyengén összefüggő, amely legalább egy irányítatlan út meglétét jelenti az irányított gráf bármely két csúcsa között. A második gráf az erős összefüggőségre mutat egy példát, ekkor a gráf éleinek irányítását is figyelembe kell vennünk a csúcsok közti utak keresése során. A harmadik, extrém összefüggő esetben tetszőleges két csúcs közt halad csak oda-vissza éleket használó út. Ezen fogalmak a dolgozat későbbi részében pontosításra kerülnek és más összefüggőségi tulajdonságokat is bevezetünk.

Szemléletesen látható, hogy az erősen összefüggőségből következik a gyenge is, valamint az extrém összefüggő irányított gráfok mind erősen összefüggőek. A dolgozatban választ keresünk arra a kérdésre, milyen kapcsolat van a különböző összefüggőségi tulajdonságok közt, milyen módon rendezhetőek az összefüggőségi komponensek tartalmazás szerint, azonban a komponensek helyett az általánosabb előrendezésekkel foglalkozunk.

Másrészt, az előrendezéseket a reflexív irányított gráffal való kompatibilitás szempontjából is vizsgáljuk. Az is célunk, hogy bármely ilyen gráf esetén megállapíthassuk annak kompatibilis előrendezéseit, valamint ezekről különböző állítások megfogalmazása a gráf összes kompatibilis műveletének (polimorfizmus) ellenőrzése nélkül.

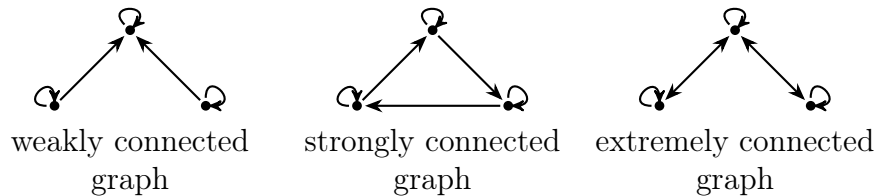
A későbbiek során, az st-gráfok fogalmát bevezetve, az azokból valamely G gráfba menő relációhomomorfizmusok segítségével definiálunk egy olyan előrendezésosztályt, mely minden esetben kompatibilis lesz a G gráffal. Bevezetésre kerül a klón fogalma, és belátjuk, hogy a kompatibilis műveletek klónt alkotnak. A retrakt és a mag fogalmának segítségével minimalizáljuk a vizsgálandó st-gráfok számát. Egyszerűsítő állítások bizonyításával, valamint a köztük bevezetett reláció segítségével vizsgáljuk a korábban bevezetett relációosztályon belüli kapcsolatokat 1-, 2- és 3-pontú st-gráfok esetén. Továbbá meghatározzuk egyes st-gráfok által meghatározott előrendezések és a G gráf összefüggőségének kapcsolatát.

Gráfok összefüggőségi tulajdonságait más, egyedi módon is be lehet vezetni illetve tanulmányozni [1], de a jelen dolgozatban alkalmazott módszer univerzális abból a szempontból, hogy ilyen tulajdonságok egy végtelen családját definiálja illetve vizsgálja a közöttük levő kapcsolatokat. Tudjuk viszont hogy a módszer nem teljes, mert kompatibilis kvázirendezések tetszőleges metszete is kompatibilis [4], de nem feltétlen fejezhető ki a bevezetett módszer segítségével.

2. Introduction

The central topic of the thesis is the study of reflexive directed graphs as relational structures from the point of view of compatible operations and preorders (quasiorders).

Our first goal is to generalize the connectivity properties of graphs for reflexive directed graphs. Consider the following graphs as examples:



The first graph is weakly connected, which means the existence of at least one undirected path between any two of its vertices. The second graph is an example of a strongly connected directed graph, in which case the direction of the edges of the graph must also be taken into account when searching for paths between vertices. In the third, extremely connected case, a path using only back-and-forth edges runs between any two of its vertices. These concepts will be clarified in later sections of the thesis and other notions of connectedness will also be introduced.

It is easy to see that strongly connectedness leads to weak connectedness and extremely connected directed graphs are all strongly connected. In this thesis, we are looking for an answer to the question of what kind of relationship is there between the different connectivity properties, and how they can be arranged with respect to the containment of their connectivity components. However, instead of the components, we will deal with the more general concept of preorders.

We will also examine the preorders from the point of view of compatibility with the reflexive directed graph. Our second goal is to be able to determine the compatible preorders of any such graph, as well as to formulate different statements about them without checking all compatible operations (polymorphism) of the graph.

In the next sections, we introduce the concept of st-graphs, we define a preordering that will be compatible with the graph G with the help of relational homomorphisms that go from them to G . The concept of a clone will be introduced and we will see that the set of compatible operations form a clone. Using the concepts of the retract and the core, we minimize the number of st-graphs that we need to examine. By proving simplifying statements and with the help of the relation introduced between them, we examine the relationships within the previously introduced relation classes in the case of 1-, 2- and 3-element st-graphs. Furthermore, we determine the relationship between the preorders defined by some st-graphs and the connectivity properties of the graph G .

It is also possible to study the connectivity properties of directed graphs in an ad-hoc way [1], but the approach in this thesis is more universal in the sense that we introduce an infinite family of connectivity properties and study their relationships. We know however that this approach is not complete, as the intersection of compatible preorders is also a compatible preorder [4], but not necessarily expressible with our method.

3. Relációk struktúrák

Ez a fejezet az [5]. forrás része, de megjelölve szerepelnek az eredeti hivatkozások is.

3.1. Definíció. ([2], 3. oldal, [3] 181–182. oldal) Az A nemüres halmazon értelmezett n -változós relációnak nevezzük az $A \times \cdots \times A = A^n$ halmaz bármely ϱ részhalmazát.

3.2. Definíció. ([3], 181–182. oldal) Az A halmazon értelmezett kétváltozós ϱ relációt *kvázirendezésnek* vagy *előrendezésnek* nevezzük, ha

- (1) ϱ *reflexív*, azaz $(x, x) \in \varrho$ minden $x \in A$ elemre, és
- (2) ϱ *transzítív*, azaz ha $(x, y), (y, z) \in \varrho$, akkor $(x, z) \in \varrho$ minden $x, y, z \in A$ elemre.

3.3. Definíció. ([7], 38–42. oldal) Legyen R relációs szimbólumok egy halmaza, ahol minden $\varrho \in R$ szimbólumhoz hozzárendelünk egy $n \geq 1$ egész számot, amelyet a ϱ aritásának vagy a változói számának nevezünk.

Az $\mathbb{A} = (A; R)$ R -típusú relációs struktúra, ha az A alaphalmaz nemüres, és minden $\varrho \in R$ n -változós relációs szimbólumra adott egy $\varrho^{\mathbb{A}} \subseteq A^n$ n -változós reláció.

Megjegyzés. Ha R véges sok relációs szimbólumot tartalmaz, akkor $(A; R)$ helyett írhatunk $(A; \varrho_1, \dots, \varrho_k)$ -t, felsorolva R elemeit.

3.4. Példa. Az irányított gráfok relációs struktúrák. Legyen A egy alaphalmaz, valamint $R = \{\rightarrow\}$, ahol $\rightarrow$ kétváltozós reláció az A halmazon. Ekkor $(A; R)$ relációs struktúra, és egy A halmaz feletti (többszörös él nélküli) irányított gráfot ad meg.

3.5. Definíció. ([7], 44–47. oldal) Legyenek $\mathbb{A} = (A; R)$ és $\mathbb{B} = (B; R)$ azonos típusú relációs struktúrák. A $\mathbb{B}$ az $\mathbb{A}$ *részstruktúrája*, ha $B \subseteq A$ és minden $\varrho \in R$ esetén $\varrho^{\mathbb{B}} \subseteq \varrho^{\mathbb{A}}$. **Jelölés:** $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$.

3.6. Definíció. ([7], 44–47. oldal) Legyenek $\mathbb{A} = (A; R)$ és $\mathbb{B} = (B; R)$ azonos típusú relációs struktúrák. A $\mathbb{B}$ az $\mathbb{A}$ *feszített részstruktúrája*, ha $B \subseteq A$ és minden $\varrho \in R$ esetén $\varrho^{\mathbb{B}} = B^n \cap \varrho^{\mathbb{A}}$. **Jelölés:** $\mathbb{B} = \mathbb{A}|_B$.

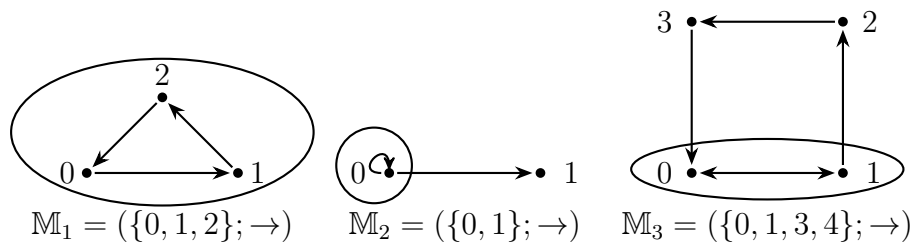
3.7. Definíció. ([7], 59–61. oldal) Legyen $\mathbb{A} = (A; R)$ és $\mathbb{B} = (B; R)$ azonos típusú relációs struktúrák. A $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ leképezés *relációhomomorfizmus*, ha minden $\varrho \in R$ n -változós relációszimbólumra és $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \varrho^{\mathbb{A}}$ elem n -esre $(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_n)) \in \varrho^{\mathbb{B}}$ teljesül.

3.8. Definíció. ([7], 59–61. oldal) A $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ relációhomomorfizmusokat *relációendomorfizmusnak*, a bijektív relációendomorfizmusokat pedig *relációautomorfizmusoknak* nevezzük.

3.9. Definíció. Legyen $\mathbb{A} = (A; R)$ és $\mathbb{B} = (B; R)$ azonos típusú relációs struktúrák. A $\mathbb{B}$ az $\mathbb{A}$ struktúra *retraktja*, ha $\mathbb{B} = \mathbb{A}|_B$, valamint létezik olyan $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ szürjektív relációhomomorfizmus, melyre $\varphi^2 = \varphi$. Ekkor a φ leképezést *retrakciónak* nevezzük.

3.10. Definíció. Az $\mathbb{A}$ relációs struktúra *mag*, ha minden endomorfizmusa automorfizmus. Egy $\mathbb{A}$ relációstruktúra *magja* olyan $\mathbb{B}$ retrakt, ami mag.

3.11. Példa. Tekintsünk példát magra, illetve relációstruktúra magjára.



Nagyon fontos, hogy $\mathbb{M}_1$ irányított gráf irreflexív, ugyanis, ha a hurokéleket behúznánk, akkor már nem lenne mag, mert létezne olyan endomorfizmusa, amely a három csúcsot egy csúcsba képzi. Így, irreflexíven, három endomorfizmusa van, és ezek mindegyike automorfizmus: id , $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 0$, és $0 \mapsto 2, 1 \mapsto 0, 2 \mapsto 1$.

Az $\mathbb{M}_2$ irányított gráfban bekarikázott részgráf mag, egyetlen endomorfizmusa az id , és a $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 0$ relációhomomorfizmus által retrakt is. Ezért ez az $\mathbb{M}_2$ gráf

magja. Ha a 0 csúcsban nem lenne hurokél, akkor az egész gráf mag lenne, mert az 1 pontot nem képezhetnénk a másik csúcsba.

Az M_3 irányított gráfnak is a benne körülkerített részgráf a magja. Létezik ugyan-
is a $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 0, 3 \mapsto 1$ relációhomomorfizmus, mely retrakció. Valamint
mag, endomorfizmusai a id és a $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0$ leképezések. Ha a 0 vagy az 1 csú-
csot reflexívvé tennénk egy hurokéllel, akkor minden elem ebbe a pontba képezhető
lenne, így egy egypontú, reflexív magot kapnánk.

3.12. Lemma. *Ha A véges halmaz, és $\varphi : A \rightarrow A$ tetszőleges leképezés, akkor létezik
 $n \in \mathbb{N}$, hogy $(\varphi^n)^2 = \varphi^n$.*

Bizonyítás. Legyen A egy véges halmaz, valamint $\varphi : A \rightarrow A$ egy tetszőleges leké-
pezése. Az, hogy a φ leképezés $\varphi^i = \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi$ hatványai $1, 2, \dots, i$ kitevő esetén
hova képzik az $\mathbb{A}$ struktúra egy tetszőleges $a \in A$ elemét, sorozatot alkot:

$$a_0 = a, a_1 = \varphi(a), a_2 = \varphi^2(a), \dots, a_i = \varphi^i(a).$$

Mivel véges sok elem van, valamely m_a kitevőre a képek sorozata visszatér egy ko-
rábbi tagjához, innentől pedig a sorozat ciklikussá válik valamilyen c_a ciklushosszal:

$$a_{(m+j+kc)} = a_{(m+j)}, \quad m, j, k \in \mathbb{N}_0, \quad c \in \mathbb{N}.$$

Legyen

$$n = \text{lkt} \left(\max_{a \in A} m_a, \text{lkt}_{a \in A} c_a \right).$$

Ekkor $a_{2n} = a_n$ biztosan teljesül minden $a \in A$ -ra. □

3.13. Lemma. *Az $\mathbb{A}$ relációs struktúra $\mathbb{B} = \mathbb{A}|_B$ feszített részstruktúrája akkor és
csak akkor mag, ha minimális méretű retraktja $\mathbb{A}$ -nak.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{A}$ véges relációs struktúra, ennek $\mathbb{B}$ egy minimális méretű ret-
raktja. Ekkor az $\mathbb{A}$ relációs struktúrának $\mathbb{B}$ a legkisebb méretű olyan feszített rész-
struktúrája, hogy létezik $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ szürjektív relációhomomorfizmus, amelyre
 $\varphi^2 = \varphi$. Azt kell belátnunk, hogy $\mathbb{B}$ minden endomorfizmusa automorfizmus.

Indirekt tegyük fel, hogy van olyan endomorfizmusa, amely nem automorfizmus,
azaz nem bijektív. Legyen ez ψ . Így $\psi(B) \subsetneq B$. Vegyük a

$$\varphi \circ \psi : \mathbb{A} \rightarrow \psi(B) \subsetneq B$$

relációhomomorfizmust. A 3.12. lemma miatt létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$(\varphi \circ \psi)^{2n} = (\varphi \circ \psi)^n,$$

tehát $(\varphi \circ \psi)^n(A)$ az $\mathbb{A}$ relációs struktúra retraktja. Ám mivel $\psi(B) \subsetneq B$, így

$$(\varphi \circ \psi)^n(A) \subseteq \varphi \circ \psi(A) = \psi(B) \subsetneq B,$$

azaz $(\varphi \circ \psi)^n(A)$ az $\mathbb{A}$ relációs struktúra $\mathbb{B}$ részstruktúrájánál kisebb retraktja, ami ellentmondás $\mathbb{B}$ minimalitása miatt.

Most legyen az $\mathbb{A}$ véges relációs struktúra $\mathbb{B}$ feszített részstruktúrája mag. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathbb{B}$ nem minimális méretű retrakt. Ekkor létezik egy olyan $\mathbb{B}'$ retrakt, amely minimális, és amelyről már láttuk, hogy mag. Vegyük a $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ retrakciót, pontosabban annak megszorítását:

$$\varphi|_{B'} : \mathbb{B}' \rightarrow \mathbb{B}.$$

Mivel a $|B| > |B'|$, ezért $\varphi|_{B'}(B') \subsetneq \mathbb{B}$. Vegyük most a $\psi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}'$ retrakciót, és ezt is szorítsuk meg:

$$\psi|_B : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'.$$

Végül vegyük a következő relációhomomorfizmust:

$$\psi|_B \circ \varphi|_{B'} : \mathbb{B} \rightarrow \varphi|_{B'}(B') \subsetneq B.$$

Ez a leképezés a $\mathbb{B}$ endomorfizmusa, de nem bijektív. Viszont $\mathbb{B}$ mag volt, így ellentmondásra jutottunk. $\square$

3.14. Tétel. *Ha $\mathbb{A}$ véges relációstruktúra, akkor létezik magja, valamint minden magja izomorf.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{A}$ egy tetszőleges véges relációs struktúra. Retraktja biztosan létezik, hisz az identikus leképezésre $\text{id}^2 = \text{id}$, így önmaga retraktja. Mivel véges, így ezek közül létezik minimális méretű retrakt, ami a 3.13. lemma szerint mag. Így minden véges relációs struktúrának létezik magja.

Az egyértelműséghez legyen $\mathbb{B}$ és $\mathbb{B}'$ feszített részstruktúrák az $\mathbb{A}$ relációs struktúra magjai. A 3.13. lemma miatt csak a minimális méretű retraktok magok, ezért $|B| = |B'|$. Vegyük a $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}'$ retrakciót, pontosabban annak megszorítását:

$$\varphi|_B : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'.$$

Mivel $|B| = |B'|$, valamint a φ relációhomomorfizmus szürjektív, így $\varphi|_B$ injektív és szürjektív, tehát bijektív leképezés $\mathbb{B}$ és $\mathbb{B}'$ részstruktúrák közt.

Másrészt vegyük a $\psi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ retrakciót, illetve annak megszorítását $\mathbb{B}'$ -re:

$$\psi|_{B'} : \mathbb{B}' \rightarrow \mathbb{B}.$$

Az előző bekezdésben leírtak alapján hasonlóan látható, hogy ez is egy bijektív relációhomomorfizmus. Bár $\varphi|_B$ és $\psi|_{B'}$ nem feltétlenül egymás inverzei, de létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\begin{aligned}\text{id} &= (\varphi|_B \circ \psi|_{B'})^n \\ \text{id} &= \varphi|_B \circ \psi|_{B'} \circ (\varphi|_B \circ \psi|_{B'})^{n-1} \\ (\varphi|_B)^{-1} &= \psi|_{B'} \circ (\varphi|_B \circ \psi|_{B'})^{n-1}.\end{aligned}$$

Tehát a $\varphi|_B$ relációhomomorfizmusnak létezik inverze. Ez szintén bijektív, mert előáll bijektív leképezések kompozíciójaként. Tehát a $\mathbb{B}$ és $\mathbb{B}'$ magok izomorfak. $\square$

4. Irányított gráfok relációi

Ez a fejezet az [5]. forrás része, de megjelölve szerepelnek az eredeti hivatkozások is.

4.1. Definíció. Legyenek $\mathbb{G}_1 = (G_1; \rightarrow)$ és $\mathbb{G}_2 = (G_2; \rightarrow)$ irányított gráfok. Egy $\varphi : \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$ leképezést *gráfhomomorfizmusnak* nevezünk, ha relációhomomorfizmus.

4.2. Definíció. A $\mathbb{H} = (H; \rightarrow, s, t)$ relációs struktúrát *st-gráfnak* nevezzük, ha $\rightarrow$ kétváltozós reflexív reláció H -n, valamint $s, t \in H$ két *kitüntetett elem*, azaz olyan 1-változós relációk, amelyekre $s^{\mathbb{A}} = \{s\}$, illetve $t^{\mathbb{A}} = \{t\}$.

4.3. Definíció. Legyen $\mathbb{G} = (G; \rightarrow)$ egy reflexív irányított gráf, valamint $\mathbb{H} = (H; \rightarrow, s, t)$ egy st-gráf. Ekkor a

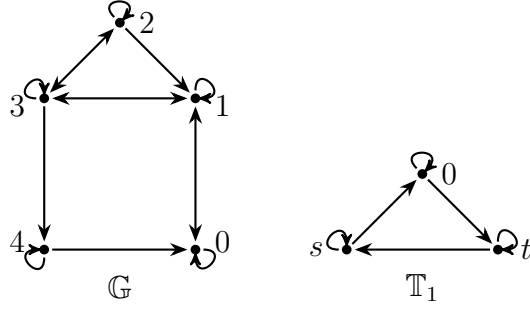
$$\varrho_{\mathbb{H}}(\mathbb{G}) = \{ (\varphi(s), \varphi(t)) \in G^2 \mid \varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{G} \text{ gráfhomomorfizmus} \}$$

relációt a $\mathbb{G}$ irányított gráf $\mathbb{H}$ st-gráf által definiált relációjának nevezzük. Ennek tranzitív lezártját jelölje $\varrho_{\mathbb{H}}^*(\mathbb{G})$.

4.4. Állítás. A $\varrho_{\mathbb{H}}^*(\mathbb{G})$ reláció előrendezés.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy a reláció reflexív és tranzitív. Előbbi abból következik, hogy a $\mathbb{G}$ irányított gráf reflexív, így a rajta definiált $\varrho_{\mathbb{H}}(\mathbb{G})$ és így $\varrho_{\mathbb{H}}^*(\mathbb{G})$ is reflexív reláció. Utóbbi egyértelmű, hisz $\varrho_{\mathbb{H}}(\mathbb{G})$ tranzitív lezártjaként definiáltuk. $\square$

4.5. Példa. Vegyük a $\mathbb{G}$ irányított gráf $\mathbb{T}_1$ st-gráf által definiált relációját és annak tranzitív lezártját!



A következő relációkat kapjuk:

$$\varrho_{T_1}(\mathbb{G}) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\},$$

valamint

$$\varrho_{T_1}^*(\mathbb{G}) = \{0\}^2 \cup \{4\}^2 \cup \{1, 2, 3\}^2.$$

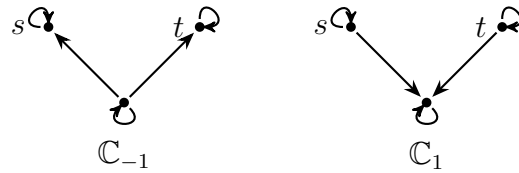
Bár csak tranzitív lezártat vettünk, most $\varrho_{T_1}^*(\mathbb{G})$ ekvivalenciareláció.

4.6. Definíció. Legyenek $\mathbb{H}_1$ és $\mathbb{H}_2$ tetszőleges st-gráfok. Azt mondjuk, hogy $\mathbb{H}_1 \preceq \mathbb{H}_2$, ha tetszőleges $\mathbb{G}$ reflexív irányított gráf esetén $\varrho_{\mathbb{H}_1}^*(\mathbb{G}) \subseteq \varrho_{\mathbb{H}_2}^*(\mathbb{G})$.

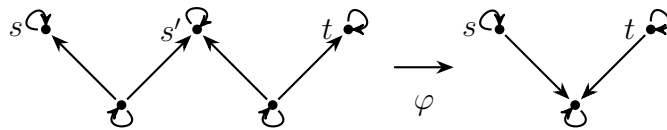
4.7. Állítás. Az előbb definiált $\preceq$ -reláció az st-gráfok halmazán reflexív, tranzitív, de nem antiszimmetrikus.

Bizonyítás. A $\preceq$ -reláció reflexivitása és tranzitivitása a halmazok közötti $\subseteq$ -reláció ugyanezen tulajdonságaiból következik.

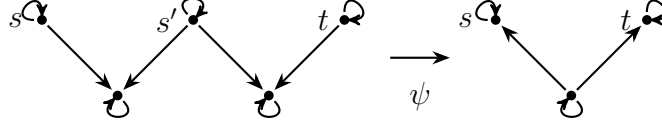
Ahhoz, hogy belássuk, hogy az antiszimmetria nem teljesül, elegendő egy ellenpéldát mutatni.



A $\mathbb{C}_1$ és $\mathbb{C}_{-1}$ st-gráfok ugyanazt a relációt generálják bármely $\mathbb{G}$ irányított gráf esetén. Ez látható, ha mindkét gráf esetén összeillesztünk belőlük kettőt ($\mathbb{H}_1$ és $\mathbb{H}_{-1}$), és ezekből nézzük, van-e a másikba menő gráfhomomorfizmus.



Létezik $\varphi : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}_{-1}$ gráfhomomorfizmus, és $\varphi(s) = s$ és $\varphi(t) = t$.



Létezik $\psi : \mathbb{H}_{-1} \rightarrow \mathbb{C}_1$ gráfhomomorfizmus, és $\psi(s) = s$ és $\psi(t) = t$.

Mivel léteznek a megfelelő gráfhomomorfizmusok, így $\varrho_{\mathbb{C}_1}^*(\mathbb{G}) \subseteq \varrho_{\mathbb{C}_{-1}}^*(\mathbb{G})$ valamint $\varrho_{\mathbb{C}_{-1}}^*(\mathbb{G}) \subseteq \varrho_{\mathbb{C}_1}^*(\mathbb{G})$ is teljesül, azaz $\mathbb{C}_1 \preceq \mathbb{C}_{-1}$ és $\mathbb{C}_{-1} \preceq \mathbb{C}_1$, de mégsem izomorfak. $\square$

Megjegyzés. Mivel az antiszimmetria nem teljesül, a $\preceq$ -reláció nem részbenrendezés, csak előrendezés. Ezt a következő ekvivalencia bevezetésével orvosoljuk.

4.8. Definíció. A $\mathbb{H}_1$ és $\mathbb{H}_2$ st-gráfok *ekvivalensek*, ha $\mathbb{H}_1 \preceq \mathbb{H}_2$ és $\mathbb{H}_2 \preceq \mathbb{H}_1$. **Jelölés:** $\mathbb{H}_1 \cong \mathbb{H}_2$.

Megjegyzés. Így az st-gráfok ekvivalencia osztályainak halmazán a $\preceq$ reláció részbenrendezés.

4.9. Tétel. Legyenek $\mathbb{H}_1$ és $\mathbb{H}_2$ tetszőleges st-gráfok. A $\mathbb{H}_1 \preceq \mathbb{H}_2$ pontosan akkor teljesül, ha $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{H}_2}^*(\mathbb{H}_1)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbb{H}_1 \preceq \mathbb{H}_2$. Eszerint $\varrho_{\mathbb{H}_1}^*(\mathbb{G}) \subseteq \varrho_{\mathbb{H}_2}^*(\mathbb{G})$ bármely $\mathbb{G}$ reflexív gráfra, vagyis a $\varrho_{\mathbb{H}_1}^*(\mathbb{H}_1) \subseteq \varrho_{\mathbb{H}_2}^*(\mathbb{H}_1)$ tartalmazás is fennáll. Mivel az $\text{id} : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_1$ identikus leképezés gráfhomomorfizmus a $\mathbb{H}_1$ gráfból önmagába, ezért $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{H}_1}^*(\mathbb{H}_1)$, és így $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{H}_2}^*(\mathbb{H}_1)$.

Most tegyük fel, hogy $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{H}_2}^*(\mathbb{H}_1)$. Ez pontosan azt jelenti, hogy (s, t) eleme a $\varrho_{\mathbb{H}_2}(\mathbb{H}_1)$ halmaz tranzitív lezártjának. Ekkor léteznek olyan

$$\varphi_i : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_1, i = 1, 2, \dots, n$$

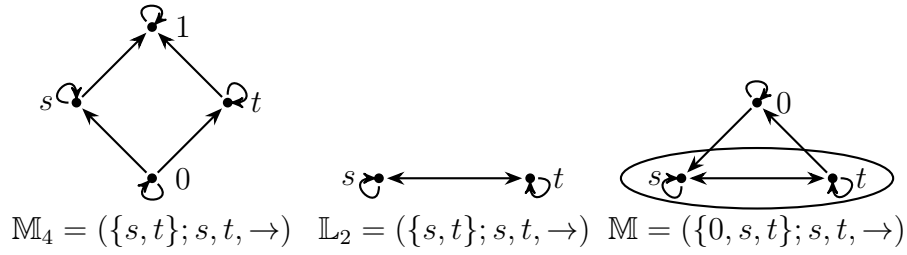
gráfhomomorfizmusok, amelyekre

$$s = \varphi_1(s), \varphi_1(t) = \varphi_2(s), \varphi_2(t) = \varphi_3(s), \dots, \varphi_n(t) = t.$$

Vegyünk egy tetszőleges $\mathbb{G}$ (reflexív) gráfot, és tegyük fel, hogy $\psi : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{G}$ gráfhomomorfizmus.

Vegyük a $\psi \circ \varphi_i : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{G}$ leképezéseket, melyek szintén gráfhomomorfizmusok. A $\psi \circ \varphi_i$ kompozíció, valamint a φ_i leképezések fentebb definiált tulajdonságai miatt, amennyiben valamely $g_1, g_2 \in G$ elemekre $(g_1, g_2) \in \varrho_{\mathbb{H}_1}(\mathbb{G})$, akkor $(g_1, g_2) \in \varrho_{\mathbb{H}_2}^*(\mathbb{G})$ is teljesül. Ekkor ugyanis a ψ gráfhomomorfizmus a φ_i gráfhomomorfizmusok képeit képezi a $\mathbb{G}$ irányított gráf egy irányított útjába. A tranzitív lezárt tulajdonságai miatt pedig $\varrho_{\mathbb{H}_1}^*(\mathbb{G}) \subseteq \varrho_{\mathbb{H}_2}^*(\mathbb{G})$, tehát $\mathbb{H}_1 \preceq \mathbb{H}_2$. $\square$

4.10. Példa. Tekintsünk példát st-gráf magjára.



Az $\mathbb{M}_4$ st-gráf mag, egyetlen endomorfizmusa az identikus leképezés. Viszont ha az s és t relációkat elhagynánk, létezne olyan endomorfizmusa, ami a most t -vel jelölt elemet az s -sel jelöltbe képezné, és fordítva. Így már nem lenne mag.

Az $\mathbb{L}_2$ st-gráf is mag, egyetlen endomorfizmusa az identikus leképezés. Ez az st-gráf sem lenne már mag a két címke elhagyása esetén.

Az $\mathbb{M}$ relációs struktúra is st-gráf. Könnyen látható, hogy ez önmagában nem mag, hiszen van olyan endomorfizmusa, mely a 0 elemet az s kitüntetett elembe képezi. Az $\mathbb{M}$ st-gráf magja $\mathbb{M}_2$, hiszen mag, illetve retrakt, a

$$\varphi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}_2, \quad s \mapsto s, 0 \mapsto s, t \mapsto t$$

gráfendomorfizmus lévén. Ha nem lenne st-gráf, akkor létezne három olyan endomorfizmusa, amely a három csúcsot egy csúcsba képzi, azaz magja az egypontú reflexív irányított gráf lenne.

4.11. Következmény. Ha a $\mathbb{H}_1$ st-gráfnak a $\mathbb{H}_2$ st-gráf a magja, akkor ekvivalensek.

Bizonyítás. Minden mag retrakt, így létezik olyan $\varphi : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$ szürjektív relációhomomorfizmus, amire $\varphi^2 = \varphi$. A φ az s és t kitüntetett elemeket megőrzi, azaz $\varphi(s) = s$ és $\varphi(t) = t$. Így biztosan $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{H}_1}^*(\mathbb{H}_2)$, tehát a 4.9. tétel értelmében $\mathbb{H}_2 \preceq \mathbb{H}_1$.

A $\mathbb{H}_1 \preceq \mathbb{H}_2$ reláció belátásához azt használjuk, hogy $\mathbb{H}_2$ a $\mathbb{H}_1$ részgráfja, részstruktúrája. Vegyük a

$$\psi : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_1, \quad g \mapsto g$$

injektív gráfhomomorfizmust (beágyazás). Emiatt $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{H}_2}^*(\mathbb{H}_1)$ biztosan teljesül, így megint a 4.9. tételt alkalmazva $\mathbb{H}_1 \preceq \mathbb{H}_2$. Tehát $\mathbb{H}_1 \cong \mathbb{H}_2$. $\square$

5. Kompatibilis műveletek és relációk

Ez a fejezet az [5]. forrás része, de megjelölve szerepelnek az eredeti hivatkozások is.

5.1. Definíció. ([3], 497. oldal) Egy nemüres A halmaz n -változós műveletének egy A -n értelmezett, A -ba képző, n -változós függvényt nevezünk, vagyis egy tetszőleges

$$f : A^n \rightarrow A$$

leképezést (ahol $n \geq 1$ egész). Az n szám az f művelet *aritása*.

5.2. Definíció. ([2], 3. oldal, [7], 301–302. oldal) Az $f : A^n \rightarrow A$ művelet megőrzi a $\varrho \subseteq A^m$ relációt, jelölésben $f \triangleright \varrho$, ha tetszőleges $(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nm}) \in \varrho$ esetén

$$(f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1m}, \dots, a_{nm})) \in \varrho.$$

5.3. Definíció. Az $f : A^n \rightarrow A$ művelet *kompatibilis* az $\mathbb{A} = (A; R)$ relációs struktúrával, ha minden relációját megőrzi.

5.4. Definíció. ([2], 3. oldal, [7], 301–302. oldal) Legyen $\mathbb{A} = (A; R)$ relációs struktúra. Az összes $\mathbb{A}$ -val kompatibilis művelet halmazát az $\mathbb{A}$ *polimorfizmusainak* nevezzük.

$$\text{Pol}(\mathbb{A}) = \{ f : A^n \rightarrow A \mid f \text{ kompatibilis } \mathbb{A}\text{-val} \}.$$

Megjegyzés. A id művelet mindig kompatibilis, mivel minden relációt megőriz.

5.5. Definíció. ([2], 3. oldal, [7] 300–306. oldal) Az $\mathbb{A} = (A; R)$ relációs struktúrával a $\tau \in A^n$ reláció *kompatibilis*, ha $\mathbb{A}$ minden polimorfizmusa megőrzi τ -t. Azaz minden $f : A^n \rightarrow A$ műveletre, ha f megőrzi az $\mathbb{A}$ minden relációját, akkor τ -t is megőrzi.

5.6. Állítás. Egy adott relációs struktúrával kompatibilis relációk metszete is kompatibilis.

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{A} = (A; R)$ relációs struktúra, valamint $\alpha, \beta \in A^m$ kompatibilis relációk. Legyen $\gamma = \alpha \cap \beta$. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nm}) \in \gamma$$

elem m -esek elemei az α és β relációknak is. Az α és β relációk kompatibilisek, így tetszőleges $f \in \text{Pol}(\mathbb{A})$ n -változós művelet esetén

$$(f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1m}, \dots, a_{nm}))$$

elem m -es is eleme az α és β relációknak, azaz a metszetüknek is. Így $f \triangleright \gamma$. □

5.7. Állítás. Minden $\mathbb{H}$ st-gráffal definiált $\varrho_{\mathbb{H}}(\mathbb{G})$ reláció kompatibilis a $\mathbb{G}$ irányított gráffal.

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{G}$ reflexív irányított gráf, $\mathbb{H}$ st-gráf. Vegyük a $\varrho_{\mathbb{H}}(\mathbb{G})$ relációt. Vegyünk egy tetszőleges $f \in \text{Pol}(\mathbb{G})$ n -változós műveletet és valamely

$$(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_n, t_n) \in \varrho_{\mathbb{H}}(\mathbb{G})$$

elempárokat. A $\varrho_{\mathbb{H}}(\mathbb{G})$ relációt $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{G}$ gráfhomomorfizmusok segítségével definiáltuk, azaz minden (s_i, t_i) elempárra létezik

$$\varphi_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{G}, \quad s \mapsto s_i, t \mapsto t_i$$

gráfhomomorfizmus.

Definiáljuk a következő leképezést:

$$\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{G}, \quad x \mapsto f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

Mivel a φ_i leképezések gráfhomomorfizmusok, valamint f a $\mathbb{G}$ egy kompatibilis művelete, ezért a φ is gráfhomomorfizmus. Így

$$(f(s_1, s_2, \dots, s_n), f(t_1, t_2, \dots, t_n)) = (\varphi(s), \varphi(t)) \in \varrho_{\mathbb{H}}(\mathbb{G}).$$

Azaz $\varrho_{\mathbb{H}}(\mathbb{G})$ kompatibilis. □

5.8. Tétel. *Ha $\mathbb{G}$ reflexív irányított gráf, valamint τ előrendezés, akkor a τ reláció $\mathbb{G}$ -vel való kompatibilitásának megállapításához elegendő az egyváltozós $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ műveletek leellenőrzése.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{G} = (G; \rightarrow)$ reflexív irányított gráf, τ előrendezés, továbbá tegyük fel, hogy $\mathbb{G}$ minden egyváltozós polimorfizmusa megőrzi τ -t. Legyen $f : \mathbb{G}^n \rightarrow \mathbb{G}$ művelet a $\mathbb{G}$ gráf tetszőleges n -változós polimorfizmusa. Meg kell mutatnunk, hogy f megőrzi τ -t. Legyenek $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ a τ tetszőleges elemei.

Definiáljuk a következő egyváltozós műveletet:

$$f_1 : x \mapsto f(x, a_2, \dots, a_n).$$

Ekkor az f_1 szintén a $\mathbb{G}$ kompatibilis művelete, mert ha vesszük az

$$x \rightarrow y, \quad a_2 \rightarrow a_2, \quad \dots, \quad a_n \rightarrow a_n,$$

éleket, akkor

$$f_1(x) = f(x, a_2, \dots, a_n) \rightarrow f(y, a_2, \dots, a_n) = f_1(y),$$

mert f kompatibilis művelete $\mathbb{G}$ -nek, és $\mathbb{G}$ reflexív.

Vegyük újra az $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n) \in \tau$ elemeket. Ekkor

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \tau f(b_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \tau f(b_1, b_2, a_3, \dots, a_n) \tau \dots \tau f(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$$

a τ tranzitivitása miatt. Ha az f_1 -hez hasonlóan definiáljuk az

$$f_i : x \mapsto f(b_1, \dots, b_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

műveleteket, akkor ezek is kompatibilisek lesznek, és $f(b_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = f_2(a_2)$ illetve $f(b_1, b_2, a_3, \dots, a_n) = f_2(b_2)$. Így

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f_1(a_1) \tau f_1(b_1) \tau f_2(b_2) \tau \dots \tau f_n(b_n) = f(b_1, \dots, b_n)$$

módon átírható. Mivel τ tranzitív, ezért $f(a_1, \dots, a_n) \tau f(b_1, \dots, b_n)$. Ezzel megmutattuk, hogy f megőrzi τ -t. $\square$

5.9. Állítás. $\mathbb{G}$ reflexív irányított gráffal kompatibilis reflexív reláció tranzitív lezártja is kompatibilis.

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{G} = (G; \rightarrow)$ relációs struktúra, $\tau \in G^2$ egy kompatibilis reflexív relációja, valamint τ^* ennek tranzitív lezártja.

Az 5.8. tétel szerint elegendő megmutatni, hogy $\mathbb{G}$ minden egyváltozós polimorfizmusa a τ^* -ot is megőrzi. Legyen f egy ilyen egyváltozós polimorfizmus.

Ekkor léteznek $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ elemek úgy, hogy

$$a = g_1 \tau g_2 \tau \dots \tau g_k = b$$

egy τ relációbeli k hosszú lánc.

Tudjuk, hogy f megőrzi τ -t, azaz

$$f(a) = f(g_1) \tau f(g_2) \tau \dots \tau f(g_k) = f(b).$$

Így $f(a) \tau^* f(b)$. Ez azt jelenti, hogy f megőrzi τ^* -ot. $\square$

5.10. Következmény. A $\varrho_{\mathbb{H}}^*(\mathbb{G})$ előrendezés bármely $\mathbb{H}$ st-gráf esetén kompatibilis a $\mathbb{G}$ irányított gráffal.

6. Klón és kapcsolata a polimorfizmusokkal

6.1. Definíció. ([3], 497. oldal) *Algebrai struktúrának* (röviden *algebrának*) egy nemüres A halmazt nevezünk, amelyen értelmezve van néhány (akár végtelen sok)

művelet. Jelölésben $\mathbb{A} = (A, F)$, ahol f a műveletek halmaza.

6.2. Definíció. Legyen $\mathbb{A} = (A; R)$ relációs struktúra. Az $\mathbf{A} = (A; \text{Pol}(\mathbb{A}))$ algebrai struktúrát az $\mathbb{A}$ relációs struktúra *algebrájának* nevezzük.

6.3. Definíció. ([2], 3. oldal, [7] 300.-306. oldal) Legyen A egy nemüres alaphalmaz, F az A halmazon értelmezett műveletek halmaza. A $\tau \in A^n$ reláció *kompatibilis* az $\mathbf{A} = (A; F)$ algebrai struktúrával, ha F minden művelete megőrzi τ relációt.

6.4. Definíció. ([3] 509. oldal) Az A halmazon értelmezett n -változós

$$\pi_i^n : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

műveletet (az n -változós, i -edik) projekciónak nevezzük.

Megjegyzés. Az identikus leképezés felfogható úgy, mint a π_1^1 projekció.

6.5. Definíció. ([3] 510. oldal, [7] 300.-306. oldal) Legyen A egy alaphalmaz. Az A (véges változós) műveleteinek valamely F nemüres halmaza (*művelet*) *klón* vagy (*függvény*) *klón*, ha tartalmazza az összes π_i^n projekciót, valamint zárt a kompozícióra nézve.

6.6. Definíció. ([7] 300.-303. oldal) A kompozíción kívül van néhány további egyszerű eljárás adott műveletekből továbbiak létrehozására.

- (1) *A változók átrendezése.* Ha f n -változós művelet ($n \in \mathbb{N}$) és π az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz permutációja. Ekkor legyen

$$f_\pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

- (2) *A változók azonosítása.* Ha f n -változós művelet ($n \in \mathbb{N}$), akkor legyen

$$(\Delta f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

- (3) *Kiegészítés fiktív változóval.* Ha f n -változós művelet, akkor legyen

$$(\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ekkor x_{n+1} a (∇f) fiktív változója.

- (4) *Behelyettesítés.* Ha g egy m -változós, f pedig egy n -változós művelet, akkor legyen

$$(f * g)(x_1, \dots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}).$$

6.7. Tétel. ([7] 300.-303. oldal) Legyen A egy alaphalmaz. Az A halmazon értelmezett véges változós műveletek egy halmaza akkor és csak akkor klón, ha tartalmazza az identikus leképezést, zárt a változók átrendezésére és azonosítására, a fiktív változóval való kiegészítésre, valamint a behelyettesítésre nézve.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy F egy A alaphalmaz feletti klón. Az identikus leképezés eleme, mert $\text{id} = \pi_1^1$ projekció. Az (1)-(4) tulajdonságok mind visszavezethetők adott műveletek és projekciók kompozíciójára, így nem vezetnek ki F -ből. Például

$$(\nabla f) = f \circ \pi_1^{n+1} \circ \dots \circ \pi_n^{n+1}.$$

A többi tulajdonság hasonlóan látható.

Legyen F egy A alaphalmaz feletti művelethalmaz, amire $\text{id} \in F$ és zárt a fenti (1)-(4) tulajdonságokra. Ekkor az összes projekció megkapható az identikus leképezésből fiktív változókkal való kiegészítés és változók átrendezése segítségével. Emellett a függvények kompozíciója mindig elérhető változók átrendezése és azonosítása, valamint behelyettesítés néhányszori alkalmazásával. Így F egy klón. $\square$

6.8. Tétel. Bármely $\mathbb{A} = (A; R)$ relációs struktúra esetén $\text{Pol}(\mathbb{A})$ művelethalmaz klón.

Bizonyítás. A klón definíciója alapján igazoljuk az állítást. Először a projekciókat nézzük meg. A $\text{id} = \pi_1^1 \in \text{Pol}(\mathbb{A})$, mert minden relációt megőriz. Legyen π_i^n tetszőleges $A^n \rightarrow A$ projekció, és vegyünk valamilyen

$$(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nm}) \in \varrho^{\mathbb{A}}, \quad \varrho \in R$$

elem m -eseket. Ekkor

$$(\pi_i^n(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, \pi_i^n(a_{1m}, \dots, a_{nm})) = (a_{i1}, \dots, a_{im}) \in \varrho^{\mathbb{A}},$$

vagyis $\pi_i^n \triangleright \varrho^{\mathbb{A}}$, így $\pi_i^n \in \text{Pol}(\mathbb{A})$.

Legyenek $f, g \in \text{Pol}(\mathbb{A})$ 1-, valamint m -változós műveletek. Vegyünk ismét valamilyen

$$(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nm}) \in \varrho^{\mathbb{A}}, \quad \varrho \in R$$

elem m -eseket. Ezekre vizsgáljuk az $f \circ g$ művelet kompatibilitását:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, (f \circ g)(a_{1m}, \dots, a_{nm}) &= \\ = f(g(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, g(a_{1m}, \dots, a_{nm})). \end{aligned}$$

Ekkor, mivel g polimorfizmus, így

$$(g(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, g(a_{1m}, \dots, a_{nm})) \in \varrho^{\mathbb{A}}$$

teljesül. Erre az f polimorfizmust végrehajtva

$$(f(g(a_{11}, \dots, a_{n1})), \dots, f(g(a_{1m}, \dots, a_{nm}))) \in \varrho^{\mathbb{A}}$$

is teljesül. Tehát $f \circ g \triangleright \varrho^{\mathbb{A}}$, és így $f \circ g \in \text{Pol}(\mathbb{A})$. A $\text{Pol}(\mathbb{A})$ művelethalmaz tartalmazza az összes projekciót, és zárt a kompozícióra, azaz klón. $\square$

7. St-gráfok által definiált relációk

Ez a fejezet az [5]. forrás része, de megjelölve szerepelnek az eredeti hivatkozások is.

7.1. Állítás. *Izomorfia erejéig egyetlen egypontú st-gráf van, mely mag, és $\varrho_{\mathbb{E}}^*(\mathbb{G})$ az egyenlőségreláció bármely $\mathbb{G}$ reflexív irányított gráf esetén.*

$$\begin{array}{c} \textcircled{s,t} \\ \mathbb{E} \end{array}$$

Bizonyítás. Egyetlen egyelemű st-gráf van, amely mag, és egyetlen endomorfizmusa az identitás.

Az, hogy $\varrho_{\mathbb{E}}^*(\mathbb{G})$ az egyenlőségreláció tetszőleges $\mathbb{G}$ reflexív irányított gráf esetén, onnan látható, hogy bármely $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{G}$ gráfhomomorfizmusra $\varphi(s) = \varphi(t)$, mivel $s = t$. Ekkor minden $g \in G$ elemre csakis $(g, g) \in \varrho_{\mathbb{E}}^*(\mathbb{G})$. $\square$

7.2. Állítás. *Izomorfia erejéig 4 darab kétpontú st-gráf van, ezek mindegyike mag.*

$$\begin{array}{ccccc} s \textcircled{} & & \textcircled{} t & s \textcircled{} \longrightarrow \textcircled{} t & s \textcircled{} \longleftarrow \textcircled{} t \\ & \mathbb{K} & & \mathbb{L}_1 & \mathbb{L}_{-1} \\ & & & s \textcircled{} \longleftrightarrow \textcircled{} t & \\ & & & \mathbb{L}_2 & \end{array}$$

Bizonyítás. Az, hogy izomorfia erejéig nincsen több kétpontú mag, könnyen látható, és az is, hogy mindegyiknek egyetlen endomorfizmusa van, az identikus leképezés, tehát magok. $\square$

7.3. Állítás. *A $\varrho_{\mathbb{K}}^*(\mathbb{G})$ mindig a teljes reláció.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{G}$ egy tetszőleges reflexív irányított gráf. A $\mathbb{K}$ st-gráf kétpontú, valamint s és t között nincs él. Így tetszőleges $g \in G$ elemre egy $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{G}$, $s \mapsto g$ gráfhomomorfizmust véve a t kitüntetett elem képe bármely $g' \in G$ lehet. Így $\varrho_{\mathbb{K}}(\mathbb{G}) = \varrho_{\mathbb{K}}^*(\mathbb{G}) = G^2$, azaz a teljes reláció. $\square$

7.4. Definíció. ([6], 33–35. oldal, 65–69. oldal) A $\mathbb{G}$ irányított gráf *gyengén összefüggő*, ha bármely két pontja összeköthető úgy úttal, hogy az élek irányítását elhagyjuk. A $\mathbb{G}$ irányított gráf *erősen összefüggő*, ha bármely két pontja összeköthető irányított úttal. A $\mathbb{G}$ irányított gráf *extrém összefüggő*, ha bármely két pontja összeköthető irányított úttal úgy, hogy csak oda-vissza éleket használhatunk.

7.5. Tétel. A $\mathbb{G}$ reflexív irányított gráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha $\varrho_{\mathbb{L}_1}^*(\mathbb{G}) = G^2$ továbbá akkor és csak akkor extrém összefüggő, ha $\varrho_{\mathbb{L}_2}^*(\mathbb{G}) = G^2$.

Bizonyítás. Először az erős összefüggőségre vonatkozó állítást igazoljuk. Legyen $\mathbb{G}$ egy reflexív irányított gráf. Tegyük fel, hogy $\mathbb{G}$ erősen összefüggő, és legyen $g, g' \in G$ tetszőleges. Ekkor léteznie kell g -ből g' elembe menő irányított útnak. Így léteznek megfelelő $g = g_0, g_1, \dots, g_n = g' \in G$ elemek, melyre $g = g_0 \rightarrow g_1 \rightarrow \dots \rightarrow g_n = g'$ irányított út. Ekkor $(g_0, g_1), (g_1, g_2), \dots, (g_{n-1}, g_n) \in \varrho_{\mathbb{L}_1}(\mathbb{G})$, mivel léteznek

$$\varphi_i : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{G}, \quad s \mapsto g_{i-1}, t \mapsto g_i, i = 1, \dots, n$$

leképezések, melyek gráfhomomorfizmusok, hiszen a $\mathbb{G}$ gráf reflexivitása miatt élt élbe képez. A tranzitivitás miatt $(g, g') \in \varrho_{\mathbb{L}_1}^*(\mathbb{G})$. Mivel $g, g' \in G$ tetszőleges volt, ezért $\varrho_{\mathbb{L}_1}^*(\mathbb{G}) = G^2$.

Most tegyük fel, hogy $\varrho_{\mathbb{L}_1}^*(\mathbb{G}) = G^2$. Vegyünk egy tetszőleges $(g, g') \in G^2$ párt. Ekkor $(g, g') \in \varrho_{\mathbb{L}_1}^*(\mathbb{G})$, azaz léteznek valamilyen $g = g_0, g_1, \dots, g_n = g' \in G$ elemek, hogy

$$(g_0, g_1), (g_1, g_2), \dots, (g_{n-1}, g_n) \in \varrho_{\mathbb{L}_1}(\mathbb{G}).$$

Ez azt jelenti, hogy léteznek a következő $\varphi_1, \dots, \varphi_n : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{G}$ gráfhomomorfizmusok is:

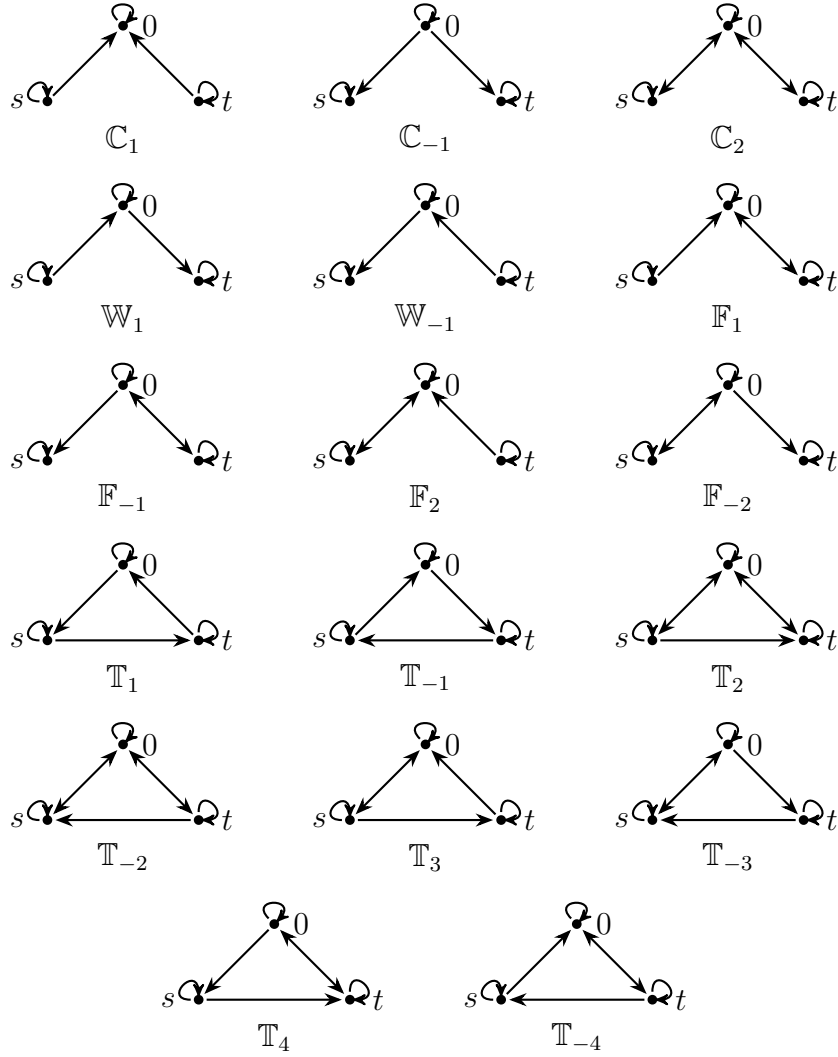
$$\varphi_i : s \mapsto g_{i-1}, t \mapsto g_i, i = 1, \dots, n.$$

Tehát létezik $g = g_0 \rightarrow g_1 \rightarrow \dots \rightarrow g_n = g'$ a g' -ből g pontba menő irányított út.

Az extrém összefüggőségre vonatkozó állítás hasonlóan bizonyítható. $\square$

Megjegyzés. Teljesen hasonlóan belátható, hogy egy $\mathbb{G}$ reflexív irányított gráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha $\varrho_{\mathbb{L}_{-1}}^*(\mathbb{G}) = G^2$.

7.6. Tétel. Izomorfia erejéig 17 darab hárompontú st-gráf létezik, amely mag.



Továbbá

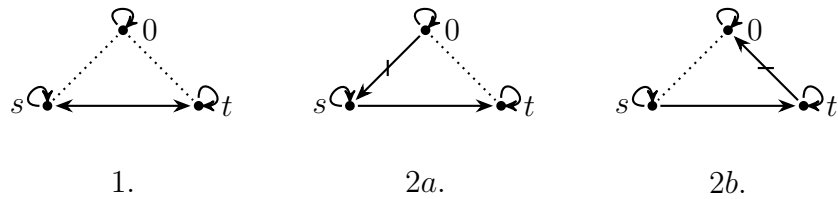
$$\mathbb{C}_1 \cong \mathbb{C}_{-1}, \quad \mathbb{L}_1 \cong \mathbb{W}_1 \cong \mathbb{F}_1 \cong \mathbb{F}_{-2}, \quad \mathbb{L}_{-1} \cong \mathbb{W}_{-1} \cong \mathbb{F}_{-1} \cong \mathbb{F}_2,$$

$$\mathbb{T}_1 \cong \mathbb{T}_{-1}, \quad \mathbb{L}_2 \cong \mathbb{C}_2 \cong \mathbb{T}_2 \cong \mathbb{T}_{-2}, \quad \mathbb{T}_3 \cong \mathbb{T}_{-3}, \quad \mathbb{T}_4 \cong \mathbb{T}_{-4}.$$

Bizonyítás. Legyen $H = \{s, t, 0\}$ és definiáljuk a következő $\varphi_1, \varphi_2 : H \rightarrow H$ leképezéseket:

$$\varphi_1 : s \mapsto s, 0 \mapsto s, t \mapsto t \text{ és } \varphi_2 : s \mapsto s, 0 \mapsto t, t \mapsto t.$$

Négy esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az s és t csúcsok között milyen élek vannak.



Az 1. esetben, ha az $s \leftrightarrow t$, akkor a gráf nem mag, mert a φ_1 leképezés biztosan endomorfizmus lesz.

A 2a. esetben $s \rightarrow t$. Ekkor, ha $0 \rightarrow s$, akkor a φ_2 leképezés biztosan endomorfizmus lesz, így a gráf nem lesz mag. A 2b. eset ehhez hasonló, ha $t \rightarrow 0$, akkor a φ_1 leképezés biztosan endomorfizmus lesz. Így ha a gráf mag, valamint $s \rightarrow t$, de $t \rightarrow s$, akkor csak a $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \mathbb{T}_3$ és $\mathbb{T}_4$ gráfokat kaphatjuk. Ezek mindegyike mag, mert se φ_1 , se φ_2 nem lesz gráfhomomorfizmus. A harmadik esetben, amikor $t \rightarrow s$, de $s \rightarrow t$, hasonló módszerrel kapjuk a $\mathbb{T}_{-1}, \mathbb{T}_{-2}, \mathbb{T}_{-3}$ és $\mathbb{T}_{-4}$ gráfokat.

A negyedik eset az, amikor nincs él s és t között. Ekkor a másik két lehetséges él iránya és elhelyezkedése alapján 9 olyan hárompontú st-gráf van, amely mag: $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_{-1}, \mathbb{C}_2, \mathbb{W}_1, \mathbb{W}_{-1}, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_{-1}, \mathbb{F}_2$ valamint $\mathbb{F}_{-2}$. Most, hogy ezeket az eseteket felírtuk, már könnyen látható, hogy a fenti gráfok mindegyike mag, és izomorfia erejéig egyértelműek.

Azt, hogy a $\mathbb{C}_1$ és $\mathbb{C}_{-1}$ st-gráfok ekvivalensek, a 4.7. tétel antiszimmetria eseténél beláttuk.

Most lássuk be, hogy $\mathbb{L}_1 \cong \mathbb{W}_1$. A 4.9. tétel alapján $\mathbb{L}_1 \preceq \mathbb{W}_1$, ugyanis a

$$\varphi : \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{L}_1, \quad s \mapsto s, 0 \mapsto s, t \mapsto t$$

gráfhomomorfizmus miatt $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{W}_1}^*(\mathbb{L}_1)$. Az is igaz, hogy $\mathbb{W}_1 \preceq \mathbb{L}_1$, mert

$$\varrho_{\mathbb{L}_1}(\mathbb{W}_1) = \{(s, s), (t, t), (0, 0), (s, 0), (0, t)\},$$

és így $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{L}_1}^*(\mathbb{W}_1)$. A $\mathbb{L}_{-1} \cong \mathbb{W}_{-1}$ és a $\mathbb{L}_2 \cong \mathbb{C}_2$ ekvivalenciát hasonlóan igazolhatjuk.

Ezután $\mathbb{L}_1 \preceq \mathbb{F}_1$, mert létezik

$$\psi : \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{L}_1, \quad s \mapsto s, 0 \mapsto t, t \mapsto t$$

gráfhomomorfizmus. Az $\mathbb{F}_1 \preceq \mathbb{L}_1$ reláció is igaz, mert

$$\varrho_{\mathbb{L}_1}(\mathbb{F}_1) = \{(s, s), (t, t), (0, 0), (s, 0), (0, t), (t, 0)\},$$

és így $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{L}_1}^*(\mathbb{F}_1)$. Az $\mathbb{L}_{-1} \cong \mathbb{F}_{-1}$ reláció is hasonló módon teljesül.

Ezután $\mathbb{L}_1 \preceq \mathbb{F}_{-2}$ relációt igazoljuk. Ez teljesül, mert létezik

$$\phi : \mathbb{F}_{-2} \rightarrow \mathbb{L}_1, \quad s \mapsto s, 0 \mapsto s, t \mapsto t$$

gráfhomomorfizmus. Valamint $\mathbb{F}_{-2} \preceq \mathbb{L}_1$ is teljesül, mert

$$\varrho_{\mathbb{L}_1}(\mathbb{F}_{-2}) = \{(s, s), (t, t), (0, 0), (s, 0), (0, s), (0, t)\},$$

és így $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{L}_1}^*(\mathbb{F}_{-2})$. Az $\mathbb{L}_{-1} \cong \mathbb{F}_2$ reláció szintén hasonló módon igazolható.

Nézzük most $\mathbb{T}_1$ és $\mathbb{T}_{-1}$ st-gráfok kapcsolatát. A $\mathbb{T}_1 \preceq \mathbb{T}_{-1}$ teljesül, mert

$$\varrho_{\mathbb{T}_{-1}}(\mathbb{T}_1) = \{(s, s), (t, t), (0, 0), (s, 0), (t, 0), (0, t)\},$$

tehát $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{T}_{-1}}^*(\mathbb{T}_1)$. A fordított eset, $\mathbb{T}_{-1} \preceq \mathbb{T}_1$ is teljesül, mert

$$\varrho_{\mathbb{T}_1}(\mathbb{T}_{-1}) = \{(s, s), (t, t), (0, 0), (s, 0), (t, 0), (0, t)\},$$

vagyis megint csak $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{T}_1}^*(\mathbb{T}_{-1})$, azaz $\mathbb{T}_1 \cong \mathbb{T}_{-1}$.

Valamint $\mathbb{L}_2 \cong \mathbb{T}_2$, mert $\mathbb{T}_2 \preceq \mathbb{L}_2$, hiszen

$$\varrho_{\mathbb{L}_2}(\mathbb{T}_2) = \{(s, s), (t, t), (0, 0), (s, 0), (0, s), (t, 0), (0, t)\},$$

vagyis megint csak $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{L}_2}^*(\mathbb{T}_2)$. A $\mathbb{L}_2 \preceq \mathbb{T}_2$ irányhoz vegyük a

$$\iota : \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{L}_2, \quad s \mapsto s, 0 \mapsto t, t \mapsto t$$

gráfhomomorfizmust. Így $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{T}_2}^*(\mathbb{L}_2)$, vagyis a két st-gráf ekvivalens. Az $\mathbb{L}_2 \cong \mathbb{T}_{-2}$ ekvivalencia igazolása is hasonló módon történik.

Végül, a $\mathbb{T}_3 \cong \mathbb{T}_{-3}$ ekvivalenciát igazoljuk. A $\mathbb{T}_3 \preceq \mathbb{T}_{-3}$ irányhoz

$$\varrho_{\mathbb{T}_{-3}}(\mathbb{T}_3) = \{(s, s), (t, t), (0, 0), (s, 0), (0, s), (0, t)\},$$

tehát $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{T}_{-3}}^*(\mathbb{T}_3)$. A fordított eset, $\mathbb{T}_{-3} \preceq \mathbb{T}_3$ ugyancsak teljesül, mert

$$\varrho_{\mathbb{T}_3}(\mathbb{T}_{-3}) = \{(s, s), (t, t), (0, 0), (s, 0), (0, s), (0, t)\},$$

vagyis $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{T}_3}^*(\mathbb{T}_{-3})$, tehát a két gráf ekvivalens. A $\mathbb{T}_4 \cong \mathbb{T}_{-4}$ ekvivalencia igazolása is hasonló módon történik. $\square$

7.7. Tétel. *Az előző tételekben szereplő st-gráfokra:*

$$\mathbb{E} \preceq \mathbb{L}_2, \quad \mathbb{L}_2 \preceq \mathbb{T}_3 \preceq \mathbb{T}_1, \quad \mathbb{L}_2 \preceq \mathbb{T}_{-3} \preceq \mathbb{T}_1,$$

$$\mathbb{L}_2 \preceq \mathbb{T}_4 \preceq \mathbb{T}_1 \quad \mathbb{L}_2 \preceq \mathbb{T}_{-4} \preceq \mathbb{T}_1.$$

Továbbá

$$\mathbb{T}_1 \preceq \mathbb{L}_1 \preceq \mathbb{C}_1, \quad \mathbb{T}_1 \preceq \mathbb{L}_{-1} \preceq \mathbb{C}_1, \quad \mathbb{C}_1 \preceq \mathbb{K}.$$

Bizonyítás. Ismét a 4.9. tétel alapján bizonyítunk. Az $\mathbb{E} \preceq \mathbb{L}_2$ reláció könnyen látható, létezik s és t elemeket egy pontba vivő gráfhomomorfizmus.

Az $\mathbb{L}_2 \preceq \mathbb{T}_3$ összefüggés is teljesül, mert létezik

$$\varphi : \mathbb{T}_3 \rightarrow \mathbb{L}_2, \quad s \mapsto s, 0 \mapsto t, t \mapsto t$$

gráfhomomorfizmus, és így $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{T}_3}^*(\mathbb{L}_2)$. Valamint $\mathbb{T}_3 \preceq \mathbb{T}_1$, mert a

$$\psi : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_3, \quad s \mapsto s, 0 \mapsto 0, t \mapsto t$$

gráfhomomorfizmus lévén $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{T}_1}^*(\mathbb{T}_3)$. Az $\mathbb{L}_2 \preceq \mathbb{T}_{-3} \preceq \mathbb{T}_1$, $\mathbb{L}_2 \preceq \mathbb{T}_4 \preceq \mathbb{T}_1$ és $\mathbb{L}_2 \preceq \mathbb{T}_{-4} \preceq \mathbb{T}_1$ relációk teljesülését nagyon hasonlóan láthatjuk be.

Továbbá $\mathbb{T}_1 \preceq \mathbb{L}_1$, mert létezik olyan $\mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{T}_1$ gráfhomomorfizmus, amire $s \mapsto s$ és $t \mapsto t$, így teljesül $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{L}_1}^*(\mathbb{T}_1)$ is. Ugyanezen módon az is belátható, hogy $\mathbb{T}_{-1} \preceq \mathbb{L}_{-1}$. Mivel korábban már beláttuk, hogy $\mathbb{T}_1 \cong \mathbb{T}_{-1}$, ebből már $\mathbb{T}_1 \preceq \mathbb{L}_{-1}$ is következik.

Az $\mathbb{L}_1 \preceq \mathbb{C}_1$ reláció is fennáll. Vegyük a

$$\iota : \mathbb{C}_1 \rightarrow \mathbb{L}_1 : \quad s \mapsto t, 0 \mapsto s, t \mapsto t$$

gráfhomomorfizmust, amelyből $(s, t) \in \varrho_{\mathbb{C}_1}^*(\mathbb{L}_1)$ következik. Hasonlóan, az $\mathbb{L}_{-1} \preceq \mathbb{C}_1$ relációhoz a

$$\iota' : \mathbb{C}_1 \rightarrow \mathbb{L}_{-1} : \quad s \mapsto s, 0 \mapsto s, t \mapsto t$$

gráfhomomorfizmust kell vennünk.

Legvégül $\mathbb{C}_1 \preceq \mathbb{K}$ is könnyen látható, ha egy $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}_1$, $s \mapsto s$ és $t \mapsto t$ gráfhomomorfizmust veszünk. $\square$

7.8. Tétel. *A $\mathbb{G}$ reflexív irányított gráf akkor és csak akkor gyengén összefüggő, ha $\varrho_{\mathbb{C}_1}^*(\mathbb{G}) = G^2$.*

Bizonyítás. A [5]. forrásban szereplő bizonyításhoz képest javítás történt, φ_i és φ'_i leképezést megcseréltük.

Legyen $\mathbb{G}$ egy reflexív irányított gráf. Tegyük fel, hogy $\mathbb{G}$ gyengén összefüggő és legyen $g, g' \in G$ tetszőleges. Ekkor léteznie kell g -ből g' elembe menő irányítatlan útnak. Legyenek $g = g_0, g_1, \dots, g_n = g' \in G$ elemei ennek az irányítatlan útnak.

Az élek irányítása szempontjából két esetet különböztetünk meg:

$$g = g_0, \dots, g_i \rightarrow g_{i+1}, \dots, g_n = g'$$

$$g = g_0, \dots, g_i \leftarrow g_{i+1}, \dots, g_n = g'$$

Ha $g_i \rightarrow g_{i+1}$, akkor tekintsük a

$$\varphi_i : \mathbb{C}_1 \rightarrow \mathbb{G}, \quad s \mapsto g_i, 0 \mapsto g_{i+1}, t \mapsto g_{i+1}$$

gráfhomomorfizmust, ha $g_i \leftarrow g_{i+1}$, akkor meg tekintsük a

$$\varphi'_i : \mathbb{C}_1 \rightarrow \mathbb{G}, \quad s \mapsto g_i, 0 \mapsto g_i, t \mapsto g_{i+1}$$

gráfhomomorfizmust. Mind a két esetben ezen gráfhomomorfizmusok mutatják, hogy $(g_i, g_{i+1}) \in \varrho_{\mathbb{C}_1}(\mathbb{G})$. A tranzitivitás miatt $(g, g') \in \varrho_{\mathbb{C}_1}^*(\mathbb{G})$. Mivel $g, g' \in G$ tetszőleges volt, ezért $\varrho_{\mathbb{C}_1}^*(\mathbb{G}) = G^2$.

Most tegyük fel, hogy $\varrho_{\mathbb{C}_1}^*(\mathbb{G}) = G^2$. Vegyünk egy tetszőleges $(g, g') \in \varrho_{\mathbb{C}_1}^*(\mathbb{G}) = G^2$ párt. Ekkor $(g, g') \in \varrho_{\mathbb{C}_1}^*(\mathbb{G})$, azaz léteznek olyan $g = g_0, g_1, \dots, g_n = g' \in G$ elemek, amelyekre

$$(g_0, g_1), (g_1, g_2), \dots, (g_{n-1}, g_n) \in \varrho_{\mathbb{C}_1}(\mathbb{G})$$

teljesül. Vagyis léteznek olyan $\varphi_i : \mathbb{C}_1 \rightarrow \mathbb{G}, i = 1, 2, \dots, n$ gráfhomomorfizmusok, és $\bar{g}_0, \dots, \bar{g}_{n-1} \in G$ elemek, hogy

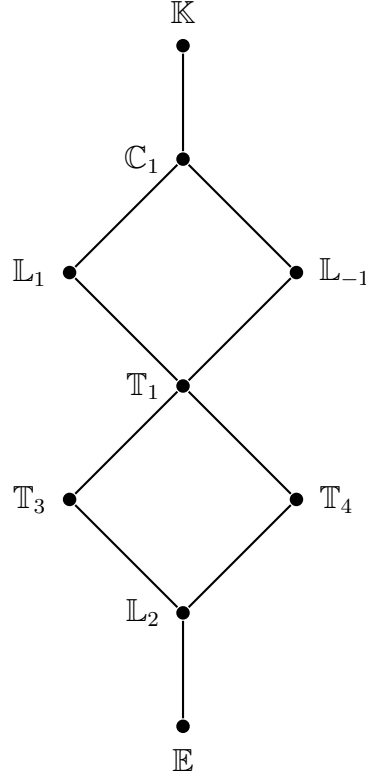
$$\varphi_i : s \mapsto g_{i-1}, 0 \mapsto \bar{g}_{i-1}, t \mapsto g_i.$$

Ebből a következő éleket kapjuk:

$$g_0 \rightarrow \bar{g}_0 \leftarrow g_1 \rightarrow \bar{g}_1 \leftarrow g_2 \rightarrow \dots \leftarrow g_{n-1} \rightarrow \bar{g}_{n-1} \leftarrow g_n.$$

Ezen élek mentén haladva, az irányítást nem figyelembe véve megfelelő utat kapunk g -ből g' -be. $\square$

7.9. Következmény. *A legfeljebb 3-pontú st-gráfok ekvivalenciaosztályain a $\preceq$ reláció a következő:*



Bizonyítás. A 7.1, 7.2. és 7.6. állításokban megmutattuk, hogy minden legfeljebb 3-pontú st-gráf az ábrán látható st-gráfok valamelyikével ekvivalens. A 7.7. tételben az ezen osztályok közötti rendezést bizonyítottuk. Azt kell megmutatni, hogy más $\preceq$ reláció nem áll fenn. Ehhez nézzük meg az $\mathbb{L}_1 \not\preceq \mathbb{L}_{-1}$, $\mathbb{T}_3 \not\preceq \mathbb{T}_4$ relációkat. Ismét a 4.9. tétel alapján bizonyítunk.

Először, $\mathbb{L}_1 \not\preceq \mathbb{L}_{-1}$, mert

$$\varrho_{\mathbb{L}_{-1}}(\mathbb{L}_1) = \{(s, s), (t, t), (t, s)\},$$

és így $(s, t) \notin \varrho_{\mathbb{L}_{-1}}^*(\mathbb{L}_1)$. Az $\mathbb{L}_{-1} \not\preceq \mathbb{L}_1$ irány hasonló módon látható be. Ez kizárja a $\mathbb{C}_1 \preceq \mathbb{L}_1$ esetet is, mert ekkor $\mathbb{C}_1 \cong \mathbb{L}_1$ lenne, és emiatt $\mathbb{L}_{-1} \preceq \mathbb{L}_1$ teljesülne. Emellett $\mathbb{L}_1 \preceq \mathbb{T}_1$ sem teljesülhet, mert akkor $\mathbb{L}_1 \cong \mathbb{T}_1$ ekvivalencia miatt $\mathbb{L}_1 \preceq \mathbb{L}_{-1}$ relációnak teljesülnie kellene. Hasonlóan látható, hogy $\mathbb{C}_1 \not\preceq \mathbb{L}_{-1}$ és $\mathbb{L}_{-1} \not\preceq \mathbb{T}_1$.

Most nézzük a $\mathbb{T}_3 \not\preceq \mathbb{T}_4$ esetet. Ekkor

$$\varrho_{\mathbb{T}_4}(\mathbb{T}_3) = \{(s, s), (t, t), (0, 0), (s, 0), (t, 0), (0, s)\},$$

és így $(s, t) \notin \varrho_{\mathbb{T}_4}^*(\mathbb{T}_3)$. A $\mathbb{T}_4 \not\preceq \mathbb{T}_3$ irány hasonló módon látható be. Ebből következik, hogy $\mathbb{T}_1 \not\preceq \mathbb{T}_3$, $\mathbb{T}_1 \not\preceq \mathbb{T}_4$, valamint $\mathbb{T}_3 \not\preceq \mathbb{L}_2$, és $\mathbb{T}_4 \not\preceq \mathbb{L}_2$ is fennáll. A $\mathbb{K} \not\preceq \mathbb{C}_1$ és az $\mathbb{L}_2 \not\preceq \mathbb{E}$ esetek triviálisan teljesülnek. $\square$

Megjegyzés. Az előző következményből tudjuk, hogy bármely legfeljebb 3-elemű $\mathbb{H}_1$ st-gráfra létezik $\mathbb{H}_2$ st-gráf a fenti ábrában, hogy $\varrho_{\mathbb{H}_1}(\mathbb{G}) = \varrho_{\mathbb{H}_2}(\mathbb{G})$ minden $\mathbb{G}$ reflexív

irányított gráfra. Ez azonban nem jelenti azt, hogy minden kompatibilis reláció így definiálható. Például a $\varrho_{\mathbb{L}_1}^*(\mathbb{G}) \cap \varrho_{\mathbb{L}_{-1}}^*(\mathbb{G})$ reláció (erősen összefüggő komponensek relációja) mindig kompatibilis, de ez nem minden esetben egyezik meg a $\varrho_{\mathbb{T}_1}^*(\mathbb{G})$ relációval, például egy 4-hosszúságú kör esetében sem.

Hivatkozások

- [1] András Ádám. On some cyclic connectivity properties of directed graphs: examples and problems. *Acta Cybernetica*, 14(1):1–12, 1999.
- [2] Sándor Radeleczki Danica Jakubíková-Studenovská, Reinhard Pöschel. Generalized quasiorders and the Galois connection End–gQuord. 2023.
- [3] Kiss Emil. *Bevezetés az absztrakt algebrába*. Typotex Kiadó, 2012.
- [4] Gergő Gyenizse and Miklós Maróti. Quasiorder lattices of varieties. *Algebra universalis*, 79(2):38, 2018.
- [5] Galántai-Fekete Csenge Lilla. Irányított gráfok kompatibilis előrendezései. Alapszakos szakdolgozat, Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar, Bolyai Intézet, 2024.
- [6] Hajnal Péter. *Gráfelmélet*. POLYGON JEGYZETTÁR, Szeged, 2003.
- [7] H. P. Sankappanavar S. Burris. *Bevezetés az univerzális algebrába*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.